

Narcis Behlilović, Mensur Hajro, Senad Smaka

ELEKTRIČNI KRUGOVI 1



Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, 2011

SADRŽAJ

Predgovor autora	7
Glava 1	9
1. Elementarni dinamički električni krugovi	11
1.1 Idealizirana električna zavojnica induktivnosti L; energija i početno stanje	12
1.1.1 Vezivanje idealiziranih električnih zavojnica	18
1.1.2 Priključenje i isključenje idealizirane linearne vremenski nepromjenljive zavojnice na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona	21
1.2 Idealizirani električni kondenzator kapacitivnosti C: energija i početno stanje	26
1.2.1 Vezivanje idealiziranih električnih kondenzatora....	34
1.2.2 Električna snaga, električna energija i pasivnost električnih kondenzatora	37
1.2.3 Priključenje i isključenje idealiziranog, linearnog, vremenski nepromjenljivog kondenzatora na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona	40
Glava 2	47
2. Električni krugovi u stacionarnom sinusoidalnom režimu	49
2.1 Električni krug baziran na serijskom spoju R, L, C elemenata	51
2.2 Aktivni električni otpor otpornosti R u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona	60
2.3 Idealna električna zavojnica induktivnosti L u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona.....	64
2.4 Idealni električni kondenzator kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona	68

2.5	Realna električna zavojnica induktivnosti L u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona	72
2.6	Realni električni kondenzator kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona	78
2.7	Serijski spoj aktivnog električnog otpora otpornosti R , električne zavojnica induktivnosti L i električnog kondenzatora kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona	85
2.8	Predstavljanje prostoperiodičnih signala pomoću fazora	95
2.9	Simbolički pristup u rješavanju linearnih električnih krugova s prostoperiodičnim strujama i naponima ..	99
2.10	Rezonantne pojave u linearnim R , L , C krugovima s prostoperiodičnim električnim naponima i strujama	105
2.10.1	Osnovne karakteristike naponske rezonanse	105
2.10.2	Osnovne karakteristike strujne rezonanse	110
2.11	Ravnoteža električnih snaga u električnom krugu	115
2.12	Uslov maksimalne aktivne snage na potrošaču	117
	Zadaci za samostalan rad uz glavu 2	121
Glava 3		217
3.	Višefazni sistemi prostoperiodičnih struja i napona	219
3.1	Vezivanje trofaznih generatora za potrošače električne energije	224
3.1.1	Uravnoteženi trofazni električni krugovi	224
3.1.2	Neuravnoteženi trofazni električni krugovi	228
3.2	Obrtno magnetno polje	234
	Zadaci za samostalan rad uz glavu 3.....	239
	Primjeri testova za provjeru znanja studenata iz predmeta Električni krugovi I	297
	Literatura	309

PREDGOVOR AUTORA

Aktuelna organizacija nastavnog procesa na Univerzitetu u Sarajevu u skladu sa Bolonjskim procesom, značajno je promijenila i koncept izvođenja nastave u oblasti Teoretska elektrotehnika.

U tom smislu postalo je jasno da bi studentima elektrotehničkih fakulteta, zasigurno koristilo posjedovanje pisanog materijala ne samo iz predmeta **Osnovi elektrotehnike** (koji je znatno usklađeniji sa novim oblikom izvođenja nastave, od prethodnih, tematski sličnih, publikacija) nego i iz predmeta **Električni krugovi i Teoretska elektromagnetika**, kada su tako uređeni. Knjiga **Električni krugovi I**, dodatni je iskorak u tom pravcu.

Udžbenik je pisan prema programu predmeta Električni krugovi I, koji je Senat Univerziteta u Sarajevu usvojio 2005. godine. Sastavljen je od tri glave: Elementarni dinamički električni krugovi, Električni krugovi u stacionarnom sinusoidalnom režimu i Višefazni električni krugovi prostoperiodičnih struja i napona. Predmetni sadržaj pisan je tako da se težište opisivanja i analize razmatranih pojava, prevashodno postavi u ravan njihovog fizikalnog sagledavanja i razumijevanja, iako se stalno vodilo računa da se znatnije ne odstupi ni od matematički korektne interpretacije.

Na početku svake glave nalazi se neka od latinskih izreka, što sa dodatnim gradivom sadržanim unutar zadatka za samostalan rad (u njemu se nalaze misli poznatih i/ili mudrih osoba), prevashodno treba da relaksira čitaoca kao i da ga navede na vlastito razmišljanje o odnosu prema životu i svakodnevnim obavezama. Ovaj, donekle nestandardan potez za literaturu iz tehničkog žanra, motiviran je željom autora da bar donekle popravi rasprostranjeno mišljenje o općoj naobrazbi onih što se školuju za inženjerski poziv.

Zadaci za pripremu parcijalnih i integralnih provjera znanja, te primjeri zadataka sa ranije provedenih provjera znanja (za nastavni program „ante Bologna“ i nastavni program „Bologna“), trebali bi biti dovoljan fond proračunskih problema za uspješno usvajanje izloženog sadržaja. Oni su istovremeno i dobra prilika da se sa više argumenata obezvrijedi postojeća dilema je li lakše bilo studirati po modelu „ante Bologna“, ili po modelu „Bologna“.

S obzirom na to da su na pisanje ovog rukopisa, svoj utjecaj imale i mnoge naše kolege, to koristimo ovu priliku da im se svima zahvalimo, kako na podršci, tako i na datim savjetima. Što ovaj rukopis ima baš ovakav izgled i sadržaj, pored nas su odgovorni i oni koji su dominantno utjecali na naše profesionalne orijentacije. U tom smislu hvala prof. dr. Vefiku Karabdiću, prof. dr. Branislavu Jankoviću, prof. dr. Pavlu Jovanoviću, Prof Seadu Softiću i prof dr Ejupu Hotu, čiji smo bili dugogodišnji saradnici na Katedri za elektrotehniku i električna mjerenja ETF-a u Sarajevu. Prof. dr. Mihajlo Galić nas je prvo „infiltrirao ljubavlju prema matematici“, a potom sistematično uvodio i u tajne, kako pokušavati biti korektan prema studentima. Akademik prof. dr. Svetozar Zimonjić, prof. dr. Karel Jezernik i prof. dr. Asif Šabanović, svojim strpljenjem, podrškom i znanjem, omogućili su nam da unutar „Energoinvesta“ i Instituta za robotiko Univerze v Mariboru, naučimo bar dio inženjerskih vještina. Prof. dr. Zijad Haznadar i prof. dr. Slobodan Milojković, bili su nam uvijek spremni pomoći da pronademo ispravna rješenja i onih problema iz Teoretske elektrotehnike, za koje nismo sami vidjeli pravi put.

Koleginice i kolege: dr. Jasna Pašić, mr. Mirsada Čengić, mr. Neda Rusanov, mr. Irfan Turković, te asistent Irma Sokolović, Mirza Milišić, Mirza Hamza, Lejla Ahmethodžić, korisnim sugestijama i priložima, pomogli su nam da bar dio grešaka uklonim i prije prvog izdanja rukopisa. Jasenko Dizdarević, koji je tehnički uredio rukopis, stalno nas je podsticao da ga što prije okončam.

Sadržaj rukopisa u nešto redukovanim obliku, može biti upotrebljiv za izučavanje predmetne problematike i na drugim tehničkim fakultetima.

Za sve uočene greške, ili pak eventualne ideje kako naredno izdanje rukopisa učiniti još primjerenijim studentima, autor je unaprijed zahvalan.

Sarajevo 2011.

Autori

Tres infelices in mundo dicimus esse; infelix, qui pauca sapit spernitque docer; infelix, qui recte docet operatur inique; infelix, qui nulla sapientia prodest

Kažemo da su na svijetu tri nesrećnika: nesrećan je ko malo zna, a ne da da ga uče; nesrećan je onaj ko dobro uči, a loše radi; nesrećan je onaj kome nikakva mudrost ne koristi

GLAVA 1

U ovoj glavi su obrađene osnovne karakteristike induktivnih i kapacitivnih elemenata. Ovi elementi posebno su analizirani u uslovima uspostavljanja njihove serijske, paralelne ili mješovite veze i stavljanja pod dejstvo jednosmjernog naponskog izvora. Kvantificirano su iskazani i odnosi koji nastaju tokom razmjene električne energije između tih elemenata i upotrijebljenog naponskog izvora električne energije.

1. Elementarni dinamički električni krugovi

Pojam električnog kruga nije moguće uniformno definisati. Stoga se u tehničkoj literaturi i susreće više različito uobličenih definicija električnog kruga, koje suštinski gledano, ipak na analogan način, objedinjavaju dominantne karakteristike razmatranih električnih sistema (korisno je naglasiti da terminu električni krug, u alternativnoj jezičkoj formi, korespondira termin električno kolo).

