UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

DOMAĆA ZADAĆA 4

/Formulacije i rješenja zadataka/

- INŽENJERSKA MATEMATIKA 1 -

ak. 2009/2010.

Galijašević Sanel

Sarajevo, 24. 12. 2009.

Zad. 1. Primjenom *Taylorove formule* izračunajte graničnu vrijednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)-\sin(\sin x)}{\mathrm{tg}x-\sin x}$.

Rješenje:

Označimo traženu graničnu vrijednost sa L, tj. neka je

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)-\sin(\sin x)}{\mathrm{tg}x-\sin x}\ . \tag{*}$$

Za računanje ove granične vrijednosti dovoljno je uzeti razvoj funkcija po potencijama od x do člana x^4, i pri tome ćemo se koristiti specijalnim slučajem *Taylorove formule*-razvoj funkcije u okolini tačke x=0 (tzv. *Maclaurinova formula*) sa ostatkom u *Peanovom* obliku.

Prema Maclaurinovoj formuli za funkciju $f(x)=\sin x$ je

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\ (x\to 0)\,. \tag{1.1}$$

Analogno je za funkciju $f_1(x)=\sin(\sin x)$

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^4 x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^4) \tag{1.2.}$$

Uvrštavajući izraz sa desne strane relacije (1.1.) u izraz sa desne strane relacije (1.2.), dobijemo

$$\sin(\sin x)=\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]-\frac{1}{6}\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}\left[x^3+o(x^5)\right]+o(x^4)=$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4),\ (x\to 0)\,. \tag{1.3.}$$

Također, koristeći se Maclaurinovom formulom, za funkciju $g(x)=\mathrm{tg}(x)$ se dobije

$$\mathrm{tg}(x)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4),\qquad (x\to 0) \tag{1.4.}$$

odnosno, za funkciju $g_1(x)=\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)=\mathrm{tg}x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x+o(x^4)=\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right]+\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)=$$

$$=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^4),\ (x\to 0)\,. \tag{1.5.}$$

Uvrštavanjem relacija (1.1), (1.3.), (1.4.) i (1.5.) u (*) dobijemo

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{2}{3}x^3+o(x^4)-\left[x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right]}{x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]}=2\,.$$

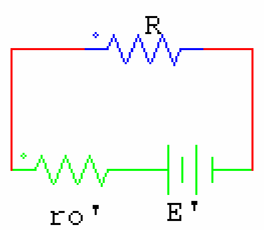
Dakle, tražena granična vrijednost je $L=2$.

Zad. 2. *Primjenom diferencijalnog računa riješite sljedeći zadatak*: "Kroz otpornik otpora $R=2\ \Omega$ treba uspostaviti stalnu struju čija je jačina tačno $I=2{,}1\ \mathrm{A}$. Raspolaže sa samo sa većim brojem identičnih akumulatora elektromotornih sila $\mathrm{E}_0=2{,}1\ \mathrm{V}$ i unutrašnjih otpornosti $r_0=1{,}5\ \Omega$. Odrediti najmanji broj (N) akumulatora koje treba vezati za krajeve otpornika zadanog otpora R da bi bili zadovoljeni uslovi postavljenog zadatka. Na koji način je potrebno vezati te akumulatore i koji je fizikalni smisao tako nađenog rješenja?"

Rješenje:

Prema uslovu zadatka treba uspostaviti stalnu (jednosmjernu, stacionarnu) električnu struju intenziteta od 2,1 A sa najmanjim brojem N akumulatorskih baterija, a to će se, očito, postići ako se otporniku zadane otpornosti R serijski (redno) veže kombinacija akumulatorskih baterija, koja je sastavljena od $\frac{N}{n}$ paralelnih veza (N je djeljivo sa n), gdje je svaka od tih veza sastavljena od n akumulatorskih baterija serijski povezanih.

