

BINOMNA FORMULA

Upoznajmo se najpre sa nekim oznakama:

$n!$ - čita se “**en faktorijel**” a označava sledeći proizvod:

$$n! = n \circ (n-1) \circ (n-2) \circ \dots \circ 3 \circ 2 \circ 1$$

Primer:

$$5! = 5 \circ 4 \circ 3 \circ 2 \circ 1 = 120 \quad \text{ili} \quad 7! = 7 \circ 6 \circ 5 \circ 4 \circ 3 \circ 2 \circ 1 = 5040$$

Po definiciji je $0! = 1$

U zadacima često koristimo trik da faktorijel rastavimo kao proizvod nekoliko članova i novog faktorijela.

$$\begin{aligned} \text{Tako je recimo:} \quad (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1) \circ \dots \circ 2 \circ 1 \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n! \quad \text{ili} \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1)! \quad \text{Itd.} \end{aligned}$$

Primer 1.:

$$\text{Skrati razlomak:} \quad \frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

$$\text{Rešenje:} \quad \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = (n-1)(n-2)$$

Primer 2.

$$\text{Reši jednačinu:} \quad \frac{(2x)!}{(2x-3)!} = \frac{20x!}{(x-2)!}$$

$$\text{Rešenje:} \quad \frac{(2x)!}{(2x-3)!} = \frac{20x!}{(x-2)!}$$

$$\frac{(2x)(2x-1)(2x-2)(2x-3)!}{(2x-3)!} = \frac{20x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}$$

$$\begin{aligned} (2x)(2x-1)(2x-2) &= 20x(x-1) \\ 2x(2x-1)2(x-1) &= 20x(x-1) \quad [\text{skratimo sa } 4x(x-1)] \\ 2x-1 &= 5 \quad \text{a odavde je } x=3 \end{aligned}$$

Ako su n i k prirodni brojevi, onda možemo definisati simbol: $\binom{n}{k}$

On se čita “en nad ka”, a izračunava se :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Primeri:

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \quad \text{ili} \quad \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

Da bi imali **brzinu u radu** moramo zapamtiti da je :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{na primer: } \binom{5}{0} = 1 \quad \binom{12}{0} = 1 \quad \text{itd.}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{na primer: } \binom{7}{7} = 1 \quad \binom{100}{100} = 1 \quad \text{itd.}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{na primer: } \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{50}{1} = \binom{50}{49} = 50$$

I najvažnije : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Na primer dobijemo da rešimo $\binom{20}{18}$. Koristeći ovo pravilo mi rešavamo :

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190. \quad \text{Mnogo je lakše ovako!}$$

Sada možemo videti kako izgleda **binomni obrazac**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Ova formula se lako dokazuje primenom matematičke indukcije.

Šta je važno uočiti?

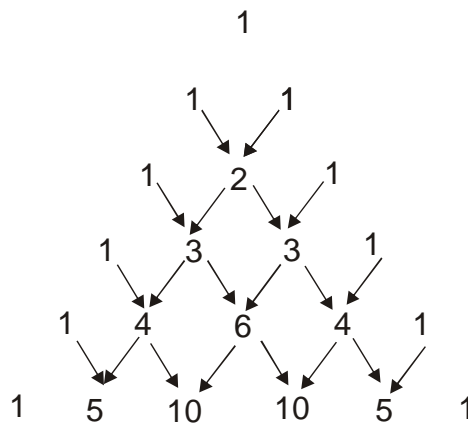
- U razvoju uvek ima $n+1$ članova
- a počinje sa n -tim stepenom, pa u svakom sledećem članu opada dok ne dođe do nule, dok b počinje sa nulom pa u svakom sledećem članu raste dok ne dođe do n -tog stepena
- Izrazi $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n-1}$ i $\binom{n}{n}$ su binomni koeficijenti, i za njih važi jedna zanimljiva stvar:

Ako pođemo od nekoliko prvih razvoja dobićemo takozvani **Paskalov trougao**.