U kontekstu prethodno rečenog, pod pojmom električni krug, može se podrazumjevati i svaka na pogodan način ostvarena veza elemenata, koja omogućava prenošenje električne energije od izvora električne energije, pa do potrošača električne energije, pri čemu se neizostavno prisutni elektromagnetni procesi opisuju uz pomoć pojmova «napon» i «struja».

Element električnog kruga je obično idealizirani model, koji treba da zamijeni realan dio električnog kruga, i to tako, da se prevashodno uvažava samo njegove glavne osobine. Pri makroskopskom gledanju predmetnih problema, analizirani procesi se i u idealizovanom modelu i u odgovarajućem realnom dijelu električnog kruga, odvijaju na dovoljno sličan način.

Razvrstavanje elemenata, koji su prisutni u električnim krugovima, može se provoditi po više kriterijuma, zbog čega i postoje podjele na:

- * izvore električne energije i potrošače električne energije,
- * aktivne elemente i pasivne elemente,
- * dvopolne elemente i višepolne elemente,
- * skoncentrisane elemente i raspodijeljene elemente,
- * linearne elemente i nelinearne elemente,
- * stacionarne elemente i nestacionarne elemente,
- * statičke elemente i dinamičke elemente.

U kontekstu posljednje navedene podjele, kod statičkih električnih elemenata, odnosi između električnog napona i električne struje analitički su opisani algebarskim jednačinama, dok su kod dinamičkih električnih elemenata ti isti odnosi opisani diferencijalnim jednačinama.

1.1 Idealizirana električna zavojnica induktivnosti L : energija i početno stanje

Tokom proučavanja odnosa između magnetnog fluksa i stalne jednosmjerne električne struje, koja je stvorila taj magnetni fluks, kao koeficijent proporcionalnosti između prethodno pomenutih veličina, uveden je pojam električne induktivnosti i to u formi električne samoinduktivnosti L (odnos magnetnog fluksa i struje koja je stvorila taj magnetni fluks) i električne međuinduktivnosti M_{12} (odnos dijela fluksa Φ_1 , dakle fluksa Φ_{12} ($\Phi_{12} < \Phi_1$) koji dopire do neke konture C_2 , i struje I_1 koja je prolazeći kroz konturu C_1 stvorila upravo magnetni fluks Φ_1).

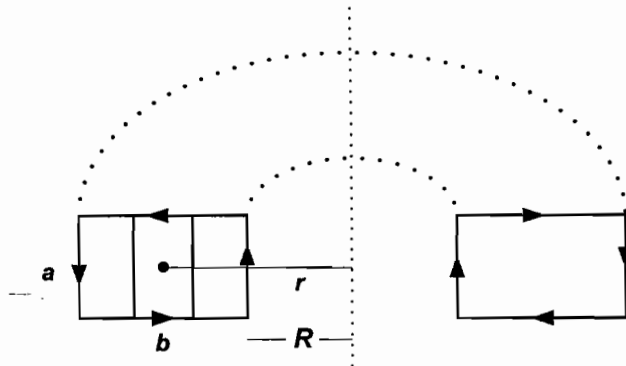
Pri tome je korišten najjednostavniji slučaj spomenute veze, u kojem se induktivnost tretira kao konstantna veličina, određena samo vlastitim geometrijskim karakteristikama i karakteristikama sredine kojoj se pripisuje.

Saglasno takvom pristupu, samoinduktivnost solenoida L_S , formiranog od N ravnomjerno i gusto raspoređenih zavojaka, postavljenih na paramagnetno torusno jezgro pravougaonog poprečnog presjeka, stranica a i b , te unutrašnjeg poluprečnika R (jezgro je grafički prikazano na *Slici 1.1*), iznosi:

$$L_S = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot a \cdot \ln((R + b)/R)}{2 \cdot \pi} . \quad (1.1)$$

Ako je samoinduktivnost razmatranog solenoida L_S konstantna, a električna struja u svom stacionarnom režimu rada nije funkcija vremena, unutar njenog prelaznog radnog režima moguće je odrediti elektromotornu silu samoindukcije E_S (između krajeva solenoida samoinduktivnosti L_S), posredstvom izraza:

$$E_S = - \frac{d \Phi}{d t} = - L_S \frac{d i}{d t} . \quad (1.2)$$



Slika 1.1 Geometrijske karakteristike torusnog jezgra pravougaonog poprečnog presjeka

Pri opštijem tretiranju odnosa između električne struje $i(t)$ i magnetnog fluksa $\Phi(t)$ stvorenog tom istom strujom, induktivnost L se predočava pomoću idealizirane zavojnice. Idealizirana zavojnica je element električnog kruga s dva kraja, kod kojeg je odnos između magnetnog fluksa $\Phi(t)$, i električne struje $i(t)$, u svakom trenutku vremena jednoznačno definisan relacijom oblika $\Phi(t) = f(i(t), t)$, koja se u literaturi često naziva (Φ, i) karakteristikom.

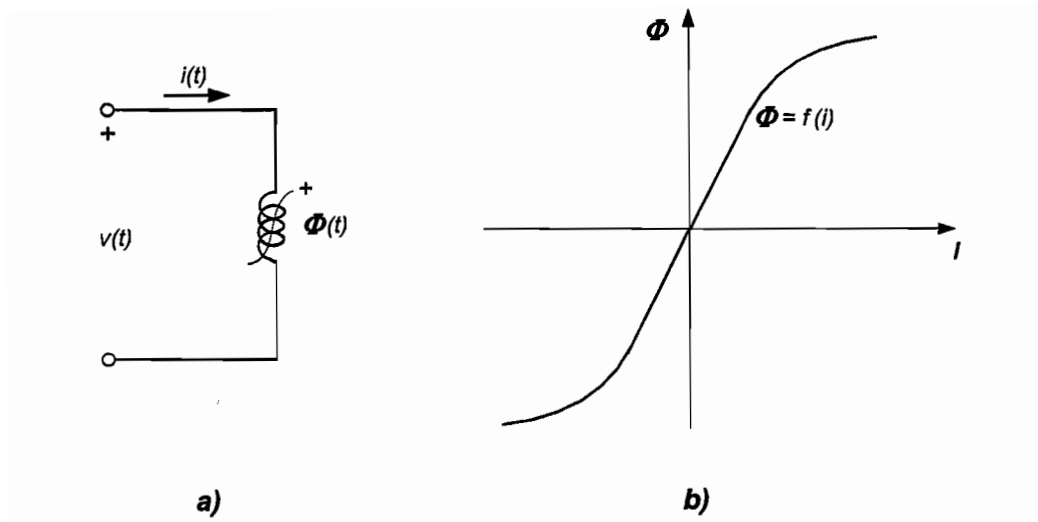
Termin „idealna zavojnica“, jasno naglašava da se u odabranom pristupu, u obzir uzima samo induktivni karakter zavojnice, kao njen dominirajući parametar, iako sve realne zavojnice, pored tog parametra, imaju i vlastiti električni kapacitet C_L i vlastiti aktivni električni otpor R_L .

Na **Slici 1.2** prikazani su: (a) grafički simbol i (b) (Φ, i) karakteristika nelinearne idealizirane zavojnice.

Zavisno od vlastitog oblika (Φ, i) karakteristike, idealizirana zavojnica može biti i preciznije određena klasifikacijom kao: linearna (LL), nelinearna (NL), vremenski nepromjenljiva (VNL), ili pak vremenski promjenljiva (VPL) zavojnica.

U ovakvim - poopštenim uslovima, induktivnost L se često definiše kao kvantitativna mjera induktiviteta, u trenutku t , pri poznatoj struji $i(t)$ i poznatom fluksu $\Phi(t)$, odnosno izračunava iz relacije:

$$L(i, \Phi, t) = \frac{\delta \Phi}{\delta i} \quad (1.3)$$



Slika 1.2 a) Grafički simbol,
b) (Φ, i) karakteristika nelinearne zavojnice

Napon $v(t)$, koji je usaglašen sa smjerom struje $i(t)$, može se dovesti u vezu s ukupnim magnetnim fluksom $\Phi(t)$ (pod pojmom ukupni magnetni fluks, podrazumjeva se ulančeni magnetni fluks, odnosno magnetni fluks koji se obuhvata sa svim zavojcima razmatranog svitka) na osnovu relacije (1.4), koja je direktna posljedica Faradayovog zakona elektromagnetne indukcije:

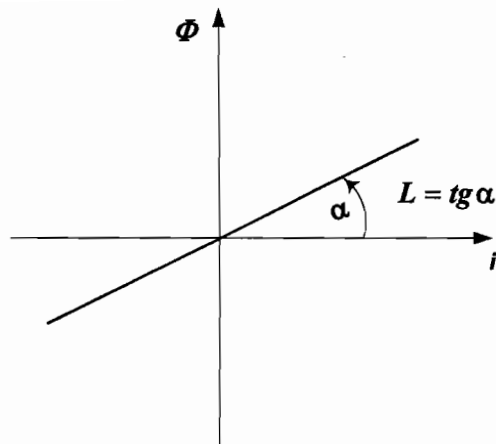
$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.4)$$

U teoriji električnih krugova najčešće se susreću idealizirane zavojnice, kojima je pridružen linearni, stacionarni induktivitet, određen relacijom:

$$\Phi(t) = L \cdot i(t) \quad (1.5)$$

pri čemu je $L = \text{konst.}$

Na *Slici 1.3* prikazana je (Φ, i) karakteristika, idealizirane linearne zavojnice.



