Električni krugovi I

DIO I

ELEMENTARNI DINAMICKI KRUGOVI

1. Idealna zavojnica

Samoinduktivnost solenoida (zavojnice) **Ls**, formiranog od **N** ravnomjerno i gusto rasopređenih zavojaka, postavljenih na paramagnetno torusno jezgro pravougaonog poprečnog presjeka stranica **a** i **b**, te unutrašnjeg polupräčnika **R**, iznosi:

$$Ls = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot a \cdot ln\frac{R+b}{R}}{2 \cdot \pi}$$

Idealizirana zavojnica je element električnog kruga s dva kraja, kod kojeg je odnos između magnetnog fluksa Φ(t), i električne struje i(t), u svakom trenutku vremena jednoznačno definisan relacijom oblika Φ(t)=f(i(t),t), koja se često naziva (Φ,i) karakteristikom.

Termin „idealna zavojnica“ jasno naglašava da se u odabranom pristupu, u obzir uzima samo induktivni karakter zavojnice, kao njen dominirajući parametar, iako sve realne zavojnice, pored tog parametra imaju i vlastiti električni kapacitet C_L i vlastiti aktivni električni otpor R_L.

Stacionarni induktivitet idealizirane zavojnice: Φ(t)=L·i(t), pri čemu je L=const

Zavojnice i kondenzatori se svrstavaju u dinamičke električne elemente.

Integracijom jednačine $v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$ dobije se izraz koji definiše električnu struju **i(t)**:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{l}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

Električna snaga $\mathbf{p_m(t)}$ izražava rad mehaničkih sila koje uzrokuju promjenu vlastite induktivnosti **L(t)**. Snaga linearne vremenski nepromjenljive zavojnice:

$$p(t) = L(t)i(t)\frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt}i^2(t)$$

$$p_e(t) = \frac{1}{2}\frac{dL(t)}{dt}i^2(t) + L(t)i(t)\frac{di(t)}{dt}$$

$$p(t) - p_e(t) = p_m(t) = \frac{1}{2}\frac{dL(t)}{dt}i^2(t)$$

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

➢ Vezivanje idealiziranih električnih zavojnica

Osobine serijskog načina povezivanja zavojnica se iskazuju slijedećim relacijama:

$$v_k(t) = L_k \frac{i_k(t)}{dt}$$

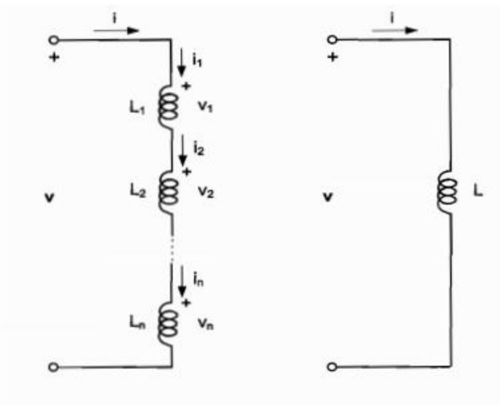
$$i_k(t) = i_k(0) + \frac{1}{L_k} \int_0^t v_k(\tau) d\tau$$

Tada se prema Kirchhoffovim zakonima za spoj kao na slici 1 može pisati da je:
$i_k(t)=i(t)$ za k=1, 2, ..., n; odakle za t=0 vrijedi

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(t)$$

Objedinjavanjem prethodnih relacija dolazi se do slijedećeg izraza:

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k$$



Slika 1. Serijska (redna) veza **n** zavojnica

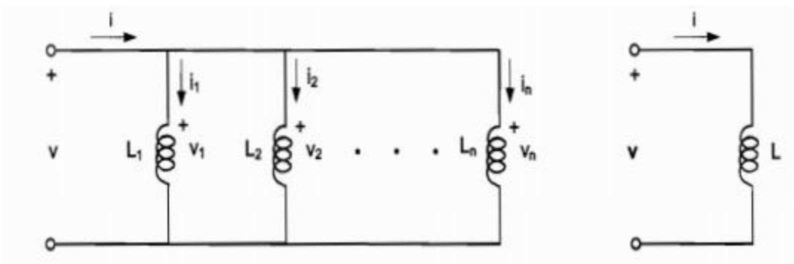
Osobine paralelnog načina povezivanja zavojnica se iskazuju slijedećim relacijama:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t)$$

Odnosno za t=0:

$$i(0) = \sum_{k=1}^{n} i_k(0)$$

$v(t)=v_k(t)$, za k=1, 2, ..., n.



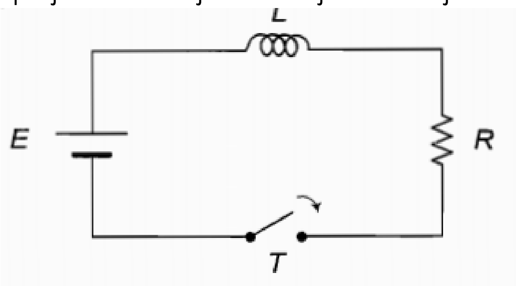
Slika 2. Paralelna veza **n** zavojnica

Vlastita induktivnost zavojnice **L**, određena je slijedećim izrazom:

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$$

➢ Prelazni proces idealne zavojnice (Priključenje i isključenje na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona)

Idealizirana zavojnica induktivnosti L, u stacionarnim uslovima rada, predstavlja kratak spoj za stalnu jednosmjernu struju.



Slika 3.

U uslovima uspostavljanja stalne električne struje, kao i u uslovima njenog iščezavanja, nastaje promjenljivi magnetni fluks, što implicira zaključak da je u tim kratkotrajnim vremenskim periodima i električna struja, koja stvara taj magnetni fluks, vremenski promjenljiva veličina.

Predpostavimo da su izvor (unutrašnji otpor izvora $\mathbf{R_E=0}$) i zavojnica (ima samo induktivitet **L**) idealni, aktivni otpor **R** u električnoj shemi sa slike 3. mora biti jednak nuli, jer je on određen relacijom $R=R_L+R_E$. Ukoliko pri otvorenom prekidaču **T**, u zavojnici vlastite induktivnost **L** nije bilo akumulirane magnetne energije, tada će se promjena struje od trenutka $\mathbf{t_0}$, kada se zatvori prekidač **T**, mijenjati u skladu sa dinamikom opisanom slijedećom jednačinom: $E = L\frac{di}{dt}$. U ovom izrazu, pored elektromotorne sile izvora prisutna je samo još elektromotorna sila samoindukcije, koja u ovom slučaju nastoji spriječiti uspostavljanje struje **i(t)** u analiziranom kolu. Struja je opisana slijedećom relacijom: $i(t) = \frac{E}{L}t + C$, gdje integraciona konstanta, pri i(0)=0, ima vrijednost C=0.

Na osnovu relacije za struju proizilazi da bi idealni naponski izvor, u dovoljno dugom vremenskom intervalu, mogao uspostaviti izuzetno veliku vrijednost struje, koja bi i nakon tog vremenskog intervala rasla, jer je opisana monotono rastućom funkcijom. Međutim, u realnim fizičkim sistemima nije moguće realizovati takvo stanje, zbog čega je neophodno modificirati odnose iskazane ovom jednačinom.

Modifikacije: $R_E > 0$, pa slijedi da je $R = R_E > 0$

U novouspostavljenim uslovima, odnosi u krugu su opisani jednačinom:

$$E = L\frac{di}{dt} + R_E \cdot i$$

Ova jednačina se klasificira kao linearna diferencijalna jednačina prvog reda i ima rješenje u obliku:

$$i(t) = \frac{E}{R_E} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Simbol $\boldsymbol{\tau} = L/R_E$, označava vremensku konstantu analiziranog kola i određuje se kao vrijeme koje je potrebno da odskočni odziv analizirane koordinate dostigne 63% vrijednosti novog stacionarnog stanja).

2. Idealni kondenzator

Električna kapacitivnost je definisana kao sposobnost nekog provodnog tijela (ili sistema provodnih tijela) da pri djelovanju električnog napona v, uspostavljenog između provodnih dijelova tog tijela (ili dijelova sistema provodnih tijela), međusobno radvojenih nekim dielektrikom, akumulira određenu količinu električnog naboja **Q**, odnosno **–Q**, upravo na tim provodnim dijelovima.

U tom kontekstu se i termin električni kondenzator pridružuje svakom sistemu od dva provodna tijela, međusobno razdvojena nekim dielektrikom, ukoliko su geometrijske dimenzije tih provodnih tijela znatno veće od debljine dielektrika koji ih razdvaja.

U trenutku kada se kondenzator priključi na idealni naponski izvor napona **v=U** će se akumulirati elektrostatska energija $\mathbf{w_e}$ jednaka:

$$w_e = \frac{1}{2} q \cdot v_c = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} C \cdot v_c.$$

Idealni električni kondenzator može se definisati i kao element električnog kruga koji ima dva kraja i kod koga je u svakom trenutku vremena t, odnos između električnog naboja **q(t)** i napona između njegovih krajeva, $v_C(t)=v(t)$, jednoznačno definisan **q-v** karakteristikom koja je opisana algebarskom relacijom: q(t)=f(v,t)

Realni električni kondenzatori se predstavljaju ne samo električnim kapacitetom, nego paralelnim spojem električnog kapaciteta **C** i aktivnog otpora $\mathbf{R_C}$.

Električni kapacitet idealnog električnog kondenzatora je povezan s električnim naponom $\mathbf{v_C(t)}$ tako da se može za svaki trenutak vremena t njegova **q-v** karakteristika opisati relacijom: $q(t)=C(t)\cdot v_C(t)$.

Jednačina stanja za linearni vremenski nepromjenljivi kondenzator je: q(t)=f(v)=C v(t), a s obzirom da između **q(t)** i **i(t)** vrijedi relacija: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, tada za kondenzator vrijedi i odnos:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Električni kondenzator (**LVNC**) ima sposobnost akumuliranja elektrostatičke energije, i njegova akumulirana elektrostatička energija do trenutka $\mathbf{t_0}$ jednaka je:

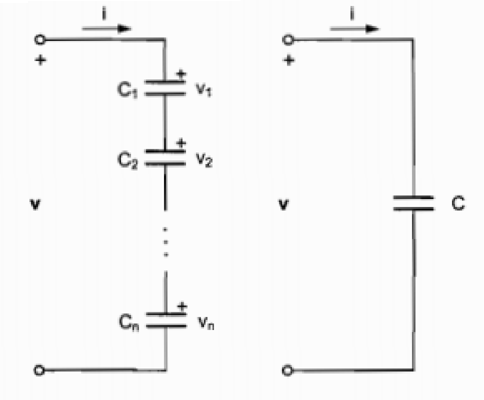
$$w_e(t_0) = W_{e0} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Sva električna energija preuzeta iz vanjskih energetskih izvora do nekog trenutka $\mathbf{t_0}$ akumulira se u tom istom električnom kondenzatoru u oblikku elektrostatičke energije.

➢ Vezivanje idealiziranih električnih kondenzatora

Kondezatori se mogu vezivati serijski, paralelno i mješovito (kombinacija ova dva prethodna).

Za serijsku vezu kondenzatora važi: $i_k(t) = C_k \frac{dv_k(t)}{dt}$



$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(t)$$

Za t=0 =>

$$v(0) = \sum_{k=1}^{n} v_k(0)$$

Slika 4. Serijska veza n kondenzatora

Pa se ukupna ekvivalentna kapacitivnost računa po formuli:

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

Za paralelnu vezu kondenzatora važi:

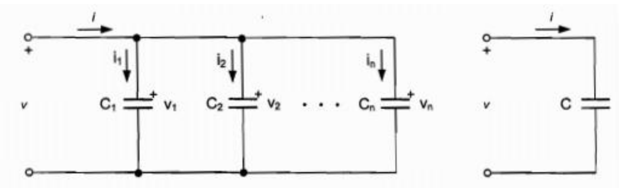
$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t)$$

$v = v_k$, za k=1, 2, ..., n, pa se uz primjenu I i II K.Z može doći do relacije:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

Pa se ukupna ekvivalentna kapacitivnost računa po formuli:

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k.$$



Slika 5. Paralelna veza n kondenzatora

Važno je naglasiti da u oba analizirana načina povezivanja kondenzatora, ukupna količina električnih naboja u polaznom i novouvedenom ekvivalentnom krugu mora biti ista.

