Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Domaća zadaća 1 iz INŽENJERSKE MATEMATIKE 1

Zad. 1. Pretpostavimo da su poznate sljedeće činjenice:
•Nakon odigranog derbija u Sarajevu, osoba *N* je sretna ako i samo ako je pobijedio FK Željezničar;
•Nakon odigranog derbija, slaviće ili plavi ili bordo navijači, ali ne i jedni i drugi;
•Ukoliko je pobijedio FK Željezničar, slaviće plavi navijači;
•Derbi je odigran, i slave bordo navijači.
Iz ovih činjenica može se zaključiti da osoba *N* nije sretna. Dokažite ispravnost ovog rezonovanja formalnim putem (dokazujući da je odgovarajući logički izraz tautologija).

Rješenje: Prvo je potrebno iz tekstualne formulacije zadatka odabrati tvrdnje koje ćemo pridružiti logičkim promjenjivim. Neka su to:
a =Osoba N je sretna.
b = Pobijedio je FK Željezničar.
c = Slave plavi navijači.
d = Slave bordo navijači.
e = Derbi je odigran.
Napomena: Moguće je riješiti zadatak i bez uvođenja iskaza e, jer se može smatrati da je postojanje iskaza a-d uslovljeno istinitošću iskaza e, tj. da ima smisla govoriti o preostalim iskazima samo ako se intuitivno podrazumijeva da je iskaz e tačan.
Činjenica "Nakon odigranog derbija u Sarajevu, osoba *N* je sretna ako i samo ako je pobijedio FK Željezničar" se u logičkoj simbolici može zapisati kao: Činjenicu "Nakon odigranog derbija, slaviće ili plavi ili bordo navijači, ali ne i jedni i drugi", zapisujemo kao $e \Rightarrow (c \veebar d)$. Činjenicu "Ukoliko je pobijedio FK Željezničar, slaviće plavi navijači." zapisujemo kao $b \Rightarrow c$, a činejnicu "Derbi je odigran, i slave bordo navijači" zapisujemo kao $d \wedge e$.
Potrebno je pokazati da iz ovih činjenica slijedi da osoba N nije sretna, odnosno da je iskaz:
$$\big((e \Rightarrow (a \Leftrightarrow b)) \wedge (e \Rightarrow (c \veebar d)) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge (d \wedge e)\ \big) \vDash \bar{a}$$
Koristeći relacije

- za ekvivalenciju: $x \Leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$
- za implikaciju : $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$
- za ekskluzivnu disjunkciju: $x \veebar y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$

i zapisujući relaciju konjunkcije kao množenje, dobijemo sljedeći izraz:
$$(e \Rightarrow (ab \vee \bar{a}\,\bar{b}))(e \Rightarrow (c\bar{d} \vee \bar{c}d))(\bar{b} \vee c)de \Rightarrow \bar{a}$$
$$(\bar{e} \vee ab \vee \bar{a}\,\bar{b})(\bar{e} \vee c\bar{d} \vee \bar{c}d)(\bar{b} \vee c)de \Rightarrow \bar{a}$$
$$(\bar{e}e \vee abe \vee \bar{a}\,\bar{b}\,e)(\bar{e}d \vee cd\bar{d} \vee \bar{c}dd)(\bar{b} \vee c) \Rightarrow \bar{a}$$
$$(abe \vee \bar{a}\,\bar{b}e)(d\bar{e} \vee \bar{c}d)(\bar{b} \vee c) \Rightarrow \bar{a}$$
$$(ab \vee \bar{a}\,\bar{b})e(\bar{b}d\bar{e} \vee cd\bar{e} \vee \bar{b}\bar{c}d \vee c\bar{c}d) \Rightarrow \bar{a}$$
$$(ab \vee \bar{a}\,\bar{b})\bar{b}\bar{c}de \Rightarrow \bar{a}$$
$$(ab\bar{b}\bar{c}de \vee \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{b}\bar{c}de) \Rightarrow \bar{a}$$
$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}de \Rightarrow \bar{a}$$
$$\overline{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}de} \vee \bar{a}$$
$$a \vee b \vee c \vee \bar{d} \vee \bar{e} \vee \bar{a}$$
Na osnovu poznatih svojstava funkcije disjunkcije ovaj iskaz predstavlja tautologiju, odnosno uvijek je tačan, pa je dato zaključivanje validno.

