Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet

Rješenje domaće zadaće 2

Inženjerska matematika 1

Harun Šiljak

Decembar 2009.

Zad 1. U sljedećem izrazu izvršite sve naznačene operacije u skupu kompleksnih brojeva:

$$\frac{\left(\text{cis}\frac{\pi}{5}\right)^{19}(3-j\sqrt{3})^p}{\left(\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)^5}$$

gdje je j imaginarna jedinica, a 1) $p=\frac{1}{2}$, 2) p je ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.

Rješenje Općenito, $S=\frac{\left(\text{cis}\frac{\pi}{5}\right)^{19}(3-j\sqrt{3})^p}{\left(\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)^5}=2\sqrt{3}\frac{e^{\frac{19\pi}{5}j}e^{\frac{-p\pi}{6}j}}{e^{\frac{5\pi}{6}j}}$. Za slučaj cjelobrojne vrijednosti p, kakva je broj bodova na prijemnom ispitu, imamo: $S=(2\sqrt{3})^p e^{\left(\frac{29}{30}-\frac{p}{6}\right)\pi j}$. Ukoliko se pak radi o racionalnoj, necjelobrojnoj vrijednosti, tada moramo koristiti Moivreovu formulu za korjenovanje, čime dobijamo više vrijednosti. Tako za $p=\frac{1}{2}$ imamo $S_k=\sqrt{2\sqrt{3}}e^{\frac{29}{30}\pi j}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2})$, $k=0\vee k=1$. Uvrštavanjem dobijamo $S_1=\sqrt{2\sqrt{3}}e^{\left(\frac{29}{30}-\frac{1}{12}\right)\pi j}=\sqrt{2\sqrt{3}}e^{\left(\frac{53}{60}\right)\pi j}$, te drugu moguću vrijednost $S_2=\sqrt{2\sqrt{3}}e^{\left(\frac{29}{30}+\frac{-\frac{1}{6}+2}{2}\right)\pi j}=\sqrt{2\sqrt{3}}e^{\left(\frac{113}{60}\right)\pi j}=\sqrt{2\sqrt{3}}e^{\left(-\frac{7}{60}\right)\pi j}=-\sqrt{2\sqrt{3}}e^{\left(\frac{53}{60}\right)\pi j}$.

Zad 2. Dokažite da redovi $\sum_{n\geq 1}a_n$, $\sum_{n\geq 1}b_n$, $\sum_{k\geq 1}c_k$ konvergiraju ako je $a_n=\frac{\sin\frac{3-4n}{6}\pi}{2^{n+1}}$, $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $c_k=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{4k}$, $(\forall n,k\in\mathbb{N})$, te izračunajte sumu reda $\sum_{n\geq 1}a_n$ i dokažite činjenicu: iako redovi $\sum_{n\geq 1}b_n$ i $\sum_{k\geq 1}c_k$ sadrže iste sabirke, njihove sume su različite.

Rješenje $\sin\frac{3-4n}{6}\pi=\cos\frac{2n\pi}{3}=\begin{cases}1, & n\equiv 0(\text{mod }3)\\ -\frac{1}{2}, & n\equiv 1(\text{mod }3)\\ -\frac{1}{2}, & n\equiv 2(\text{mod }3)\end{cases}$. Naš polazni red je ekvivalentan razlici redova $\sum_{n\geq 1}p_n$ i $\sum_{n\geq 1}q_n$, pri čemu su $p_n=\frac{-\frac{1}{2}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2^{n+2}}$, $q_n=\frac{\frac{3}{2}}{2^{3n+1}}=\frac{3}{2^{3n+2}}$. Ovi redovi konvergiraju (radi se o geometrijskim redovima - njihova konvergencija se može pokazati i poredbenim ili korjenim kriterijem), pa i naš polazni red konvergira. Možemo ih odmah i sumirati: $\sum_{n=1}^{\infty}p_n=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=-\frac{1}{4}$, $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}-1\right)=\frac{3}{14}$, pa je $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{3}{28}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{7}$.