Električna snaga, električna energija i pasivnost električnog kondenzatora

Između promjenljivih stanja: električnog napona **v(t)**, struje **i(t)** i električnog naboja **q(t)**, postoje slijedeći odnosi:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}; \qquad v(t) = \hat{v}(q)$$

U uslovima kada je q(0)=0, električna energija $w(t_0,t)$, koja se predaje NVNC kondenzatoru jednaka je elektrostatskoj energiji $\mathbf{W_e(t)}$, koja se akumulira u NVNC kondenzatoru:

$$w_e(t) = w(t_0,t) = \int_0^{q(t)} \hat{v}(q_1)dq_1$$

Ukoliko je $q(t_0)=Q_0 \neq 0$, tada kondenzator u trenutku $\mathbf{t_0}$ već ima neku akumuliranu energiju, pa je energija, koja se predaje tom istom kondenzatoru vremenskog intervala (t_0,t)definisana relacijom: $w(t_0,t)=w_e(t)-w_e(t_0)$.

Ukoliko je $q(t_0)>q(t)$, tada energija koja je bila akumulirana u kondenzatoru u trenutku t_0, veća od energija koja je akumulirana u kondenzatoru u trenutku t. Ipak, to još uvijek nije dovoljan razlog da se takav kondenzator proglasi za aktivni element.

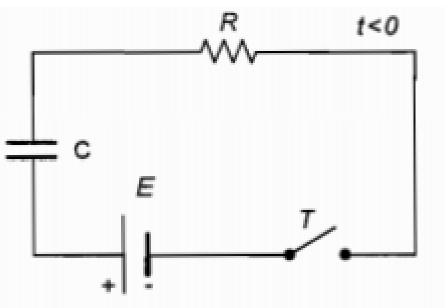
Suma zatečene akumulirane energije $\mathbf{w_e(t_0)}$ u trenutku $\mathbf{t_0}$ i energije $w(t_0,t)$ koja se preda istom kondenzatoru u intervalu (t_0,t), mora biti nenegativna vrijednost.

Prelazni proces idealnog kondenzatora (Priključenje i isključenje na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona)

Idealizirani linearni vremenski nepromjenljivi električni kondenzator, vlastite kpacitivnosti C, u stacionarnim uslovima rada predstavlja beskonačan otpor za stalnu jednosmjernu struju. U uslovima uspostavljanja električnog naboja na elektrodama kondenzatora, kao i u uslovima njegovog iščezavanja sa tih istih elektroda, postoji promjenljivi tok količine električnog naboja kroz spojne provodnike.

Pod predpostavkom da je jednosmjerni naponski izvor upotrebljen u električnoj shemi sa slike 6., idealni naponski izvor stalnog jednosmjernog napona, tada je njegov unutrašnji aktivni otpor $R_E=0$, te da je i kondenzator idealan (opisan samo kapacitivnošću **C**), te da je ukupni otpor R=0, važe relacije:

$$E=v_C(t); \; i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$



Slika 6.

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

Modificirane jednačine (pošto navedeni uslovi nisu mogući u realnim fizičkim sistemima):

$$E = \frac{q}{C} + R_E \cdot i; \qquad i(t) = \frac{dq}{dt} \qquad => \qquad E = \frac{q}{C} + R_E \cdot \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Relacija (1) se u matematičkoj teoriji klasificira kao linearna diferencijalna jednačina I reda po promjenljivoj **q(t)** i ima rješenje u obliku:

$$q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Simbol $\boldsymbol{\tau}$ = $R_E \cdot C$ označava vrmensku konstantu analiziranog kruga.

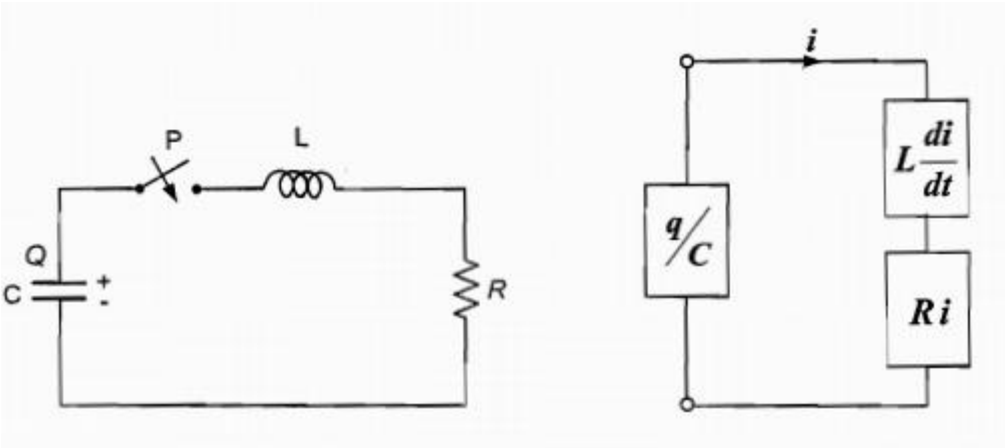
Između električnog naboja **q(t)**, kojim se opterećuju elektrode razmatranog kondenzatora, i napona između tih elektroda **v_c(t)** važi relacija:

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

3. Električni krug baziran na serijskom spoju R, L, C elemenata



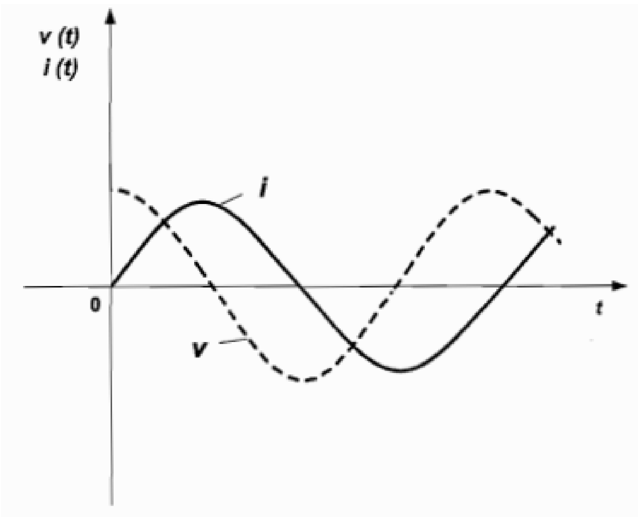
Slika 7. Serijski spoj LVNR, LVNL, LVNC

Pri naznačenom smjeru električne struje **i**, važe slijedeće relacije:

$$i = -\frac{dq}{dt}; \qquad q = C\,v; \qquad v = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Struja **i(t)** se može efinisati i u obliku:

$$i = -C\frac{dv}{dt}$$



Slika 8. Vremenska promjena napona na kondenzatoru v(t) i električne struje i(t)

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

$$Q^* = \omega \cdot \frac{L}{R}$$

Q^* - faktor dobrote

i(t) =i(t+T) <- **i(t)** je periodična funkcija, a broj **T** je period te funkcije; T=1/f

Pod predpostavkom da je periodična veličina **i(t)** harmonijska funkcija, odnosno prostoperiodična funkcija, ona se tada u vremenskom domenu opisuje relacijom:

$$i(t)=I_m \cdot \sin(\omega t+\psi)$$

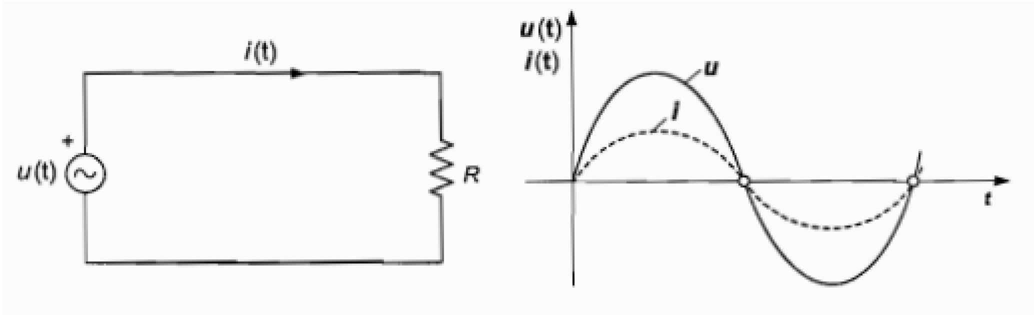
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Simbolom $\mathbf{I_m}$ označena je maksimalna vrijednost struje i(t). To je, dakle, najveća vrijednost analizirane prostoperiodične veličine, koja se može dosegnuti u bilo kojem trenutku vremena t.

Srednja vrijednost analizirane veličine se može definisai kao konstantna veličina, koja nakon množenja s dužinom trajanja vremenskog intervala, tokom kojeg se analizirana veličina prati, geometrijski označava istu površinu, kao i analizirana kontinualna veličina, tokom istog vremenskog intervala. $I_{sr}=0,637I_m$

Efektivna vrijednost prostoperiodične veličine i(t), definiše se kao neka stalna fiktivna struja $\mathbf{I_e}$, koja prolazeći kroz aktivni otpornik R, tokom vremenskog intervala, jednakog periodu T, stvori iste Jouleove gubitke na predmetnom otporniku, kao i analizirana kontinuirana veličina – struja i(t), pri prolasku kroz isti aktivni otpornik, tokom identičnog vremenskog intervala T. $I_e=0,707I_m$

4. Aktivni električni otpor otpornosti R u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona



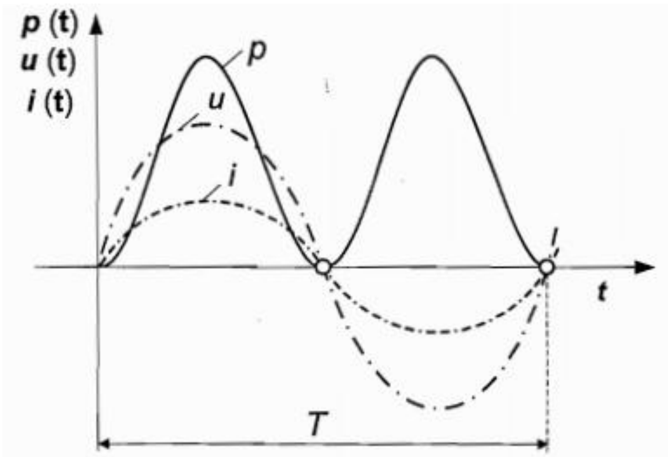
Slika 9. Električni krug s aktivnim otporom kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona

Jednačina dinamičke ravnoteže koja važi u svakom trenutku **t** glasi: $u(t)=R\cdot i(t)=u_R(t)$

Aktivni električni otpor ima veću vrijednost kada se kroz njega usmjerava sinusoidalna električna struja.

Na osnovu matematičkih izraza za električni napon **u(t)**, odnosno električnu struju **i(t)**: $u(t)=U_m\cdot\sin(\omega t+\theta_u)$; $i(t)=U_m/R\cdot\sin(\omega t+\theta_u)$može se zaključiti da napon **u(t)** i struja **i(t)** jednovremeno poprimaju kako ekstremne vrijednosti, tako i vrijednost nula, tj. napon i struja su u fazi.

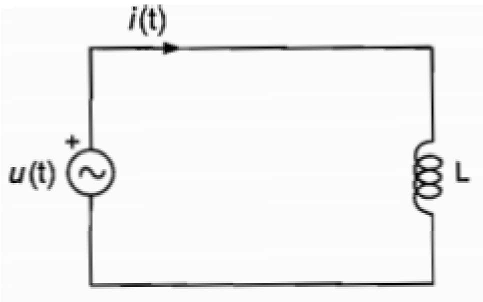
Trenutna električna snaga **p(t)** koju angažuje LVNR, određuje se pomoću relacije: $p(t)=u(t)\cdot i(t)=u_R(t)\cdot i(t)$



Slika 10. Grafički prikaz promjene trenutne električne snage p(t), u električnom krugu sa slike 9.

