UNIVERZITET U SARAJEVU

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

DOMAĆA ZADAĆA 5

/Formulacije i rješenja zadataka/

- INŽENJERSKA MATEMATIKA 1 –

ak. 2009/2010.

Selma Grebović

Sarajevo, Decembar 2009. godine

Zad. 1. Za realnu funkciju f jedne realne promjenljive zadanu formulom:

a) $f(x):=\dfrac{1}{3x+\sqrt{5+8x-4x^2}}$; **b)** $f(x):=\dfrac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x+3\cos x}$;

c) $f(x):=\frac{1}{2}x^{2x+1}(1+x+x\ln x)$

ispitajte egzistenciju primitivne funkcije, a zatim izračunajte neodređeni integral $I(x):=\int f(x)dx$.

Rješenje:

a) Funkcija $f(x)$ je očito elementarna i kao takva neprekidna je na svom prirodnom domenu $Dom(f)$ pa ima tačnu primitivnu funkciju i neodređeni integral I na svakom razmaku E koji je podskup skupa $Dom(f)$, odnosno $E \subseteq Dom(f)$.

Treba odrediti $Dom(f)$

$$-4x^2+8x+5 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x+\sqrt{-4x^2+8x+5} \neq 0$$

$4x^2-8x-5 \leq 0$

$x_{1,2}=\dfrac{8 \pm \sqrt{144}}{8}$

$x_1=\dfrac{5}{2} \quad x_2=-\dfrac{1}{2}$

$x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$

$3x+\sqrt{-4x^2+8x+5} \neq 0$

$x \geq 0$

$x_1 \neq -\dfrac{5}{13}$

$Dom(f)=x \in \left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{13}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{13}, \dfrac{5}{2}\right]$

Uvođenjem smjene:

$\sqrt{-4x^2+8x+5}=t\left(\dfrac{5}{2}-x\right)$

ima se da je:

$$x^2(t^2+4)-x(5t^2+8)+\left(\frac{25}{4}t^2-5\right)=0, odnosno$$

$$x=\frac{1}{2}\frac{5t^2-4}{t^2+4}$$

pa je:

$$\sqrt{-4x^2+8x+5}=t\left(\frac{5}{2}-x\right)=t\left[\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\frac{5t^2-4}{t^2+4}\right]=t\left[\frac{5t^2+20-5t^2+4}{2(t^2+4)}\right]=\frac{24t}{2(t^2+4)}$$

$$\sqrt{-4x^2+8x+5}=\frac{12t}{(t^2+4)}$$

$$3x+\sqrt{-4x^2+8x+5}=\frac{15t^2-12}{2(t^2+4)}+\frac{24t}{2(t^2+4)}=\frac{3(5t^2+8t-4)}{2(t^2+4)}$$

$$dx=\frac{1}{2}\frac{10t(t^2+4)-2t(5t^2-4)}{(t^2+4)^2}dt=\frac{24t}{(t^2+4)^2}dt$$

Ima se integral:

$$I=\int\frac{2(t^2+4)}{3(5t^2+8t-4)}\frac{24t}{(t^2+4)^2}dt$$

$$I=16\int\frac{t}{(5t^2+8t-4)(t^2+4)}dt$$

$$\frac{t}{(5t^2+8t-4)(t^2+4)}=\frac{A}{(5t-2)}+\frac{B}{(t+2)}+\frac{Ct+D}{(t^2+4)}/\cdot(5t^2+8t-4)(t^2+4)$$

$$t\equiv A(t+2)(t^2+4)+B(5t-2)(t^2+4)+(Ct+D)(5t^2+8t-4)$$

$$t\equiv A(t^3+2t^2+4t+8)+B(5t^3-2t^2+20t-8)+C(5t^3+8t^2-4t)+D(5t^2+8t-4)\ (*)$$

