# Poglavlje 2

# NIZOVI I REDOVI (korigirano)

---

U ovom poglavlju:

- Nizovi realnih brojeva
- Rekurzivno zadani nizovi
- Redovi realnih brojeva
- Usporedni i integralni kriteriji
- Cauchyjev kriterij
- D'Alembertov kriterij
- Nužni i Leibnitzov kriterij

---

## 2.1 NIZOVI

Niz realnih brojeva možemo zadati jednostavnim nabrajanjem nekoliko prvih članova. Na primjer: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},......$ ili $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},......$ ili $-1,1,-1,1,......$.

Potpuniji način zadavanja niza realnih brojeva je preko njegovog općeg člana $a_n$. Time su svi članovi niza na jednostavan način "dohvatljivi", odnosno, uvrštavanjem određenog indeksa dobivamo bilo koji član niza. Na primjer, iz općeg člana niza $a_n = \frac{1}{n}$ možemo dobiti peti član, ili deveti član niza: $a_5 = \frac{1}{5}$ i $a_9 = \frac{1}{9}$. Kako vidimo, startna pozicija realnog broja ili njegov indeks "n", direktno utječu na njegovu vrijednost $a_n$.

Postavlja se pitanje: koji su to brojevi u danom nizu $a_n$ s velikim indeksom, a kojih ima beskonačno mnogo? Na primjer: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},.....,?,?,......$. Odgovor na ovo pitanje leži u definiciji limesa niza. Po opisnoj definiciji broj L je limes niza $a_n$ ako je $a_n \approx L$ kad je $n \approx \infty$. To znači da je: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},.....,\approx L,\approx L,......$ ili za bilo koji niz vrijedi:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, .....,\approx L,\approx L,...... .$$

Broj L bi trebao biti jedinstven, ako takav postoji. Iz ovakve proizvoljne definicije lako se vidi da su moguća dva ili više takvih brojeva, takozvanih gomilišta. Na primjer, za niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ imamo dva gomilišta, odnosno dva kandidata za broj L:

$$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\ldots, \approx -1, \approx 1, \ldots\ldots.$$

Da bismo izbjegli ovakve slučajeve neodređenosti, potrebna nam je definicija gomilišta i limesa niza, u kojoj se limes pojavljuje kao jedinstveno gomilište.

♦Definicija 1. Realan broj L je *gomilište niza* $a_n$ ako zadovoljava:

za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$ takav da za beskonačno mnogo $n > n_0$ vrijedi

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Po ovoj strogoj definiciji, brojevi $L = -1$ i $L = 1$ su dva gomilišta niza $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

♦Definicija 2. Realan broj L je *limes niza* $a_n$ ako zadovoljava:

za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$ takav da za sve $n > n_0$ vrijedi

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Ili, kratko:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n \geq n_0,\ |a_n - L| < \varepsilon$$

.♦

Po ovoj strogoj definiciji, niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ nema limesa.

Kao što ćemo vidjeti, definicija limesa niza je potpuno ista kao definicija limesa funkcija u $x = +\infty$ (vidi Poglavlje 4). Stoga su sva svojstva i primjeri rješavanja limesa niza potpuno isti kao kod limesa funkcija u $x = +\infty$, a koji će kasnije biti detaljno prezentirani, s tim što se, umjesto varijable “x”, pojavljuje indeks “n”.

Kao podsjetnik navodimo po jedan karakterističan i jednostavan primjer efektivnog računanja limesa niza realnih brojeva.

80. $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 5}{n^2 + n - 4} = \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2 - 2n + 5)/n^2}{(n^2 + n - 4)/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 2/n + 5/n^2}{1 + 1/n - 4/n^2} = 3.$$

81. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{2n + 3} = \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n + \sqrt{n^2 - n})/n}{(2n + 3)/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

82. $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - n + 3}{3n^3 + 2n - 4} = \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5n^2 - n + 3)/n^3}{(3n^3 + 2n - 4)/n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0.$$

83. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^4-2n^3+n^2}{2n^3+n^2-3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6n^4-2n^3+n^2)/n^4}{(2n^3+n^2-3)/n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}}=\dfrac{6}{0}=\infty.$

84. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^5-2n^3+4}+(3n-4)}{\sqrt[3]{n^3+n^2-4}+\sqrt{n^2-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\sqrt[5]{n^5-2n^3+4}+(3n-4)]/n}{[\sqrt[3]{n^3+n^2-4}+\sqrt{n^2-1}]/n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^5}}+3-\frac{4}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1+3}{1+1}=\frac{4}{2}=2.$$

85. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt[4]{n^2-3n+1}}{2\sqrt{n-4}+\sqrt[4]{n^2-5}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\sqrt{n+3}+\sqrt[4]{n^2-3n+1}]/\sqrt{n}}{[2\sqrt{n-4}+\sqrt[4]{n^2-5}]/\sqrt{n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2\sqrt{1-\frac{4}{n}}+\sqrt[4]{1-\frac{5}{n^2}}}=\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}.$$

86. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-5n})=\infty-\infty=\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-5n})\dfrac{n+\sqrt{n^2-5n}}{n+\sqrt{n^2-5n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+\sqrt{n^2-5n}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n/n}{(n+\sqrt{n^2-5n})/n}=\frac{5}{2}.$$

87. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2-2n+5})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2-2n+5})\dfrac{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-2n+5}}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{x^2-2n+5}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4-n^2+2n-5}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-2n+5}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-9)/n}{[\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-2n+5}]/n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{9}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

88. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+4})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+4})}\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+4}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+4}}{\sqrt{n}(n-3-n-4)}=-\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+4}}{\sqrt{n}}=\tfrac{\infty}{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{n-3}+\sqrt{n+4}]/\sqrt{n}}{\sqrt{n}/\sqrt{n}}=-\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}[\sqrt{1-\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}]=-\frac{2}{7}.$$

89. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)=\infty-\infty=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)\frac{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2/n^2}{(\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2)/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2/n)^2}+\sqrt[3]{1+2/n^2}+1}=\frac{2}{3}.$$

90. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n=1^\infty=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}\frac{2n}{n}}=e^2.$$

91. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^n=1^\infty=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-3}{n+1}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-4}}\right)^{\frac{n+1}{-4}(\frac{-4n}{n+1})}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+1}}=e^{-4}.$$

U računanju limesa koriste se sljedeća svojstva:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot a_n)=\alpha\cdot\lim_{n\to\infty}a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}b_n),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{\,b_n})=(\lim_{n\to\infty}a_n)^{\lim_{n\to\infty}b_n},$$

gdje pretpostavljamo da pojedinačni limesi $\lim_{n\to\infty}a_n$ i $\lim_{n\to\infty}b_n$ postoje.

Budući da je precizno računanje limesa niza važno u određivanju konvergencije redova, što će biti rađeno u nastavku, potrebno je riješiti sljedeće zadatke.

ZADACI ZA VJEŽBU

☺ 92. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2}{n^2}$.

☺ 93. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n^2+1}{n^4+16n+2}$.

☺ 94. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+5}{2n+6}$.

☺ 95. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+n-2}}{n+1}$.

☹ 96. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+6}-n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt[5]{n^4+1}}$.

😐 97. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+1}+\sqrt[5]{n^2+2}}{\sqrt[5]{n^4+3}+\sqrt{n^3+5}}$

☺ 98. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-4n+5}-n)$.

☺ 99. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

😐 100. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{3n}$.

😐 101. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

RJEŠENJA

**92.** 1. **93.** 0. **94.** $\infty$.

**95.** $\sqrt[3]{2}$. **96.** $-1$. **97.** 0. **98.** $-2$. **99.** $\frac{1}{2}$. **100.** $e^9$. **101.** 0.

♠PRIMJEDBE♠

1. U nastavku promatramo limese nizova kojima se indeks "n" pojavljuje u potencijama s različitim konstantnim bazama. Na primjer, želimo izračunati:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-1}{3^n+2}.$$

Budući da je ovo jedan specijalni oblik neodređenog oblika $\frac{\infty}{\infty}$, postupamo kao što je uobičajeno, odnosno dijelimo s eksponencijalnom funkcijom najveće baze, kao u sljedećem primjeru:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-1}{3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3\cdot 2^n-1)/3^n}{(3^n+2)/3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\frac{2^n}{3^n}-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(\frac{2}{3})^n-(\frac{1}{3})^n}{1+2(\frac{1}{3})^n}=\frac{0-0}{1+0}=0.$$

2. Ako se u danom nizu pojavljuju istovremeno algebarske i transcedentne funkcije, tada limes niza ne možemo računati na klasičan način dijeljenjem s najvećom potencijom. Na primjer, želimo izračunati:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Uvijek možemo, ako je to korisno, prijeći s indeksa “n” na varijablu “x”, takvu da $x \to \infty$. Potom, kao kod limesa funkcija, možemo u ovakvom slučaju iskoristiti L’Hospitalovo pravilo, kao u sljedećem primjeru (pročitati kada budemo radili derivacije):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\tfrac{\infty}{\infty}=L'H=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(2^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=$$

$$=\frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=\tfrac{\infty}{\infty}=L'H=\frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(2^x)'}=\frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln 2}=\frac{2}{\ln^2 2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}=0\,.$$

Znači, pokazali smo da je:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0.$$

## 2.2 REKURZIVNO ZADANI NIZOVI

U primjenama određen broj nizova nije zadan općim članom, već rekurzivnom relacijom. Na primjer:

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2},\ a_1=1$$

$$a_{n+1}=3-\frac{4}{a_n+1},\ a_1=3$$

$$a_{n+1}=3a_n(1-a_n),\ a_1=3/4.$$

Pitanje: kako za ovakve nizove računati njihove limese? Ako znamo da je niz konvergentan, tada je očigledno:

$$L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n\,.$$

Sada je lako “limesirati” danu rekurziju. Na primjer:

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}a_n+2}\quad\Rightarrow\quad L=\sqrt{L+2}.$$

Jednostavnim rješavanjem dobivene algebarske jednadžbe po L slijedi da je

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

Međutim, postavlja se pitanje kako znati da je rekurzivno dani niz konvergentan, jer, kako vidimo, ako pretpostavimo da je konvergentan, lako možemo iz rekurzije izračunati njegov limes. Naravno, ovo je teži dio zadatka, te koristimo sljedeća dva rezultata o konvergenciji monotonih i ograničenih nizova.

♣Teorem 1. (konvergencija rastućih nizova) Pretpostavimo da je dani niz $a_n$ *rastući*, odnosno, pretpostavimo da vrijedi:

$$a_n\le a_{n+1}\quad\text{za svaki } n\in N\,.$$

Nadalje, pretpostavimo da je zadani niz $a_n$ *odozgo ograničen,* odnosno, neka postoji realan broj $M > 0$ takav da je:

$$a_n \leq M \quad \text{za svaki } n \in N.$$

Tada je niz $a_n$ konvergentan, odnosno postoji $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ .♣

♣Teorem 2. (konvergencija padajućih nizova) Pretpostavimo da je dani niz $a_n$ *padajući*, odnosno, neka vrijedi:

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{za svaki } n \in N.$$

Nadalje, pretpostavimo da je zadani niz $a_n$ *odozdo ograničen,* odnosno, neka postoji realan broj $m$ takav da je:

$$m \leq a_n \quad \text{za svaki } n \in N.$$

Tada je niz $a_n$ konvergentan, odnosno postoji $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ .♣

102. Naći i dokazati da je to limes za niz $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2},\ a_1 = 1$.

- Pretpostavimo za tren da je $a_n$ konvergentan, odnosno, neka postoji limes $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
- "Limesiramo" rekurziju:

  $$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 2} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{L+2} \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 2 = 0$$

  $$\Rightarrow \quad L_1 = 2,\ L_2 = -1.$$

  S obzirom da iz rekurzije nužno slijedi da je $a_n \geq 0$, zaključujemo da je $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$
- Nadalje, treba opravdati pretpostavku da je $a_n$ konvergentan:
  - matematičkom indukcijom se lako pokaže da je $a_n$ rastući,
  - matematičkom indukcijom se lako pokaže da je $a_n$ odozgo ograničen sa $M = 2$.
- Sada po prethodnom teoremu o konvergenciji rastućih nizova slijedi da je niz $a_n$ konvergentan.

103. Naći i dokazati da je to limes za niz $a_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{a_n + 1},\ a_1 = 3$.

- Pretpostavimo za tren da je $a_n$ konvergentan, odnosno, neka postoji limes $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
- "Limesiramo" rekurziju:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 3 - \frac{4}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1} \quad \Rightarrow \quad L = 3 - \frac{4}{L+1} \quad \Rightarrow \quad L^2 - 2L + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad L = 1.$$

Uvrštavajući početni uvjet u rekurziju
dobivamo da je $a_1 = 3 > a_2 = 2 > ..$, odnosno dokazat ćemo da je $a_n$ padajući.

- Nadalje, treba opravdati pretpostavku da je $a_n$ konvergentan:
  - matematičkom indukcijom se lako pokaže da je $a_n$ padajući,
  - matematičkom indukcijom se lako pokaže da je $a_n$ odozdo ograničen sa $m = 1$.
- Sada po prethodnom teoremu o konvergenciji padajućih nizova slijedi da je niz $a_n$ konvergentan.

104. Naći i dokazati da je to limes za niz $a_{n+1} = 3a_n(1-a_n),\ a_1 = 3/4$.

- Pretpostavimo za tren da je $a_n$ konvergentan, odnosno, neka postoji limes $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
- "Limesiramo" rekurziju:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 3(\lim_{n\to\infty} a_n)(1 - \lim_{x\to\infty} a_n) \quad \Rightarrow \quad L = 3L(1-L) \quad \Rightarrow \quad 3L^2 - 2L = 0$$

$$\Rightarrow \quad L_1 = 0,\ L_2 = \frac{2}{3}.$$

Kao što vidimo, imamo dva kandidata za limes. Koji je od ova dva broja limes, ovisi o tome kakva je donja međa za $a_n$, s obzirom da se prvi član nalazi desno od njih. Međutim, računajući nekoliko prvih članova lako je primijetiti da članovi "osciliraju" oko broja $L = \frac{2}{3}$. Time $L = 0$ otpada, ali zbog oscliliranja članova niza oko limesa ne možemo primijeniti prethodne teoreme o konvergenciji rastućih i padajućih nizova.

- Zaključak: postoji veliki broj nizova koji nisu niti rastući niti padajući, poput niza iz ovog primjera.

ZADACI ZA VJEŽBU

U sljedećim zadacima naći i dokazati da su to limesi rekurzivno danih nizova.

105. $a_{n+1} = \frac{1}{8}(2+a_n)^2,\ a_1 = 0.$

106. $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n^2 - 1},\ a_1 = 2.$

107. $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n(1-a_n),\ a_1 = 1/3.$

108. $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n + 1},\ a_1 = 3.$

109. $a_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+a_n},\ a_1 = 1.$

110. $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n},\ a_1 = 1.$

RJEŠENJA

**105.** 2. **106.** 1. **107.** 0. **108.** $\sqrt{3}$. **109.** 2. **110.** 0.

## 2.3 REDOVI REALNIH BROJEVA

U nastavku, za dani niz $a_n$ nas interesira suma svih njegovih članova, odnosno želimo izračunati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...... + a_n + ......$$

Međutim, zbrajanje beskonačno mnogo brojeva je složen proces:

i) zbroj može ovisiti o načinu zbrajanja;
ii) ne mora biti konačan;
iii) ako je konačan, nije lako naći sumu.

Proces traženja sume svih članova danog niza $a_n$ označavamo sa $\sum a_n$, te ga zovemo redom danog niza. On podrazumijeva sljedeće radnje:

i) dogovor o načinu zbrajanja;
ii) kriterije konvergencije pomoću kojih možemo znati da li ima ili nema smisla zbrojiti sve članove nekog niza, odnosno da li red $\sum a_n$ konvergira ili divergira;
iii) algoritam za računanje sume $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pod uvjetom da red $\sum a_n$ konvergira.

♦Definicija 3. Za dani niz $a_n$ formira se takozvani niz *djelomičnih* suma $s_n$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ...... + a_n . \end{aligned}$$

Ako niz djelomičnih suma $s_n$ konvergira, tada je logično da *ima smisla* zbrojiti sve članove niza $a_n$, pa onda kažemo da red $\sum a_n$ *konvergira*. Pri tome je

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n}.$$

Ako pak niz djelomičnih suma $s_n$ divergira, tada kažemo da *nema smisla* zbrajati sve članove niza $a_n$, odnosno kažemo da red $\sum a_n$ *divergira*. ♦

Na primjer, ima smisla zbrojiti sve članove niza $a_n = \frac{1}{n^2}$, kao i sve članove niza $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, dok nema smisla zbrojiti sve članove niza $a_n = \frac{1}{n}$. Kratko rečeno, red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira, red $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira, dok red $\sum \frac{1}{n}$ divergira. Pri tome, za pripadne sume vrijedi:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$,

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Primijetimo da za redove $\sum a_n$ koji konvergiraju nije lako općenito naći sumu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Samo za rijetke slučajeve možemo pokazati konvergenciju ili divergenciju po definiciji, odnosno formirajući niz djelomičnih suma $s_n$. Sada navodimo takva dva klasična primjera.