Snaga $\mathbf{P_{sr}}$ se naziva još i aktivnom električnom snagom i mjerna jedinica je **1(W)**.

5. Idealna električna zavojnica induktivnosti L u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona



Slika 11.

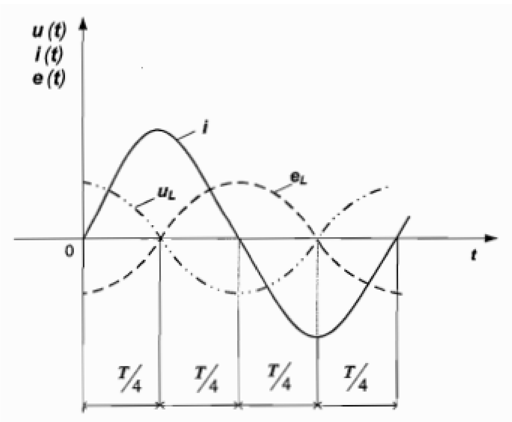
Na slici 11. je shematski prikazan elementarni električni krug, sa zavojnicom (LVNL), kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona $u(t)=U_m \cdot \sin(\omega t+\theta_u)$, kao generatorom.

Ako se sa **i(t)** označi električna struja, tada jednačina dinamičke ravnoteže, koja važi u svakom trenutku **t**, glasi:

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = u_L(t) \qquad u(t) + e_L(t) = 0$$

Za kolo sa slike 11 vrijedi:

- Uspostavljena električna struja **i(t)**, fazno zaostaje, za ugao od **π/2** radijana, u odnosu na pad napona **u_L(t)**, nastao na analiziranoj zavjonici, uslijed prolaska upravo te struje;
- Indukovana elektromotorna sila samoindukcije **e_L(t)**, fazno zaostaje, u odnosu na električnu struju **i(t)**, također za ugao **π/2** radijana, zbog čega su električni napon **u(t)** i indukovana elektromotorna sila samoindukcije **e_L(t)** međusobno u opoziciji;
- Na osnovu izraza koji određuje maksimalu vrijednost električne struje **i(t)**, **$I_m=(U_m/\omega L)$**, proizilazi da proizvod **ωL**, ima prirodu električnog otpora, zbog čega se u elektrotehici on i naziva indukovanim električnim otporom. Induktivni električni otpor se formalno, obično obilježava simbolom **$X_L=\omega L$**.



Trenutna električna snaga **p(t)** koju angažuje LVNL zavojnica u analiziranom krugu određuje se pomoću relacije: $p(t)=u(t)\cdot i(t)=u_L(t)\cdot i(t)$

Srednja vrijednost snage: $P_{sr}=P=0$ (W)

Maksimalna vrijednost trenutne električne snage, angažovane od strane LVNL zavojnice u elektrotehnici se naziva induktivna reaktivna snaga i mjerna jedinica je **1(Var)**.

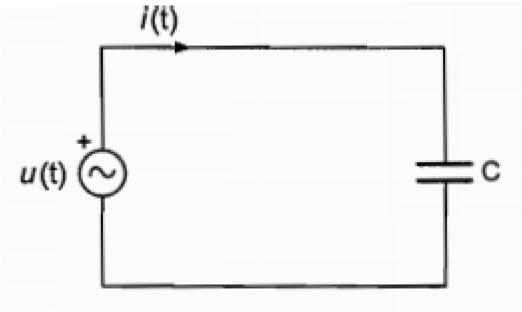
Formula:

$$Q_L = -\frac{U_m^2}{2\omega L}$$

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

6. Idealni električni kondenzator kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona



Na slici 12. je shematski prikazan elementarni električni krug, sa kondenzatorom (LVNC), kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona $u(t)=U_m \cdot \sin(\omega t+\theta_u)$, kao generatorom.

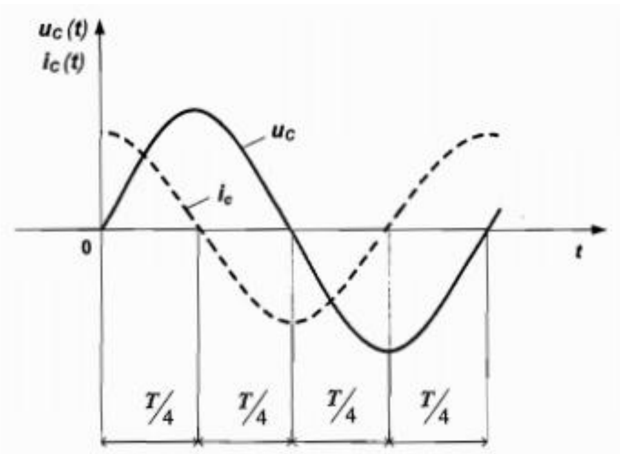
Slika 12.

Ako se sa **i(t)** označi električna struja, tada jednačina dinamičke ravnoteže, koja važi u svakom trenutku **t**, glasi:

$$u(t) = u_C(t); \qquad i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad u(t) + e_C(t) = 0$$

Za kolo sa slike 12. vrijedi:

- Uspostavljena električna struja **i(t)**, fazno prednjači, u odnosu na pad napona **$u_c(t)$** za ugao od **π/2** radijana;
- Kontraelektromotorna sila, **$e_c(t)$**, s druge strane, fazno prednjači u odnosu na električnu struju **i(t)**, također za ugao od **π/2** radijana, zbog čega su **u(t)** i **$e_C(t)$** u opoziciji;
- Na osnovu izraza koji određuje maksimalu vrijednost električne struje **i(t)**, **$I_m=(U_m\omega C)$**, proizilazi da izraz **(1/ωC)**, ima prirodu električnog otpora, zbog čega se u elektrotehici on i naziva kapacitivnim električnim otporom. Kapacitivni električni otpor se formalno, obično obilježava simbolom **$X_c=(1/\omega L)$**.



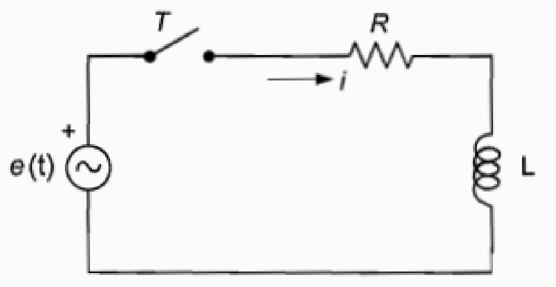
Trenutna električna snaga **p(t)** koju angažuje LVNC kondenzator u analiziranom krugu određuje se pomoću relacije: $p(t)=u(t)\cdot i(t)=u_C(t)\cdot i(t)$

<u>Srednja vrijednost</u> snage: $P_{sr}=P=0$ (W)

Maksimalna vrijednost trenutne električne snage, angažovane od strane LVNC kondenzatora u elektrotehnici se naziva <u>kapacitivna reaktivna snaga</u> i mjerna jedinica je **1(Var)**. Formula:

$$Q_C = \frac{U_m^2 \omega C}{2}$$

7. Realna električna zavojnica induktivnosti L u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona



Slika 13.

Ponašanje realne zavojnice induktivnosti **L**, kada se nađe u električnom krugu sa naponskim izvorom prostoperiodičnog napona $u(t)=U_m \cdot \sin(\omega t+\theta_u)$, može se dovoljno dobro predstaviti na osnovu razmatranja serijskog spoja R i L.

Ako se sa **i(t)** označi električna struja, a sa $\boldsymbol{u_L(t)}$ i $\boldsymbol{u_R(t)}$ padovi napona koji nastaju na zavojnici i otporniku, tada jednačine dinamičke ravnoteže, koje važe u svakom trenutku **t**, glase:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t); \qquad u_R(t) = Ri(t); \qquad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Maksimalna vrijednost struje: $I_m = \frac{U_m}{Z_L}$

Ukpna otpornost analiziranog kruga (**induktivna impedansa)**: $Z_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

Ugao φ_L (fazni pomjeraj struje i(t) u odnosu na električni napon u(t)): $\varphi_L = arctg\frac{\omega L}{R}$

struja **i(t)** u ovakvom kolu fazno kasni za naponom **u(t)** za neki ugao između **0** i **π/2** radijana.

Trenutna električna snaga **p(t)** koju angažuje realna zavojnica u analiziranom krugu određuje se pomoću relacije: $p(t)=u(t)\cdot i(t)=[u_L(t)+ u_R(t)]\cdot i(t)$

Srednja vrijednost snage **p(t)** određena je relacijom: $P_{sr}=UI \cos\varphi_L$.

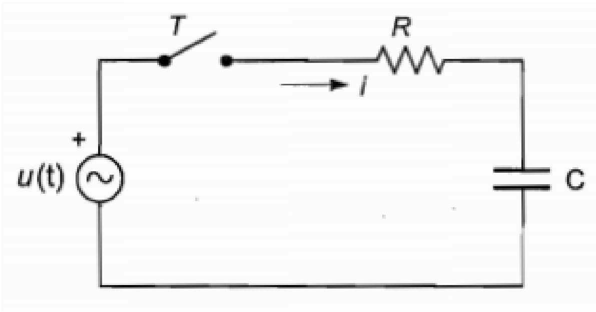
Reaktivna snaga se označava simbolom $\boldsymbol{Q_i}$, ukoliko se odnosi na induktivni element, a definisana je izrazom $-UI \sin\varphi_L$.

Reaktivna snaga $\boldsymbol{Q_i}$ i aktivna snaga **P**, zajedno određuju prividnu snagu **S** (mjerna jedinica **1 (VA)**) koja uvijek mora biti dimenzioniran naponski izvor.

Relacija:

$$S = \sqrt{P^2 + {Q_i}^2}$$

8. Realni električni kondenzator kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona



Slika 14.

Ponašanje realnog kondenzatora kapacitivnosti **C**, kada se nađe u električnom krugu sa naponskim izvorom prostoperiodičnog napona $u(t)=U_m \cdot \sin(\omega t+\theta_u)$, može se dovoljno dobro predstaviti na osnovu razmatranja serijskog spoja R i C.

Ako se sa **i(t)** označi električna struja, a sa $\mathbf{u_C(t)}$ i $\mathbf{u_R(t)}$ padovi napona koji nastaju na otporniku i kondenzatoru, tada jednačine dinamičke ravnoteže, koje važe u svakom trenutku **t**, glase:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t); \qquad u_R(t) = Ri(t); \qquad i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

Maksimalna vrijednost napona: $U_{Cm} = \frac{U_m}{\omega C Z_C}$

Ukpna otpornost analiziranog kruga (**kapacitivna impedansa)**: $Z_C = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$

Ugao φ_C (fazni pomjeraj struje i(t) u odnosu na električni napon u(t)): $\varphi_C = -arctg\frac{1}{\omega CR}$

Napon **u(t)** u ovakvom kolu fazno kasni za strujom **i(t)** za neki ugao između **0** i **π/2** radijana.

Trenutna električna snaga **p(t)** koju angažuje realna zavojnica u analiziranom krugu određuje se pomoću relacije: $p(t)=u(t)\cdot i(t)=[u_C(t)+ u_R(t)]\cdot i(t)$

Srednja vrijednost snage **p(t)** određena je relacijom: $P_{sr}=UI\cos\varphi_C$.

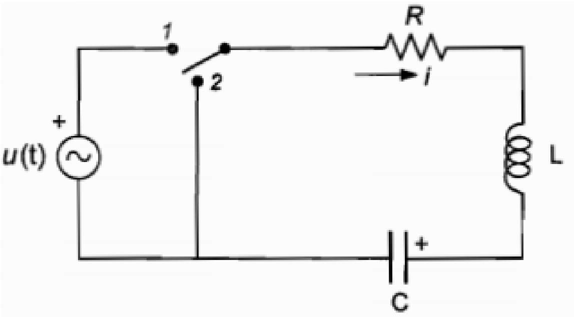
Reaktivna snaga se označava simbolom $\mathbf{Q_C}$, ukoliko se odnosi na kapacitivni element, a definisana je izrazom $-UI\sin\varphi_C$.