Iz (*) dobiva se sesistem jednačina:

$$A+5B+5C=0/\cdot 4\rightarrow 4A+20B=-20C\ (1)$$

$$2A-2B+8C+5D=0\ (2)$$

$$4A+20B-4C+8D=1\ (3)$$

$$8A-8B-4D=0/\cdot\frac{1}{4}\rightarrow 2A-2B=D\ (4)$$

Uvrštavanjem (1) u (3) i (4) u (2) ima se:

$$\left.\begin{array}{r}-24C+8D=1\\ 8\,C+6D=0\end{array}\right\}\to D=\frac{1}{26}=\frac{24}{624}\ ;C=-\frac{3}{104}=-\frac{18}{624}$$

Iz (1) i (4) ima se da je:

$$A=\frac{25}{624}\ \ ;B=\frac{13}{624}.$$

$$I=\frac{16\cdot 25}{624}\int\frac{dt}{5t-2}+\frac{16\cdot 13}{624}\int\frac{dt}{t+2}-\frac{16\cdot 18}{624}\int\frac{tdt}{t^2+4}+\frac{16\cdot 24}{624}\int\frac{dt}{t^2+4}$$

$$I=\frac{25}{39}\int\frac{dt}{5t-2}+\frac{13}{39}\int\frac{dt}{t+2}-\frac{18}{39}\int\frac{tdt}{t^2+4}+\frac{24}{39}\int\frac{dt}{t^2+4}$$

$$I=\frac{25}{39}\frac{1}{5}ln|5t-2|+\frac{13}{39}ln|t+2|-\frac{18}{39}\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+\frac{24}{39}\frac{1}{2}arctg\left(\frac{t}{2}\right)+C$$

$$\boxed{\boldsymbol{I=\frac{1}{39}\left[5ln|5t-2|+13ln|t+2|-9\ln(t^2+4)+12arctg\left(\frac{t}{2}\right)\right]+C}}$$

Gdje je:

$$t=\frac{2\sqrt{5+8x-4x^2}}{(5-2x)},$$

a C proizvoljna realna konstanta.

b) $(2\sin x+3\cos x\neq 0)$

$$\int\frac{3\sin x\ +\ 2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\frac{3tgx+2}{2tgx+3}dx=\left|\begin{array}{l}t=tgx\\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\left(1+tg^2x\right)dx\\ dx=\dfrac{dt}{\left(1+t^2\right)}\end{array}\right|=\int\frac{3t+2}{2t+3}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I=\int\frac{3t+2}{2t+3}\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{10}{13}\int\frac{dt}{2t+3}+\frac{1}{13}\int\frac{5t+12}{1+t^2}dt=\frac{5}{13}\ln|2t+3|+\frac{5}{13}\ln\sqrt{1+t^2}+\frac{12}{13}arctgt+C$$

$\boxed{I=\frac{5}{13}\ln|2tgx+3|+\frac{5}{13}\ln\sqrt{1+tg^2x}+\frac{12}{13}x+C}$ gdje je C proizvoljna realna konstanta.

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^{2x+1}(1 + x + xlnx)$

Prirodni domen date funkcije je:

$$Dom(f) = \{x \in R : x > 0\}$$

Funkcija je elementarna pa je neprekidna gdje je i definirana pa, prema tome, ima (tačnu) primitivnu funkciju.

Datu funkciju je moguće napisati u obliku:

$f(x) = \frac{1}{2}x^{2x+1}x\left(\frac{1}{x} + 1 + lnx\right) = \frac{1}{2}x^{2x+2}\left(\frac{1}{x} + 1 + lnx\right)$ (*)

Traži se (neodređeni) integral funkcije (*):

$$I = \frac{1}{2}\int x^{2x+2}\left(\frac{1}{x} + 1 + lnx\right)dx$$

Iz iskustva je poznato da se dati integral ne može lahko riješiti primjenom uobičajenih smjena. Može se posmatrati funkcija $g(x) = x^{2x+2}$.