😐 111. Red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, a za sumu vrijedi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Da bismo ovo pokazali, formirat ćemo niz pripadnih djelomičnih suma:

$$s_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$$

$$s_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = 1-\frac{1}{3}$$

$$s_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = 1-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots\ldots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) =$$
$$= 1-\frac{1}{n+1}.$$

Sada se lako uočava da je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$, pa red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira.

☺ 112. Geometrijski red $\sum q^n$ konvergira ako $|q|<1$, a za sumu vrijedi: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$. Da bismo to pokazali, formirat ćemo niz djelomičnih suma:

$$s_1 = q$$

$$s_2 = q + q^2$$

$$s_3 = q + q^2 + q^3 = q\frac{1-q^3}{1-q}$$

$$\vdots$$

$$s_n = q + q^2 + ..... + q^{n-1} + q^n = q\frac{1-q^n}{1-q}$$

Budući da, ako je $|q|<1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, lako zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(q\frac{1-q^n}{1-q}) = \frac{q}{1-q}.$$

Time smo pokazali da red $\sum q^n$ konvergira. Iz ovog postupka smo istovremeno pokazali da vrijedi:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \quad \sum_{n=m}^{\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}, \quad |q|<1}$$

☺ 113. Red $\sum\frac{1}{n}$ divergira. Da bismo to pokazali, potrebno je pokazati da niz djelomičnih suma $s_n$ divergira. Još lakše, dovoljno je naći podniz niza $s_n$ koji divergira, pa će i sam niz $s_n$ divergirati. Taj podniz će biti sastavljen od svih članova niza $s_n$ s indeksima oblika $2^n$:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{2}$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\vdots$$

$$s_{2^n} = \frac{n+2}{2} \to \infty .$$

Time smo pokazali da je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, odnosno red $\sum\frac{1}{n}$ divergira.

😐 114. Pokazati da red $\sum 3\left(\frac{4^n}{5^{n+1}}\right)$ konvergira te izračunati sumu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{4^n}{5^{n+1}}\right)$. Lakim računom dobivamo da je:

$$\sum 3\left(\frac{4^n}{5^{n+1}}\right) = 3\sum\left(\frac{4^n}{5^{n+1}}\right) = \frac{3}{5}\sum\frac{4^n}{5^n} = \frac{3}{5}\sum\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

S obzirom da je $q = \frac{4}{5} < 1$, pripadni red je geometrijski i konvergentan. Za njegovu sumu vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{4^n}{5^{n+1}}\right) = \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{3}{5}\frac{1}{1-4/5} = 3.$$

☹ 115. Pokazati da red $\sum \frac{3^n + 2^n}{4^n}$ konvergira te izračunati sumu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n}$. Kao u prethodnom primjeru, dobivamo da je:

$$\sum \frac{3^n + 2^n}{4^n} = \sum \frac{3^n}{4^n} + \sum \frac{2^n}{4^n} = \sum \left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

S obzirom da je $q = \frac{3}{4} < 1$ i $q = \frac{1}{2} < 1$, pripadni redovi su geometrijski i konvergentni. Za njihove sume vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-3/4} + \frac{1}{1-1/2} = 6 .$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U sljedećim zadacima ispitaj konvergenciju danih redova:

116. $\sum \frac{2^n}{3^n}$.

117. $\sum \frac{1}{(n+5)(n+6)}$.

118. $\sum \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

119. $\sum \frac{4 \cdot 3^{n-1}}{2^{n+3}}$.

120. $\sum \frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n+1}}{5^n}$.

121. $\sum \frac{e^n}{n}$.

U sljedećim zadacima izračunati sume danih redova:

122. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

123. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot 5^{-n}$.

124. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

125. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

126. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$.

127. $\sum_{n=2}^{\infty} [\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n^2 - 1}]$.

RJEŠENJA

**116.** *konvergira.*. **117.** *konvergira.*. **118.** *konvergira.*. **119.** *divergira.*.
**120.** *konvergira.*. **121.** *divergira.*. **122.** $\frac{4}{15}$. **123.** $\frac{5}{2}$. **124.** $\frac{1}{2}$. **125.** $\frac{3}{4}$. **126.** $\frac{1}{2}$.
**127.** $\frac{25}{12}$.

# 2.4 USPOREDNI I INTEGRALNI KRITERIJI

Budući da je teško odrediti konvergenciju reda po definiciji, odnosno preko konvergencije niza djelomičnih suma, potrebno je na dani red primijeniti razne kriterije konvergencije, pomoću kojih se jednostavnije dolazi do zaključka o tome da li dani red $\sum a_n$ konvergira ili divergira.

Prvo startamo s dva usporedna kriterija za redove $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima odnosno kad je $0 \le a_n$ za svaki $n \in N$. To su takozvani Weierstrassovi usporedni kriteriji.