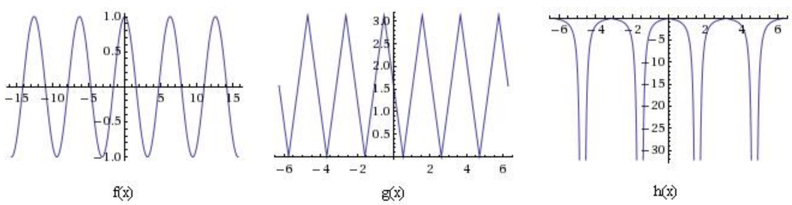
Što se reda $\sum_{n\geq 1}b_n$ tiče, on konvergira po Leibnizovom kriteriju i ima sumu $\ln 2$ (Dokaz: Poznato je da je $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$, pa kako je suma našeg reda $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{[n/2]}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\gamma+\ln n-\gamma-\ln\frac{n}{2}\right)=\ln 2$). Red $\sum_{k\geq 1}c_n$ konvergira po Raabeovom kriteriju (Dokaz: ako red $\sum_{k\geq 1}c_n$ konvergira, tada konvergira i red $\sum_{k\geq 1}(-c_n)$. Očito je da su svi sumandi ovog reda $d_n=-c_n$ pozitivni, pa za red važe kriteriji za pozitivne redove.

$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{d_k}{d_{k+1}}-1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{1}{k}+\frac{6}{2k-1}-1\right) = 2 > 1$, pa red konvergira). Njegovu suma je $\frac{\ln 2}{2}$ (Dokaz: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$. Već smo zaključili da $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \ln 2$, pa je $\sum_{k=1}^{\infty} c_n = \frac{\ln 2}{2}$). Dakle, pokazali smo da su sume ovda dva reda različite, još ostaje da pokažemo da sadrže iste članove. Članovi reda $\sum b_n$ su recipročne vrijednosti svih prirodnih brojeva, s predznakom plus u slučaju neparnih, i predznakom minus u slučaju parnih brojeva. Opći član $\sum c_n$ je $c_k = \frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{4k}$. $2k-1$ je neparan broj, predznak recipročne vrijednosti je plus. $2(2k-1)$ je paran broj koji nije djeljiv sa 4, dok je $4k$ paran broj djeljiv sa 4 - u oba slučaja, predznak je minus. Sa ove tri forme predstavljeni su svi prirodni brojevi tačno jednom, sa odgovarajućim predznacima, pa su sabirci ova dva reda isti.

Zad 3. Odredite (prirodni) domen, ispitajte ograničenost, parnost/neparnost, periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odredite osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g, h, k jedne realne promjenljive zadanih formulama $f(x) = \cos|x|$, $g(x) = \arccos(\sin 3x)$, $h(x) = \frac{1}{\ln \sin^2 x}$, $k(x) = 6\sin(3x+10)+\cos^4 x+\sin^4 x$. Zatim skicirajte grafike zadanih funkcija f, g, h.

Rješenje Domen funkcija f , g i k je skup $\mathbb{R}$, dok funkcija h nije definirana za $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ jer je funkcija h kompozicija funkcija $\sin^2$, ln i $\frac{1}{x}$ a funkcija ln nije definirana za argument $0 = \sin^2 k\pi$, dok funkcija $\frac{1}{x}$ nije definirana za argument $0 = \ln\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ova dva sjedinjena uvjeta daju $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Što se ograničenosti tiče, funkcija h nije ograničena zbog beskonačnih vrijednosti u tačkama prekida. Ostale funkcije su ograničene (funkcije cos i arccos su ograničene same po sebi, pa su funkcije f i g ograničene, dok je funkcija k ograničena kao suma ograničenih (trigonometrijskih) funkcija). Kako vrijedi $\cos|x| = \cos|-x|$, te $\arccos(\sin(-3x)) \neq \arccos(\sin 3x)$ i $\arccos(\sin(-3x)) \neq -\arccos(\sin 3x)$, funkcija f je parna, dok funkcija g nije ni parna ni neparna. Nadalje, kako je $\frac{1}{\ln\sin^2(-x)} = \frac{1}{\ln\sin^2 x}$, funkcija h je parna. Funkcija k nije ni parna ni neparna, pošto $6\sin(-3x+10)+\cos^4(-x)+\sin^4(-x) \neq 6\sin(3x+10)+\cos^4 x+\sin^4 x$ te $6\sin(-3x+10)+\cos^4(-x)+\sin^4(-x) \neq -(6\sin(3x+10)+\cos^4 x+\sin^4 x)$. Ostaje još da pokažemo da su sve četiri funkcije periodične. Pri tome ćemo koristiti činjenicu da je suma periodičnih funkcija periodična funkcija akko su periodi sumanada samjerljivi, a osnovni period takve funkcije je NZS perioda sumanada. Kako je $\cos|x| = \cos x$, to je funkcija f periodična, sa osnovnim periodom $T = 2\pi$. Nadalje, $\arccos(\sin 3x) = \arccos(\sin 3(x+p))$ kao rješenje daje $p = \frac{2k\pi}{3}$, pa je naša funkcija periodična sa periodom $T = \frac{2\pi}{3}$. Što se funkcije h tiče, periodična je sa periodom $T = \pi$, jer je to period funkcije $\sin^2 x$ (jer je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, a period funkcije $\cos 2x$ je π). Konačno, funkciju k zapišimo kao $k(x) = 6\sin(3x+10)+\cos^4 x+\sin^4 x = 6\sin(3x+10)+(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$. Dalje je $k(x) = 1+6\sin(3x+10)-\frac{1}{2}\sin^2 2x = 1+6\sin(3x+10)-\frac{1-\cos 4x}{4}$, pa imamo sumu dvije periodične funkcije, osnovnih