Reaktivna snaga $\mathbf{Q_C}$ i aktivna snaga **P**, zajedno određuju prividnu snagu **S** (mjerna jedinica **1 (VA)**) koja uvijek mora biti dimenzioniran naponski izvor.

Relacija:

$$S = \sqrt{P^2 + {Q_C}^2}$$

9. Serijski spoj aktivnog električnog otpora otpornosti R, električne zavojnice induktivnosti L i električnog kondenzatora kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona



Slika 15.

Ponašanje serijskog spoja realnog kondenzatora kapacitivnosti **C** i realne zavojnice induktivnost **L** kada se nađe u električnom krugu sa naponskim izvorom prostoperiodičnog napona $u(t)=U_m \cdot \sin(\omega t+\theta_u)$, može se dovoljno dobro predstaviti na osnovu razmatranja serijskog spoja R, L i C.

Ako se sa **i(t)** označi električna struja, a sa **u_L(t)**, **u_C(t)** i **u_R(t)** padovi napona koji nastaju na zavojnici, kondenzatoru i otporniku, tada jednačine dinamičke ravnoteže, koje važe u svakom trenutku **t**, glase:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t); \quad u_R(t) = Ri(t); \quad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}; \quad i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

Maksimalna vrijednost napona: $U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C}$

Maksimalna vrijednost struje: $I_m = \frac{U_m}{Z}$

Ukpna otpornost analiziranog kruga(impedansa): $Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot l - \frac{1}{\omega C})^2}$

Ugao φ (fazni pomjeraj struje i(t) u odnosu na električni napon u(t)): $\varphi = arctg\frac{(\omega \cdot l - \frac{1}{\omega C})}{R}$

Trenutna električna snaga **p(t)** koju angažuje realna zavojnica u analiziranom krugu određuje se pomoću relacije: $p(t)=u(t)\cdot i(t)=[u_C(t)+ u_L(t)+ u_R(t)]\cdot i(t)$

Srednja vrijednost snage **p(t)** određena je relacijom: $P_{sr}=P=UI\cos\varphi$.

Reaktivna snaga se označava simbolom **Q**, a definisana je izrazom -UI sinφ.

Reaktivna snaga **Q** i aktivna snga **P**, zajedno određuju prividnu snagu **S** (mjerna jedinica **1 (VA)**) koja uvijek mora biti dimenzioniran naponski izvor.

Relacija:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

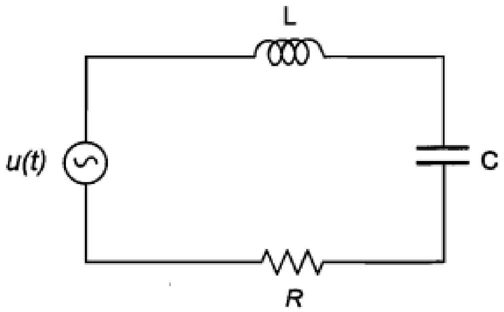
Ukoliko je analizirani spoj potrošača pretežno kapacitivan, odnosno ako vrijedi relacija $(\omega \cdot l - \frac{1}{\omega C}) < 0$, tada za reaktivnu snagu važi Q>0.

10. Rezonantne pojave u linearnim R, L, C krugovima s prostoperiodičnim električnim naponima i strujama

Moguće rezonantne pojave:

- Serijska (naponska)
- Paralelna (strujna)

➢ Osnovne karakteristike <u>naponske(serijske)</u> rezonanse



Na slici 16. prikazana je električna shema linearnog, serijskog R, L, C kruga, napajanog iz idealnog naponskog izvora prostoperiodičnog napona, u kojem je tokom stacionarnog stanja, moguće uspostaviti režim naponske rezonanse.

Slika 16.

Ukupna impedansa ovakvog električnog kruga $\underline{Z}$, određena je relacijama:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot l - \frac{1}{\omega C})^2} \; ; \qquad arg\underline{Z} = \varphi = arctg(\frac{\omega \cdot l - \frac{1}{\omega C}}{R})$$

Ukoliko frkvencija naponskog izvora ω, zadovoljava uslov:

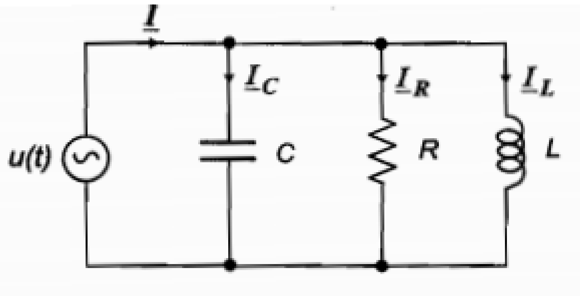
$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega C}; \qquad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ukupna impedansa, linearnog, serijskog R, L, C kruga sa slike 16. poprima svoj minimalni iznos: $\underline{Z}_{min} = R$, a argument te iste impedanse ima nultu vrijednost φ_0=0.

Padovi napona na električnoj zavojnici induktivnosti **L** i električnom kondenzatoru kapacitivnosti **C**, po intenzitetu su isti, ali su im smjerovi suprotni, što se analitički iskazuje relacijama: U_L=U_C; $\quad \underline{U_L} = -\underline{U_C}$

Nastanak naponske rezonanse unutar razmatranog električnog kruga, ne donosi samo opasnost zbog porasta amplitude struje $\underline{I}$, nego su opasnosti prisutne i zbog činjenice da pri naponskoj rezonansi nepovoljnom odnosu relevantnih R, L, C parametara kruga, padovi napona na električnoj zavojnici induktivnosti L i električnom kondenzatoru kapacitivnosti C, mogu po intenzitetu čak i prevazići amplitudu napona izvora U_m, što je posebno opasno za električni kondenzator.

➢ Osnovne karakteristike strujne(paralelne) rezonanse



Slika 17.

Na slici 17. prikazana je električna shema linearnog, paralelnog R, L, C kruga, napajanog iz idealnog naponskog izvora prostoperiodičnog napona, u kojem je tokom stacionarnog stanja, moguće uspostaviti režim strujne rezonanse.

Ukoliko se sa simbolom $\underline{I}$ označi ukupna struja, koju idealni naponsi izvor daje potrošačima u električnom krugu sa slike 17, tada prema I Kirchhoffovom zakonu važi relacija: $\underline{I} = \underline{I_R} + \underline{I_L} + \underline{I_C}$.

U skladu s Ohmovim zakonom za elekrični krug shematski prikazan na slici, važi relacija:

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

Veličina G=1/R se označava kao električna provodnost, dok se za veličinu $\underline{Y} = 1/Z$ koristi naziv kompleksna provodnost, ili admitansa.
Veličina $B = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$=$B_L$+$B_C$ naziva se reaktivnom provodnošću ili susceptansom.
Jedinica mjere za električnu provodnost G, reaktivnu električnu provodnost B i admitansu Y, je (S) (siemens).

Ukoliko je ispunjen uslov $\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = 0$ tada ukupna admitansa $\underline{Y}$ linearnog paralelno R, L, C kruga ima minimalnu vrijednost modula

$$Y_{min} = \frac{1}{R}$$

a argument te impedanse (φ_0) poprima nultu vrijednost.
Električne struje kroz električnu zavojnicu, induktivnost L i spojne provodnike vezane za elektrode električnog kondenzatora, kapacitivnosti C, po intenzitetu su iste, ali su im smjerovi toka suprotni, što se analitički iskazuje relacijama: : I_L=I_C; $\underline{I_L} = -\underline{I_C}$.

Nastanak strujne rezonanse unutar razmatranog linearnog električnog kruga, donosi dodatnu opasnost, zbog činjenice da pri takvoj rezonansi i nepovoljnom odnosu relevantnih R, L, C parametara kruga, amplitude električnih struja što se usmjeravaju kroz električnu zavojnicu induktivnosti L, i spojne provodnike vezane za elektrode električnog kondenzatora kapacitivnosti C, po intenzitetu mogu čak i prevazići amplitudu struje izvora I_m, što je posebno opasno za prisutnu električnu zavojnicu.

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

11. Višefazni sistemi

Trofazni električni generatori proizvode tri elektromotorne sile, iste maksimalne amplitude i iste frekvencije, ali različite pocetne faze.

Direktni redoslijed faza:

$$u_1 = U_m \sin(\omega t + \theta_u);$$

$$u_2 = U_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$u_3 = U_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{4\pi}{3}\right);$$

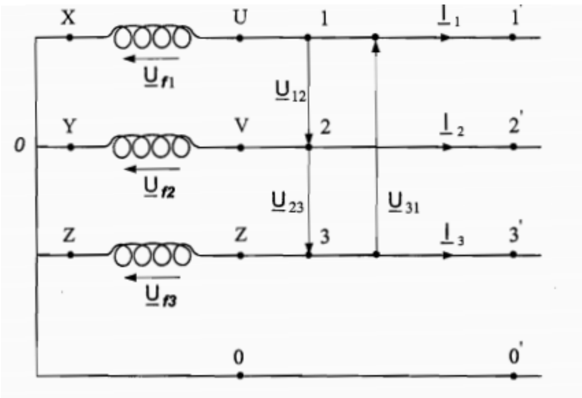
Inverzni redoslijed faza:

$$u_1 = U_m \sin(\omega t + \theta_u);$$

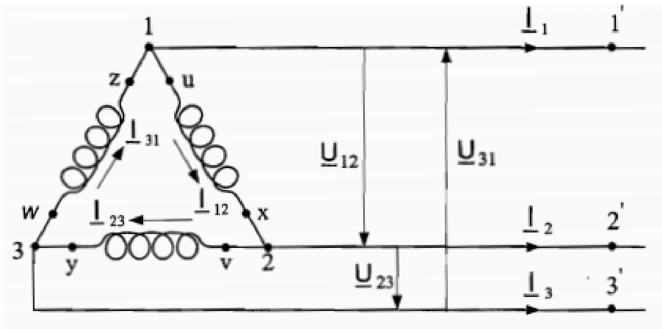
$$u_2 = U_m \sin\left(\omega t + \theta_u + \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$u_3 = U_m \sin\left(\omega t + \theta_u + \frac{4\pi}{3}\right);$$

Simetrični trofazni sistem je sistem prostoperiodičnih napona kod kojeg su maksimalne ampiltude faznih napona za sve faze identicne i relativni fazni pomak izmedu susjednih faza, po svom apsolutnom iznosu uvijek isti. Kod trofaznih simetričnih sistema, taj relativni fazni pomak između susjednih faza, iznosi 120°.
Ukoliko je narušen bilo koji od ova dva uslova, tada se razmatrani sistem tretira kao nesimetričan trofazni sistem.
Fazni namotaji trofaznog generatora mogu međusobno biti vezani u spoju **zvijezda** (**sa nultim provodnikom i bez nultog provodnika**), ili u spoju **trokut**.



Slika 18. Fazni namotaji generatora trofaznog sistema napona u spoju zvijezda



Slika 19. Fazni namotaji generatora trofaznog sistema napona u spoju trougao

Potrošač može biti:

- **Simetričan (uravnotežen)** - Vlastita impedansa je jednaka i po svom iznosu i po prirodi u svim svojim fazama.
- **Nesimetričan (neuravnotežen)** - ako impedansa nije jednaka u svim svojim fazama.

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

Uravnoteženi trofazni električni krugovi

Ukoliko je simetrični trofazni generator direktnog redoslijeda faza opterećen simetričnim trofaznim potrošačem, onda su potencijali tačaka 0 i 0' na istom iznosu. Tada kroz nulti vod 0'0 *nema električne struje*.

Struje $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ su linijske struje i vrijedi relacija: $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

Struje koje prolaze kroz faze nazivaju se faznim električnim strujama.

Pri bilo kojoj konfiguraciji trofaznog potrošača u spoju zvijezda **linijske i fazne struje su jednake**.