Prema formuli: $\frac{d}{dx}f(x) = f(x)\frac{d}{dx}[\ln|f(x)|]$ ima se:

$g(x) = x^{2x+2}\ /ln$

$\ln g(x) = ln|x^{2x+2}|$

$lng(x) = (2x + 2)lnx\ \ /\frac{d}{dx}$

$\frac{d}{dx}g(x) = g(x)\left[2lnx + \frac{1}{x}(2x + 2)\right] = 2g(x)\left[lnx + 1 + \frac{1}{x}\right]$

$\frac{d}{dx}g(x) = 2\underbrace{x^{2x+2}\left[lnx + 1 + \frac{1}{x}\right]}_{podintegralna\ f-ja}$

$x^{2x+2}\left[lnx + 1 + \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^{2x+2}\ (*)$

Sada se prema (*) rjesenje zadatog integrala lahko dobije:

$I = \frac{1}{4}\int d(x^{2x+2}) = \frac{1}{4}x^{2x+2} + C$

$\boxed{\boldsymbol{I = \frac{1}{4}x^{2x+2} + C}}$ gdje je C proizvoljna realna konstanta.

Zad. 2. Odredite sve racionalne brojeve p za koje su primitivne funkcije realne funkcije f, zadane formulom $f(x)=\sqrt{1+x^p}$, elementarne funkcije. Zatim za jedan (po vlastitom izboru) takav p ($-1< p < 0$) nađite neodređeni integral zadane funkcije (na njenom prirodnom domenu).

Rješenje:

a) Funkcija $f(x)$ se može napisati kao:

$$f(x) = x^0(1+x^p)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

iz (*) vidi se da je $f(x)$ oblika:

$$x^m(a+bx^n)^r$$

Neodređeni integral binomnog diferencijala se izražava pomoću elementarnih funkcija ako je jedan od brojeva:

$$r, \frac{m+1}{n}, r+\frac{m+1}{n}$$

cio broj.

Prema navedenom razmatraju se tri slučaja:

1. $\frac{m+1}{n} \in \mathrm{Z}$
2. $r+\frac{m+1}{n} \in \mathrm{Z}$
3. $r \in \mathrm{Z}$

U razmatranom zadatku ima se da je:

$m = 0\,, n = p\,, r = 1/2.$

Očigledno je da $r \notin \mathrm{Z}$, pa se ispituju samo prva dva slučaja:

$$\frac{m+1}{n} \in Z \Leftrightarrow \frac{1}{p} \in Z \Leftrightarrow p = \frac{1}{k} \in Z\,, k \in Z$$

$$r+\frac{m+1}{n} \in Z \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{2} \in Z \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{2k-1}{2} \Leftrightarrow p = \frac{2}{2k-1}\,, k \in Z$$

Pa je neodređeni integral funkcije $f(x)$ elementarna funkcija kada je p oblika:

$$\frac{1}{k} = \frac{2}{2k} \; ili\; oblika\; \frac{2}{2k-1}\,, odnosno\; kada\; je\; p\; oblika\; \frac{2}{k}, gdje\; je\; k\; proizvoljan\; cio\; broj.$$

Izrečunajmo neodređeni integral zadane funkcije (*) za slučaj $p = -\frac{1}{2} \in (-1,0)$:

$I = \int x^0 (1 + x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dx$ (**)

Kako je $\frac{0+1}{-\frac{1}{2}} = -2 \in Z$, to se integral binomnog diferencijala (**) rješava uvođenjem smjene:

$1 + x^{-\frac{1}{2}} = t^2$

$x^{-\frac{1}{2}} = t^2 - 1 \,|^{-2}$

$x = (t^2 - 1)^{-2}$

$dx = -2(t^2 - 1)^{-3} 2t dt$

Sada jednakost (**) postaje:

$$I = -4 \int t^2 (t^2 - 1)^{-3} dt = -4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^3}$$

