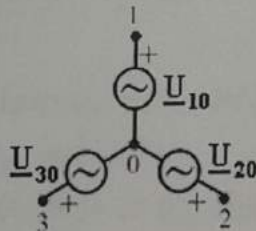


ELEKTRIČNI KRUGOVI 1

Uvodne napomene



Trofazni generator

Na gornjoj slici je prikazan trofazni generator u spoju zvijezda. On je okarakterisan svojim faznim naponima \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} , \underline{U}_{30} , ili ekvivalentno svojim linijskim naponima \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} . Efektivne vrijednosti linijskih napona su jednake i iznose $U_{10} = U_{20} = U_{30} = U_F$, dok su efektivne vrijednosti linijskih napona također međusobno jednake i iznose $U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L$.

Veza između efektivnih vrijednosti linijskih i faznih napona generatora je: $U_L = \sqrt{3} \cdot U_F$.

Veza između fazora linijskih i faznih napona generatora je:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10}$$

Direktni redoslijed faznih napona (simetrična raspodjela napona direktnog redoslijeda faza)

Fazni naponi su dati sa:

$$\underline{U}_{10} = U_F \cdot \exp(j0)$$

$$\underline{U}_{20} = \underline{U}_{10} \cdot \exp(-j120^\circ) = U_F \cdot \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{30} = \underline{U}_{20} \cdot \exp(-j120^\circ) = U_F \cdot \exp(-j240^\circ) = U_F \cdot \exp(+j120^\circ)$$

Linijski naponi su tada:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} = U_F \cdot \exp(j0) - U_F \cdot \exp(-j120^\circ) = \sqrt{3} \cdot U_F \cdot \exp(j30^\circ) = U_L \cdot \exp(j30^\circ) = \\ &= \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{10} \cdot \exp(j30^\circ) \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} = U_L \cdot \exp(-j90^\circ) = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{20} \cdot \exp(j30^\circ) = \underline{U}_{12} \cdot \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} = U_L \cdot \exp(+j150^\circ) = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{30} \cdot \exp(j30^\circ) = \underline{U}_{12} \cdot \exp(+j120^\circ)$$

Inverzni redoslijed faznih napona (simetrična raspodjela napona inverznog redoslijeda faza)

2

Fazni naponi su dati sa:

$$\underline{U}_{10} = U_F \cdot \exp(j0)$$

$$\underline{U}_{20} = \underline{U}_{10} \cdot \exp(+j120^\circ) = U_F \cdot \exp(+j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{30} = \underline{U}_{20} \cdot \exp(+j120^\circ) = U_F \cdot \exp(+j240^\circ) = U_F \cdot \exp(-j120^\circ)$$

Linijski naponi su tada:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} = U_F \cdot \exp(j0) - U_F \cdot \exp(+j120^\circ) = \sqrt{3} \cdot U_F \cdot \exp(-j30^\circ) = \\ &= U_L \cdot \exp(-j30^\circ) = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{10} \cdot \exp(-j30^\circ) \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} = U_L \cdot \exp(+j90^\circ) = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{20} \cdot \exp(-j30^\circ) = \underline{U}_{12} \cdot \exp(+j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} = U_L \cdot \exp(-j150^\circ) = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{30} \cdot \exp(-j30^\circ) = \underline{U}_{12} \cdot \exp(-j120^\circ)$$

Direktni redoslijed linijskih napona (simetrična raspodjela napona direktnog redoslijeda linijskih napona)

Linijski naponi su dati sa:

$$\underline{U}_{12} = U_L \cdot \exp(j0)$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} \cdot \exp(-j120^\circ) = U_L \cdot \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} \cdot \exp(-j240^\circ) = U_L \cdot \exp(-j240^\circ) = U_L \cdot \exp(+j120^\circ)$$

Fazni naponi su tada:

$$\underline{U}_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U}_{12} \cdot \exp(-j30^\circ) = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(-j30^\circ) = U_F \cdot \exp(-j30^\circ)$$

$$\underline{U}_{20} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U}_{23} \cdot \exp(-j30^\circ) = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(-j150^\circ) = U_F \cdot \exp(-j150^\circ) = \underline{U}_{10} \cdot \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{30} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U}_{31} \cdot \exp(-j30^\circ) = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(+j90^\circ) = U_F \cdot \exp(+j90^\circ) = \underline{U}_{10} \cdot \exp(+j120^\circ)$$