Linijski (međufazni) naponi – su naponi između faza. Vrijedi relacija: $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$

Fazni naponi – su naponi između faza generatora i zajedničkog zvjezdišta, i to su naponi: $\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_{20}$, $\underline{U}_{30}$

Linijski napon vezan u *zvijezdu fazno prednjači* odgovarajućem faznom naponu za 30°, a *amplituda* im je veća za √3.

Kod trofaznog sistema vezanog u *trougao* linijske struje potrošača fazno *prednjače* odgovarajućoj faznoj struji za 30°, i imaju za √3 *veću amplitudu* od faznih.

Maksimalna amplituda električnog napona $U_m = U_F\sqrt{2}$.

Snaga ovog sistema je definisana izrazom: $p(t) = p_{10}(t) + p_{20}(t) + p_{30}(t) = 3 \cdot U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi)$

Neuravnoteženi trofazni električni krugovi

Nulti vod služi za ublažavanje posljedica nesimetričnosti potrošača, uspostavlja stabilnije vrijednosti faznih napona i ima i zaštitnu funkciju.

Vrijede relacije:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_0 = 0$$

$$\underline{U}_{(0'0)} = \frac{\frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_0}}$$

➢ Obrtno magnetno polje

Tokom proučavanja magnetnih pojava u okolini provodnika kroz koje se usmjeravaju stalne jednosmjerne struje, konstatovano je da se u tom prostoru javlja stacionarno magnetno polje, čije prisustvo se, između ostalog, manifestuje i kroz mehaničko djelovanje silom na okolne provodnike u kojima također mora biti uspostavljena električna struja.

Uspostavi li se prostoperiodična struja kroz provodnik, također se uspostavlja magnetno polje u njegovoj okolini, ali je ono sada promjenljivo s vremenom. U takvim okolnostima i uspostavljeni magnetni fluks je funkcija vremena, pa je samim tim i magnetna indukcija (koja je vektorskog karaktera) također funkcija vremena.

Pogodnim prostornim rasporedom provodnika i uz usmjeravanje kroz te provodnike adekvatnog sistema prostoperiodičnih električnih struja, može se postići da vektor magnetne indukcije u takvom sistemu tokom vremena ne mijenja svoju maksimalnu amplitudu, ali mijenja smjer djelovanja.

Posmatramo presjek elementarne trofazne električne mašine koja se sastoji od statora(statičnog dijela) i rotora(pokretnog dijela): U utorima izrađenim na statoru postavlja se trofazni namotaj. Sva tri namotaja imaju isti broj zavoja i postavljeni su na željenu jezgru, tako da između njihovih osa postoji prostorni pomak od 2π/3 radijana. Kroz namotaje na statoru protiču tri prostoperiodične električne struje: i_1, i_2 i i_3 koje imaju iste maksimalne amplitude I_m i međusobno su fazno pomaknute za 2π/3 radijana.

Maksimalna amplituda magnetne indukcije rezultatnog magnetnog polja je:

$$B(t) = \sqrt{{B_X}^2 + {B_Y}^2} = \frac{3}{2} B_m.$$

Posljednja relacija pokazuje da maksimalna amplituda magnetne indukcije rezultatnog magnetnog polja ne ovisi o vremenu, odnosno da ima konstantnu vrijednost koja je 1,5 puta veća od maksimalne amplitude magnetne indukcije jedne faze B_m.

Vektor B(t) rotira tako da se njegova pozicija poklapa sa pozicijama magnetnih osa faznih namotaja tačno u onom trenutku u kojem struja koja teče kroz odgovarajući namotaj ima maksimalnu vrijednost.

Smijer vrtnje trofaznog obrtnog magnetnog polja može se promijeniti ako se zamijene bilo koje dvije struje dovedene namotajima (npr namotaju faze 3 dovede se struja i_2, a namotaju faze 2 se dovede struja i_3).

Postojanje trofaznog obrtnog magnetnog polja osnova je rada trofaznih asinhtonih motora.

12. Elementi teorije električnih krugova

Električna mreža – skup električnih uređaja (komponenti) međusobno povezanih vodičima tako da se za zadane poticaje ostvare željeni odzivi.
Sinteza mreže – postupak kojim se za zadane opticaje i zadane odzive određuje električna mreža.
Analiza mreže – postupak kojim se za zadanu mrežu i zadane poticaje određuju odzivi(iznazi).

13. Grafovi električnih mreža

Granama grafa nazivaju se linijski segmenti koji zamjenjuju grane u mreži.
Čvorovima grafa nazivaju se mjesta gdje se spajaju dvije ili više grana grafa.
Graf je geometrijski model mreže, čiji je matematički model predstavljen pomoću skupova pridruženih grana i čvorova.
Nepovezani graf je graf koji sadrži izolovani čvor, koji nije povezan niti sa jednom granom.
Povezani graf je graf kod koga su svi čvorovi povezani.
Graf sadrži sopstvenu petlju ako sadrži petlju koju čini jedna grana, tj. sadrži granu koja ima identičan početni i završni čvor.
Planarni graf je graf koji u planarnoj projekciji ne sadrži grane koje se ukrštaju.
Za graf G1 kažemo da je subgraf grafa G ukoliko svaki čvor i svaka grana subgrafa G1 pripada i grafu G.
Degenerisani grafovi su grafovi koji sadrže samo jedan čvor i niti jednu granu.
Subgraf put je subgraf koji sadrži sukcesivno povezane grane između dva čvora.
Orijentisan graf je graf na kome su naznačeni smjerovi grana.

➢ Definicija i model mrežnog grafa

Pomoću grafova simbolički se opisuju ograničenja koja na struje i napone grana mreže nameću Kirchhoffovi zakoni za struje i napone.

Matematički model orjentiranog grafa predstavlja matrica incidencije čvorova i grana, koja opisuje veze čvorova i grana orjentiranog grafa. Matrica incidencije, koja opisuje veze svih čvorova grafa, označava se sa $\mathbf{A_0}$ i naziva se potpuna matrica incidencije čvorova. Elementi matrice $\mathbf{A_0}$ imaju vrijednost:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & ukoliko\ grana\ k\ izlai\ iz\ čvora\ i \\ -1, & ukoliko\ grana\ k\ završava\ u\ čvoru\ i \\ 0, & ako\ grana\ k\ i\ čvor\ i\ nisu\ incidentni \end{cases}$$

Zbir elemenata u svakoj koloni potpune matrice incidencije $\mathbf{A_0}$ jednak je nuli.
Matrica **A** naziva se redukovana matrica incidencije čvorova ili skraćeno matrica incidencije čvorova **A**.

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

Grafovi električnih mreža

Stablo mrže predstavlja povezan subgraf mreže koji se dobije kada se grane iz grafa isključe, a pri tome svi čvorovi u mreži ostanu povezani. Svako stablo sadrži Nn-1 čvorova (Nn – broj čvorova).

Grane koje ne čine stablo grafa predstavljaju subgraf koji se zove kostablo. Subgraf kostablo sadrži Nl-(Nn-1) granu. Ovako formirane konture zovu se fundamentalne konture.

Kontura mreže definirana je kao skup sukcesivno povezanih grana, od kojih prva polazi a zadnja završava u istom čvoru. U teoriji grafova kontura mreže se definira ako subgraf grafa G koga čine grane zatvornog puta, tako da je svaki čvor incidentan samo sa dvije grane.

Subgraf petlja je svaka kontura grafa G koja ne sadrži ni jednu granu u svojoj unutrašnjosti.

Vanjska petlja je kontura grafa G izvan koje se ne nalazi ni jedna grana.

Strukturu subgrafova petlji možemo opisati potpunom matricom incidencije grana i petlji **M₀**. Elementi matrice **M₀** se definišu prema relaciji:

$$m_{ik}\begin{cases} 1, & za\ granu\ k\ u\ petlji\ i, čiji\ smjerovi\ se\ poklapaju \\ -1, & za\ granu\ k\ \ pelji\ i, čiji\ smjerovi\ su\ suprotni \\ 0, & kada\ grana\ k\ ne\ pripada\ petlji\ i \end{cases}$$

Matrica incidencije fundamentalnih kontura i grana **B** ima elemente koji su dati relacijama:

$$b_{ik}\begin{cases} 1, & ako\ kontura\ i\ sadrži\ granu\ k\ i\ ako\ imaju\ saglasne\ smjerove \\ -1, & ako\ kontura\ i\ sadrži\ granu\ k\ i\ ako\ su\ im\ smjerovi\ suprotni \\ 0, & ako\ grana\ k\ ne\ pripada\ konturi\ i \end{cases}$$

14. Matrični metodi rješavanja električnih mreža

➢ Rješavanje mreža pomoću Kirchhoffovih zakona

Broj čvorova Nn; Broj grana Nl; Broj petlji Np

Stanje mreže u svakom trenutku vrmna t određeno je varijablama stanja: naponima u(t) i strujama i(t) grana.

Matrična jednačina prema KZS **Ai(t)=0** sadrži Nn-1 nezavisnu algebarsku jednačinu sa Nl nepoznatih varijabli struja grana $i_i(t)$ (i=1, 2, ..., Nl).

Matrična jednačina prema KZN **Mv(t)=0** sadri Np=Nl-Nn+1 nezavisnu algebarsku jednačinu sa Nl nepoznatih varijabli napona grana $u_i(t)$ (i=1, 2, ..., Nl).

Dakle, prema KZ moguće je napisati (Nn-1)+(Nl-Nn+1)=Nl nezavisnih, linearnih, algebarskih jednačina sa konstantnim koeficijentima, koje sadrže 2Nl nepoznatih varijabli.

➢ Metod potencijala čvorova

Broj jednačina: Nn-1

$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{v}_n$

$\mathbf{Y}_n = \mathbf{AGA}^T$ (može se očitati direktno: dijagonalni elementi sa +, ostali sa -)

$\mathbf{i}_n = \mathbf{AGv}_g - \mathbf{Ai}_g$ (strujni izvori koji injektiraju struju u čvor)

$\mathbf{v}_n = \mathbf{Y}_n^{-1}\, \mathbf{i}_n$

$\mathbf{i} = \mathbf{Gv} + \mathbf{i}_g - \mathbf{Gv}_g$

Matricu admitansi čvorova $\mathbf{Y}_n$ možemo napisati i direktno (inspekcijom): Dijagonalni element y_{ii} predstavlja sumu konduktansi svih grana koje su incidentne sa čvorom i. Vandijagonalni element y_{ik} predstavlja negativnu sumu konduktansi grana G_j koje su incidentne sa čvorovima i i k. Za čvorove koji nemaju direktnu vezu vrijedi y_{ik}=0.

Struje čvorova $\mathbf{i}_n$ izračunavaju se prema slijedećem postupku: Mreža se transformira tako da se svi naponskigeneratori predstave pomoću ekvivalentnih strujnih generatora generalisane grane. Tada se elementi vektora i_n za novu mrežu izračunavaju na osnovu jednačine $\mathbf{i}_n\mathbf{=Ai}_g$.

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

Metod struja petlji

$\mathbf{i} = \mathbf{M}^T\mathbf{j}_p$

$\mathbf{Z}_p = \mathbf{MRM}^T$ (dijagonalni elementi sa +, ostali sa -)

$\mathbf{e}_p = \mathbf{MRi}_g - \mathbf{Mv}_g$ (naponski izvori u petlji, smjer petlje +, suprotan -)

$\mathbf{j}_p = \mathbf{Z}_p^{-1}\mathbf{e}_p$

$\mathbf{v} = \mathbf{Ri} + \mathbf{v}_g - \mathbf{Ri}_g$

Matricu impedansi petlji $\mathbf{Z}_p$ možemo napisati i direktno (inspekcijom): Dijagonalni element z_{ii} predstavlja sumu otpora svih grana koje su incidentne sa čvorom i. Vandijagonalni element z_{ik} predstavlja negativnu sumu otpora grana R_j koje su zajedničke petljama i i k. Za petlje koji nemaju zajedničku granu vrijedi $z_{ik}=0$.