Dobiveni integral je pogodno riješiti metodom parcijalne integracije (s ciljem snižavanja stepena nazivnika):

$$I = -4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^3} = \left| \begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = \dfrac{t dt}{(t^2 - 1)^3} & v = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{d(t^2 - 1)dt}{(t^2 - 1)^3} = -\frac{1}{4(t^2 - 1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= -4 \left(-\frac{t}{4(t^2 - 1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} \right) = \frac{t}{(t^2 - 1)^2} - \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t - 1)^2 (t + 1)^2} = \int \left(\frac{A}{(t - 1)^2} + \frac{B}{(t - 1)} + \frac{C}{(t + 1)^2} + \frac{D}{(t + 1)} \right) dt$$

Deriviranjem posljednje jednakosti i izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene dobivenih polinoma određuju se vrijednosti realnih konstanti A, B, C i D, te one iznose: $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$, respektivno.

$$I_1 = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t - 1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t - 1)} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t + 1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t + 1)}$$

$$I_1 = \frac{1}{4} \int \frac{d(t - 1)}{(t - 1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{d(t - 1)}{(t - 1)} + \frac{1}{4} \int \frac{d(t + 1)}{(t + 1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{d(t + 1)}{(t + 1)}$$

$$I_1 = -\frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4}ln|t+1| + C_1$$

$$I_1 = -\frac{t}{2(t^2-1)} + \frac{1}{4}ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C_1$$

Sada se ima:

$\boxed{I = \frac{t}{(t^2-1)^2} + \frac{t}{2(t^2-1)} - \frac{1}{4}ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C}$ gdje je C proizvoljna realna konstanta.

Pri čemu je u gornjem rješenju $t = \sqrt{1 + x^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}$.

Zad. 3. Funkcija φ zadana je formulom $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + x^2 \mathrm{tg}^2 t)^{-1} \mathrm{d}t$.

a) Izračunajte zadani integral, a zatim skicirajte grafike funkcija:

$$\varphi(x), \ (|\varphi(x)|)^{-1}, \quad x \cdot \sin\left[\varphi(x) \cdot (1 + x^{-1})\right].$$

b) Izračunajte površinu $(P(x))$ lika kojeg ograničavaju: grafik zadane funkcije φ, x – osa i normale na x – osu u tačkama O i M čije su apscise 0 i x, respektivno .

Rješenje:

a)

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + x^2 tg^2 t)^{-1} dt = \left| \begin{array}{c} x\frac{sint}{cost} = u \\ dt = \frac{cos^2 t}{x} du \\ t \to 0 \Rightarrow u \to 0 \\ t \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \pm\infty (x \lessgtr 0) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{x^2 sin^2 t}{cos^2 t} = u^2 \\ \frac{x^2 - x^2 cos^2 t}{cos^2 t} = u^2 \\ cos^2 t = \frac{x^2}{u^2 + x^2} \\ dt = \frac{x}{u^2 + x^2} du \end{array} \right|$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pm\infty} \frac{x}{u^2 + x^2} \cdot \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pm\infty} \frac{1}{u^2 + x^2} \cdot \frac{1}{1 + u^2} du$$

$$\frac{1}{(u^2 + x^2)(1 + u^2)} = \frac{Au + B}{u^2 + x^2} + \frac{Cu + D}{1 + u^2} \ /\cdot (u^2 + x^2)(1 + u^2)$$

$$1 \equiv (Au + B)(1 + u^2) + (Cu + D)(u^2 + x^2)$$

$$1 \equiv u^3(A+C) + u^2(B+D) + u(A+Cx^2) + (B+Dx^2)$$

$A + C = 0 \quad \rightarrow \quad A = -C$ (1)

$B + D = 0 \quad \rightarrow \quad B = -D$ (2)

$A + Cx^2 = 0$ (3)

$B + Dx^2 = 1$ (4)

Uvrštavanjem (1) u (3) ima se da je: $A = 0 \ \wedge \ C = 0.$

Uvrštavanjem (2) u (4) ima se da je:

$$B = -\frac{1}{x^2-1} \quad \wedge \quad D = \frac{1}{x^2-1}$$

Pa je:

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\pi}\int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{x^2-1}\frac{1}{u^2+x^2} + \frac{1}{x^2-1}\frac{1}{1+u^2}\right] du$$