♣Teorem 3. (usporedni kriterij) Pretpostavimo da su zadani nizovi $a_n$ i $b_n$ za koje postoji realan broj M >0 takav da je

$$0 \le a_n \le M \cdot b_n, \text{ za svaki } n \in N.$$

i) Ako red $\sum b_n$ konvergira, tada mora konvergirati i red $\sum a_n$ ;

ii) Ako red $\sum a_n$ divergira, tada mora divergirati i red $\sum b_n$ . ♣

Jednostavno rečeno, ako želimo pokazati da neki red $\sum a_n$ konvergira, dovoljno je svaki član niza $a_n$ odozgo ograničiti svakim članom niza $b_n$ čiji red $\sum b_n$ konvergira. Ili, ako želimo pokazati da neki red $\sum b_n$ divergira, tada je dovoljno svaki član niza $b_n$ odozdo ograničiti svakim članom niza $a_n$ čiji red $\sum a_n$ divergira.

Kako se primjenjuje ovaj usporedni kriterij, pokazat ćemo na nekoliko veoma važnih i klasičnih primjera.

☺ 128. Red $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentan.

Da bismo to pokazali, koristit ćemo usporedni kriterij iz Teorema 3, odnosno, ograničit ćemo sve članove niza $a_n = \frac{1}{n^2}$ sa članovima nekog niza za koji znamo da je konvergentan. Konkretno, lako je pokazati da vrijedi:

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)} \le \frac{1}{n(n+1)}, \text{ za svaki } n \in N.$$

Budući da smo u primjeru 111 pokazali da red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, po usporednom kriteriju slijedi da je i red $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergentan. Sada konvergencija reda $\sum \frac{1}{n^2}$ slijedi iz jednakosti:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}.$$

☺ 129. Red $\sum\frac{1}{(n+1)!}$ je konvergentan.

Da bismo to pokazali, ograničit ćemo svaki član niza $a_n=\frac{1}{(n+1)!}$ sa članovima nekog konvergentnog niza. Preciznije, lako se pokaže nejednakost:

$$\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}\le\frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n\text{ puta}}}=\frac{1}{2^n}.$$

Budući da smo u primjeru 112 pokazali da je red $\sum\frac{1}{2^n}$ konvergentan (jer je $q=1/2<1$), po prethodnoj nejednakosti i usporednom kriteriju iz Teorema 3 slijedi da je i red $\sum\frac{1}{(n+1)!}$ konvergentan, što smo i trebali pokazati.

☺ 130. Red $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ je divergentan.

Ponovno ćemo se koristiti usporednim kriterijem iz Teorema 3, ali ovaj put ćemo članove niza $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ ograničiti odozdo sa članovima niza za koji znamo da divergira. Preciznije, lako je pokazati nejednakost:

$$\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}},\text{ za sve } n\in N.$$

Budući da smo u primjeru 113 pokazali da je red $\sum\frac{1}{n}$ divergentan, po usporednom kriteriju iz Teorema 3 slijedi da je i red $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentan.

Primjere 128 i 130 je moguće generalizirati na mnoge druge potencije od $\frac{1}{n}$, kao što slijedi.

☹ 131. Red:

$$\sum\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{konvergira za } p\ge 2\\ \text{divergira za } p\le 1.\end{cases}$$

Zaista, tvrdnja jednostavno slijedi iz Teorema 3 i sljedeće nejednakosti:

$$\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}\ \text{ za } p\le 1 \quad\text{i}\quad \frac{1}{n^p}\le\frac{1}{n^2}\ \text{ za } p\ge 2.$$

Budući da smo u primjerima 128 i 130 pokazali da red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira te da red $\sum \frac{1}{n}$ divergira, iz prethodne nejednakosti i usporednog kriterija slijedi tražena tvrdnja.

U nastavku dajemo još jedan koristan usporedni kriterij.

♣Teorem 4. (limesni usporedni kriterij) Pretpostavimo da su zadani nizovi $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$ te pretostavimo da smo izračunali sljedeći limes:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \text{ gdje je } 0 < L < \infty .$$

i) Ako red $\sum b_n$ konvergira, tada mora konvergirati i red $\sum a_n$ ;

ii) Ako red $\sum b_n$ divergira, tada mora divergirati i red $\sum a_n$ .

Pri tome kažemo da se redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ *isto ponašaju* u smislu konvergencije. ♣

Ovaj kriterij je praktičan ako u općem članu reda postoje takozvani "viškovi" odnosno dijelovi koji uopće ne utječu na konvergenciju, kao u sljedećem primjeru.

☺ 132. Red $\sum \frac{4}{2^n - 3}$ i red $\sum \frac{1}{2^n}$ se isto ponašaju u smislu konvergencije. Zašto? Pa po prethodnom Teoremu 4, potrebno je provjeriti limes omjera njihovih općih članova, odnosno:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{2^n-3}}{\frac{1}{2^n}} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{2^n / 2^n}{(2^n - 3)/2^n} = 4 .$$

S obzirom da je $L = 4 > 0$, po Teoremu 4 slijedi da se ova dva reda jednako ponašaju u smislu konvergencije. Međutim, mi već znamo po primjeru 112 da red $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergira, pa prema ovome direktno slijedi da je red $\sum \frac{4}{2^n - 3}$ konvergentan.

☺ 133. Pokažimo usporednim kriterijem da je red $\sum \frac{2n^2}{n^3 - 3n + 4}$ divergentan. Kada uklonimo sve "viškove" u nazivniku $a_n = \frac{2n^2}{n^3 - 3n + 4}$ dobivamo opći član prethodnog reda u obliku $b_n = \frac{1}{n}$. Preciznije, računamo sljedeći limes:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^3-3n+4}}{\frac{1}{n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 / n^3}{(n^3 - 3n + 4)/n^3} = 2 .$$

Kako je L = 2>0, po Teoremu 4 oba reda se jednako ponašaju u smislu konvergencije, a budući da već znamo da red $\sum \frac{1}{n}$ divergira, to povlači da i red $\sum \frac{2n^2}{n^3 - 3n + 4}$ divergira, što je trebalo pokazati.