Nakon provedenih (elementarnih) ekvivalencija u dobijenoj električnoj shemi (uključujući ekvivalentiranje realnog naponskog generatora /u ovom slučaju akumulatora/ u realni strujni generator i obrnuto, i/ili iskorištenje činjenice da će ekvivalentna elektromotorna sila svih paralelnih grana biti jednaka elektromotornoj sili u jednoj od tih grana, a ekvivalentni otpor jednak paralelnoj kombinaciji ekvivalentnih otpora po pojedinim granama) dobija se jednostavna električna shema (el. kolo ili krug, mada ni jedan od ovih naziva nije precizan, ali je, ipak, intuitivno jasan) prikazana na Slici 2.1.



Slika 2.1.

Sa $r_o^{'}$ je označena ekvivalentna otpornost unutrašnjeg otpora, i ona iznosi: $r_o^{'} = \frac{n^2 r_0}{N}$, dok je sa $E^{'}$ označen ekvivalentni naponski izvor, čija je vrijednost $E^{'} = nE_0$. Odnosno, serijska veza $E^{'}$ i $r_o^{'}$ predstavlja ekvivalentnu akumulatorsku bateriju.

Struja koja će poteći kroz otpornik otpornosti R je određena relacijom:

$$I = \frac{E^{'}}{R + r_o^{'}} = \frac{nE_0}{R + \frac{n^2 r_0}{N}} = \frac{nNE_0}{NR + n^2 r_0}.$$

Otuda je $N = N(n)$ određeno relacijom:

$$N = N(n) = \frac{n^2 r_0 I}{nE_0 - RI} \tag{2.1.}$$

Problem nalaženja najmanjeg broja N akumulatora koje treba vezati za krajeve otpornika zadanog otpora R se svodi na nalaženje minimuma funkcije $N = N(n)$, odnosno vrijednosti (nezavisno promjenljivog) broja n za koji funkcija $N(n)$ ima minimum.

Iz $\frac{dN}{dn} = 0 \Rightarrow n = \frac{2RI}{E_0} = 4$ (potreban uslov ekstrema), te budući da je (za date parametre) $\frac{d^2N}{dn^2} > 0$ (dovoljan uslov za postojanje (lokalnog) minimuma), to zaključujemo da će $N = N(n)$ imati minimalnu vrijednost za $n = 4$.

Za $n = 4$, prema (2.1.) dobijemo da je $N = 12$.

Primijetimo da (za $n = 4$, $N = 12$ i $r_0 = 1{,}5\ \Omega$) ekvivalentni unutrašnji otpor akumulatora iznosi $r_o^{'} = 2\ \Omega \Rightarrow r_o^{'} = R$.

Prema tome, fizikalni smisao ovako nađenog rješenja se sastoji u tome da unutrašnji otpor akumulatorske baterije mora biti, po mogućnosti, što bliži vanjskom otporu; odnosno, nastoji se uspostaviti ekvivalentna akumulatorska baterija čija je unutrašnja otpornost jednaka vanjskom otporu (ili joj je što bliža), kroz koji treba uspostaviti zadanu vrijednost struje (a da pri tome N bude minimalan).

Zad. 3. Nađite prve i druge izvode funkcije

$$f(x) := \begin{cases} x^3\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

pa na primjeru te funkcije zaključite da iz činjenice da kriva u nekoj tački „prelazi“ s jedne na drugu stranu svoje tangente još ne slijedi da joj je ta tačka prevojna.