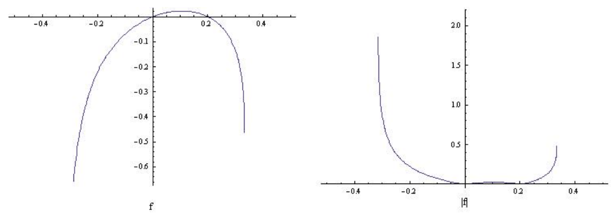


Slika 1: Funkcije f,g,h

perioda $\frac{2\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{2}$, pa je osnovni period funkcije f $T = 2\pi$. Grafici traženih funkcija su prikazani na slici 1.

Zad 4. Odredite (prirodni) domen Dom (g_a) za svaku od funkcija g_a iz familije $(g_a : a \in -2, -1 \cup (0, +\infty)), g_a(x) = \log_a(x + \sqrt{1 - 9x^2})$ realnih funkcija jedne realne promjenljive, a zatim za funkciju $f(x) = g_{10}(x)$ odredite eventualne presjeke njenog grafika sa osama Ox i Oy, skup $\{x \in \text{Dom } (f) : f(x) \geq 0\}$,eventualne horizontalne i vertikalne asimptote njenog grafika, granične vrijednosti $\lim_{x \to 0\pm} \frac{f(x)}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}}$ i sliku (rang) Im (f), a zatim (bez primjene diferencijalnog računa) skicirajte grafike (njegove moguće dijelove) funkcija f i $|f|$.

Rješenje Domen funkcija g_a za $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ jeste skup svih realnih brojeva x za koje je $1 - 9x^2 \geq 0$ i $x + \sqrt{1 - 9x^2} > 0$, što znači da je, iz prve nejednakosti $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$, a iz druge slijedi $x > -\frac{1}{\sqrt{10}}$, pa je Dom $(g_a) : x \in (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3}]$. U slučaju $a = 1$, uvjetno rečeno, domenu funkcije $\log_1 t$ $(t = x + \sqrt{1 - 9x^2})$ bi mogla pripadati isključivo tačka $t = 1$ (odnosno tačke $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{1}{5}$). Međutim, prema definiciji logaritma kao inverzne funkcije eksponencijalnoj, $\log_1 1$ može biti bilo koji realni broj, pa je funkcija u toj tački višeznačna (pri čemu uzima sve vrijednosti iz $\mathbb{R}$). Ukoliko želimo realni logaritam posmatrati kao isključivo jednoznačnu funkciju, tad kodomen moramo svesti na jednu tačku iz skupa $\mathbb{R}$. U slučaju $a = -1$, jedina dva realna broja za koja bi izraz $\log_{-1} t$ mogao imati smisla jesu $t_1 = -1$ i $t_2 = 1$, ali tada se opet javlja beskonačna višeznačnost, jer je $\log_{-1} -1$ svaki neparni cijeli broj, a $\log_{-1} 1$ svaki parni cijeli broj. Međutim, primjetimo da je $t = x + \sqrt{1 - 9x^2} \neq -1 \; \forall x$, pa ostaje jedino moguće $t = 1$ (odnosno $x_1 = 0,\; x_2 = \frac{1}{5}$). Dalje rezonovanje je analogno slučaju za bazu jedan: da bi se postigla jednoznačnost, kodomen se mora svesti na jednu tačku iz skupa parnih cijelih brojeva. Što se baze -2 tiče, postoji diskretan skup $A = \{a | a = (-2)^{\frac{p}{q}},\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \wedge 2 \nmid q\}$ koji bi mogao poslužiti kao domen za koji $\log_{-2} t$ $(t \in A)$ ima smisla. Rješavanjem jednakosti po t dobijamo da su ove tačke domena predstavljene sa $x = \frac{1}{20} (-1)^{\frac{p}{q}} 2^{\frac{p}{q}+1} \pm \sqrt{10 - 9 \cdot (-2)^{\frac{2p}{q}}}$, pri čemu je poznato da je $-\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{10}}{3}$, čime možemo ograničiti $\frac{p}{q}$. Međutim, pronalaženje tačnih granica za $\frac{p}{q}$ se pokazuje kao prilično složen dio proračuna