Slika 1.3 (Φ, i) karakteristika idealizirane linearne zavojnice

Za linearnu vremenski nepromjenljivu idealiziranu zavojnicu (LVNL), odnos između magnetnog fluksa i struje, koja je stvorila taj fluks, iskazan je relacijom (1.5). Odnos između električnog napona $v(t)$, koji se pojavljuje između krajeva takve zavojnice i električne struje koja prolazi kroz istu tu zavojnicu definisan je relacijom:

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}. \quad (1.6)$$

Integracijom jednačine (1.6), moguće je doći do izraza koji definiše električnu struju $i(t)$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \\ &= i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Prema posljednjoj relaciji, energetska stanje razmatrane zavojnice, za vremenski interval definisan relacijom: $t \geq t_0$, jednoznačno je određen početnom vrijednošću struje $i(t_0)$, što potvrđuje da zavojnice (kao i električni kondenzatori) imaju sposobnost «memorisanja», odnosno

akumulacije električne energije. Zbog toga se i električni kondenzatori i električne zavojnice svrstavaju u dinamičke električne elemente. Za dinamičke električne elemente, karakteristično je da se odnosi između električne struje i električnog napona opisuju diferencijalnim jednačinama prvog reda.

U opisanim uslovima, početna vrijednost magnetnog fluksa u trenutku $t = t_0$, iskazana je relacijom:

$$\Phi_0 = \Phi(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau) d\tau, \quad (1.8)$$

a može se koristiti i za definisanje početnog energetskog stanja zavojnice induktivnosti L . Saglasno tome, energija koja je akumulirana u idealiziranoj linearnoj vremenski nepromjenljivoj zavojnici vlastite induktivnosti L do trenutka $t = t_0$, iznosi:

$$W_{m0} = w_m(t_0) = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0^2}{L} = \frac{1}{2} LI_0^2. \quad (1.9)$$

Simbolom I_0 označava se vrijednost one električne struje $i(t)$ koja se usmjerava kroz analiziranu zavojnicu u trenutku $t = t_0$.

S druge strane može se pokazati da električnu energiju, koja se predaje razmatranoj zavojnici do trenutka t_0 iz vanjskih energetskih izvora, određuje izraz:

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} v(t) i(t) dt = \int_{i(-\infty)}^{i(t_0)} L i(t) di \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Phi_0^2}{L} = \frac{1}{2} LI_0^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Relacija (1.10) omogućava izvođenje važnog zaključka da je idealizirana linearna vremenski nepromjenljiva zavojnica element električnog kruga kod kojeg se sva električna energija preuzeta iz vanjskih energetskih izvora do trenutka t_0 , dakle energija $w(t_0)$, pretvara u energiju akumuliranu unutar elementa $w_m(t_0)$.

Fizikalna priroda električnog napona $v(t)$ određuje ovu veličinu kao ograničenu veličinu, što znači da i struja koja se usmjerava kroz

analiziranu zavojnicu, mora biti neprekidna funkcija vremena, te se početno stanje električne struje u trenutku t_0 kao što je već ranije naglašeno definiše vrijednošću $i(t_0) = I_0$.

Uočena neprekidnost električne struje kroz idealiziranu linearnu vremenski nepromjenljivu zavojnicu i uspostavljena veza između te struje i akumulirane električne energije u magnetnom polju iste zavojnice, omogućava da se konstatuje kako se ta energija ne može skokovito mijenjati, što je jedna od osnovnih karakteristika dinamičkih elemenata električnih krugova.

Kod linearnih, vremenski zavisnih, idealiziranih zavojnica, karakteristika (Φ, i) je ponovo pravac (kao i na *Slici 1.3*) koji prolazi kroz koordinatni početak, pri čemu nagib tog pravca sada zavisi od fiksiranog trenutka t . Drugim riječima pripadajuća vlastita induktivnost L je funkcija vremena, dakle važi relacija: $L = L(t)$.

U tom kontekstu jednačine stanja takve zavojnice transformišu se u oblik:

$$\Phi(t) = L(t) i(t) \quad (1.11)$$

$$v(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} i(t), \quad (1.12)$$

dok energiju, akumuliranu u trenutku t , unutar takve zavojnice, određuje relacija:

$$w_m(t) = \frac{1}{2} L(t) i^2(t). \quad (1.13)$$

Nije teško pokazati da brzina promjene akumulirane energije u ovakvoj zavojnici iznosi:

$$p_e(t) = \frac{dw_m(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dL(t)}{dt} i^2(t) + L(t) i(t) \frac{di(t)}{dt}. \quad (1.14)$$

S druge strane, trenutna električna snaga $p(t)$, koja se u svakom trenutku t , na račun vanjskih energetske resursa, predaje analiziranoj zavojnici, iznosi:

$$\begin{aligned}
p(t) = v(t) i(t) &= i(t) \frac{d}{dt} [L(t) i(t)] = i(t) \left[L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} i(t) \right] = \\
&= L(t) i(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} i^2(t). \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Razlika između brzine angažovanja električne energije iz vanjskih resursa i brzine akumuliranja električne energije unutar vlastite materijalne strukture, u slučaju linearnih, vremenski zavisnih, idealiziranih zavojnica očigledno je različita od nule, jer je:

$$p(t) - p_e(t) = p_m(t) = \frac{1}{2} \frac{dL(t)}{dt} i^2(t). \quad (1.16)$$

Električna snaga $p_m(t)$ izražava rad mehaničkih sila koje uzrokuju promjenu vlastite induktivnosti $L(t)$.

1.1.1 Vezivanje idealiziranih električnih zavojnica

U ovom odjeljku će se opisati osnovne karakteristike serijske (ili redne) i paralelne (ili otočne) veze idealiziranih zavojnica.

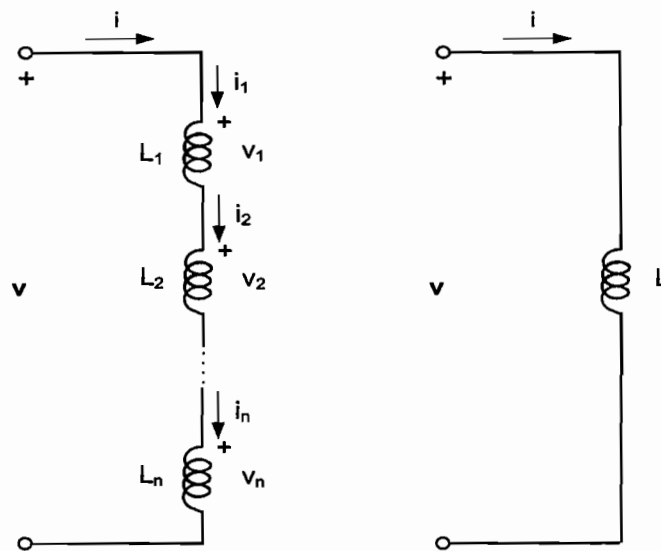
U tom smislu se, za rednu vezu n idealiziranih linearnih vremenski nepromjenljivih zavojnica (**LVNL**), osnovne osobine ovakvog načina njihovog povezivanja iskazuju slijedećim relacijama:

$$v_k(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt}, \quad (1.17)$$

$$i_k(t) = i_k(0) + \frac{1}{L_k} \int_0^t v_k(\tau) d\tau, \quad (1.18)$$

koje su grafički ilustrovane na *Slici 1.4*.

Ovakva veza, može se definisati samo u slučajevima kada su početne vrijednosti električnih struja $i_k(0)$, ($k=1, 2, \dots, n$), koje se usmjeravaju kroz analizirane zavojnice sa *Slike 1.4*, u svim tim zavojnicama međusobno jednake.



Slika 1.4 Redna veza n LVNL zavojnica

Tada se prema Kirchhoffovim zakonima za spoj kao na **Slici 1.4** može pisati da je:

$$i_k(t) = i(t) \text{ za } k=1, 2, \dots, n; \text{ odakle za } t = 0 \text{ vrijedi:}$$

$$i(0) = i_1(0) = \dots = i_k(0) = \dots = i_n(0)$$

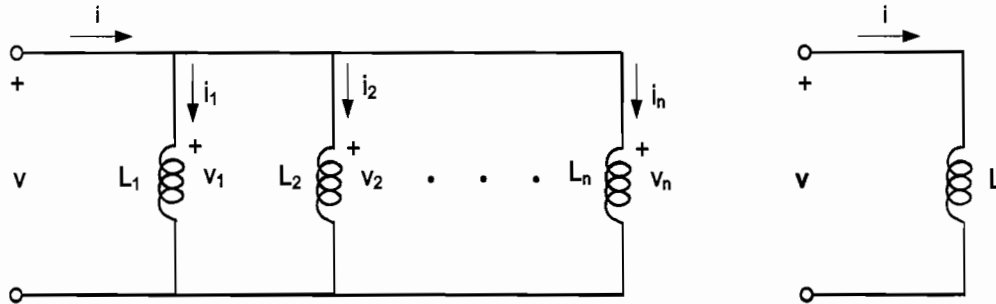
$$v(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t). \quad (1.19)$$

Objedinjavanjem prethodnih relacija dolazi se do slijedeće jednačine:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=1}^n v_k(t) = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di(t)}{dt} = \\ &= \frac{di(t)}{dt} \sum_{k=1}^n L_k = L \frac{di(t)}{dt} \\ L &= \sum_{k=1}^n L_k, \end{aligned} \quad (1.20)$$

uz koju je uvijek korisno naglasiti i da je $i(0) = i_k(0)$ za $k = 1, 2, \dots, n$.