Zad. 1′. Dokažite kontraprimjerom da izraz $\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ nije valjan (tj. da zadani izraz logike predikata nije tačan pri svakoj od mogućih interpretacija)

Rješenje: Da bi pokazali da izraz $\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ nije tautologija, potrebno je konstruisati takav primjer u kome će lijevo od znaka implikacije biti tačan iskaz, a desno od znaka implikacije netačan iskaz. Uzimajući u obzir svojstva implikacije u tom slučaju ćemo dobiti da je vrijednost implikacije 0, odnosno da je navedeni iskaz netačan.
Neka je zadan skup A sačinjen od elemenata koji zadovoljavaju barem jedan od predikata P(x), Q(x). Unutar tog skupa možemo formirati dva podskupa. Neka je skup A' skup elemanata x iz A koji zadovoljavaju samo svojstvo P(x), a A'' skup elemanata x iz A koji zadovoljavaju samo svojstvo Q(x) i neka su oni neprazni skupovi .
Posmatrajmo sada gornji izraz samo za elemente unije skupova A i A': $x \in A \cup A'$. Lijeva strana iskaza je istinita, jer ukoliko je $x \in A$ on zadovoljava svojstvo P(x), a ukoliko je x $x \in A'$ on zadovoljava svojstvo Q(x). Pri tome je iskaz sa desne strane znaka implikacije neistinit. Postoji $x \in A \cup A'$ za koje iskaz P(x) nije zadovoljen ($\forall x \in A'$), pa je iskaz $\forall x P(x)$ neistinit. Također postoji $x \in A \cup A'$ za koje iskaz Q(x) nije zadovoljen ($\forall x \in A$), pa je iskaz $\forall x Q(x)$ neistinit. Disjunkcija dva neistinita iskaza je neistinit iskaz.
Primjer: U skupu prirodnih brojeva N, definišimo predikate:

- P(x) = x je paran broj
- Q(x) = x je neparan broj

Za svako $x \in N$ je zadovoljen iskaz sa desne strane implikacije jer je svaki prirodan broj ili paran ili neparan. Međutim tvrdnja da je svaki prirodan broj paran nije istinita, kao ni tvrdnja da je svaki prirodan broj neparan. Disjunkcija ove dvije tvrdnje je takođe neistinita, pa je stoga i implikacija neistinita.

Zad. 2. Konstruišite (netrivijalan) primjer podskupa nekog uređenog skupa koji ima jedan ili više minimalnih (početnih) elemenata , a da nema najmanjeg elementa.

(*Napomena.* Neka je $(X, \leq)$ uređen (parcijalno uređen) skup i A neprazan podskup od X. Najmanji element treba u opštem slučaju razlikovati od *minimalnog* (ili *početnog*) *elementa* 0 $a \in A$ skupa A, koji se definira formulom $\forall$ ($a \in A$) ($a \leq 0$ $a \Rightarrow a = 0$ a). Skup A može da ima jedan ili više minimalnih elemenata, a da nema najmanjeg elementa. Ako skup A ima najmanji element, onda je to, očito, jedini minimalni element skupa A.)

Rješenje: U skupu N (kao i u svakom podskupu skupa N) relacija "dijeli" ("|", tj a|b znači a je djelilac b) je relacija parcijalnog poretka (refleksivna je jer je svaki broj djeljiv sam sa sobom, tranizitivna jer svaki broj dijeli višekratnik svog višekratnika, i antisimetrična je, jer ukoliko su dva broja uzajamno djelioci, tad su oni jednaki). Odaberimo tako npr. podskup skupa N: A={2,3,6,12,24}. Brojevi 2 i 3 su minimalni elementi u tom skupu (prema uređaju uspostavljenom relacijom "dijeli"), ali nisu uporedivi, pa ne postoji najmanji element. Naravno, tvrdnja se može dalje generalizirati na svaki podskup skupa N od najmanje dva elementa koji ne sadrži broj jedan i u kome su barem dva elementa uzajamno prosta.

Zad. 3. Riješite nejednačinu $\left|\frac{x+4}{ax+b}\right| > \frac{1}{x}$, gdje su $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, \dots , 9\}$, takvi da $\overline{ab}$ označava redni broj dana u mjesecu vašeg datuma rođenja.

Rješenje:
Za zadane parametre a i b je poznato da su nenegativni cijeli brojevi, te da nisu istovremeno jednaki nuli.Pri tome razlikujemo dva slučaja, kad je a jednako nuli i kada je a različito od nule.

1. **Slučaj:** $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\left|\frac{x+4}{ax+b}\right| > \frac{1}{x}$

Definiciono područje : $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{-b}{a}, 0\right\}$.

1.1. $x < 0$

Za x<0 nejednakost je uvijek zadovoljena, jer je lijeva strana jednačine zbog znaka apsolutne vrijednosti uvijek veća od nule ili jednaka nuli, a desna strana nejdnačine je manja od nule.