Elementi matrice napona petlji $\mathbf{e}_p$ izračunavaju se prema slijedećem postupku: Mreža M se transformiše u mrežu M_1 tako da se svi strujni generatori prstave pomoću ekvivalentnih naponskih generatora generalisane grane. Tada se elementi vektora e_p za mrežu M_1 računaju na osnovu jednačine $\mathbf{e}_p=-\mathbf{Mv}_g$.

Metod struja kontura

$\mathbf{i} = \mathbf{B}^T\mathbf{j}_k$

$\mathbf{Z}_k = \mathbf{BRB}^T$ (dijagonalni elementi sa +, ostali sa -)

$\mathbf{e}_k = \mathbf{BRi}_g - \mathbf{Bv}_g$ (naponski izvori u konturi, smjer konture +, suprotan -)

$\mathbf{j}_k = \mathbf{Z}_k^{-1}\mathbf{e}_k$

$\mathbf{v} = \mathbf{Ri} + \mathbf{v}_g - \mathbf{Ri}_g$

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

15. Teoreme električnih mreža

➢ Telegenova teorema

Ova teorema definiše osobinu električnih mreža sa skoncetriranim parametrima da je ukupna snaga koja se predaje granama mreže u svakom trenutku t jednaka nuli.

Vrijedi relacija: $p_k(t)=v_k(t)i_k(t)$, za k=1,2, ..., Nl, pa se tada Teelegenova teorema može izraziti relacijom :

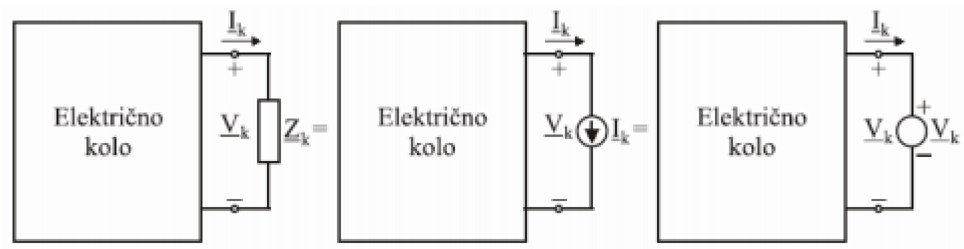
$$\sum_{k=1}^{Nl} p_k(t) = \sum_{k=1}^{Nl} v_k(t) i_k(t) = 0$$

Pošto Telegenova teorema zavisi isključivo od grafa mreže, ona takođe vrijedi i za kombinacije napona i struja mreža, koje imaju identičan orjentisani graf. Tako je:

$$\sum_{k=1}^{Nl} \hat{v}_k i_k = 0$$

➢ Teorema substitucije

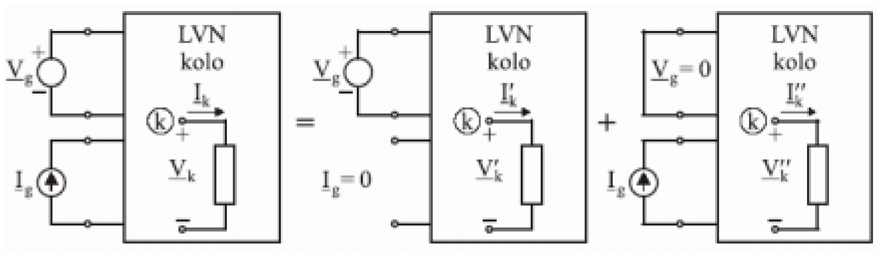
Prema teoremi substitucije grana k opšte mreže može se zamijeniti odgovarajućim nezavisnim strujnim generatorom $i_g=i_k$, ili naponskim generatorom $v_g=v_k$, tako da naponi i struje preostalih grana ostanu nepromijenjeni.



Slika 20. Teorema substitucije

➢ Teorema superpozicije

Teorema superpozicije vrijedi samo za linearne mreže. Prema teoremi superpozicije odziv linearnih mreža jednak je zbiru odziva koji nastaju uslijed pojedinačnog djelovanja generatora.



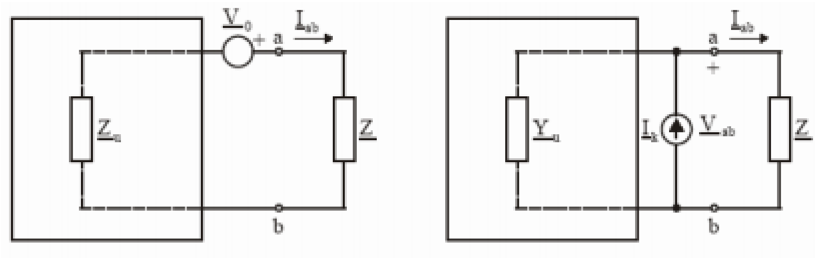
$$\underline{V}_k = \underline{V}_k' + \underline{V}_k''$$
$$\underline{I}_k = \underline{I}_k' + \underline{I}_k''$$

Slika 21. Teorema superpozicije

➢ Teorema reciprociteta

Prema teoremi reciprociteta kada se na izlaz sistema dovede ulazni pobudni signal x(t), na ulazu se kao odziv sistema javlja izlazni signal y(t). Dakle, odziv sistema ostaje nepromijenjen kada ulazni i izlazni signal zamijene mjesta. Teorema reciprociteta vrijedi samo za mreže koje <u>ne sadrže izvore</u>.

➢ Theveninova i Nortonova teorema



Slika 22. a) Tevenenovo ekvivalentno kolo
b) Nortonovo ekvivalentno kolo

Relaksirana mreža formira se tako da se iz (glavne) mreže eliminišu svi nezavisni izvori. Ukoliiko mreža ne sadrži nezavisne izvore, nego samo RLC elemente, tada se relaksirana mreža može predstaviti u odnosu na krajeve a-b preko ulazne impedanse $\underline{Z}_U$ (odnosno ulazne admitanse $\underline{Y}_U$). Tada je vriejdnost impedanse (admitanse) ekvivalentnih generatora: $\underline{Z}_U=\underline{Z}_{Th}$; $\underline{Y}_U=\underline{Y}_{No}$
Vrijednost napona ekvivalentnog naponskog generatora $\underline{V}_p$ jednaka je naponu $\underline{V}_{ab}$ pri ovorenim krajevima a-b, a vrijednost struje ekvivalentnog strujnog generatora $\underline{I}_k$ jednaka je struji $\underline{I}_{ab}$ pri kratkospojenim krajevima a-b.

16. Magnetno spregnuti krugovi

Za električna kola se kaže da su spregnuta ako su međusobno povezana zajedničkom granom ili elektromagnetnom indukcijom.

S obzirom na definiciju ima više vrsta sprega:

- **konduktivna sprega**, između dva električna kola ostvaruje se pomoću zajedničke grane sa parametrima **R** i **L** koji obezbjeđuju njihovu konduktivnu (galvansku) povezanost.
- **kapacitivna** ili **dielektrična sprega** između dva kola, ostvaruje se pomoću zajedničke grane sa kondenzatorom **C**.
- **magnetna ili induktivna sprega** ostvaruje se pomoću elektro-magnetne indukcije, tj. pomoću zajedničkog magnetnog fluksa koji prožima oba električna kruga.

<u>Samoindukcija</u> je pojava da se u konturi kroz koju protiče vremenski promjenjiva struja indukuje napon samoindukcije zbog promjenjivog fluksa koji je proizvela struja same konture.

<u>Međusobna indukcija</u> je pojava da se, zbog promjene jačine struje u jednoj konturi indukuje napon u nekoj drugoj (sekundarnoj) konturi. Predznak međusobne induktivnosti **M** ovisi o međusobnom položaju svitaka, smjerova namotavanja svitaka i smjerova struja kroz svitke.

<u>Konvencijom je usvojeno da je međusobna induktivnosti M pozitivna ako su struje kroz oba svitka usmjerene tako da obje ulaze u tačku (saglasni krajevi) ili da obje struje izlaze iz tačke</u>**.**

Međuinduktivitet u izmjeničnom strujnom krugu

Impedanse pojedinih zavojnica računamo kao: $X_{L1}=\omega\cdot L_1$ $X_{L2}=\omega\cdot L_2$

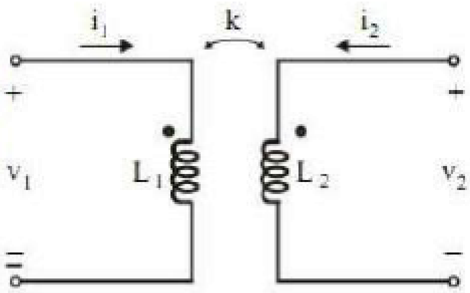
Induktiviteti zavojnica i međuinduktivitet su povezani izrazom: $M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$

Ako prethodni izraz pomnožimo s kružnom frekvencijom ω dobijemo izraz za impendansu međuinduktivne sprege: $X_M = k \cdot \sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}$

Karakter međuinduktivne impedanse je isti kao i induktivne impedanse pa u kompleksnoj domeni imamo: $\underline{X_M} = \pm j\omega M$, gdje je + suglasna sprega, a – nesuglasna sprega.

➢ Snaga i energija spregnutih LVN zavojnica

Trenutna snaga koja se predaje spregnutim LVN zavojnicama, za usaglaene referntne smjerova napona i struja pristupa, definisana je relacijom: $p(t)=v_1(t)i_1(t)+ v_2(t)i_2(t)$



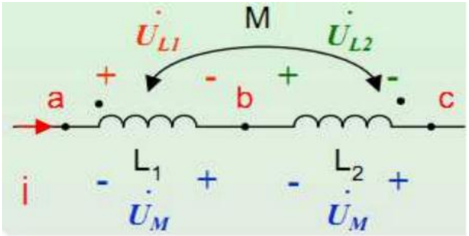
Slika 23.

➢ Serijska veza sprgnutih zavojnica

Razlikujemo dva načina spoja zavojnica u seriju i to tako da su fluksevi usaglašeni, odnosno neusaglašeni, odnosno kada je veza zavojnica suglasna, odnosno nesuglasna.

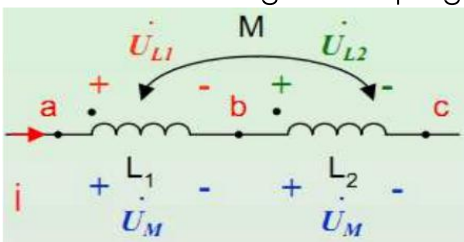
Nesuglasna serijska veza zavojnica (struja ne ulazi u sve tačke magnetno spregnutih zavojnica):

$L_{ekv}=L_1+L_2-2M$



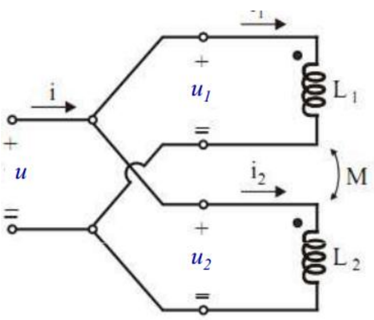
Suglasna serijska veza zavojnica (struja ulazi u sve tačke magnetno spregnutih zavojnica):

$L_{ekv}=L_1+L_2+2M$



➢ Paralelna veza spregnutih zavojnica

Razlikujemo dva načina spoja zavojnica u paralelu i to tako da su fluksevi usaglašeni, odnosno neusaglašeni, odnosno kada je veza zavojnica suglasna, odnosno nesuglasna.