Na sličan način se može razmatrati i paralelna veza n idealiziranih linearnih vremenski nepromjenljivih zavojnica (LVNL). Električna shema za ovakvu vrstu veze, prikazana je na **Slici 1.5**.



Slika 1.5 Paralelna veza n LVNL zavojnica

Osnovne osobine ovakvog načina njihovog povezivanja opisane su slijedećim relacijama:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{L_k} \int_{-\infty}^t v_k(\tau) d\tau \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{L_k} \int_{-\infty}^{t_0} v_k(\tau) d\tau + \frac{1}{L_k} \int_{t_0}^t v_k(\tau) d\tau \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^n i_k(0) + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{L_k} \int_0^t v(\tau) d\tau \right] = \\
 &= i(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right] = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

koje su formirane uz uvažavanje Kirchhoffovih zakona i navedenih početnih uslova:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t), \text{ odnosno za } t = 0: i(0) = \sum_{k=1}^n i_k(0)$$

$$v(t) = v_k(t), \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.22)$$

Nije teško uočiti da je odnos između n paralelno spojenih idealiziranih linearnih vremenski nepromjenljivih zavojnica (LVNL) i njima ekvivalentne idealizirane linearne vremenski nepromjenljive zavojnice vlastite induktivnosti L , određen slijedećom relacijom:

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}. \quad (1.23)$$

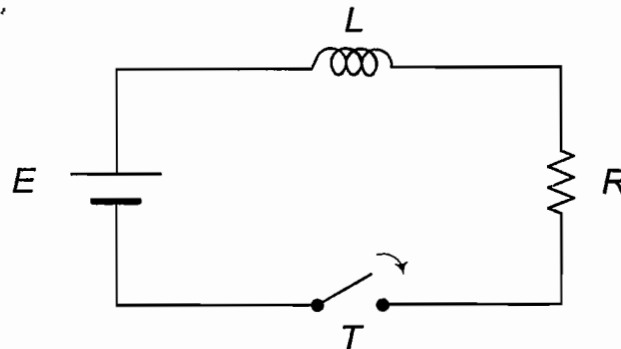
U svim induktivnim električnim krugovima, dakle bez obzira na prirodu spoja pojedinih induktivnih elemenata, važi zakon o očuvanju ukupnog magnetnog fluksa Φ , zbog čega, naprimjer, u slučaju n paralelno spojenih idealiziranih linearnih vremenski nepromjenljivih zavojnica (LVNL) važi relacija:

$$\Phi = L i = \sum_{k=1}^n L_k i_k = \sum_{k=1}^n \Phi_k. \quad (1.24)$$

1.1.2 Priklučenje i isključenje idealizirane linearne vremenski nepromjenljive zavojnice na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona

U okviru Osnova elektrotehnike, pokazano je da idealizirana zavojnica vlastite induktivnosti L , u stacionarnim uslovima rada, predstavlja kratak spoj za stalnu jednosmjernu struju. Isto tako su i ogledi Oersteda i Faradaya pokazali da u uslovima uspostavljanja stalne električne struje, kao i u uslovima njenog iščezavanja, nastaje promjenljivi magnetni fluks, što implicira zaključak da je u tim kratkotrajnim vremenskim periodima i električna struja, koja stvara taj magnetni fluks, vremenski promjenljiva veličina.

Da bi se preciznije istražile zakonomjernosti navedenih promjena električne struje, korisno je analizirati jednostavni električni krug sa *Slike 1.6*.



Slika 1.6 Uključenje zavojnice induktivnosti L na jednosmjerni naponski izvor

Pod pretpostavkom da je jednosmjerni naponski izvor, upotrijebljen u električnoj shemi sa *Slike 1.6*, idealni naponski izvor stalnog jednosmjernog napona, tada njegov unutrašnji aktivni otpor R_E mora biti jednak nuli. Slično tome, ukoliko se pretpostavi da je i upotrijebljena zavojnica takva da ima karakteristike idealne linearne vremenski nepromjenljive zavojnice (LVNL), tada je i ona kao element razmatranog električnog kruga potpuno opisana samo induktivnošću L (za realnu, linearnu vremenski nepromjenljivu zavojnicu, pri njenom ekvivalentnom električnom predstavljanju, neophodno je induktivnosti L pridružiti i aktivni otpor R_L , serijski vezan s tom induktivnošću). Pri ovakvim ograničenjima, aktivni otpor R u električnoj shemi sa *Slike 1.6*, mora biti jednak nuli, jer je on određen s relacijom $R = R_L + R_E$.

Ukoliko, pri otvorenom prekidaču T , u zavojnici vlastite induktivnosti L nije bilo akumulirane magnetne energije, tada će se promjena struje od trenutka t_0 , kada se zatvori prekidač T , mijenjati u skladu sa dinamikom opisanom slijedećom jednačinom:

$$E = L \frac{di}{dt} . \quad (1.25)$$

U relaciji (1.25), pored elektromotorne sile svojstvene idealnom naponskom izvoru, prisutna je samo još elektromotorna sila samoindukcije, koja u ovom slučaju nastoji spriječiti uspostavljanje struje $i(t)$ u analiziranom kolu.

Lako se pokazuje da struja definisana relacijom (1.25), ima tok promjene opisan relacijom:

$$i(t) = \frac{E}{L} t + C. \quad (1.26)$$

Integraciona konstanta C , pri početnom uslovu $i(0) = 0$, ima vrijednost nula, odnosno tada važi $C = 0$.

Na osnovu relacije (1.26) proizilazi da bi idealni naponski izvor stalnog jednosmjernog napona, u dovoljno dugom intervalu vremena, mogao uspostaviti izuzetno veliku vrijednost struje, koja bi i nakon tog vremenskog intervala imala tendenciju rasta, jer je opisana monotono rastućom funkcijom.

Međutim, u realnim fizičkim sistemima nije moguće realizovati takvo stanje, zbog čega je neophodno modificirati odnose iskazane jednačinom (1.25). Za prvi korak u pravcu neophodne modifikacije, pokazuje se sasvim dovoljnim da se uzme u obzir samo realnost konfiguracije naponskog izvora stalnog jednosmjernog napona, dakle da je $R_E > 0$. Nije teško uočiti da je tada $R = R_E > 0$, pa su u novouspostavljenim uslovima, odnosi unutar električnog kruga sa *Slike 1.6* opisani slijedećom jednačinom dinamičke ravnoteže:

$$E = L \frac{di}{dt} + R_E \cdot i. \quad (1.27)$$

Jednačina (1.27) se u matematičkoj teoriji klasificira kao linearna diferencijalna jednačina I reda i ima rješenje u obliku:

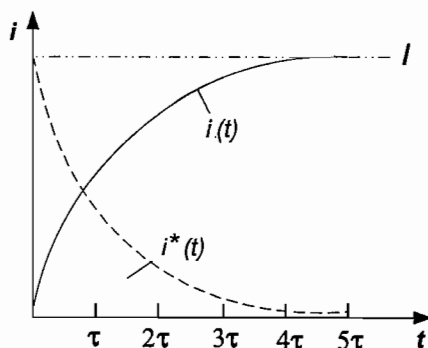
$$i(t) = \frac{E}{R_E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (1.28)$$

Simbol $\tau = L/R_E$, označava vremensku konstantu analiziranog kola (U teoriji automatskog upravljanja relacija oblika (1.28), naziva se aperiodskim blokom I reda. Vremenska konstanta aperiodskog bloka prvog reda τ , određuje se kao vrijeme koje je potrebno da odskočni odziv analizirane koordinate – dakle u ovom slučaju struje, dostigne 63 % vrijednosti novog stacionarnog stanja – za analizirani električni krug to je 63 % vrijednosti struje stacionarnog stanja (E/R_E)).

Na *Slici 1.7* dat je grafički prikaz toka uspostavljanja električne struje u električnom krugu sa *Slike 1.6*.