$(a+b)^0 = 1$	koeficijent je 1	1
$(a+b)^1 = a+b$	koeficijenti su 1 i 1	1 1
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	koeficijenti su 1, 2, 1	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	koeficijenti su 1, 3, 3, 1	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	koeficijenti su 1, 4, 6, 4, 1 itd.	1 4 6 4 1

I tako dalje....

Vidimo da su simetrični koeficijenti u razvijenom obliku binoma jednaki. Oni prave Paskalov trougao, gde su na kracima sve jedinice, a unutrašnji član se dobija sabiranjem gornja dva!



Opšti (bilo koji) član u razvijenom obliku binoma se traži po formuli:

$$\mathbf{T}_{k+1} = \binom{n}{k} \mathbf{a}^{n-k} \mathbf{b}^k$$

1) $(3 + 2x)^5 = ?$

$$(3 + 2x)^5 = [\text{Ovde je } a = 3, b = 2x \text{ i } n = 5]$$

$$\binom{5}{0} 3^5 (2x)^0 + \binom{5}{1} 3^4 (2x)^1 + \binom{5}{2} 3^3 (2x)^2 + \binom{5}{3} 3^2 (2x)^3 + \binom{5}{4} 3^1 (2x)^4 + \binom{5}{5} 3^0 (2x)^5$$

Ako vam je lakše izdvojite binomne koeficijente "na stranu", pa ih rešite:

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 = \binom{5}{3}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 3^5 \cdot 1 + 5 \cdot 3^4 \cdot 2 \cdot x + 10 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 10 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot x^3 + 5 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot x^4 + 1 \cdot 1 \cdot 2^5 \cdot x^5 = \\ &= 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5 \end{aligned}$$

2) $(1 + i)^6 = ?$

$$(1 + i)^6 = [\text{Ovde je } a = 1, b = i \text{ i } n = 6]$$

$$= \binom{6}{0} 1^6 \cdot i^0 + \binom{6}{1} 1^5 \cdot i^1 + \binom{6}{2} 1^4 \cdot i^2 + \binom{6}{3} 1^3 \cdot i^3 + \binom{6}{4} 1^2 \cdot i^4 + \binom{6}{5} 1^1 \cdot i^5 + \binom{6}{6} 1^0 \cdot i^6$$

$$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$$

$$\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 = \binom{6}{4}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Da vas podsetimo:

$$\left. \begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array} \right\} \text{pa je } \begin{array}{l} i^5 = i^4 \cdot i = i \\ i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \end{array}$$

Vratimo se u zadatak:

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot i + 15 \cdot 1 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 \cdot (-i) + 15 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot i + 1 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 \\ &= -8i \end{aligned}$$

3) Odrediti peti član u razvijenom obliku binoma $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$

Odavde je $a = x^{\frac{1}{2}}$, $b = x^{\frac{2}{3}}$, $n = 12$

Iskoristićemo formulu:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Pošto traže peti član, to je

$$\begin{aligned} T_5 &= T_{4+1} \text{ (pazi } k=4) \\ &= \binom{12}{4} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-4} \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4 \\ &= \binom{12}{4} x^4 \cdot x^{\frac{8}{3}} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{4+\frac{8}{3}} \\ &= 495 \cdot x^{\frac{20}{3}} \end{aligned}$$

4) Odrediti član koji ne sadrži x u razvijenom obliku binoma $(x + x^{-2})^{12}$

Odavde je $a = x$, $b = x^{-2}$, $n = 12$

Upotrebicemo formulu T_{K+1} i naći k

$$\begin{aligned}T_{K+1} &= \binom{n}{k} a^{n-K} \cdot b^K \\&= \binom{12}{k} x^{12-k} (x^{-2})^k \\&= \binom{12}{k} x^{12-k} \cdot x^{-2k} \\&= \binom{12}{k} x^{12-3k}\end{aligned}$$

Pošto nam treba član koji **ne sadrži x**, izvršicemo uporedjivanje:

$$\begin{aligned}x^{12-3k} &= x^0 \\12 - 3k &= 0 \\3k &= 12 \\k &= 4\end{aligned}$$

Znači, u pitanju je ($T_{4+1} = T_5$) peti član.