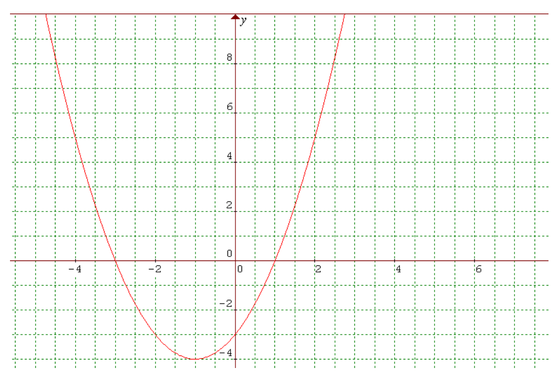
$\boldsymbol{x} \in \left(-\infty, \frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right) \cup \left(\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{0}\right)$ za slučaj b=0 svodi se na: $x \in (-\infty, 0)$

1.2. $x > 0$

Za slučaj $x > 0$, zbog osobina parametara a i b vrijedi $x + 4 > 0 \ i \ ax + b > 0$, pa nejednačina prima oblik:

$$\frac{x+4}{ax+b} - \frac{1}{x} > 0$$
$$\frac{x^2+4x-ax-b}{(ax+b)x} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + 4x - ax - b > 0$$

Za binom $x^2 + 4x - ax - b$ vrijedi a=1 i D=$(4 - a)^2 + 4b$ što je zadane vrijednosti a, b uvijek D≥ 0, pa vrijedi:



$$x_1 = \frac{-(4-a)-\sqrt{(4-a)^2+4b}}{2} \leq 0$$
$$x_2 = \frac{-(4-a)+\sqrt{(4-a)^2+4b}}{2} \geq 0$$
$$\boldsymbol{x} \in \{(\boldsymbol{0}, \infty) \cap \{(-\infty, \boldsymbol{x_1}) \cup (\boldsymbol{x_2}, \infty)\}\} = \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_2}, \infty)$$

Rješenje:
$\boldsymbol{x} \in \left(-\infty, \frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right) \cup \left(\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{0}\right) \cup (\boldsymbol{x_2}, \infty)$

2. **Slučaj:** $\boldsymbol{a = 0}$**,** $\left|\frac{x+4}{b}\right| > \frac{1}{x}$

Definiciono područje : $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

2.1. $x < 0$

Za x<0 nejednakost je uvijek zadovoljena jer je lijeva strana jednačine zbog znaka apsolutne vrijednosti uvijek veća od nule ili jednaka, a desna strana nejdnačine je manja od nule.

$\boldsymbol{x} \in (-\infty, \boldsymbol{0})$

2.2. $x > 0$

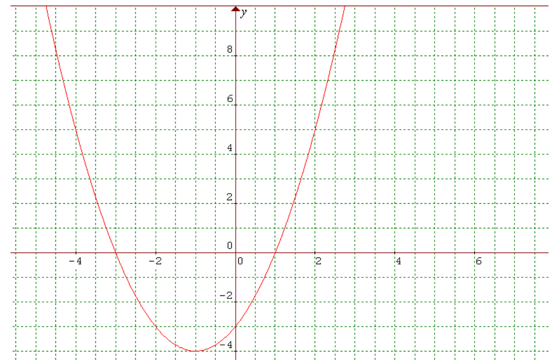
Za slučaj $x > 0$, zbog osobina parametara b vrijedi $x + 4 > 0 \ i \ b > 0$, pa nejednačina prima oblik:

$$\frac{x+4}{b} - \frac{1}{x} > 0$$
$$\frac{x^2+4x-b}{bx} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + 4x - b > 0$$

Za binom $x^2 + 4x - b$ vrijedi a=1 i D=$16 + 4b$ što je zadane vrijednosti b uvijek pozitivno, pa vrijedi:

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{16+4b}}{2} < 0$

$x_2 = \frac{-4+\sqrt{16+4b}}{2} \geq 0$



$\boldsymbol{x} \in \{(\mathbf{0}, \infty) \cap \{(-\infty, \boldsymbol{x_1}) \cup (\boldsymbol{x_2}, \infty)\}\} = \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_2}, \infty)$

Rješenje:
$\boldsymbol{x} \in (-\infty, \mathbf{0}) \cup (\boldsymbol{x_2}, \infty)$

Zad. 4. Dokažite da je $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ prirodan broj za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje:

$$\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}(n+1-n) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}(n+1) - n\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$
$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Izraz $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ je moguće napisati u obliku razlike dva binomna koeficijenta. Poznato je da su binomni koeficijenti prirodni brojevi pa je njihova razlika sigurno cijeli broj. Sada je potrebni pokazati da je taj broj nenegativan cijeli broj, tj. prirodan broj. U 2n-tom redu Paskalovog trugla imamo 2n+1, pri čemu svaki red počinje sa članom 1, potom vrijednosti članova rastu i dosežu svoj maksimum za odabrano n na sredini reda, te zatim ponovo opadaju ka 1. U 2n-tom redu najveći član je $\binom{2n}{n}$, pa je stoga član $\binom{2n}{n-1}$ sigurno manji od njega, te je njihva razlika nenegativan cijeli broj, odnosno prirodan broj.