Uz pomoć *Slike 1.7* i relacije (1.28) može se zaključiti da pri konstantnoj vrijednosti induktivnosti L , povećanjem aktivnog otpora R_E , dolazi do smanjenja vremenske konstante, odnosno prelazni režim uspostavljanja električne struje $i(t)$, do svoje stacionarne vrijednosti $I = (E/R_E)$ traje kraće.

Nasuprot tome, smanjenjem vrijednosti aktivnog otpora R_E (približavanje karakteristika realnog naponskog izvora karakteristikama idealnog naponskog izvora i približavanje karakteristika realne linearne vremenski nepromjenljive zavojnice karakteristikama idealne linearne vremenski nepromjenljive zavojnice), vrijeme potrebno da se dostigne stacionarna vrijednost električne struje I se produžava, a električna struja $i(t)$ svoje promjene, tokom vlastitog uspostavljanja, ostvaruje na način koji je vrlo sličan zakonitosti iskazanoj s relacijom (1.26).



Slika 1.7 Grafički prikaz toka uspostavljanja električne struje $i(t)$ u serijskom R - L kolu kada se ono priključuje na izvor stalnog jednosmjernog napona (puna linija) i toka iščezavanja električne struje $i^*(t)$ u serijskom R - L kolu kada se ono isključuje s izvora stalnog jednosmjernog napona (crtkana linija).

S energetskeg stanovišta važno je naglasiti da u fazi uspostavljanja stalne jednosmjerne struje, upotrijebljeni naponski izvor odaje električnu energiju, koja se troši ne samo na savladavanje Jouleovih gubitaka na otporu R , već i na savladavanje elektromotorne sile samoindukcije. Može se dokazati da je električni rad generatora utrošen na savladavanje elektromotorne sile samoindukcije brojno jednak prirastu magnetne energije u analiziranoj zavojnici.

Ako se u uslovima uspostavljene stacionarne vrijednosti električne struje $I = (E/R_E)$, naglo otvori prekidač **T**, struja neće moći trenutno pasti na vrijednost nula, nego će se toj vrijednosti približavati kroz dinamički proces opisan jednačinom:

$$0 = L \frac{di^*}{dt} + R^* i^* . \quad (1.29)$$

Treba naglasiti da u posljednjoj jednačini za aktivni električni otpor vrijedi odnos: $R^* \gg R_E$ (pri otvaranju prekidača formira se električni luk, pa se energija nagomilana u zavojnici prazni putem tog električnog luka, kojeg karakteriše i vlastiti aktivni električni otpor $R_{\text{luka}} \gg R_E$, te je $R^* = R_{\text{luka}} + R_E$).

Tokom trajanja procesa iščezavanja električne struje, u razmatranom električnom krugu sa *Slike 1.6*, zavojnica se praktično odvaja od upotrijebljenog naponskog izvora, na što ona reaguje stvaranjem elektromotorne sile samoindukcije, koja nastoji da održi stalnu jednosmjernu struju. Energetski resursi za stvaranje elektromotorne sile samoindukcije nalaze se upravo u magnetnoj energiji, koja je akumulirana u zavojnici.

Spomenuta pojava električnog luka može dovesti do oštećenja prekidača, zbog čega se električni krugovi sa zavojnicama velikih induktivnosti, koje su samim time kadre da akumuliraju i značajne iznose magnetne energije, često ne isključuju na prethodno opisani način (u kojem se akumulirana magnetna energija transformiše u Jouleove gubitke posredstvom električnog luka), nego se isključuju tako što se praktično prekidač **T** dovede iz položaja uključeno u novi položaj, u kojem je zavojnica vlastite induktivnosti **L** odspojena od upotrijebljenog naponskog izvora, ali istovremeno i kratkospojena.

Iščezavanje električne struje koje nastaje zbog isključenja električne zavojnice s naponskog izvora, zbog pojave električnog luka i relacije $R^* = R_{\text{luka}} + R_E$, traje mnogo kraće nego proces uspostavljanja te iste struje.

Nije teško uočiti da, ako se s τ^* označi vremenska konstanta, koja karakteriše iščezavanje električne struje u analiziranom električnom krugu pri pojavi električnog luka, tada važi međusobni odnos prethodno upotrijebljenih vremenskih konstanti:

$$\tau^* = (L/R^*) \ll \tau = (L/R) .$$

Sama struja iščezavanja može se odrediti na osnovu jednačine (1.29), u obliku:

$$i^* = \frac{E}{R} e^{-t/\tau^*} . \quad (1.30)$$

Uz pomoć relacije (1.30), moguće je izračunati i elektromotornu silu samoindukcije, koja se pojavljuje pri pokušaju da se električna struja svede na nulti iznos. Ova indukovana elektromotorna sila ima vrijednost:

$$e_L = -L \frac{di^*(t)}{dt} = \frac{R^*}{R_E} E e^{-t/\tau^*} , \quad (1.31)$$

i u prvom trenutku ona po amplitudi znatno premašuje elektromotornu silu naponskog izvora.

1.2 Idealizirani električni kondenzator kapacitivnosti C: energija i početno stanje

U Osnovama elektrotehnike, električna kapacitivnost je definisana kao sposobnost nekog provodnog tijela (ili pak sistema provodnih tijela) da pri djelovanju električnog napona v , uspostavljenog između provodnih dijelova tog tijela (ili pak dijelova sistema provodnih tijela), međusobno razdvojenih nekim dielektrikom, akumulira određenu količinu električnog naboja Q , odnosno $-Q$, upravo na tim provodnim dijelovima.

U tom kontekstu se i termin električni kondenzator pridružuje svakom sistemu od dva provodna tijela, međusobno razdvojena nekim dielektrikom, ukoliko su geometrijske dimenzije tih provodnih tijela znatno veće od debljine dielektrika koji ih razdvaja. Provodni dijelovi kondenzatora obično se nazivaju elektrodama, ili oblogama kondenzatora.

U ustaljenom režimu rada, električnih krugova stalnih jednosmjernih struja i napona, električni kondenzator se ponaša kao beskonačno veliki električni otpor, te se njegovo prisustvo u bilo kojoj grani takvog električnog kruga manifestuje kao prekid te grane.

Ukoliko elektrode nekog kondenzatora nisu bile ranije izložene djelovanju električnog napona, tada na tim elektrodama nema

električnog naboja. U tom slučaju se obično kaže da je električni kondenzator električno neopterećen, odnosno da je u neutralnom stanju. Priključiti li se, međutim, takav kondenzator na idealni naponski izvor napona $v = U$, u vrlo kratkom vremenu kroz spojne provodnike (kojima su stezaljke idealnog naponskog izvora povezane sa elektrodama analiziranog kondenzatora) poteći će neka količina električnog naboja q uz čiju pomoć će se između elektroda kondenzatora uspostaviti električni napon v_c . Tok tog električnog naboja q , traje sve do trenutka u kojem će se uspostaviti odnos: $v = v_c$ (v_c je trenutna vrijednost električnog napona između elektroda kondenzatora).

U tom trenutku u električnom kondenzatoru je akumulirana elektrostatska energija w_e jednaka:

$$w_e = \frac{1}{2} q \cdot v_c = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} C \cdot v_c^2. \quad (1.32)$$

Kod svih realnih fizičkih sistema, upravo opisana sposobnost električnog kondenzatora, da pod prethodno opisanim okolnostima, akumulira elektrostatičku energiju, upotrebljava se u električnim krugovima. To se formalno iskazuje uvođenjem idealnih električnih kondenzatora.

Idealni električni kondenzator može se definisati i kao element električnog kruga koji ima dva kraja i kod koga je u svakom trenutku vremena t , odnos između električnog naboja $q(t)$ i napona između njegovih krajeva, $v_c = v(t)$, jednoznačno definisan q - v karakteristikom, koja je opisana algebarskom relacijom:

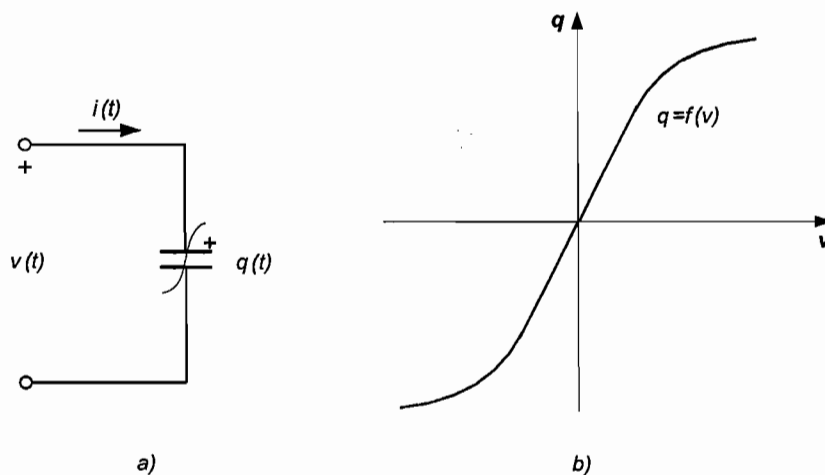
$$q(t) = f(v, t). \quad (1.33)$$

Pri tome za električni naboj $q(t)$ vrijedi i relacija:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau. \quad (1.34)$$

Slično kao i kod idealne električne zavojnice i kod idealnih električnih kondenzatora može se izvršiti njihova podjela na: linearne idealne električne kondenzatore (LC) i nelinearne idealne električne kondenzatore (NC), ili na vremenski nepromjenljive idealne električne kondenzatore (VNC) i vremenski promjenljive idealne električne kondenzatore (VPC).