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\pi}\frac{1}{x^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} - \int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+x^2}\right] du$$

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\pi}\frac{1}{x^2-1}\left[arctgu|_0^{+\infty} - \frac{1}{x}arctg\left(\frac{u}{x}\right)\Big|_0^{+\infty}\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\pi}\frac{1}{x^2-1}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right] = \frac{2x}{\pi}\frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{x}\right] = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{1+x}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x} \quad za\ x > 0\,, x \neq -1$$

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\pi}\int_0^{-\infty} \left[-\frac{1}{x^2-1}\frac{1}{u^2+x^2} + \frac{1}{x^2-1}\frac{1}{1+u^2}\right] du$$

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\pi}\frac{1}{x^2-1}\left[\int_0^{-\infty}\frac{du}{1+u^2} - \int_0^{-\infty}\frac{du}{u^2+x^2}\right] du$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x} \quad za\ x < 0\,, x \neq 1$$

Pa je:

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{1+|x|}}}$$

$\varphi(0) = 1$

$$\varphi(\pm 1) = \pm\frac{2}{\pi}\int_0^{\pm\infty} \frac{du}{(u^2+1)^2} = \pm\frac{2}{\pi}\int_0^{\pm\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{u^2}{u^2+1}\right) du = \frac{1}{2}$$

$Dom(\varphi): \forall x \in R$

Asimptote:

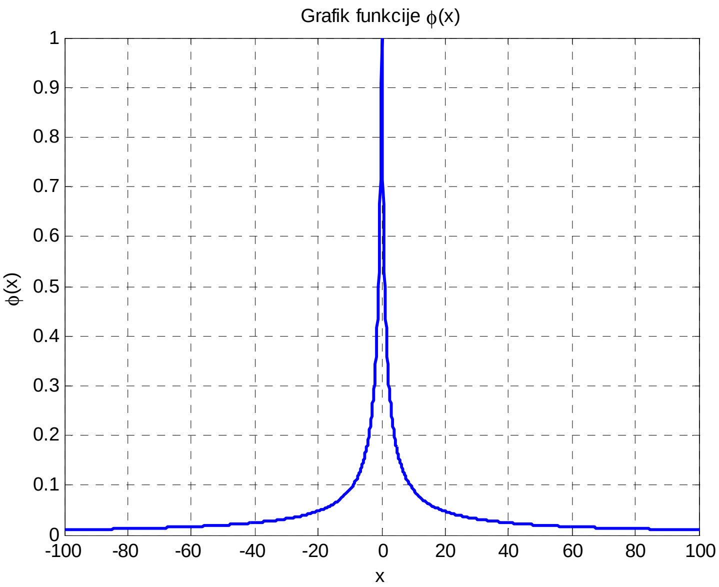
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+|x|}\right) = 0$$

Nule i znak:

$\varphi(x) = 0 \ \rightarrow Ne\ postoji\ x\ iz\ Dom(\varphi)$

$\varphi(x) > 0\ \ za\ \forall x \in R$

Na slici 1. dat je grafik funkcije $\varphi(x)$:



Slika 1. Grafik funkcije $\varphi(x)$

$f(x) = (|\varphi(x)|)^{-1} = 1 + |x|$

$Dom(f): \forall x \in R$

$\lim_{x\to-\infty}(1+|x|) = +\infty$ $\rightarrow$ Ima se prva potencijalna kosa asimptota $y_1 = ax + b$.

$$a = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty}(1 - x + x) = 1$$

$$y_1 = -x + 1$$

$\lim_{x\to+\infty}(1 + |x|) = +\infty \quad \rightarrow$ Ima se druga potencijalna kosa asimptota $y_2 = kx + n$.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$$