Inverzni redoslijed linijskih napona (simetrična raspodjela napona inverznog redoslijeda linijskih napona)

Linijski naponi su dati sa:

$$\underline{U}_{12} = U_L \cdot \exp(j0)$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} \cdot \exp(+j120^\circ) = U_L \cdot \exp(+j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} \cdot \exp(+j120^\circ) = U_L \cdot \exp(+j240^\circ) = U_L \cdot \exp(-j120^\circ)$$

Fazni naponi su tada:

$$\underline{U}_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U}_{12} \cdot \exp(+j30^\circ) = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(+j30^\circ) = U_F \cdot \exp(+j30^\circ)$$

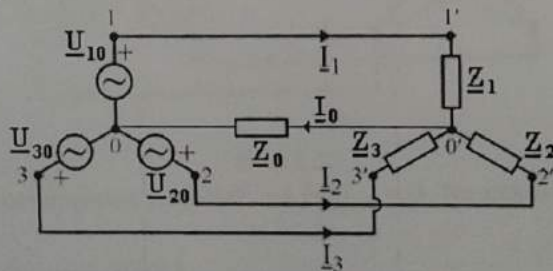
$$\underline{U}_{20} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U}_{23} \cdot \exp(+j30^\circ) = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(+j150^\circ) = U_F \cdot \exp(+j150^\circ) = \underline{U}_{10} \cdot \exp(+j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{30} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{U}_{31} \cdot \exp(+j30^\circ) = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(-j90^\circ) = U_F \cdot \exp(-j90^\circ) = \underline{U}_{10} \cdot \exp(-j120^\circ)$$

Trofazni četvorožični spoj u zvijezdu

Pod četvorožičnim spojem u zvijezdu se podrazumijeva trofazni sistem gdje su i generator i potrošač spojeni u zvijezdu, a tzv. nul-vod (nulti vodič) ima impedansu \underline{Z}_0 i kroz njega teče struja I_0 . Sistem je okarakterisan sa ukupno 17 veličina i to 13 napona, te sa 4 struje:

- fazni naponi generatora $\underline{U}_{10}, \underline{U}_{20}, \underline{U}_{30}$;
- linijski naponi generatora $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$;
- fazni naponi potrošača $\underline{U}_{1'0'}, \underline{U}_{2'0'}, \underline{U}_{3'0'}$;
- linijski naponi potrošača $\underline{U}_{1'2'}, \underline{U}_{2'3'}, \underline{U}_{3'1'}$;
- napon nul-voda $\underline{U}_{0'0}$;
- fazne (linijske) struje I_1, I_2, I_3 (u ovakvom sistemu linijske i fazne struje su jednake);
- struja nul-voda I_0 .



Spoj zvijezda-zvijezda sa nul-vodom

Relacije koje ih povezuju su:

$$I_1 = \frac{U_{1'0'}}{Z_1} = \frac{U_{10} - U_{0'0}}{Z_1}$$

$$I_2 = \frac{U_{2'0'}}{Z_2} = \frac{U_{20} - U_{0'0}}{Z_2}$$

$$I_3 = \frac{U_{3'0'}}{Z_3} = \frac{U_{30} - U_{0'0}}{Z_3}$$

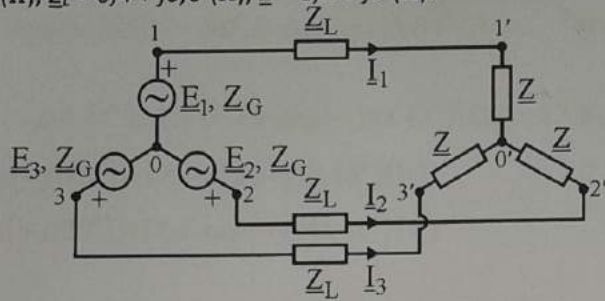
$$U_{0'0} = \frac{\frac{U_{10}}{Z_1} + \frac{U_{20}}{Z_2} + \frac{U_{30}}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_0}}, \quad I_0 = I_1 + I_2 + I_3$$

Specijalno, kada je potrošač uravnotežen ($Z_1 = Z_2 = Z_3$) ili kada je nul-vod realizovan u vidu kratkog spoja ($Z_0 = 0$), lako je provjeriti da vrijedi $\underline{U}_{0'0} = 0$.