Na *Slici 1.8* prikazani su grafički simbol i $q-v$ karakteristika nelinearnog idealnog električnog kondenzatora. Treba uočiti da su oznake na predmetnoj slici zasnovane na usaglašenosti smjerova odgovarajućih promjenljivih stanja $v(t)$, $q(t)$ i $i(t)$.



Slika 1.8 a) Grafički simbol,
b) $q-v$ karakteristika nelinearnog idealnog električnog kondenzatora

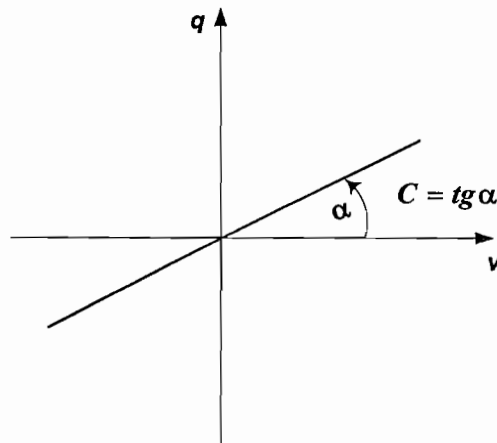
Zbog nesavršenosti upotrijebljenih dielektrika, svi realni električni kondenzatori u električnim krugovima se predstavljaju ne samo električnim kapacitetom, kao na *Slici 1.8 a*), nego paralelnim spojem električnog kapaciteta C i aktivnog otpora R_c , pri čemu je ta aktivna otpornost R_c vrlo velike vrijednosti. (Otpornost R_c je obično reda $k\Omega$. Naprimjer kod kondenzatora kapaciteta $10 \mu F$ i ugla gubitaka $\delta = 0,02$ radijana, kada se isti koristi u električnim krugovima prostoperiodičnog napona efektivne vrijednosti $220 V$ i frekvencije $50 s^{-1}$, aktivna otpornost R_c kojom se opisuje nesavršenost dielektrika (porculan) ima vrijednost oko $16 k\Omega$).

Pri spajanju električnih kondenzatora na stalni jednosmjerni napon, električni kondenzatori s elektrolitom kao dielektrikom moraju se obavezno spajati tako da se pozitivna elektroda takvog kondenzatora, spoji sa pozitivnom stezaljkom upotrebljenog naponskog izvora.

U opštem slučaju, električni kapacitet idealnog električnog kondenzatora je povezan s električnim naponom $v_c(t)$ tako da se za svaki trenutak vremena t njegova $q-v$ karakteristika može opisati relacijom:

$$q(t) = C(t) \cdot v_c(t) . \quad (1.35)$$

U skladu s posljednjom relacijom idealni linearni vremenski nepromjenljivi kondenzatori (LVNC) imaju q - v karakteristiku u obliku pravca, koji prolazi kroz koordinatni početak v - q koordinatnog sistema, što je grafički predočeno na *Slici 1.9*.



Slika 1.9 q - v karakteristika za idealni linearni vremenski nepromjenljivi kondenzator (LVNC)

Za idealni linearni vremenski nepromjenljivi kondenzator (LVNC), jednačina stanja je:

$$q(t) = f(v) = C v(t), \quad (1.36)$$

a s obzirom da između električnog naboja $q(t)$ i električne struje $i(t)$ vrijedi relacija:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (1.37)$$

tada za idealni linearni vremenski nepromjenljivi kondenzator (LVNC) vrijedi i odnos:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}. \quad (1.38)$$

Električni kapacitet razmatranog kondenzatora, prema *Slici 1.9*, određuje nagib pravca $q(t) = C \cdot v(t)$ u predočenom, v - q koordinatnom sistemu.

Pri najopštijem razmatranju, električni kapacitet predstavlja kvantitativnu karakteristiku opisanu relacijom:

$$C(v, q, t) = \frac{dq}{dv}. \quad (1.39)$$

Integracijom jednačine (1.38), koja opisuje odnose između struje $i(t)$, kojom se puni idealni linearni vremenski nepromjenljivi kondenzator (LVNC) i napona $v(t)$, što se pri tome uspostavlja između njegovih obloga, dolazi se do relacije:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Prema ovoj relaciji stanje (LVNC) kondenzatora za $t \geq t_0$, jednoznačno je određeno početnom vrijednošću napona kondenzatora $v(t_0) = V_0$ i analitičkim izrazom, koji opisuje promjenu struje $i(t)$ za $t \geq t_0$.

Istorijat promjena stanja kondenzatora, za interval $t < t_0$, moguće je iskazati i pomoću integrala, koji određuje ukupnu količinu električnog naboja, nagomilanog na elektrodama kondenzatora, do trenutka t_0 :

$$Q_0 = q(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau. \quad (1.41)$$

Električni kondenzator ima očigledno sposobnost akumuliranja elektrostatičke energije i po tome je on s jedne strane sličan električnom induktivitetu, a s druge strane je funkcionalno bitno različit od aktivne otpornosti, koja nema tu sposobnost. Saglasno prethodnim relacijama, akumulirana elektrostatička energija u LVNC kondenzatoru, do trenutka t_0 , jednaka je:

$$w_e(t_0) = W_{e0} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2. \quad (1.42)$$

U analiziranim uslovima, energija koja se predaje razmatranom kondenzatoru iz vanjskih energetskih resursa, tokom intervala $t \leq t_0$, definisana je izrazom:

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} v(t) i(t) dt = \int_{v(-\infty)}^{v(t_0)} C v(t) dv = \\ &= \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} . \end{aligned} \quad (1.43)$$

S obzirom da se, na osnovu posljednje dvije relacije, može uspostaviti slijedeći odnos: $w_e(t_0) = w(t_0)$, to za idealni linearni vremenski nepromjenljivi kondenzator (LVNC) ima smisla konstatovati: sva električna energija preuzeta iz vanjskih energetskih izvora do nekog trenutka t_0 , akumulira se u tom istom električnom kondenzatoru u obliku elektrostatičke energije.

S obzirom na svoju fizikalnu prirodu, struja $i(t)$ (kojom se opterećuje analizirani kondenzator) je ograničena funkcija, što omogućava zaključak da je električni napon $v(t)$, koji vlada između njegovih elektroda, kontinualna funkcija, pa nije moguća njegoa skokovita promjena (ovdje treba uočiti da, električni napon između elektroda kondenzatora, ima sličnu zakonomjernost ponašanja, kao električna struja kod idealizirane električne zavojnice induktivnosti L).

Zbog uočene karakteristike, da se električni kondenzator suprotstavlja skokovitoj promjeni akumulirane električne energije, on se svrstava u dinamičke električne elemente.

Za razliku od LVNC kondenzatora, kod idealiziranih vremenski promjenljivih kondenzatora LVPC, $q-v$ karakteristika je u obliku pravca, koji prolazi kroz koordinatni početak $v-q$ koordinatnog sistema, pri čemu njegov nagib prema v osi, $C(t)$, zavisi od odabranog trenutka t . Matematički model takvog kondenzatora opisan je slijedećom relacijom:

$$q(t) = C(t) v(t) , \quad (1.44)$$

pri čemu se električna struja, kojom se puni-opterećuje takav kondenzator, određuje iz relacije:

$$i(t) = C(t) \frac{dv}{dt} + \frac{dC}{dt} v(t) . \quad (1.45)$$

U skladu s prethodnim relacijama, električna energija koja je akumulirana u LVPC kondenzatorima do trenutka t ima vrijednost:

$$w_e(t) = \frac{1}{2} C(t) v^2(t), \quad (1.46)$$

dok brzinu promjene te iste energije određuje relacija:

$$p_e(t) = \frac{dw_e(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dC(t)}{dt} v^2(t) + C(t)v(t) \frac{dv(t)}{dt}. \quad (1.47)$$

S druge strane, električna snaga $p(t)$, koja se na račun vanjskih energetske resursa u svakom trenutku t predaje takvom električnom kondenzatoru definisana je relacijom:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) = v(t) \frac{d}{dt} [C(t)v(t)] = \\ &= v(t) \left[C(t) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} v(t) \right] = \\ &= C(t) v(t) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} v^2(t). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Nije teško primjetiti, da u ovom slučaju, postoji razlika između brzine $p(t)$, kojom električni kondenzator prima električnu energiju iz vanjskog okruženja i brzine $p_e(t)$, kojom električni kondenzator akumulira električnu energiju unutar vlastite konfiguracije-strukture. Ta razlika, opet je po svojoj prirodi električna snaga $p_m(t)$, izražena relacijom:

$$p(t) - p_e(t) = p_m(t) = \frac{1}{2} \frac{dC(t)}{dt} v^2(t) \quad (1.49)$$

i ona određuje mehanički rad, koji se obavi da bi se ostvarila željena promjena električnog kapaciteta $C(t)$.