Rješenje:

Prvi izvod (izvod prvog reda) zadane funkcije f na njenom prirodnom domenu $\mathrm{Dom}(f)$ tj. na skupu $\mathbf{R}$ je:

1° Za $x \neq 0$, primjenom poznatih pravila deriviranja, imamo:

$$f'(x) = 3x^2\left(2+\sin\frac{1}{x^2}\right) + x^3\cos\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right) = 6x^2 + 3x^2\sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

2° Za $x = 0$, po definiciji prvog izvoda u tački $x = 0$, dobije se

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = 0, \quad x = 0.$$

Drugi izvod (izvod drugog reda) zadane funkcije f na njenom prirodnom domenu $\mathrm{Dom}(f)$ tj. na skupu $\mathbf{R}$ je:

1° Za $x \neq 0$, primjenom poznatih pravila deriviranja, dobije se

$$f''(x) = 12x + 6x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}\cos\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

2° Za $x = 0$, po definiciji drugog izvoda u tački $x = 0$, imamo:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^2+3x^2\sin\dfrac{1}{x^2}-2\cos\dfrac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(6x + 3x\cdot\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right) =$$

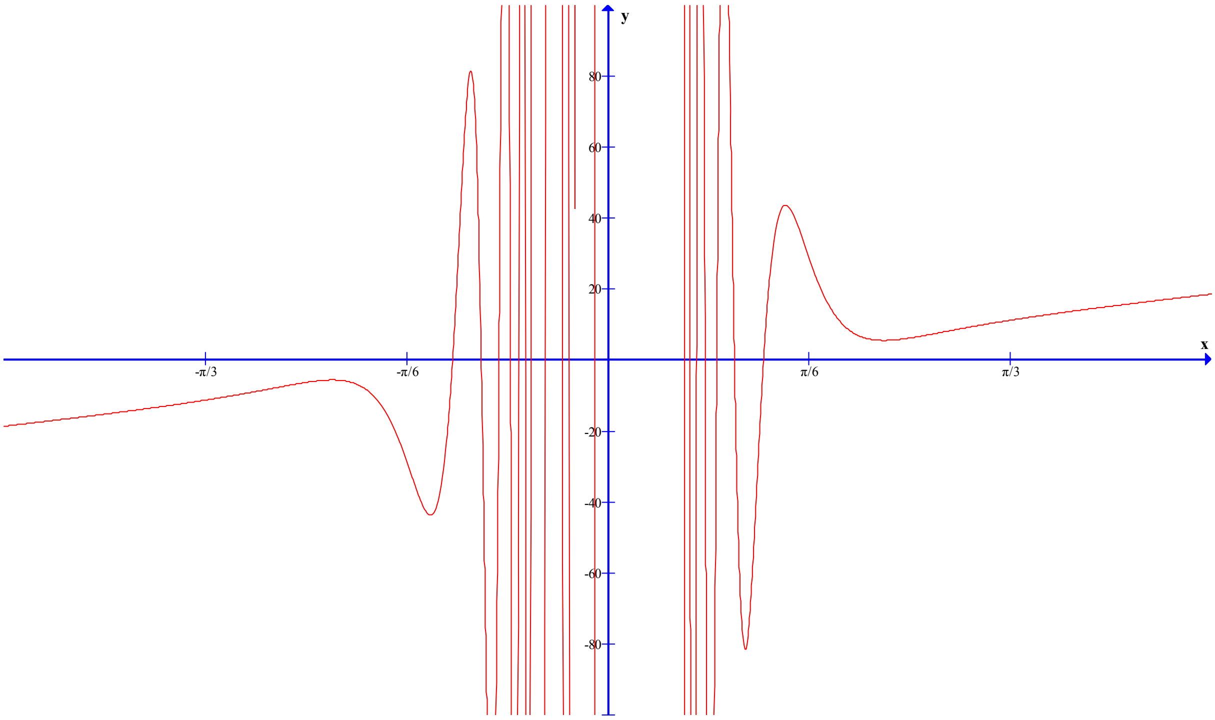
$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\cos\dfrac{1}{x^2}}{x}.$$

Budući da $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$ ne postoji, to ne postoji ni drugi izvod zadane funkcije f u tački $x = 0$, tj. $f''(0)$ ne postoji.

Pokažimo sada da grafik funkcije f "prelazi" s jedne na drugu stranu svoje tangente. U tom smislu odredimo znak funkcije f .