4

Zadatak 1

Na generator unutrašnje impedanse Z_G i simetrične raspodjele EMS priključen je uravnoteženi potrošač impedanse Z u spoju zvijezda. Ako je impedansa linijskih provodnika (napojnog voda 1-1') Z_L , odrediti raspodjelu struja i napona, kao i aktivnu snagu generatora i potrošača. Dato je: $E_1 = 220$ (V), $Z_G = 0,2 + j0,8$ (Ω), $Z_L = 0,4 + j0,8$ (Ω), $Z = 8,2 + j5$ (Ω).



Slika 1

Rješenje

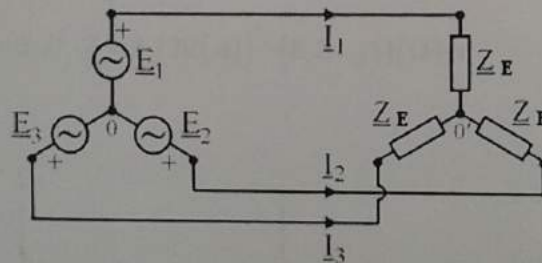
Zbog pretpostavke o direktnoj raspodjeli faznih napona na generatoru možemo pisati:

$$E_1 = E_1 \cdot \exp(j0) = 220 \cdot \exp(j0) \text{ (V)}$$

$$E_2 = E_1 \cdot \exp(-j120^\circ) = 220 \cdot \exp(-j120^\circ) \text{ (V)}$$

$$E_3 = E_1 \cdot \exp(+j120^\circ) = 220 \cdot \exp(+j120^\circ) \text{ (V)}$$

Sa slike 1 se vidi da su u svakoj fazi impedanse generatora, linijskog provodnika i potrošača vezane u seriju. Stoga ćemo ove tri impedanse ekvivalentirati sa jednom impedansom Z_E u svakoj fazi (slika 1.1): $Z_E = Z_G + Z_L + Z = 8,8 + j6,6$ (Ω) = $11 \cdot \exp(j36,87^\circ)$ (Ω)



Slika 1.1

Sistem sa slike 1.1 ima uravnotežen potrošač, pa je $U_{0'0} = 0$. Na osnovu ovoga računamo struje kao:

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_E} = \frac{220 \cdot \exp(j0) \text{ (V)}}{11 \cdot \exp(j36,87^\circ) \text{ (\Omega)}} = 20 \cdot \exp(-j36,87^\circ) \text{ (A)}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_E} = \frac{220 \cdot \exp(-j120^\circ) \text{ (V)}}{11 \cdot \exp(j36,87^\circ) \text{ (\Omega)}} = I_1 \cdot \exp(-j120^\circ) = 20 \cdot \exp(-j156,87^\circ) \text{ (A)}$$

$$I_3 = \frac{E_3}{Z_E} = \frac{220 \cdot \exp(+j120^\circ) \text{ (V)}}{11 \cdot \exp(j36,87^\circ) \text{ (\Omega)}} = I_1 \cdot \exp(+j120^\circ) = 20 \cdot \exp(+j83,13^\circ) \text{ (A)}$$

Na osnovu slike 1 određujemo relacije za napone U_{10} , U_{20} , U_{30} (napon generatora umanjene za gubitke na unutrašnjoj impedansi generatora), napone $U_{1'}$, $U_{2'}$, $U_{3'}$ (gubitke napona na napojnim vodovima), $U_{1'0'}$, $U_{2'0'}$, $U_{3'0'}$ (napone na potrošaču).