Na kraju ove točke navodimo takozvani "integralni kriterij". Kako sama riječ kaže, da bismo ustanovili konvergenciju nekog reda potrebno je ispitati konvergenciju odgovarajućeg nepravog integrala. Pri tome ćemo u kasnijim poglavljima raditi konvergencije nepravih integrala (pročitati nakon što budemo radili integrale).

♣Teorem 5. (integralni kriterij) Neka je zadan niz $a_n \geq 0$, te neka je $f(n) = a_n$. Ako je ovako definirana funkcija $f : R \to R$ neprekidna i padajuća na intervalu $[1,\infty)$, tada vrijedi:

$$\text{red } \sum a_n \text{ konvergira} \iff \text{integral } \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergira.} \clubsuit$$

Budući da je lakše integrirati nego sumirati, ovaj kriterij može biti veoma praktičan.

☺ 134. Red:

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergira za } p > 1 \\ \text{divergira za } p \leq 1. \end{cases}}$$

Za razliku od primjera 131, ova tvrdnja je potpuna jer pokriva sve vrijednosti potencije "p" razlomka $\frac{1}{n}$. Nije teško pokazati da:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \text{konvergira za } p > 1 \\ \text{divergira za } p \leq 1. \end{cases}$$

Sada iz ove tvrdnje i integralnog kriterija iz Teorema 5 direktno slijedi tražena konvergencija reda $\sum \frac{1}{n^p}$ za sve vrijednosti potencije "p".

☹ 135. Red $\sum \frac{n}{e^n}$ konvergira. Zaključak slijedi iz sljedećih činjenica koje prepuštamo čitatelju na provjeru:

i) funkcija $f(x) = \frac{x}{e^x} = x \cdot e^{-x}$ je neprekidna i padajuća na intervalu $[1,\infty)$;

ii) vrijedi: $\int_1^\infty x \cdot e^{-x}dx = 2e^{-1} < \infty$;

iii) primjena Teorema 5 nam daje traženi zaključak.

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U sljedećim zadacima ispitati konvergenciju danih redova koristeći usporedne i integralni kriterij za konvergenciju redova.

136. $\sum \frac{n}{(n+1)^{5/2}}$.

137. $\sum \frac{3n}{\sqrt[3]{n^5+n}}$.

138. $\sum \frac{1}{n^2+2n+2}$.

139. $\sum \frac{1}{n(n-4)}$.

140. $\sum \frac{2}{\sqrt{n^3+4}}$.

141. $\sum \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

142. $\sum \frac{n!}{(n+1)!}$.

143. $\sum \frac{n!}{(2n)!}$.

144. $\sum \frac{\ln n}{n}$.

145. $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

146. $\sum \frac{n}{e^{n^2}}$.

147. $\sum \frac{n}{(1+n^2)^2}$.

148. $\sum \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$.

RJEŠENJA

**136.** *konvergira.*. **137.** *divergira.*. **138.** *konvergira.*. **139.** *konvergira.*.
**140.** *konvergira.*. **141.** *konvergira.*. **142.** *divergira.*. **143.** *konvergira.*.
**144.** *divergira.*. **145.** *divergira.*. **146.** *konvergira.*. **147.** *konvergira.*.
**148.** *konvergira.*.

## Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Rođen: 31. listopada 1815. u Ostenfelde, Westphalia (Njemačka)
Umro: 19. veljače 1897. u Berlinu (Njemačka)

Weierstrassa (Vajerštras) je povijest obilježila kao “oca moderne matemematike”. Dao je veliki broj rezultata na temu: analiza iracionalnih brojeva, analiza neprekidnih funkcija, redovi potencija, sistemi diferencijalnih jednadžbi, kompleksna analiza. Poznata je njegova izreka:

*Istina je da matematičar koji nije pomalo i pjesnik, nikad neće biti savršen matematičar* – K. Weierstrass.

## 2.5 CAUCHYJEV KRITERIJ

Ukoliko se u općem članu reda $\sum a_n$ pojavljuje indeks "n" istovremeno u bazi i u eksponentu, tada je veoma praktičan Cauchyjev (Koši) kriterij.

♣Teorem 6. (Cauchyjev kriterij) Zadan je niz realnih brojeva $a_n$. Pretpostavimo da smo izračunali sljedeći limes:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tada vrijedi:

i) ako je $L<1$, tada red $\sum a_n$ konvergira;

ii) ako je $L>1$, tada red $\sum a_n$ divergira;

iii) ako je $L=1$, tada treba prijeći na neki drugi kriterij. ♣

Naravno da se gornji limes računa u nekoliko koraka: prvo se riješimo n-tog korijena, odnosno izračunamo $|a_n|^{1/n}$; nakon toga prelazimo na računanje limesa $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

U računanju limesa n-tog korijena trebamo i sljedeća svojstva:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, gdje je $a>0$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$, gdje je $P(x)$ polinom po x;

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{P(n)}{Q(n)}} = 1$, gdje su $P(x), Q(x)$ polinomi po x.

Na primjer: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+n-1} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+2n+5}{3n^4-n^3+2}} = 1$.