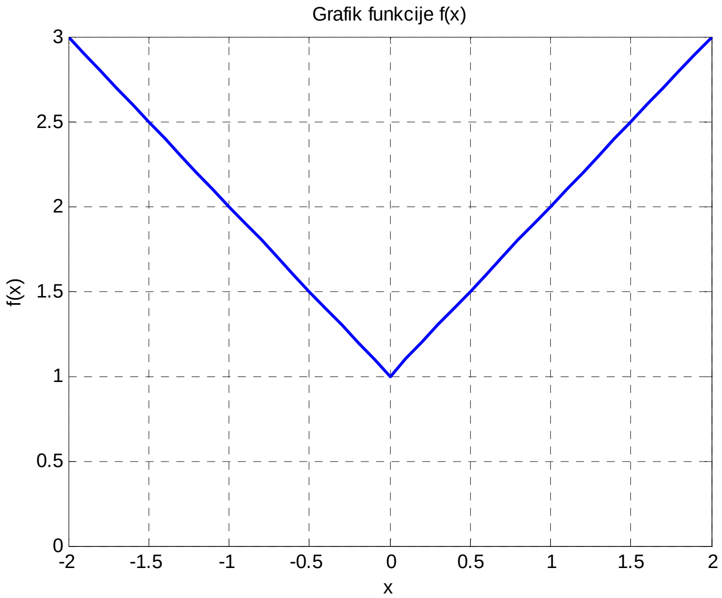
$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(1 + x - x) = 1$$

$$y_2 = x + 1$$

$$f(x) = 0 \ \rightarrow Ne\ postoji\ x\ iz\ Dom(f)$$

$$f(x) > 0 \ \ za\ \forall x \in R$$

Na slici 2. dat je grafik funkcije $f(x)$:



Slika 2. Grafik funkcije $f(x)$

$$g(x) = x \cdot \sin\left(\varphi(x) \cdot (1 + x^{-1})\right)$$

$$g(x) = x \cdot sin\left[\frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{x(1 + |x|)}\right]$$

$$g(x) = x \cdot sin\left[\frac{x+1}{x(1+|x|)}\right]$$

Za $x > 0$

$$g(x) = x \cdot sin\left[\frac{1}{x}\right]$$

Za $x < 0$

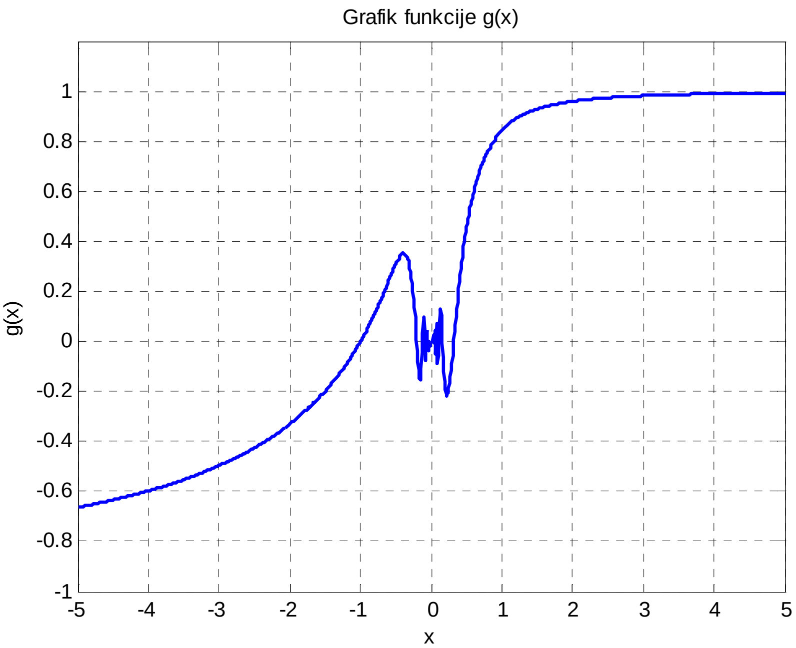
$$g(x) = x \cdot sin\left[\frac{x+1}{x(1-x)}\right]$$