Kako je izraz $2+\sin\frac{1}{x^2}>0$ za $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)\setminus\{0\}$, to je $f(x)<0$ za $\forall x<0$, a $f(x)>0$ za $\forall x>0$. Nadalje, $f(x)=0$ za $x=0$.
Tangenta na grafik zadane funkcije u tački $x=0$ je sa koeficijentom pravca $k=f'(0)=0$, pa joj je jednačina (u tački $O(0,0)$) $y=0$, tj. tangenta na grafik zadane funkcije u tački $x=0$ se poklapa sa x - osom. Otuda za $x<0$ kriva $y=f(x)$ se nalazi ispod tangente, a za $x>0$ kriva $y=f(x)$ se nalazi iznad tangente, tj. kriva $y=f(x)$ u tački $x=0$ "prelazi" s jedne na drugu stranu svoje tangente (čija je jednačina $y=0$).

Ispitajmo sada da li je tačka $x=0$ prevojna tačka (tačka infleksije).
Kako je već pokazano, drugi izvod funkcije f ne postoji u tački $x=0$, čime je zadovoljen potreban uslov da bi tačka $x=0$ bila prevojna (tačka).
Primijetimo da ne postoje otvoreni intervali oblika $(-h,0)$ i $(0,h)$, $h>0$ na kojm bi funkcija $f''(x)$ bila konstantnog znaka (tj. da je na jednom od intervala važi $f''(x)>0$ /funkcija f konveksna/, a na drugom od intervala da je $f''(x)<0$ /funkcija f konkavna/), što se vidi i sa Slike 3.1.
Stoga, tačka $x=0$ nije prevojna tačka funkcije f (iako je zadovoljen potreban uslov da bi ista bila prevojna tačka).



Slika 3.1. *Dio grafika funkcije* $f''(x)$

Na osnovu svega zaključujemo da iako kriva $y=f(x)$ u tački $x=0$ "prelazi" s jedne na drugu stranu svoje tangente, ona (tačka $x=0$), ipak, nije prevojna tačka.
Stoga, u opštem slučaju, iz činjenice da kriva u nekoj tački „prelazi“ s jedne na drugu stranu svoje tangente još ne slijedi da joj je ta tačka prevojna.

Napomena:

Većina studenata pri izradi ovog zadatka je zaključak da tačka $x = 0$ nije apscisa prevojne tačke grafika funkcije f izvela iz činjenice da drugi izvod funkcije f ne postoji u tački $x = 0$, što je, naravno, potpuno pogrešno, jer potreban uslov da bi neka tačka $x = x_0$ bila apscisa prevojne tačke jest da je drugi izvod funkcije f jednak nuli ili da ne postoji u toj tački (analogno određivanju lokalnih ekstrema funkcije f).

S tim u vezi, predlažem da se studentima, koji su napravilu ovakvu elementarnu grešku, dodijeli maksimalno 0,3 poena (za ovaj zadatak) iako, možda, imaju ISPRAVNO urađene ostale dijelove ovog zadatka.

Zad. 4. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x) := \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 + \lfloor n/2 \rfloor}{x^2 - \lfloor n/2 \rfloor}$, gdje je n ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prvom parcijalnom ispitu iz IM1 održanom 8. 11. 2009.

a) Odredite prirodni domen $\mathrm{Dom}(f)$, a zatim ispitajte ponašanje zadane funkcije f na rubovima područja $\mathrm{Dom}(f)$ i odredite njene eventualne asimptote.

b) Odredite eventualne presjeke grafika $\mathrm{G}(f)$ sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.

c) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f.

d) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika.

e) Odredite uglove pod kojim grafik zadane funkcije "*ulazi*" i "*izlazi*" iz eventualnih njenih singularnih tačaka i tačaka njenog domena u kojima ne postoji njen izvod.

f) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.

g) Primjenom dobijenih rezultata u a) - e) nacrtajte grafik zadane funkcije f i odredite sliku $\mathrm{Im}(f)$.

h) Nađite dužine *dodirnih elemenata* grafika zadane funkcije f u svakoj od njegovih tačaka (u kojima ti elementi postoje).