Za suglasnu vezu zavojnica vrijedi: $\Gamma = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12}$

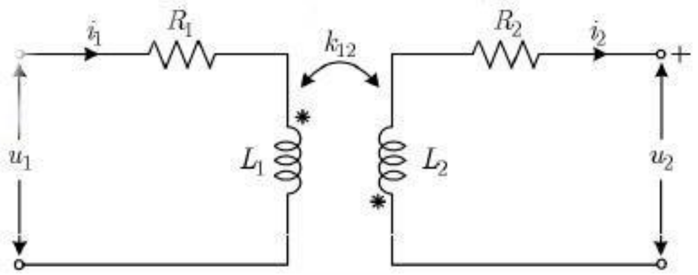
$i = L^{-1}\Phi = \Gamma\Phi$; gdje je Γ matrica recipročnih induktiviteta

Za nesuglasnu vezu zavojnica vrijedi: $\Gamma= \Gamma_{11}+ \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12}$

Suglasna paralelna veza

18. Transformatori

Transformator je elektromagnetni uređaj koji statičkim putem, pomoću elektromagnetne indukcije transformiše električnu energiju izmjenične struje jednog iznosa napona i struje u električnu energiju približno iste vrijednosti, ali drugih iznosa napona i struje pri istoj frekvenciji.



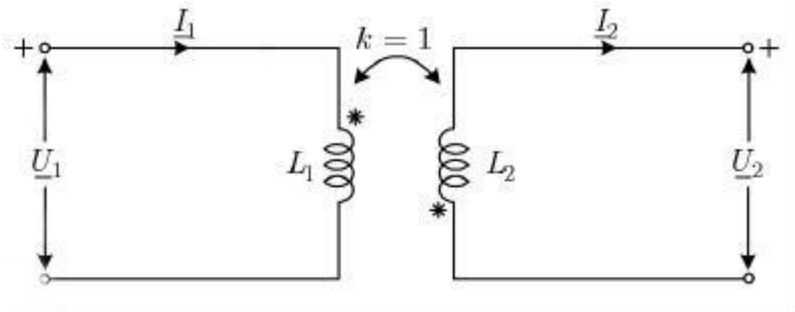
Slika 24.

Transformatorom se postiže promjena naponskih nivoa uz veoma male gubitke i uz međusobnu galvansku izolovanost krugova.

➢ Savršeni transformator

Linearni transformator bez gubitaka i bez rasipanja naziva se savršeni.

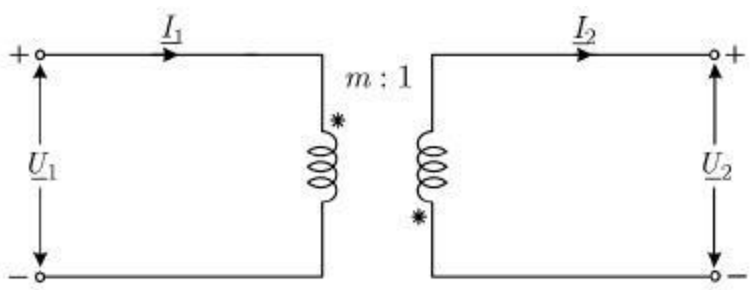
- Bez gubitaka podrazumijeva da je bez elemenata gdje se troši aktivna snaga (za dati slučaj *R1 = 0* i *R2 = 0*).
- Bez rasipanja slijedi da je koeficijent sprege k =1



Slika 25.

➢ Idealni transformator

Idealan transformator je savršeni transformator u koga je rezultantna magnetnopobudna sila jednaka nuli. Idealni transformator nema mogućnost akumuliranja energije.



Slika 26.

19. Četveropoli (mreže sa dva pristupa)

Podjela (prema broju krajeva=:

- Mreže sa jednim pristupom
- Mreže sa dva pristupa:
    - Aktivne (sadrže izvore energije u sebi)
    - Pasivne (u njima nema izvora energije, generator je priključen na jedan pristup)
- Mreže sa n pristupa (n proizvoljan cijeli broj)

Mreža služi da prenese energiju od izvora do prijemnika.

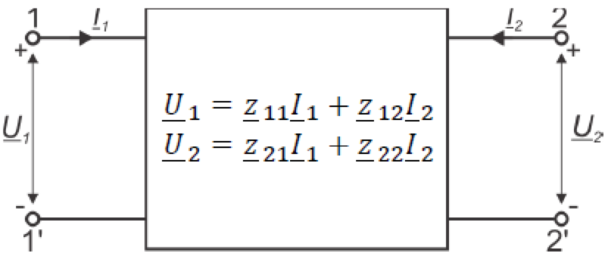
➢ Jednačine i parametri

Imamo 4 varijable: U_1, I_1 i U_2, I_2

Broj kombinacija je 6, odakle slijedi da imamo 6 vrsta jednačina -> 6 vrsta parametara koji se nazivaju primarni parametri mreža sa dva pristupa

<u>Naponske jednačine četveropola ili „Z“ parametri četveropola</u>

$\underline{U}_1=f_1(\underline{I}_1,\underline{I}_2)$; $\underline{U}_2=f_2(\underline{I}_1,\underline{I}_2)$



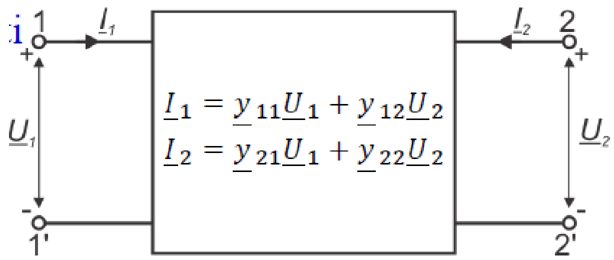
$\underline{U}_1=\underline{z}_{11}\cdot\underline{I}_1+\underline{z}_{12}\cdot\underline{I}_2$

$\underline{U}_2=\underline{z}_{21}\cdot\underline{I}_1+\underline{z}_{22}\cdot\underline{I}_2$

Ovi parametri imaju prirodu otpornosti

<u>Strujne jednačine četveropola ili „Y“ parametri četveropola</u>

$\underline{I}_1=f_1(\underline{U}_1,\underline{U}_2)$; $\underline{I}_2=f_2(\underline{U}_1,\underline{U}_2)$



$\underline{I}_1=\underline{y}_{11}\cdot\underline{U}_1+\underline{y}_{12}\cdot\underline{U}_2$

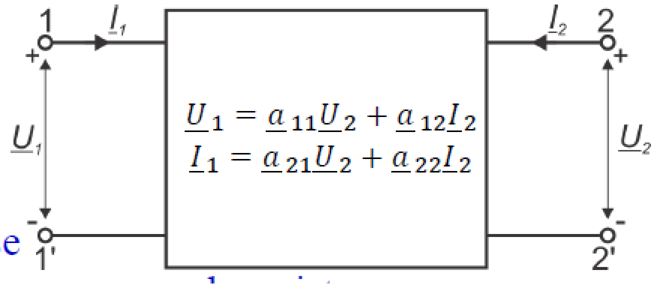
$\underline{I}_2=\underline{y}_{21}\cdot\underline{U}_1+\underline{y}_{22}\cdot\underline{U}_2$

Ovi parametri imaju prirodu provodnosti (admitanse)

Prenosne jednačine četveropola - „A“ parametri četveropola

$\underline{U}_1=f_1(\underline{U}_2,\underline{I}_2)$; $\underline{I}_1=f_2(\underline{U}_2,\underline{I}_2)$

$\underline{U}_1=\underline{a}_{11}\cdot\underline{U}_2-\underline{a}_{12}\cdot\underline{I}_2$
$\underline{I}_1=\underline{a}_{21}\cdot\underline{U}_2-\underline{a}_{22}\cdot\underline{I}_2$

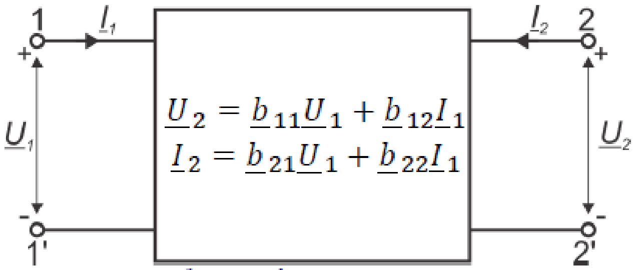


Ovi parametri imaju različitu prirodu: $\underline{a}_{11}$, $\underline{a}_{22}$ – bezdimenzioni brojevi (kompleksni); $\underline{a}_{12}$ – priroda otpornosti; $\underline{a}_{21}$ – priroda provodnosti.
//Note: Greška je na slici, idu minusi!

Prenosne jednačine četveropola (izlazne jednačine) - „B“ parametri četveropola

$\underline{U}_2=f_1(\underline{U}_1,\underline{I}_1)$; $\underline{I}_2=f_2(\underline{U}_1,\underline{I}_2)$

$\underline{U}_2=\underline{b}_{11}\cdot\underline{U}_1-\underline{b}_{12}\cdot\underline{I}_1$
$\underline{I}_2=\underline{b}_{21}\cdot\underline{U}_1-\underline{b}_{22}\cdot\underline{I}_1$

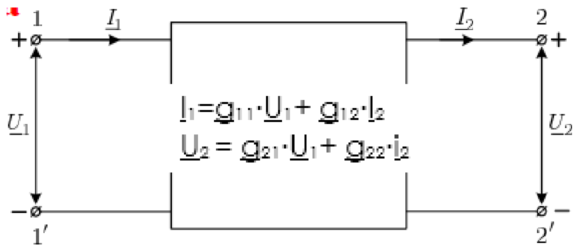


Ovi parametri imaju različitu prirodu: $\underline{b}_{11}$, $\underline{b}_{22}$ – bezdimenzioni brojevi (kompleksni); $\underline{b}_{12}$ – priroda otpornosti; $\underline{b}_{21}$ – priroda provodnosti.
//Note: Greška je na slici, idu minusi!

Hibridne jednačine četveropola - „G“ parametri četveropola

$\underline{I}_1=f_1(\underline{U}_1,\underline{I}_2)$; $\underline{U}_2=f_2(\underline{U}_1,\underline{I}_2)$

$\underline{I}_1=\underline{g}_{11}\cdot\underline{U}_1+\underline{g}_{12}\cdot\underline{I}_2$
$\underline{U}_2=\underline{g}_{21}\cdot\underline{U}_1+\underline{g}_{22}\cdot\underline{I}_2$

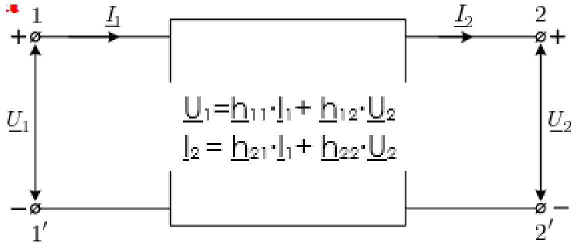


Ovi parametri imaju različitu prirodu: $\underline{g}_{12}$, $\underline{g}_{21}$ – bezdimenzioni brojevi (kompleksni); $\underline{g}_{22}$ – priroda otpornosti; $\underline{g}_{11}$ – priroda provodnosti.