☺ 149. Red $\sum \dfrac{n^3}{3^n}$ je konvergentan, jer je

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} \quad\Rightarrow\quad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad L = \frac{1}{3} < 1.$$

☺ 150. Red $\sum\left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^n$ je konvergentan, jer je

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{(2n+3)^n}{(5n-1)^n}}=\frac{2n+3}{5n-1}\quad\Rightarrow\quad L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n-1}=\frac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad L=\frac{2}{5}<1.$$

☺ 151. Red $\sum\left(\frac{n^2-n}{2n+3}\right)^n$ je divergentan, jer je

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{(n^2-n)^n}{(2n+3)^n}}=\frac{n^2-n}{2n+3}\quad\Rightarrow\quad L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n+3}=\infty\quad\Rightarrow\quad L=\infty>1.$$

☹ 152. Red $\sum\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n^2}$ je konvergentan, jer je

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{(n-2)^{n^2}}{(n+3)^{n^2}}}=\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n\quad\Rightarrow\quad L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n=1^\infty=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-5n}{n+3}}=e^{-5}<1.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

153. $\sum\frac{n^2-2n}{e^n}$.
154. $\sum\frac{1}{3^n}\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^n$.
155. $\sum 4\cdot 2^n\left(\frac{n^2+3}{3n^2+n}\right)^n$.
156. $\sum\frac{5}{2^n}\left(\frac{3n+2}{n-2}\right)^n$.
157. $\sum\frac{2}{3^{2n}}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$.
158. $\sum\left(\frac{2n+5}{n+3}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
159. $\sum 3^{n+1}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n-1}$.
160. $\sum\frac{e^n}{n\cdot\pi^n}$.
161. $\sum\frac{\operatorname{ch} n}{3^n}$.

RJEŠENJA

**153.** *konvergira* $L=1/e$. **154.** *konvergira* $L=2/3$.
**155.** *konvergira* $L=2/3$. **156.** *divergira* $L=3/2$. **157.** *konvergira* $L=e^2/9$.
**158.** *konvergira* $L=2/e$. **159.** *konvergira* $L=3/4$. **160.** *konvergira* $L=e/\pi$.
**161.** *konvergira.*.

## Augustin Louis Cauchy

Rođen: 21. kolovoza 1789. u Parizu (Francuska)
Umro: 23. svibnja 1857. u Sceauxu - blizu Pariza (Francuska)

*Ljudi odlaze, ali njihova djela ostaju* –
A.L. Cauchy

U modernoj matematici je zapamćen po uvođenju preciznosti u matematičku analizu. Napravio je veliki broj radova iz: kombinatorike, beskonačnih redova, teorije polihedrona, teorije o konačnim grupama, teorije funkcija kompleksne varijable…... Poznata je njegova izreka na samrti, gore desno.

## 2.6 D'ALEMBERTOV KRITERIJ

Ukoliko se u općem članu reda $\sum a_n$ pojavljuje indeks "n" u obliku faktorijale "n!" tada je skoro nezamjenjiv D'Alembert-ov (Dalamberov) kriterij. Naravno da ovaj kriterij možemo koristiti u drugim slučajevima.

♣Teorem 7. (D'Alembert-ov kriterij) Zadan je niz realnih brojeva $a_n$. Pretpostavimo da smo izračunali sljedeći limes:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Tada vrijedi:

iv) ako je $L<1$, tada red $\sum a_n$ konvergira;

v) ako je $L>1$, tada red $\sum a_n$ divergira;

vi) ako je $L=1$, tada treba preći na neki drugi kriterij. ♣

Gornji limes računamo u nekoliko koraka: prvo se riješimo razlomka $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ uz pravilo dvostrukog razlomka, te kraćenja u brojniku i nazivniku istih s istima; nakon toga prelazimo na računanje limesa $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

☺ 162. Red $\sum \frac{n}{2^n}$ je konvergentan, jer je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} < 1.$$

☺ 163. Red $\sum \frac{n!}{3^n}$ je divergentan, jer je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3} \quad \Rightarrow \quad L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3} = \infty \quad \Rightarrow \quad L = \infty > 1.$$

☹ 164. Red $\sum \frac{n!}{n^n}$ je konvergentan, jer je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \Rightarrow$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = e^{-1} < 1.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U sljedećim zadacima ispitati konvergenciju danih redova realnih brojeva.

165. $\sum \frac{e^n}{n!}$.

166. $\sum \frac{n!}{5^n}$.

167. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

168. $\sum \frac{n^n}{(2n)!}$.

169. $\sum \frac{n!}{(2n-1)!!}$.

170. $\sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}$.

171. $\sum \frac{4^n n!}{n^n}$.

172. $\sum \frac{e^n}{n}$.

173. $\sum \frac{e^n}{n^e}$.

Primijetimo da je $(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot 2n$ i $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)$.

RJEŠENJA

**165.** *konvergira* $L=0$. **166.** *divergira* $L=\infty$.
**167.** *konvergira* $L=1/4$. **168.** *konvergira* $L=0$. **169.** *konvergira* $L=1/2$.
**170.** *konvergira* $L=1/27$. **171.** *divergira* $L=4/e$. **172.** *divergira* $L=e$.
**173.** *divergira* $L=e$.

# Jean Le Rond d'Alembert

Rođen: 17. studenog 1717. u Parizu (Francuska)
Umro: 29. listopada 1783 u Parizu (Francuska)

Zapamćen je kao velika ličnost u francuskoj znanosti, te kao veliki prijatelj velikog Lagrangea (Legranž). Na početku života nije imao sreću jer ga je mati ostavila na stepenicama kapele St. Jean le Rond, po kojoj je uzeo svoje ime. D'Alembert je prvi dao potpuno rješenje značajnog problema o pojavama ekvinocija. Njegov najvažniji potpuno matematički rad bio je o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, posebno u vezi s vibrirajućim membranama. Isto tako su važni njegovi radovi u dinamici fluida, te neki radovi u filozofiji.