Rješenje:

Zbog praktičnosti daljneg ispitivanja zadane funkcije f uvedimo oznaku $a = n/2$ uz ograničenje $a \in \{0,1,2,...,10\}$. Tada polazni izraz za zadanu funkciju f možemo napisati u obliku

$$f(x) := \operatorname{arctg}\frac{x^2 + a}{x^2 - a}. \qquad (*)$$

Za $a = 0$ imamo trivijalan slučaj, jer relacija (*) postaje $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ za $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ovako definirana funkcija ima otklonjiv singularitet u tački $x = 0$.

a)

Prirodni domen:

$$\mathrm{Dom}(f)=\left\{x\in\mathbf{R}:x^2-a\neq 0\right\}\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\left(-\infty,-\sqrt{a}\right)\cup\left(-\sqrt{a},\sqrt{a}\right)\cup\left(\sqrt{a},+\infty\right).$$

Ispitajmo sada ponašanje funkcije f na rubovima područja $\mathrm{Dom}(f)$, tj. nađimo slijedeće granične vrijednosti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}\frac{x^2+a}{x^2-a}=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}\frac{1+\frac{a}{x^2}}{1-\frac{a}{x^2}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{a}-} f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{a}-}\operatorname{arctg}\frac{x^2+a}{x^2-a}=\frac{\pi}{2}.$$

Analogno dobijemo:

$$\lim_{x\to-\sqrt{a}+} f(x)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{a}-} f(x)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{a}+} f(x)=\frac{\pi}{2}$$

Na osnovu dobijenih graničnih vrijednosti zaključujemo da zadana funkcija ima horizontalnu asimptotu čija je jednačina

$$y=\frac{\pi}{4},$$

dok vertikalne i kose asimptote ne postoje.

b)

Eventualni presjek grafika funkcije f sa x - osom nalazimo iz jednačine:

$$\operatorname{arctg}\frac{x^2+a}{x^2-a}=0$$

$$\frac{x^2+a}{x^2-a}=\operatorname{tg}0=0$$

$$x^2+a=0.$$

Kako je $x^2+a\neq 0$ za $\forall x\in\mathbf{R}$ (uvažavajući dodatno ograničenje za a), to grafik zadane funkcije f nema presjeka sa x - osom.

Budući da tačka $x=0$ pripada $\mathrm{Dom}(f)$, to grafik zadane funkcije f ima presjek sa y - osom u tački $M\left(0,f(0)\right)\equiv M\left(0,-\frac{\pi}{4}\right)$.

Odredimo sada znak funkcije f.

Kako je $\operatorname{arctg}\frac{x^2+a}{x^2-a}>0 \Leftrightarrow \frac{x^2+a}{x^2-a}>0$, to je $f(x)>0$ za $\forall x\in\left(-\infty,-\sqrt{a}\right)\cup\left(\sqrt{a},+\infty\right)$.

Analogno dobijemo da je $f(x)<0$ za $\forall x\in\left(-\sqrt{a},\sqrt{a}\right)$.

c)

Zadana funkcija f je elementarna pa je neprekidna gdje je i definirana. Prema tome, funkcija f je neprekidna na cijelom skupu $\mathrm{Dom}(f)$.

Tačke gomilanja domena funkcije f koje mu ne pripadaju su $x=-\sqrt{a}$ i $x=\sqrt{a}$ pa su ovo singularne tačke funkcije f. Kako u obje ove tačke postoje konačne i međusobno različite granične vrijednosti, to su tačke $x=-\sqrt{a}$ i $x=\sqrt{a}$ tačke esencijalnog singulariteta prve vrste.

d)

Koristeći se poznatim pravilima deriviranja imamo da je

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+a}{x^2-a}\right)^2}\cdot\frac{2x(x^2-a)-2x(x^2+a)}{\left(x^2-a\right)^2}=-\frac{2ax}{a^2+x^4},\quad (\forall x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\right\}). \qquad (**)$$