$Dom(g): \forall x \in R \backslash \{0\}$

$$\lim_{x \to 0_-} g(x) = \lim_{x \to 0_+} g(x) = 0$$

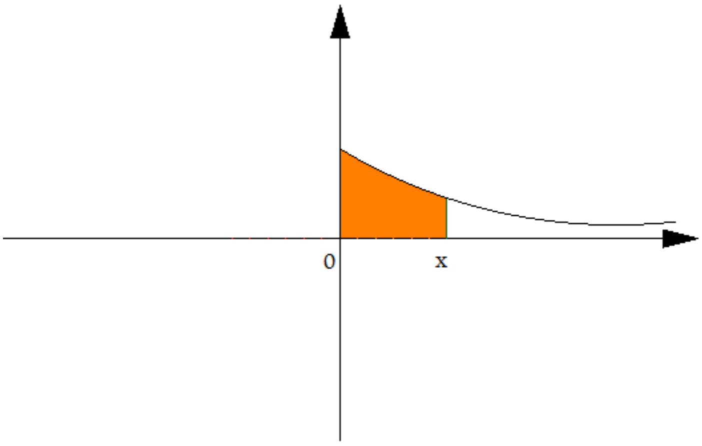
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$$

$$g(x) = 0 \to x = -1$$



Slika 3.

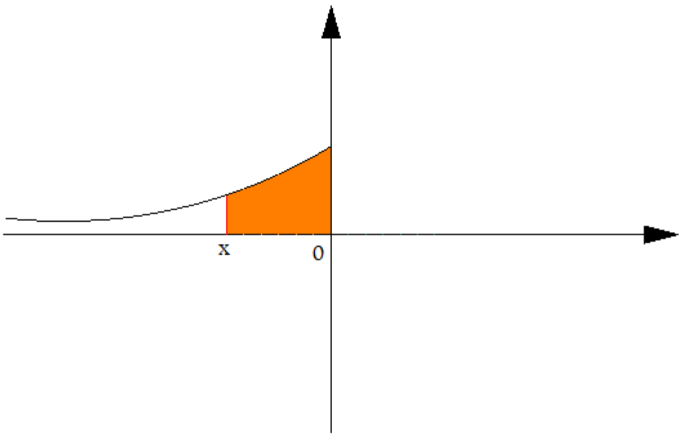
Za $x > 0$



$$P(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \ln|1+t|\Big|_0^x$$

$P(x) = \ln|1+x| = \ln(1+x)$.

Za $x < 0$



$$P(x) = \int_x^0 \varphi(t)dt = \int_x^0 \frac{1}{1-t}dt = -\ln|1-t|\Big|_x^0 = \ln|1-x| = \ln(1-x)$$

Na osnovu razmatranja prethodna dva slučaja može se pisati:

$$\boxed{\boldsymbol{P(x) = \ln(1+|x|)}}.$$

Zad. 4. Za funkciju f zadanu formulama $f(x)=\dfrac{\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt}{x^n}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$, odredite vrijednost prirodnog broja n tako da $f(x)$ teži nekoj konačnoj granici različitoj od nule kad $x\to 0$, a zatim tako određenu funkciju f aproksimirajte u okolini tačke 0 *Taylorovim polinomom* drugog stepena i procijenite učinjenu grešku u razmaku $0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$.

Rješenje:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt}{x^n}, & x\neq 0,\ n\in N\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}\tag{4.1}$$

Granična vrijednost funkcije $f(x)$ kad $x\to 0$ se dobiva višestrukom primjenom L´Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt}{x^n}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cosx}{x^2}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{nx^{n+1}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{n(n+1)x^n}$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{n^2(n+1)}\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{x^{n-1}}=\begin{cases}+\infty, & n>1\\ \dfrac{1}{2}, & n=1\end{cases}$$

Prema tome, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ je konačan (i različit od nule) za $\boldsymbol{n=1}$.

Uvrštavanjem vrijednosti za n=1, analitički oblik funkcije zadane formulom (4.1) postaje:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt}{x}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}\tag{4.2}$$

Pri čemu je funkcija $f(x)$ neprekidna i u nuli.