5) Zbir koeficijenta prvog, drugog i trećeg člana u razvoju binoma $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ jednak je 46. Naći koji član ne sadrži x .

Zbir koeficijenta prva tri člana je:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} &= 46 \\1 + n + \frac{n(n-1)}{2} &= 46 \\2 + 2n + n^2 - n &= 92 \\n^2 + n - 90 &= 0 \\n_{1,2} &= \frac{-1 \pm 19}{2} \Rightarrow n_1 = 9; n_2 = -10 \\n &= 9\end{aligned}$$

Kako je $a = x^2$ i $b = \frac{1}{x}$, $n = 9$

$$\begin{aligned}
T_{K+1} &= \binom{n}{k} a^{n-K} \cdot b^K \\
&= \binom{9}{k} (x^2)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \\
&= \binom{9}{k} x^{18-2k} \cdot x^k \\
&= \binom{9}{k} x^{18-3k}
\end{aligned}$$

Sada mora biti: $x^{18-3k} = x^o$

$$\begin{aligned}
18 - 3k &= 0 \\
3k &= 18 \\
k &= 6
\end{aligned}$$

Znači da je u pitanju sedmi član.

6) Odrediti koeficijente uz x^3 u razvoju binoma $\left(\frac{1}{4x} - 2x^2\right)^{12}$

$\left(\frac{1}{4x} - 2x^2\right)^{12}$ odavde je $a = \frac{1}{4x}, b = -2x^2, n = 12$

$$\begin{aligned}
T_{K+1} &= \binom{n}{k} a^{n-K} \cdot b^K \\
&= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4x}\right)^{12-k} \cdot (-2x^2)^k \\
&= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} x^{k-12} \cdot (-2)^k \cdot x^{2k} \\
&= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{3k-12}
\end{aligned}$$

Ovo je x^3

Dakle: $x^{3k-12} = x^3$

$$\begin{aligned}
3k - 12 &= 3 \\
3k &= 15 \\
k &= 5
\end{aligned}$$

Pa će koeficijent uz x^3 biti

$$\begin{aligned} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} (-2)^k &= \\ \binom{12}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot (-2)^5 &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{4^7} \cdot (-32) \\ &= -\frac{99}{64} = -1,546875 \end{aligned}$$

7) Koeficijent drugog člana u razvoju binoma $\left(\frac{x}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^n$ odnosi se prema koeficijentu trećeg člana kao 2:11. Odrediti peti član.

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} : \binom{n}{2} &= 2 : 11 \\ n : \frac{n(n-1)}{2} &= 2 : 11 \\ 11n &= n(n-1) \\ 11n &= n^2 - n \\ n^2 - 12n &= 0 \\ n(n-12) = 0 &\Rightarrow n = 0 \quad \vee \quad n = 12, \text{ pazi: } n=0 \text{ nije rešenje!} \end{aligned}$$

Pošto je $a = \frac{x}{\sqrt{4}}, b = \frac{\sqrt{y}}{x}, n = 12$ a traži se peti član, to je:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \\ T_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \\ T_5 = T_{4+1} &= \binom{12}{4} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^8 \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^4 \\ &= \binom{12}{4} \frac{x^8}{y^4} \cdot \frac{y^2}{x^4} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{x^4}{y^2} \\ &= 495x^4y^{-2} \end{aligned}$$

8) Na železničku stanicu treba da stigne iz istog pravca n ljudi. Na koliko mogućih načina, s obzirom na vreme dolaska, mogu da stignu na stanicu?

Razmišljamo:

- mogu da stignu svi u različiti vreme
- mogu da stignu dva zajedno, ostali u različito vreme
- mogu da stignu tri zajedno, ostali u različito vreme
- itd
- mogu da stignu u grupama po 2
- mogu da stignu u grupama po 3
- itd

Broj svih mogućnosti je:

$$C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} =$$

Da bi smo ovo izračunali podjimo od binomne formule:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Ako umesto a i b stavimo jedinice, dobićemo:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1 \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1 \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1 \cdot 1$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

Dakle broj svih mogućnosti je: $2^n - 1$