Sarajevo, 15. 11. 2014.

Domaća zadaća 2 iz INŽENJERSKE MATEMATIKE 1
(DZ 2 iz IM1 u akademskoj 2014/2015. godini)

Riješite sljedeće zadatke označene sa * , te jedan od zadataka 2.b), 4.b), 7.b) i jedan od zadataka 3.b), 4.a), 6.b):

1.* Zadani su sljedeći kompleksni brojevi:

$$z_1 := 2+i,\ z_2 := -1+i\sqrt{3},\ z_3 := \frac{1-3i}{1-i} - \frac{m+i}{2+i},\ z_4 := 1+i\,\mathrm{tg}(\alpha),\ z_5 := \ln\left[i\cdot\mathrm{th}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

dje je $\alpha \geq 0$, i imaginarna jedinica, a m ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*. (0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,1[b.])

a) Predstavite zadane kompleksne brojeve z_1, z_2, z_5 u *Gaussovoj ravni*.

b) Napišite zadane kompleksne brojeve u trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku.

c) Izračunajte $z_1^{20},\ z_2^{15},\ \dfrac{z_2}{z_1},\ \dfrac{z_2^{15}}{\left(\overline{z_1}\right)^{20}}$.

d) Odredite glavnu vrijednost argumenta zadanog kompleksnog broja z_5.

2. Za niz (a_n), $a_n := \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-n-2}}$, gdje je $n \in (\mathbf{N}\setminus\{1\})$,

izračunajte : **a)*** $L_1 = \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^2$; **b)** $L_2 = \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n$. (0,1 + 0,2 [b.])

3. a)* Pokažite da red $\sum a_n$ konvergira te izračunajte sumu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, gdje je $a_n = 3\left(\dfrac{4^n}{5^{n+1}}\right)$ $(\forall n \in \mathbf{N_0})$. (0,2 [b.])

b) Dokažite neposredno konvergenciju sljedećeg reda i nađite mu sumu: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \cdot y^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$. (0,1 + 0,2 [b.])

4. a) Ispitajte da li je $\left(\ln\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)\right)^{-2} > \dfrac{2}{\pi n}\left(\ln\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)\right)^{-1} = O^*\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$, $(n\to+\infty)$, pa (sa ili bez primjene dobijenog rezultata) ispitajte konvergenciju reda $\sum\left(\ln\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)\right)^{-2}$. (0,3 [b.])

b) Sa i bez zamjene niza (x_n) odgovarajućim (beskonačnim) redom, ispitajte konvergenciju niza (x_n) zadanog formulom

$$x_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

(0,2 [b.])

5.* Odredite (prirodni) domen, ispitajte ograničenost, parnost/neparnost, periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odredite osnovni period (ukoliko postoji) realne funkcije f jedne realne promjenljive zadane formulom $f(x) = 6\,\mathrm{tg}\dfrac{mx}{10} - 7\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{7}$, gdje je m kao i u zadatku **1.** Zatim skicirajte grafik zadane funkcije f.

(0,3 + 0,1 [b.])

6. Ustanovite da imaju smisla pa izračunajte sljedeće limese:

$$\textbf{a)*}\ \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+px+4}\right),\quad \textbf{b)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p-\frac{n}{p+1}\right);$$

gdje je p prirodan broj. (0,2 + 0,3 [b.])

----

7. **a)*** Za realnu funkciju f jedne realne promjenljive zadanu formulom

$$f(x):=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

nađite $f'_-(0)$, $f'_+(0)$, $\lim\limits_{x\to0-} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)$ i $f'''(1)$. Da li postoji $f'(0)$? (0,2[b.])

b) Nađite $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$ za sljedeću funkciju zadanu u parametarskom obliku (u svakoj od tačaka njenog prirodnog domena) :

$$x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Zatim skicirajte grafike zadanih funkcija $x=x(t)$, $y=y(t)$, $y=y(x)$. (0,1+ 0,1 [b.])

8.* Realne funkcije f_α, g_m $(\alpha\geq0,\ \beta\geq 0)$ jedne realne promjenljive zadane su formulama:

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1+\alpha}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g_m(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-m}\cdot e^{-\sqrt{x^2-m}},$$

gdje je m kao i u zadatku **1.**

a) Odredite (prirodne) domene zadanih funkcija f_α, g_m, te eventualne presjeke njihovih grafika sa koordinatnim osama Dekartovog koordinatnog sistema, eventualne asimptote od g_m i sliku $\operatorname{Im}(g_m)$.

b) Ispitajte znak i ograničenost zadane funkcije f_α.

c) Ispitajte neprekidnost i klasificirajte eventualne tačke prekida i singulariteta zadanih funkcija.

d) Izračunajte izvode prvog i drugog reda zadanih funkcija f_α, g_m i diskutujte njihovu egzistenciju, a zatim odredite eventualne ugaone (prelomne) tačke i povratne tačke (šiljke) grafika zadane funkcije g_m.

e) Skicirajte grafik zadane funkcije g_m.

(0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,1 [b.])

....

Napomena: Izradu (samostalnu) *DZ2* potrebno je predati (urađenu na uvezanim listovima formata A4, uloženih u odgovarajuću plastičnu fasciklu) svom tutoru iz **IM1 u 11. sedmici tekućeg semestra akademske 2014/2015. godine (najdalje do 19. 12. 2014.). Naknadno dostavljene izrade** *DZ2* **neće biti prihvaćene**!

-- @ --