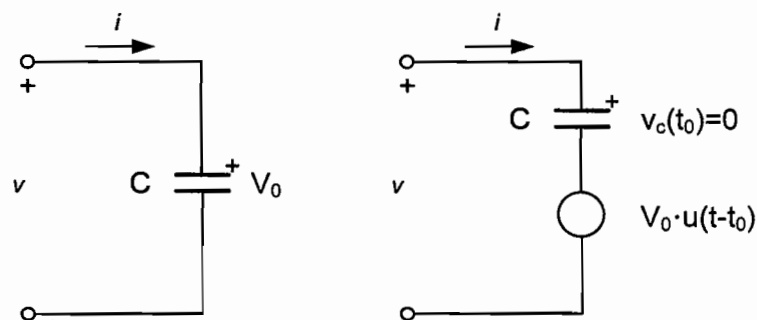
U skladu s posljednjom relacijom, električna snaga $p(t)$, koja se iz vanjskih izvora električne energije predaje LVPC kondenzatoru, može se iskazati i u obliku:

$$p(t) = p_e(t) + p_m(t) = \frac{dw_e(t)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dC(t)}{dt} v^2(t). \quad (1.50)$$

Korištenjem ove relacije moguće je odrediti i električnu energiju, koja se u intervalu (t_0, t) predaje analiziranom kondenzatoru. Ta energija iznosi:

$$\begin{aligned}
 w(t_0, t) &= \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t p_e(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t p_m(\tau) d\tau = \\
 &= \int_{t_0}^t \frac{dw_e(\tau)}{d\tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^2(\tau) \frac{dC(\tau)}{d\tau} d\tau = \\
 &= w_e(\tau) \Big|_{t_0}^t + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^2(\tau) C'(\tau) d\tau = \\
 &= w_e(t) - w_e(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t v^2(\tau) C'(\tau) d\tau. \quad (1.51)
 \end{aligned}$$

LVNC kondenzator, kod kojeg u trenutku t_0 između elektroda već vlada električni napon V_0 , u vremenskom intervalu $t \geq t_0$, shematski se može prikazati na način predložen *Slikom 1.10*.



Slika 1.10 Shematski prikaz početnog stanja LVNC kondenzatora, kod koga je $v(t_0) = V_0$

Sa *Slike 1.10*, koja prikazuje formalizovani, shematski prikaz, idealiziranog LVNC kondenzatora, kod koga je $v(t_0) = V_0$, uočava se da se ovakvo stanje predmetnog kondenzatora, može predočiti rednom vezom idealiziranog LVNC kondenzatora (električnog kapaciteta C kod koga u trenutku t_0 nema akumulirane energije, odnosno za koji vrijedi relacija $v_c(t_0) = 0$) i idealnog naponskog izvora, između čijih priključnih stezaljki vlada električni napon: $v_g(t) = V_0 \cdot u(t - t_0)$. Funkcija $u(t - t_0)$ označava Heavisideovu funkciju, koja je definisana tako da je:

$$\begin{aligned} u(t - t_0) &= 1, \text{ za } t > t_0; \\ u(t - t_0) &= 0, \text{ za } t < t_0; \\ u(t - t_0) &= 1/2, \text{ za } t = t_0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Ova funkcija se često koristi i za predstavljanje odskočne funkcije, unutar naučne oblasti Teorija automatskog upravljanja.

1.2.1 Vezivanje idealiziranih električnih kondenzatora

Idealizirani kondenzatori mogu se vezivati redno (odnosno serijski), zatim paralelno (odnosno otočno) ili mješovito. Pri mješovitoj vezi, praktično se kombinuju prethodna dva načina vezivanja kondenzatora. Na *Slici 1.11*, shematski je prikazana redna veza n idealiziranih kondenzatora, čije je ponašanje opisano slijedećim jednačinama:

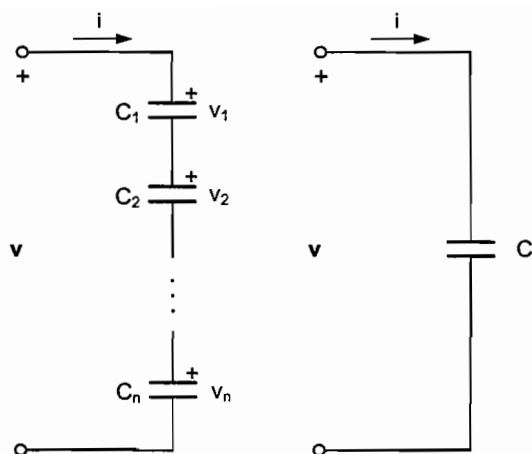
$$i_k(t) = C_k \frac{dv_k(t)}{dt} \quad (1.53)$$

$$v_k(t) = v_k(0) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(\tau) d\tau. \quad (1.54)$$

U skladu s I Kirchhoffovim i II Kirchhoffovim zakonom za električne krugove, za električni spoj sa *Slike 1.11*, mogu se pisati slijedeće relacije:

$$i_k(t) = i(t), \text{ za } k = 1, 2, \dots, n \quad (1.55)$$

$$v(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t). \quad (1.56)$$



Slika 1.11 Redna veza n idealiziranih LVNC kondenzatora

S obzirom da je u trenutku $t = 0$, za električne napone, prikazane na *Slici 1.11*, u važnosti relacija:

$$v(0) = \sum_{k=1}^n v_k(0) , \quad (1.57)$$

tada za bilo koji trenutak $t > 0$ mora važiti slijedeći analitički opis:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=1}^n v_k(t) = \sum_{k=1}^n \left[v_k(0) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(\tau) d\tau \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n v_k(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(0) + \int_0^t i(\tau) d\tau \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \right] = \\ &= v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau . \end{aligned} \quad (1.58)$$

Na osnovu posljednjih relacija slijedi, da se n serijski spojenih idealiziranih LVNC kondenzatora, električnih kapacitivnosti C_k i početnih električnih napona $v_k(0)$, ($k= 1, \dots, n$), može u potpunosti nadomjestiti jednim – ekvivalentnim, idealiziranim LVNC

kondenzatorom, električnog kapaciteta C , pod uslovom da između električnih kapacitivnosti tih kondenzatora vrijedi odnos:

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}. \quad (1.59)$$

Sličnim rasuđivanjem se i za n paralelno vezanih LVNC kondenzatora, sa *Slike 1.12*, a uz uslov da su početni naponi svih n tako vezanih kondenzatora međusobno jednaki, odnosno da je ispunjen uslov:

$$v(0) = v_1(0) = \dots = v_k(0) = \dots = v_n(0), \quad (1.60)$$

te uz primjenu I i II Kirchhoffovog zakona:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) \quad (1.61)$$

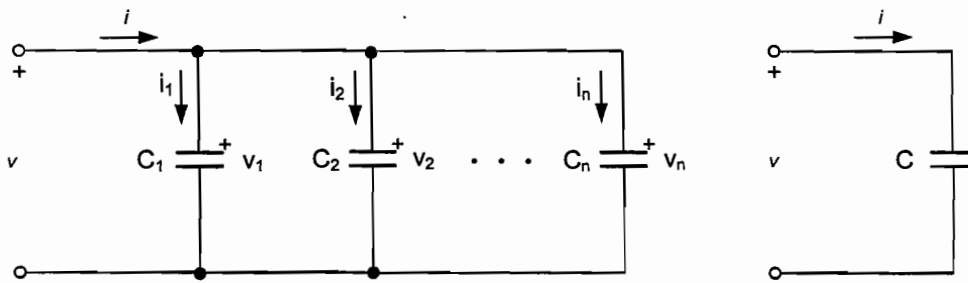
$v = v_k$, za $k = 1, 2, \dots, n$.

može doći do relacije:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) = \sum_{k=1}^n C_k \frac{dv_k}{dt} = \sum_{k=1}^n C_k \frac{dv}{dt} = C \frac{dv}{dt}. \quad (1.62)$$

Ova relacija pokazuje da se n paralelno spojenih, idealiziranih LVNC kondenzatora električnih kapacitivnosti C_k i početnih električnih napona $v_k(0) = v(0)$, ($k = 1, \dots, n$), može u potpunosti nadomjestiti jednim – ekvivalentnim, idealiziranim LVNC kondenzatorom električnog kapaciteta C , pod uslovom da između električnih kapacitivnosti tih kondenzatora vrijedi odnos:

$$C = \sum_{k=1}^n C_k. \quad (1.63)$$



Slika 1.12 Paralelna veza n idealiziranih LVNC kondenzatora

Važno je naglasiti da, u oba analizirana načina povezivanja električnih kondenzatora, ukupna količina električnih naboja u polaznom i novouvedenom ekvivalentnom električnom krugu mora biti ista, odnosno da se mora ispoštovati odnos:

$$q(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \quad (1.64)$$

$$Cv(t) = q(t) = \sum_{k=1}^n C_k v_k(t) \quad (1.65)$$

Ova relacija formalno izražava zakon o konzervaciji električnog naboja unutar razmatranog električnog kruga.