Aproksimirajmo funkciju $f(x)$ zadanu formulom (4.2) *Taylorovim polinomom* drugog stepena u okolini tačke 0:

$$f(x) \approx T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$f'(0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt}{x} - \dfrac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt - \frac{1}{2}x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-cosx}{x^2} - \dfrac{1}{2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx-\frac{1}{2}x^2}{2x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{sinx - x}{6x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{6x} = 0$$

Stoga dobili smo:

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

$$f''(0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0},$$

Gdje se $f'(x)$ nalazi korištenjem (poznatih) pravila deriviranja količnika funkcija, odnosno:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1-cosx}{x} - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt}{x^2}$$

Sada je $f''(0)$:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\frac{1-cosx}{x} - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cosx}{x} - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{xsinx-1+cosx}{x^2} - \dfrac{1-cosx}{x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{xsinx-2+2cosx}{x^4} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to o}\frac{sinx + xcosx - 2sinx}{4x^3} = -\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{sinx - xcosx}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right|$$

$$= \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{cosx - cosx + xsinx}{3x^2} = -\frac{1}{36}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}}_{=1} = -\frac{1}{36}$$

Stoga dobili smo:

$$\boxed{f''(0) = -\frac{1}{36}}$$

Konačno, aproksimacija zadane funkcije $f(x)$, za n=1, *Taylorovim polinomom* drugog stepena u okolini tačke 0 data je sa:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{72}x^2}}$$

Ostatak *Taylorove formule* najlakše se procijeni prema:

$$R_2(x) = f(x) - T_2(x)$$

pa je:

$$|R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)| =$$

$$= \left| \frac{\int_0^x \frac{1 - cost}{t^2} dt}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{72}x^2 \right|$$

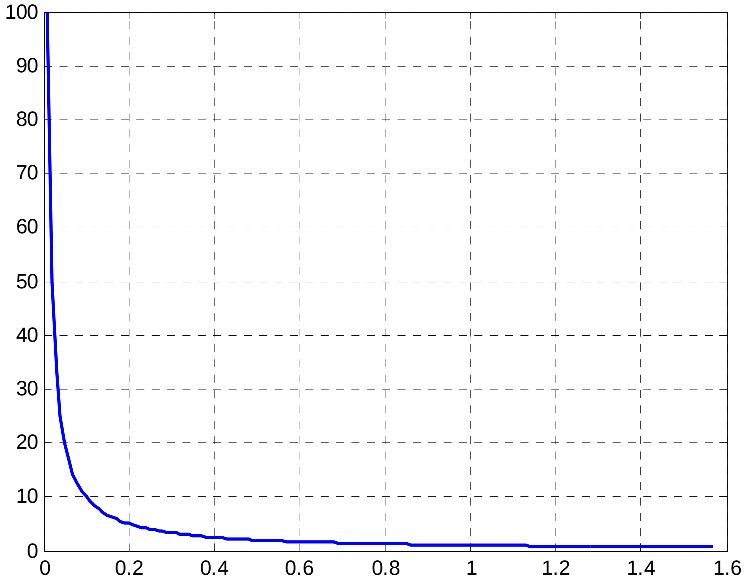
Funkcija:

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 - cost}{t^2} dt$$

Predstavlja površinu lika ograničenog grafikom podintegralne funkcije, osom Ox i ordinatama $0 \; i \; x$, odnosno dobije se konačan broj. Procjena greške se vrši u razmaku $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Prema navedenom:

$$za \; x \to 0_+ \;\; \Rightarrow \; \frac{1}{x} \to +\infty$$



A kako je zadata funkcija (4.1) definirana za$x = 0$ i ima vrijednost $\frac{1}{2}$ ima se da je:

$$|R_2(x)| \leq \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{72}x^2\right| \leq \frac{1}{72}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Kako je $\pi < \frac{22}{7}$

$|R_2(x)| \leq \frac{1}{72}\frac{1}{4}\left(\frac{22}{7}\right)^2 \approx 0.0343$, odnosno $|R_2(x)| \leq \frac{1}{28}$.