Odavde vidimo da (ovako nađena-na osnovu poznatih pravila deriviranja) derivacija prvog reda postoji u svim tačkama prirodnog domena funkcije f (pri čemu uvažavamo prethodno uvedeno ograničenje za a).
Očigledno postoji samo jedna stacionarna tačka $x=0$. Nadalje, funkcija f je monotona po dijelovima $\left(-\propto,-\sqrt{a}\right)$, $\left(-\sqrt{a},0\right)$, $\left(0,\sqrt{a}\right)$ i $\left(\sqrt{a},+\propto\right)$ i to monotono rastuća na intervalima $\left(-\propto,-\sqrt{a}\right)$ i $\left(-\sqrt{a},0\right)$, a monotono opadajuća na intervalima $\left(0,\sqrt{a}\right)$ i $\left(\sqrt{a},+\propto\right)$. S tim u vezi, funkcija ima lokalni maksimum u tački presjeka sa y - osom (tj. za $x=0$), odnosno u tački $M\left(0,-\frac{\pi}{4}\right)$.
Zadana funkcija f nema apsolutnog ekstrem(um)a.
Kako za funkciju f postoji (prvi) izvod u svim tačkama prirodnog domena (kao konačan), to grafik zadane funkcije f nema "špiceva", tj. nema prelomnih tačaka kao ni povratnih tačaka (šiljak).

e)

Određivanje uglova pod kojim grafik zadane funkcije "*ulazi*" i "*izlazi*" iz eventualnih tačaka čije su apscise singularne tačke te funkcije ili tačke njenog (prirodnog) domena u kojima ne postoji njen izvod se svodi na određivanje svakog od uglova koji zaklapa odgovarajući granični položaj tangente grafika zadane funkcije (u svakoj ponaosob od tih tačaka, tj. u ovom slučaju u tački sa apscisom $x=-\sqrt{a}$ i u tački sa apscisom $x=\sqrt{a}$ budući da su to jedine singularne tačke funkcije f i da f ima izvod u svim tačkama njenog prirodnog domena) sa osom Ox u odnosu na njen pozitivni smjer.

Vrijednosti lijevog i desnog limesa izvoda (prvog reda) funkcije f' u tački $x=-\sqrt{a}$, prema relaciji (**), su međusobno jednake i iznose: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{a}-} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\sqrt{a}+} f'(x)=\frac{\sqrt{a}}{a}$.

Analogno za tačku $x=\sqrt{a}$ vrijedi da je $\lim\limits_{x\to\sqrt{a}-} f'(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{a}+} f'(x)=-\frac{\sqrt{a}}{a}$. S ciljem određivanja uglova pod kojim grafik zadane funkcije f "*ulazi*" i "*izlazi*" iz tačaka sa apscisama $x=-\sqrt{a}$ ili $x=\sqrt{a}$, označimo $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ sa φ_1. Kako je zadana funkcija f (strogo) rastuća na intervalu $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right)$, a $\lim\limits_{x\to-\sqrt{a}-} f(x)=\frac{\sqrt{a}}{a}$, to je ugao pod kojim grafik zadane funkcije "*ulazi*" u tačku sa apscisom $x=-\sqrt{a}$ određen sa $\varphi_{-\sqrt{a}-}=\varphi_1$. Nadalje, kako zadana funkcija (strogo) opada od tačke $x=-\sqrt{a}$, a $\lim\limits_{x\to-\sqrt{a}+} f(x)=\frac{\sqrt{a}}{a}$, to je i ugao pod kojim grafik zadane funkcije "*izlazi*" iz tačke sa apscisom $x=-\sqrt{a}$ određen sa $\varphi_{-\sqrt{a}+}=\varphi_1$. Potpuno analognim zaključivanjem dobijemo da je ugao pod kojim grafik zadane funkcije "*ulazi*" u tačku sa apscisom $x=\sqrt{a}$ određen sa $\varphi_{\sqrt{a}-}=\pi-\varphi_1$, a ugao pod kojim grafik zadane funkcije "*izlazi*" iz tačke sa apscisom $x=\sqrt{a}$ određen sa $\varphi_{\sqrt{a}+}=\pi-\varphi_1$.