Slika 2: Grafici funkcija f i $|f|$

(sa podslučajevima za parne, neparne, pozitivne, negativne vrijednosti p), pa isti nećemo ovdje navesti.

Međutim, napomenimo da se u literaturi može naći mišljenje o nedefiniranosti logaritama s negativnom bazom, prema kom $\log_{-2} x$ i $\log_{-1} x$ nisu definirani.

Što se traženih osobina funkcije f tiče, izjednačavanjem funkcije s nulom dobijamo presjek s apscisnom osom u tačkama $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{1}{5}$, a izjednačavanje argumenta funkcije s nulom daje presjek s ordinatnom osom $f(0) = 0$. Kako funkcija nema prekida na domenu, to ona ima konstantan znak između tačaka presjeka s apscisnom osom. Pokazuje se da je u tom segmentu (tj $[0, \frac{1}{5}]$) funkcija pozitivna, pa je to i traženi skup $\{x \in \text{Dom }(f) : f(x) \geq 0\}$. Horizontalna asimptota funkcije ne postoji, pošto se radi o ograničenom domenu. Vertikalna asimptota postoji na kraju domena - $\lim_{x \to -\frac{1}{\sqrt{10}}} f(x) = -\infty$. Što se ranga funkcije tiče, očito je da je donja međa $-\infty$, a da je gornja međa i maksimum funkcije neka pozitivna realna vrijednost koja funkcija dostiže u segmentu $[0, \frac{1}{5}]$. Rješavanjem kvadratne jednačine otkrivamo da se maksimum funkcije $x + \sqrt{1 - 9x^2}$, pa samim tim i funkcije f nalazi u tački $x = \frac{1}{3\sqrt{10}}$. Tada je $f(\frac{1}{3\sqrt{10}}) = \log \frac{\sqrt{10}}{3}$. Dakle, Im $f : (-\infty, \log \frac{\sqrt{10}}{3}]$.

$\lim_{x \to 0+} \frac{\log(x+\sqrt{1-9x^2})}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}} = |x + \sqrt{1-9x^2} = t| = \lim_{t \to 1} \frac{\log t}{t-1}$. Prema poznatoj asimptotskoj relaciji $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$, imamo $\lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{(t-1)\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}$.

$\lim_{x \to 0-} \frac{\log(x+\sqrt{1-9x^2})}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}} = \lim_{x \to 0-} \frac{\log(1-10x^2)-\log(-x+\sqrt{1-9x^2})}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}}$. Dalje imamo $\lim_{x \to 0-} \frac{\log(1-10x^2)}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}} - \lim_{x \to 0-} \frac{\log(-x+\sqrt{1-9x^2})}{-x-1+\sqrt{1-9x^2}}$. Za drugi limes znamo da je jednak $\frac{1}{\ln 10}$, dok je prvi jednak nuli, prema istoj asimptotskoj relaciji. Dakle, $\lim_{x \to 0-} \frac{\log(x+\sqrt{1-9x^2})}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{\ln 10}$.

Traženi grafici su prikazani na slici 2.