$$\underline{U}_{10} = \underline{E}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_G = 220 \cdot \exp(j0)(V) - (20 \cdot \exp(-j36,87^\circ)(A)) \cdot (0,825 \cdot \exp(+j75,96^\circ)(\Omega)) =$$

$$= 207,2 + j10,4(V) = 207,5 \cdot \exp(+j2,87^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{20} = \underline{E}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_G = \underline{U}_{10} \cdot \exp(-j120^\circ) = 207,5 \cdot \exp(+j2,87^\circ - j120^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{30} = \underline{E}_3 - \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_G = \underline{U}_{10} \cdot \exp(+j120^\circ) = 207,5 \cdot \exp(+j2,87^\circ + j120^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{11'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_L = (20 \cdot \exp(-j36,87^\circ)(A)) \cdot (0,89 \cdot \exp(+j63,43^\circ)(\Omega)) = 17,8 \cdot \exp(+j26,56^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{21'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_L = \underline{U}_{11'} \cdot \exp(-j120^\circ) = 17,8 \cdot \exp(-j93,44^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{31'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_L = \underline{U}_{11'} \cdot \exp(+j120^\circ) = 17,8 \cdot \exp(+j146,56^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{10'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z} = (20 \cdot \exp(-j36,87^\circ)(A)) \cdot (9,6 \cdot \exp(+j31,37^\circ)(\Omega)) = 192 \cdot \exp(-j5,5^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{20'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} = \underline{U}_{10'} \cdot \exp(-j120^\circ) = 192 \cdot \exp(-j125,5^\circ)(V)$$

$$\underline{U}_{30'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z} = \underline{U}_{10'} \cdot \exp(+j120^\circ) = 192 \cdot \exp(+j114,5^\circ)(V)$$

Ukupna prividna snaga koja se razvija na generatoru je suma prividnih snaga generatora u svakoj fazi:

$$\underline{S}_G = \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{E}_3 \cdot \underline{I}_3^* = 3 \cdot \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* = 3 \cdot (220 \cdot \exp(j0)) \cdot (20 \cdot \exp(+j36,87^\circ)) (VA) =$$

$$= 13200 \cdot \exp(+j36,87^\circ) (VA) = 10560(W) + j7920(VAr)$$

Ukupna prividna snaga koja se razvija na potrošaču je suma prividnih snaga potrošača u svakoj fazi:

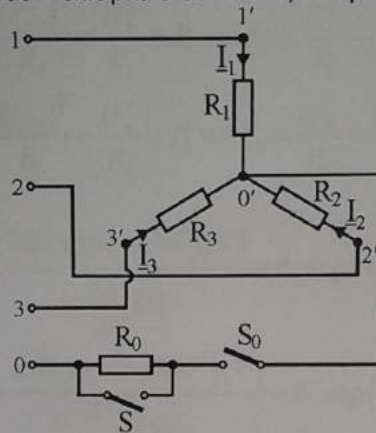
$$\underline{S}_p = \underline{I}_1^2 \cdot \underline{Z} + \underline{I}_2^2 \cdot \underline{Z} + \underline{I}_3^2 \cdot \underline{Z} = 3 \cdot \underline{I}_1^2 \cdot \underline{Z} = 3 \cdot (20(A))^2 \cdot (8,2 + j5)(\Omega) =$$

$$= 9840(W) + j6000(VAr)$$

Zadatak 2

Na trofaznu četverožiču mrežu, linijskog napona $U_L = 380$ (V) i simetrične raspodjele napona inverznog redoslijeda linijskih napona, priključen je neuravnoteženi potrošač u spoju zvijezda. Ukoliko su u pitanju potrošači aktivne snage, odrediti struje u kolu, ako je ostvaren spoj:

- a) sa nultim provodnikom – sklopke S i S_0 zatvorene, a snage na potrošačima su $P_1 = 1760$ (W), $P_2 = 1320$ (W), $P_3 = 1980$ (W);
- b) bez nultog provodnika – sklopka S_0 otvorena;
- c) sa impedansom nultog voda – sklopka S otvorena, sklopka S_0 zatvorena i $R_0 = 100$ (Ω).