Dakle, uglovi pod kojim grafik zadane funkcije "*ulazi*" i "*izlazi*" iz razmatranih tačaka su međusobno jednaki (u tim tačkama).

f)

Na osnovu poznatih pravila deriviranja dobijemo slijedeću relaciju

$$f''(x)=\frac{2\left(3ax^4-a^3\right)}{\left(a^2+x^4\right)^2}\quad,\ (\forall x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\right\}). \qquad (***)$$

Uzimajući u obzir usvojena ograničenja za a, vidimo da drugi izvod (druga derivacija ili, preciznije, izvod drugog reda ili derivacija drugog reda) zadane funkcije f postoji u svim tačkama prirodnog domena od f.

Nule drugog izvoda (određenog sa (***)) su u tačkama $\pm\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}$.

Kako je

$$f''(x)>0 \text{ za } x\in\left(-\infty,-\sqrt{a}\right)\cup\left(-\sqrt{a},-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},\sqrt{a}\right)\cup\left(\sqrt{a},+\infty\right),$$

$$f''(x)<0 \text{ za } x\in\left(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right),$$

to je funkcija f konveksna na intervalima $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right)$, $\left(-\sqrt{a},-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},\sqrt{a}\right)$ i $\left(\sqrt{a},+\infty\right)$, a konkavna na intervalu $\left(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)$. Otuda su prevojne tačke zadane funkcije f tačke $\mathrm{P}_1\left(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},f\left(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)\right)$ i $\mathrm{P}_2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},f\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)\right)$.

Odredimo sada $f\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)$:

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{a+\frac{a}{\sqrt{3}}}{-a+\frac{a}{\sqrt{3}}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}+1}\right)=p+q,\ (p+q)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}(p+q)=\frac{\operatorname{tg}(p)+\operatorname{tg}(q)}{1-\operatorname{tg}(p)\operatorname{tg}(q)}=\frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}+1}=\frac{-1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\Rightarrow \operatorname{tg}(p)=-1\wedge \operatorname{tg}(q)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow p=-\frac{\pi}{4}\wedge q=-\frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{12}$$

Zbog parnosti funkcije f imamo da je i $f\left(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}\right)=-\frac{5\pi}{12}$.

Konačno, prevojne tačke funkcije f su: $P_1\left(-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},-\frac{5\pi}{12}\right)$ i $P_2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}},-\frac{5\pi}{12}\right)$.