Zad. 4′. Nađite maksimalni sabirak razvoja (po *Newtonovoj* binomnoj formuli) izraza

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^{2n+1}, (n \in \mathbf{N})$$

Rješenje: Koristreći binomnu formulu dobijemo :

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} n^k \left(\frac{1}{n}\right)^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} n^{2n+1-2k}$$

Za odabranu vrijednost n, $n \in \mathbf{N}$ vrijednost izraza n^{2n+1} je fiksirana. Dakle potrebno je odrediti takvo k da je vrijednost k+1 člana u razvoju $\binom{2n+1}{k} n^{2n+1-2k}$ maksimalna. Posmatrajmo sabirke ove sume za različite vrijednosti n.

Za n=1:

$k = 0 \qquad T_1 = \binom{2+1}{0} 1^{2+1-0} = \binom{3}{0} 1 = 1$

$k = 1 \qquad T_2 = \binom{2+1}{1} 1^{2+1-2} = \binom{3}{1} 1 = 3$

$k = 2 \qquad T_3 = \binom{2+1}{2} 1^{2+1-4} = \binom{3}{2} 1 = 3$

$k = 3 \qquad T_4 = \binom{2+1}{3} 1^{2+1-6} = \binom{3}{3} 1 = 1$

Maksimalni članovi razvoja su $T_2 = T_3 = 3$ za k=1 i k=2.

Za n=2:

$k = 0$ $\quad T_1 = \binom{5}{0}2^{5-0} = 32$

$k = 1$ $\quad T_2 = \binom{5}{1}2^{5-2} = 40$

$k = 2$ $\quad T_3 = \binom{5}{2}2^{5-4} = 20$

$k = 3$ $\quad T_4 = \binom{5}{3}2^{5-6} = 5$

$k = 4$ $\quad T_5 = \binom{5}{4}2^{5-8} = \frac{5}{8}$

$k = 5$ $\quad T_6 = \binom{5}{5}2^{5-10} = \frac{1}{32}$

Maksimalni sabirak razvoja je $T_2 = 40$ za k=1.

Razmatranjem brojeva n većih od 2 intuitivno zaključujemo da je prvi sabirak razvoja najveći, tj. da za $n > 2$ vrijedi nejednakost:

$\binom{2n+1}{k}n^{2n+1-2k} \leq \binom{2n+1}{0}n^{2n+1}$ $\quad \forall k, 0 \leq k \leq 2n+1$, gdje $n > 2, n \in \mathbb{N}$

$\binom{2n+1}{k}n^{-2k} \leq 1$

$\binom{2n+1}{k} \leq n^{2k}$

Prethodnu tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po k:

1. Ispitajmo da li je tvrdnja tačna za k=0 i k=1:

Za k=0: $\binom{2n+1}{0} \leq n^0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 1$

Za k=1: $\binom{2n+1}{1} \leq n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2n+1 \leq n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq (n-1)^2$ što je tačno za svako n, $n > 2, n \in \mathbb{N}$

2. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za k=p:

$\binom{2n+1}{p} \leq n^{2p}$

3. Na osnovu pretpostavke da tvrdnja vrijedi za k=p, dokažimo da tvrdnja vrijedi za k=p+1:

$\binom{2n+1}{p+1} \leq n^{2p+2}$

$\binom{2n+1}{p+1} = \frac{(2n+1)!}{(p+1)!(2n-p)!} = \frac{(2n+1)!(2n-p+1)}{(p+1)p!(2n-p+1)!} = \binom{2n+1}{p}\frac{(2n-p+1)}{(p+1)} \leq n^{2p}\frac{(2n-p+1)}{(p+1)}$

$n^{2p}\frac{(2n-p+1)}{(p+1)} \leq n^{2p+2}$

Sada se relacija 3. svodi na dokazivanje sljedeće nejednakosti:

$2n - p + 1 \leq n^2(p+1)$

$n^2(p+1) - 2n + (p-1) \geq 0$

Koeficijent uz najstariji član polinoma je pozitivan. Diskriminanta kvadratne jednačine D je jednaka: $D = 4 - 4(p+1)(p-1) = -4p^2 \leq 0$, pa slijedi da je nejednakost $2n - p + 1 \leq n^2(p+1)$ zadovoljena za svako n, $n > 2, n \in \mathbb{N}$, odnosno da za k=p+1 vrijedi $\binom{2n+1}{p+1} \leq n^{2p+2}$

4. Na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi $\forall k, 0 \leq k \leq 2n+1$, gdje $n > 2, n \in \mathbb{N}$

Slijedi da je za n>2, maksimalan sabirak u binomnom razvoju : $T_1 = n^{2n+1}$