Pripremile:
Ajla Alić
Alma Hodžić
Irma Karasoftić
Senka Ibrahimpašić

Uredila: Ajla Alić

Hibridne jednačine četveropola - „H“ parametri četveropola



$\underline{U}_1=f_1(\underline{I}_1,\underline{U}_2)$; $\underline{I}_2=f_2(\underline{I}_1,\underline{U}_2)$

$\underline{U}_1=\underline{h}_{11}\cdot\underline{I}_1+\underline{h}_{12}\cdot\underline{U}_2$
$\underline{I}_2=\underline{h}_{21}\cdot\underline{I}_1+\underline{h}_{22}\cdot\underline{U}_2$

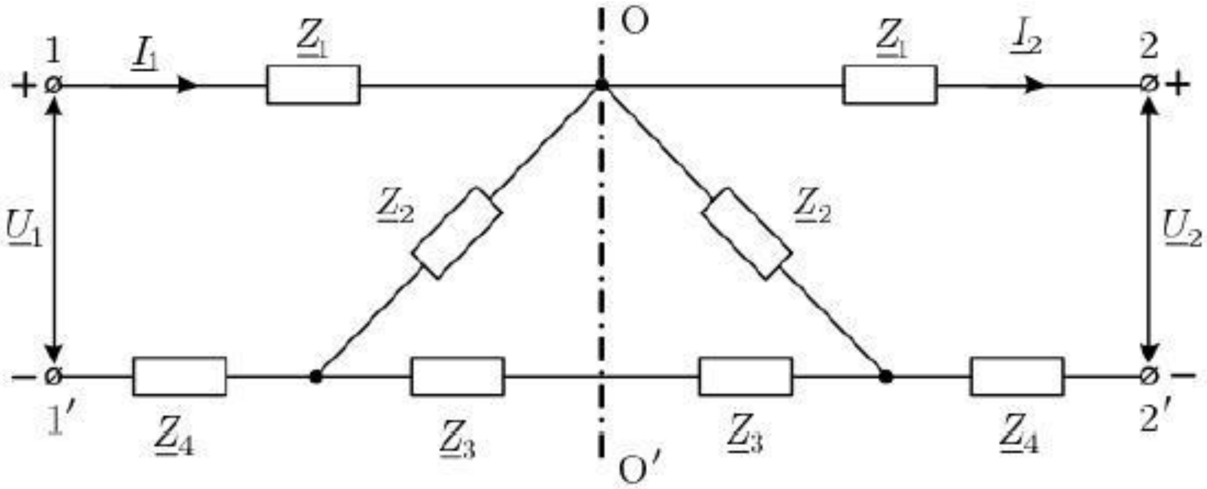
Ovi parametri imaju različitu prirodu: $\underline{h}_{12}$, $\underline{h}_{21}$ – bezdimenzioni brojevi (kompleksni); $\underline{h}_{11}$ – priroda otpornosti; $\underline{h}_{22}$ – priroda provodnosti.

Podjela primarnih parametara četveropola **-** U pogledu fizičke dimenzionalnost parametri četveropola se dijele na:

- homogene (u pogledu fizičke dimenzionalnosti svi jednaki homogeni) u ovu grupu spadaju z – parametri i y – parametri
- nehomogene (u pogledu fizičke dimenzionalnosti parametri različite prirode)u ovu grupu spadaju a – parametri i b – parametri g – parametri i h – parametri

Simetrične mreže sa dva pristupa

Definicija: Ako postoji osa OO’ koja ne prolazi između istoimenih krajeva (tj. ne prolazi između 1- 1’ i 2-2’) u odnosu na koju je raspored impendansi simetričan, mreža se naziva simetričnom. tj. ako je jedna polovina mreže slika u ogledalu druge polovine kao što to pokazuje slika

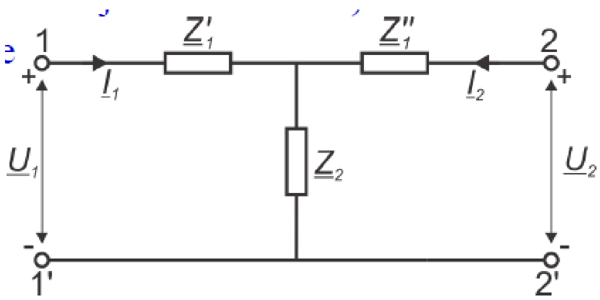


Uslov simetrije za sve parametre je:

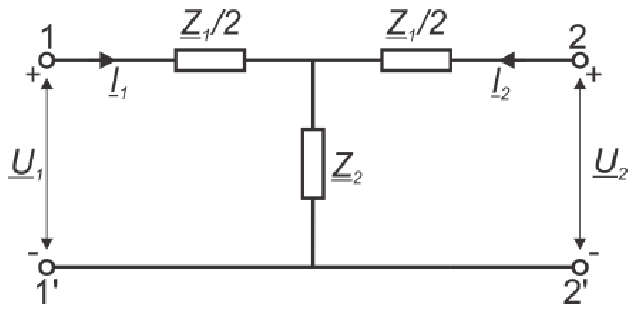
$\underline{a}_{11}=\underline{a}_{22}$
$\underline{b}_{11}=\underline{b}_{22}$ det($\underline{g}$)=1
$\underline{z}_{11}=\underline{z}_{22}$ det($\underline{h}$)=1
$\underline{y}_{11}=\underline{y}_{22}$

➢ Posebni slučajevi mreža sa dva pristupa

Kada je raspored impedansi mreže sa dva pristupa u obliku slova "T" onda se ona naziva T - mreža.



Kada je raspored impedansi mreže sa dva pristupa u obliku slova "π" onda se ona naziva π - mreža.



➢ Ekvivalencija mreža

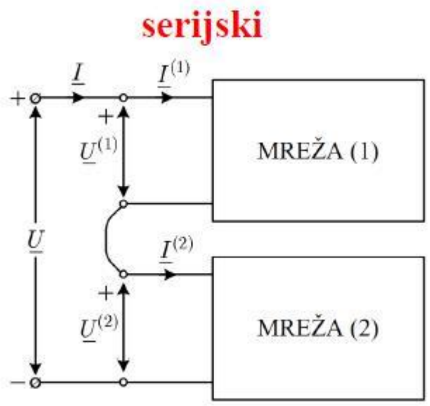
Ako neku mrežu može zamijeniti neka druga mreža, a da se pri tome ne promijene niti naponi niti struje na njenim priključcima, tada se te dvije mreže promatrane izvana ne razlikuju i kažemo da su te dvije mreže ekvivalentne. Za mreže prikazane četveropolima ovo znači da su ekvivalentne ako im je jedan od *skupova parametara* (npr. z-parametri) *jednak*.

Ako je poznata šema spoja mreže ***A***, shvaćene kao četveropol, može se izgraditi njoj ekvivalentna mreža ***B***, uzimajući u obzir uvjete ekvivalencije, izraženo recimo pomoću z-parametara:

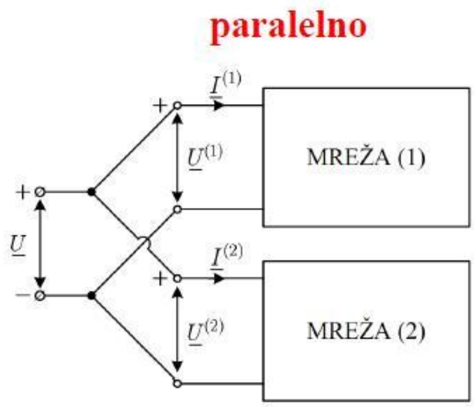
$$z_{11}^{A} = z_{11}^{B} \qquad z_{12}^{A} = z_{12}^{B} \qquad z_{21}^{A} = z_{21}^{B} \qquad z_{22}^{A} = z_{22}^{B}$$

➢ Vezivanje mreža sa dva kraja

Dvije mreže sa jednim pristupom mogu se vezivati na dva načina :



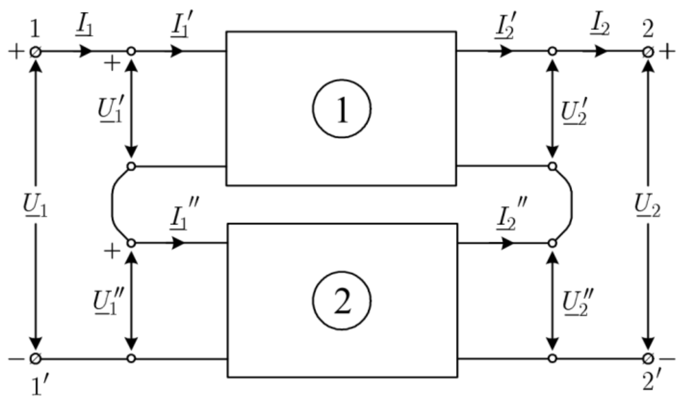
$$\underline{U} = \underline{U}^{(1)} + \underline{U}^{(2)}$$
$$\underline{I} = \underline{I}^{(1)} = \underline{I}^{(2)}$$



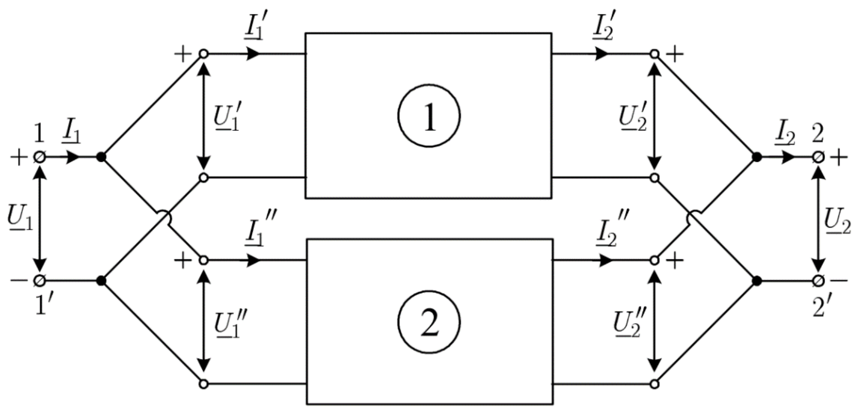
$$\underline{U} = \underline{U}^{(1)} = \underline{U}^{(2)}$$
$$\underline{I} = \underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)}$$

Rezultat vezivanja u oba slučaja je složenija mreža sa jednim pristupom. Za razliku od mreža sa jednim pristupom, mreže sa dva pristupa mogu se vezivati na više načina

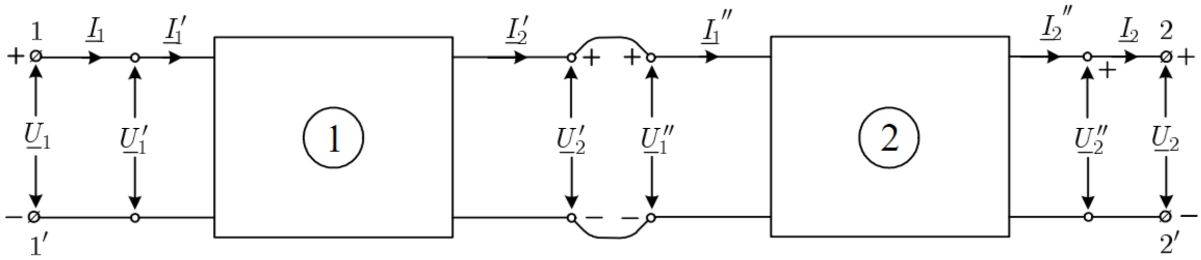
a) Serijska mreža sa dva pristupa



b) Paralelna veza mreže sa dva para krajeva



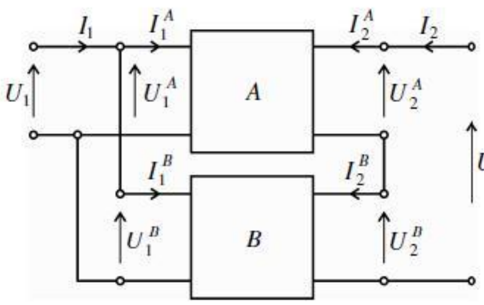
c) Kaskadna (lančana) veza četveropola



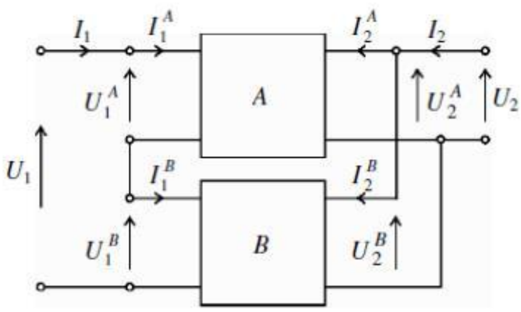
<u>Kaskadna veza je uvijek moguća</u>

Pored navedenih veza postoje i druge kao što su:

- serijsko paralelna veza (na pristupu 1-1' serijska, a na 2-2' paralelna)
- paralelno serijska veza (na pristupu 1-1' paralelna, a na 2-2' serijska)
- povratna sprega (poseban slučaj serijsko paralelne veze)



Paralelno-serijski spoj dvaju dvoprilaza



Serijsko-paralelni spoj dvaju dvoprilaza

Povratna sprega predstavlja poseban slučaj serijsko paralelne veze. Mreže se opisuju funkcijama (ne parametrima). A(s) i B(s) gdje je s - kompleksna učestanost.