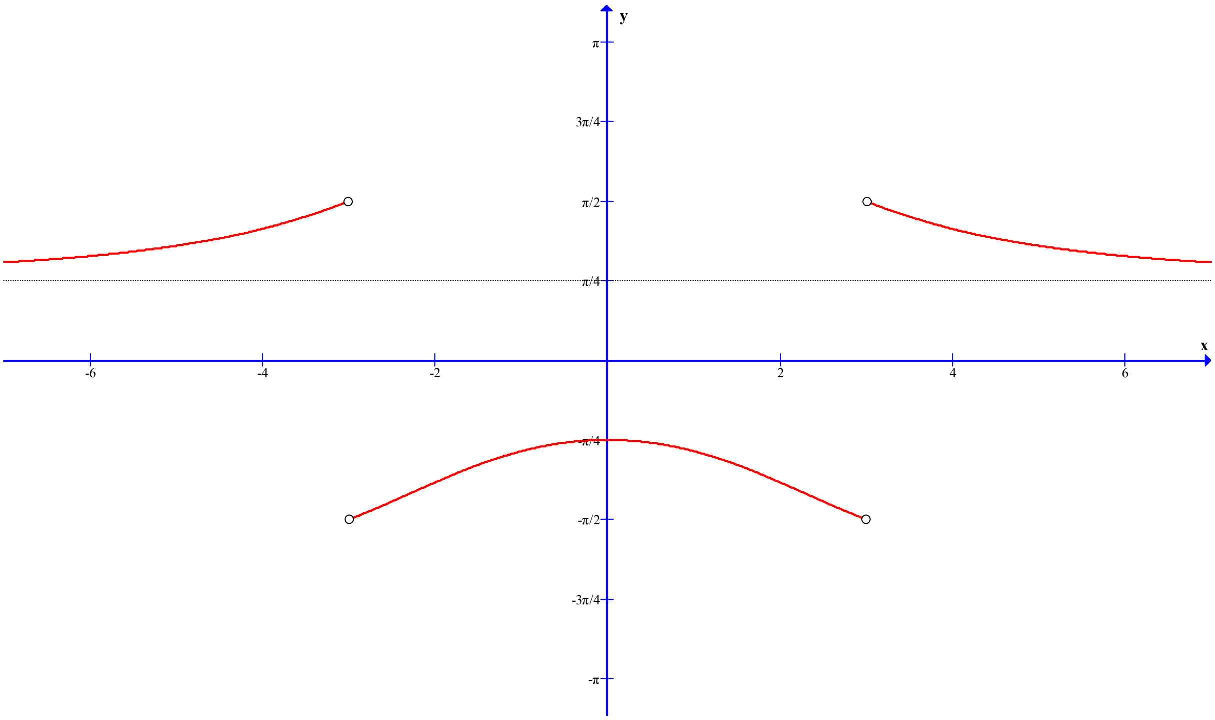
g)

Desno od tačke $x=\sqrt{a}$ funkcija f je (monotono) opadajuća. Između tačaka $x=-\sqrt{a}$ i $x=\sqrt{a}$ funkcija f ima maksimalnu vrijednost $f(0)=-\frac{\pi}{4}$. Lijevo od tačke $x=-\sqrt{a}$ funkcija f (monotono) raste do ove tačke. Kako su lijevi limes u tački $x=-\sqrt{a}$ i desni limes u tački $x=\sqrt{a}$ jednaki $\frac{\pi}{2}$, iz navedenog možemo zaključiti da je $\sup f(x)=\frac{\pi}{2}$. Potpuno analognim zaključivanjem dobijemo da je $\inf f(x)=-\frac{\pi}{2}$. Osim toga funkcija nikad ne dostiže vrijednost $\frac{\pi}{4}$ niti manje pozitivne vrijednosti, niti dostiže negativne vrijednosti veće od $-\frac{\pi}{4}$. Prema tome je slika $\operatorname{Im}(f)$ data sa

$$\operatorname{Im}(f)=\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right),$$

a ista se može odredita i sa grafika funkcije f.

Na osnovu dobijenih rezultata a) – e) možemo nacrtati grafik funkcije f (Slika 4.1.).



Slika 4.1. *Dio grafika funkcije* f *za slučaj* $a=9$

h)

Dužine dodirnih elemenata grafika funkcije f u svakoj od njegovih tačaka, tj. za $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right\}$ su:

- dužina tangente T

$$T = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1+(y')^2}$$

- dužina subtangente S_T

$$S_T = \left|\frac{y}{y'}\right|$$

- dužina normale N

$$N = |y|\sqrt{1+(y')^2}$$

- dužina subnormale S_N

$$S_N = |y \cdot y'|,$$

gdje je $y = f(x)$ definirano relacijom (*) i $y' = f'(x)$ definirano relacijom (**), a vrijednosti pojedinih dodirnih elemenata se dobiju uvrštavanjem $f(x)$ umjesto y i $f'(x)$ umjesto y' (u već napisane formule za njihovo izračunavanje).

--- @ ---