## 2.7 NUŽNI I LEIBNITZOV KRITERIJ

Ukoliko Cauchyjev (Koši) i D'Alembertov (Dalamber) kriterij daju neizvjesnu situaciju, odnosno na kraju dobivamo da je limes L = 1, tada bi bilo dobro ispitati da li opći član reda zadovoljava nužni kriterij. Da bi neki red uopće konvergirao, nužno je da mu opći član teži nuli.

♣ Teorem 8. (nužni kriterij) Zadan je niz realnih brojeva $a_n$. Tada vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ divergira. } ♣$$

Naravno da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ne povlači da red $\sum a_n$ konvergira, što je jasno iz primjera $\sum \frac{1}{n}$. Prema ovome, nužnim kriterijom možemo samo pokazati da neki red divergira, a o konvergenciji ne možemo reći ništa. Promotrimo sljedeće primjere.

☺ 174. Red $\sum(1-\frac{1}{2^n})$ divergira jer je: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n}) = 1 \neq 0$.

☺ 175. Red $\sum(\sqrt{n^2-2n}-n)$ divergira jer je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-n)\frac{\sqrt{n^2-2n}+n}{\sqrt{n^2-2n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n} = -1 \neq 0.$$

☺ 176. Red $\sum(\frac{n}{n+1})^n$ divergira jer: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = e^{-1} \neq 0$.

U nastavku promatramo takozvane *alternirane* redove, odnosno redove u obliku:

$$\sum(-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0.$$

Znamo da red $\sum\frac{1}{n}$ divergira. Međutim, alternirani red $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ konvergira. Štoviše, može se točno izračunati njegova suma, odnosno

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = -\ln 2.}$$

Naravno da za konvergenciju alternirajućih redova možemo koristiti sve do sada izrečene kriterije za redove s ne nužno pozitivnim članovima. Međutim, najlakše je za alternirajuće redove koristiti takozvani Leibnitzov (Lajbnic) kriterij, koji je iskazan u sljedećem rezultatu.

♣Teorem 9. (Leibnitzov kriterij za alternirane redove) Zadan je niz realnih brojeva $a_n$. Tada vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ i } a_n \geq a_{n+1} \text{ za sve } n\in N \quad \Rightarrow \quad \sum(-1)^n a_n \text{ konvergira.}$$♣

Uvjet $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $a_n \geq a_{n+1}$ za sve $n \in N$, znači da niz $a_n$ padajući teži ka nuli.

☺ 177. Red $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ konvergira, jer je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0 \quad \text{i} \quad a_n = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} = a_{n+1} \text{ za sve } n \in N.$$

☺ 178. Red $\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira, jer je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}) = 0 \quad \text{i} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1} \text{ za sve } n \in N .$$

Općenito, za bilo koju pozitivnu potenciju "p" imamo sljedeći zaključak.

☺ 179. Red $\sum (-1)^n \frac{1}{n^p}$ , $p > 0$ , konvergira, jer je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^p}) = 0 \quad \text{i} \quad a_n = \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} = a_{n+1} \text{ za sve } n \in N .$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

180. Argumentirano obrazložiti zašto:
   - i) red $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ konvergira;
   - ii) red $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ divergira.

181. Pokaži da red $\sum (\frac{n+1}{n+2})^n$ divergira.

182. Ispitati konvergenciju reda $\sum n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ .

183. Ispitati konvergenciju reda $\sum (-1)^n$ .

184. Ispitati konvergenciju reda $\sum (-1)^n \frac{2n+1}{n^2 + 2n}$ .

185. Argumentirano obrazložiti zašto:
   - i) red $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ konvergira;
   - ii) red $\sum \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ konvergira.

186. Dokazati da za red $\sum (\frac{n-1}{n})^n$ vrijedi:
   - i) Cauchyjev kriterij ne daje odluku, odnosno L = 1;
   - ii) D'Alembertov kriterij ne daje odluku, odnosno L = 1;
   - iii) divergira zbog nužnog kriterija, odnosno $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n = e^{-1}$ .

RJEŠENJA

**182.** *divergira..* **183.** *divergira..* **184.** *konvergira..*

♠PRIMJEDBE♠

Nužni kriterij iz Teorema 8 se uglavnom u literaturi pojavljuje u svom ekvivalentnom obliku:

♣Teorem 10. (nužni kriterij) Zadan je niz realnih brojeva $a_n$. Tada vrijedi:

$$\sum a_n \text{ konvergira } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ . ♣}$$

Međutim, ovakva forma nužnog kriterija može izazvati neopravdane nedoumice vezano sa dovoljnost uvjeta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, jer znamo da on ne može garantirati konvergenciju $\sum a_n$, nego je on samo jedna posljedica njegove konvergencije.

Zašto su tvrdnje Teorema 8 i Teorema 10 ekvivalentne? Naime, primijetimo da u matematici općenito vrijedi logički princip, takozvani "obrat po kontrapoziciji", koji kaže:

$$\text{točno je da } A \Rightarrow B \text{ ako i samo ako } \neg B \Rightarrow \neg A\,,$$

gdje $\neg B$ označava negaciju tvrdnje $B$, dok $\neg A$ označava negaciju tvrdnje $A$. U kontekstu Teorema 8 i Teorema 10 neka su :

$$A = \{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\} \text{ i } B = \{\sum a_n \text{ divergira}\}\,.$$

Tada je očito:

$$\neg B = \{\sum a_n \text{ konvergira}\} \text{ i } \neg A = \{\lim_{n\to\infty} a_n = 0\}\,.$$

Sada u ovim terminima ekvivalentnost između Teorema 8 i Teorema 10 slijedi iz prethodnog principa, odnosno:

$$A \Rightarrow B \text{ (Teorem 8) ako i samo ako } \neg B \Rightarrow \neg A \text{ (Teorem 10).}$$