Slika 2

Rješenje

Za simetričnu raspodjelu napona inverznog redoslijeda linijskih napona vrijedi:

$$\underline{U}_{12} = U_L \cdot \exp(j0) = 380 \cdot \exp(j0) (V)$$

$$\underline{U}_{23} = U_L \cdot \exp(+j120^\circ) = 380 \cdot \exp(+j120^\circ) (V)$$

$$\underline{U}_{31} = U_L \cdot \exp(-j120^\circ) = 380 \cdot \exp(-j120^\circ) (V)$$

Fazni naponi su tada:

$$\underline{U}_{10} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(+j30^\circ) = 220 \cdot \exp(+j30^\circ) (V)$$

$$\underline{U}_{20} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(+j150^\circ) = 220 \cdot \exp(+j150^\circ) (V)$$

$$\underline{U}_{30} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot \exp(-j90^\circ) = 220 \cdot \exp(-j90^\circ) (V)$$

gdje je $U_f = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 220$ (V).

7

$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{10}$$

a) Kada su sklopke S i S₀ zatvorene, vrijedi da je $\underline{U}_{0'0} = 0$, pa je $\underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{20}$. Kako se na otporima

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{30}$$

razvija samo aktivna snaga, to onda vrijedi da su:

$$\underline{S}_1 = \frac{|\underline{U}_{1'0'}|^2}{R_1} = \frac{U_F^2}{R_1} = P_1 \Rightarrow R_1 = \frac{U_F^2}{P_1} = \frac{55}{2} (\Omega)$$

$$\underline{S}_2 = \frac{|\underline{U}_{2'0'}|^2}{R_2} = \frac{U_F^2}{R_2} = P_2 \Rightarrow R_2 = \frac{U_F^2}{P_2} = \frac{110}{3} (\Omega)$$

$$\underline{S}_3 = \frac{|\underline{U}_{3'0'}|^2}{R_3} = \frac{U_F^2}{R_3} = P_3 \Rightarrow R_3 = \frac{U_F^2}{P_3} = \frac{220}{9} (\Omega)$$

Struje u ovom slučaju iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{R_1} = \frac{220 \cdot \exp(+j30^\circ) (V)}{\frac{55}{2} (\Omega)} = 8 \cdot \exp(+j30^\circ) (A)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{R_2} = \frac{220 \cdot \exp(+j150^\circ) (V)}{\frac{110}{3} (\Omega)} = 6 \cdot \exp(+j150^\circ) (A)$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{R_3} = \frac{220 \cdot \exp(-j90^\circ) (V)}{\frac{220}{9} (\Omega)} = 9 \cdot \exp(-j90^\circ) (A)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \sqrt{3} - j2 (A) = 2,65 \cdot \exp(-j49,11^\circ) (A)$$

b) U slučaju pod a) smo proračunali otpore, a taj podatak koristimo za slučajeve b) i c). Kako je S₀ otvorena, napon nul-voda (napon između zvjezdista) proračunavamo kao:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{U_{20}}{R_2} + \frac{U_{30}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{U_{20}}{R_2} + \frac{U_{30}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{2,65 \cdot \exp(-j49,11^\circ) (A)}{\frac{23}{220} (S)} = 25,31 \cdot \exp(-j49,11^\circ) (V)$$

Struje u ovom slučaju iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{R_1} = \frac{U_{10} - \underline{U}_{0'0}}{R_1} = 6,33 + j4,7 (A)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{R_2} = \frac{U_{20} - \underline{U}_{0'0}}{R_2} = -5,65 + j3,52 (A)$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{R_3} = \frac{U_{30} - \underline{U}_{0'0}}{R_3} = -0,68 - j8,22 (A)$$

$$\underline{I}_0 = 0$$

c) Kako je sklopka S otvorena, sklopka S₀ zatvorena, nul-vod ima impedansu od R₀ = 100 (Ω), pa nanovo proračunavamo napon između zvjezdista kao:

8

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\frac{U_{10}}{R_1} + \frac{U_{20}}{R_2} + \frac{U_{30}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_0}} = 15,12 - j17,46(V)$$

Struje u ovom slučaju iznose:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{1'0'}}{R_1} = \frac{U_{10} - U_{0'0}}{R_1} = 6,38 + j4,64(A)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{2'0'}}{R_2} = \frac{U_{20} - U_{0'0}}{R_2} = -5,61 + j3,48(A)$$

$$\underline{I}_3 = \frac{U_{3'0'}}{R_3} = \frac{U_{30} - U_{0'0}}{R_3} = -0,62 - j8,29(A)$$

$$\underline{I}_0 = \frac{U_{0'0}}{R_0} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0,15 - j0,17(A)$$