1.2.2 Električna snaga, električna energija i pasivnost električnog kondenzatora

Stanje vremenski nepromjenljivog nelinearnog idealiziranog kondenzatora (NVNC) opisano je v - q karakteristikom, koja je grafički predstavljena na *Slici 1.8 b*).

Između promjenljivih stanja: električnog napona $v(t)$, struje $i(t)$ i električnog naboja $q(t)$, tada postoje slijedeći odnosi:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (1.66)$$

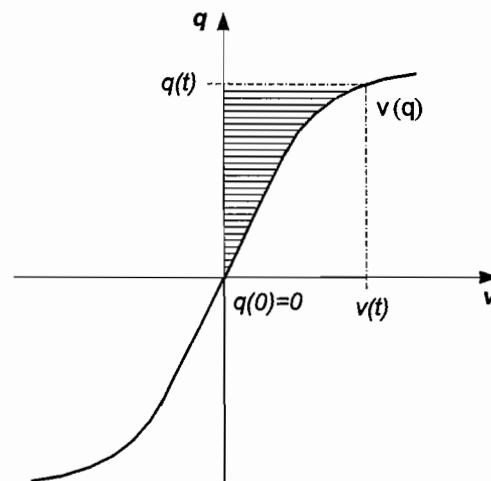
$$v(t) = \hat{v}(q). \quad (1.67)$$

Energija, koja se predaje NVNC kondenzatoru, u intervalu (t_0, t) , određuje se na osnovu relacije:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^t v(\tau) i(\tau) d\tau = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \hat{v}(q_1) dq_1. \quad (1.68)$$

Na *Slici 1.13*, šrafiranim područjem u v - q koordinatnom sistemu, predočena je električna energija koja je akumulirana u NVNC kondenzatoru, tokom vremenskog intervala $(0, t)$, pod pretpostavkom da je $q(0) = 0$. U takvim uslovima je električna energija $w(t_0, t)$, koja se predaje NVNC kondenzatoru jednaka elektrostatskoj energiji $w_e(t)$, koja se akumulira u NVNC kondenzatoru:

$$w_e(t) = w(t_0, t) = \int_0^{q(t)} \hat{v}(q_1) dq_1. \quad (1.69)$$



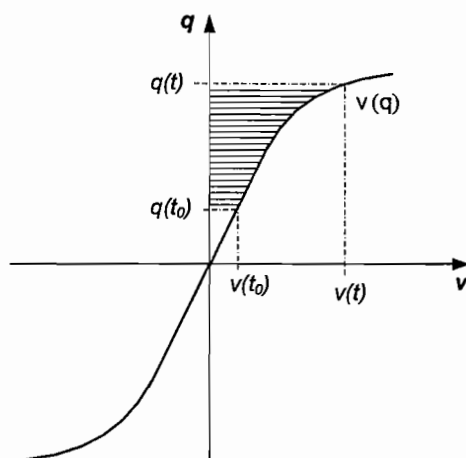
Slika 1.13 Grafička interpretacija akumulirane energije u idealiziranom NVNC kondenzatoru

Ova energija je u opisanim uslovima nenegativna. Nenegativnost akumulirane električne energije u idealiziranom NVNC kondenzatoru, u svakom trenutku vremena t , omogućava konstataciju da takav kondenzator pripada klasi pasivnih elemenata.

Ukoliko je $q(t_0) = Q_0 \neq 0$, tada kondenzator u trenutku t_0 već ima neku akumuliranu energiju, pa je energija, koja se predaje tom istom kondenzatoru tokom vremenskog intervala (t_0, t) , definisana relacijom:

$$\begin{aligned} w(t_0, t) &= \int_{t_0}^t v(\tau) i(\tau) d\tau = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \hat{v}(q_1) dq_1 = \\ &= w_e(t) - w_e(t_0). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Na *Slici 1.14* dat je grafički prikaz energije $w(t_0, t)$ koja se predaje razmatranom kondenzatoru pod prethodno uvedenim pretpostavkama (osjenčena površ u $v - q$ koordinatnom sistemu).



Slika 1.14 Grafička interpretacija akumulirane energije u idealiziranom NVNC kondenzatoru kada je $q(t_0) \neq 0$

Ukoliko je $q(t_0) > q(t)$, tada je energija koja je bila akumulirana u kondenzatoru u trenutku t_0 veća od energije, koja je akumulirana u kondenzatoru u trenutku t , odnosno takav kondenzator je unutar intervala (t_0, t) vraćao električnu energiju u vanjski dio električnog kruga.

Ipak, to još uvijek nije dovoljan razlog da se takav kondenzator proglasi za aktivni element. Naime, ukoliko uz uslov $q(t_0) = Q_0 \neq 0$ vrijedi i relacija:

$$w_e(t) = [w(t_0, t) + w_e(t_0)] \geq 0, \quad \text{za svako } t_0 \text{ i za } t \geq t_0 \quad (1.71)$$

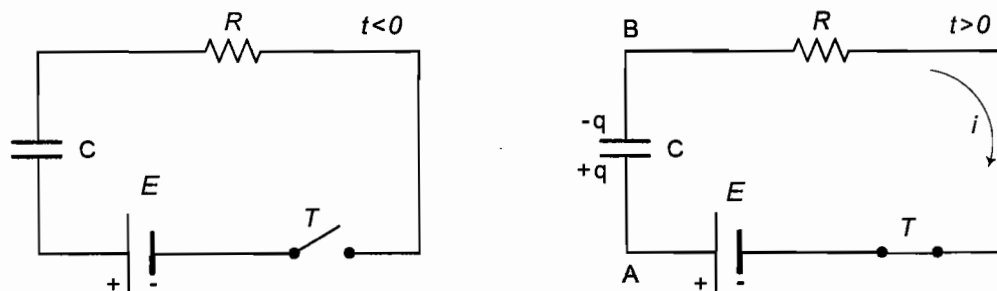
tada je idealizirani NVNC kondenzator još uvijek pasivan element razmatranog električnog kruga. S tim u vezi, proširena definicija pasivnosti idealiziranog NVNC kondenzatora, glasi:

Suma zatečene akumulirane energije $w_e(t_0)$ u trenutku t_0 i energije $w(t_0, t)$ koja se preda istom kondenzatoru u intervalu (t_0, t) , mora biti nenegativna vrijednost.

1.2.3 Priključenje i isključenje idealiziranog, linearnog, vremenski nepromjenljivog kondenzatora na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona

U okviru Osnova elektrotehnike, pokazano je da idealizirani linearni, vremenski nepromjenljivi električni kondenzator, vlastite kapacitivnosti C , u stacionarnim uslovima rada predstavlja beskonačan otpor za stalnu jednosmjernu struju. Isto tako su i eksperimentalni ogledi provedeni tokom opterećavanja i rasterećavanja električnog kondenzatora, pokazali da u uslovima uspostavljanja električnog naboja na elektrodama kondenzatora, kao i u uslovima njegovog iščezavanja sa tih istih elektroda, postoji promjenljivi tok količine električnog naboja (registrovan od strane balističkog galvanometra) kroz spojne provodnike koji povezuju naponski izvor stalnog jednosmjernog napona i analizirani kondenzator. Ovakve pojave odmah impliciraju zaključak da je u tim kratkotrajnim vremenskim periodima u spojnim provodnicima prisutna i vremenski promjenljiva električna struja.

Da bi se preciznije istražile zakonomjernosti navedenih promjena električne struje, korisno je analizirati jednostavni električni krug sa *Slike 1.15*.



Slika 1.15 Uključenje LVNC kondenzatora, kapacitivnosti C , na jednosmjerni naponski izvor vlastite elektromotorne sile E

Pod pretpostavkom da je jednosmjerni naponski izvor, upotrijebljen u električnoj shemi sa *Slike 1.15*, idealni naponski izvor stalnog jednosmjernog napona, tada njegov unutrašnji aktivni otpor R_E mora biti jednak nuli. Slično tome, ukoliko se pretpostavi da je i upotrijebljeni kondenzator takav da ima karakteristike idealnog, linearnog, vremenski nepromjenljivog kondenzatora (LVNC), tada je i on, kao element razmatranog električnog kruga, potpuno opisan samo električnom kapacitivnošću C (za realni linearni vremenski nepromjenljivi kondenzator, pri njegovom ekvivalentnom električnom predstavljanju neophodno je pored električne kapacitivnosti C tom kondenzatoru pridružiti i aktivni otpor R_C paralelno vezan s tom kapacitivnošću).

Pri ovakvim ograničenjima, aktivni otpor R u električnoj shemi sa *Slike 1.15*, mora biti jednak nuli.

Ukoliko, pri otvorenom prekidaču T , u kondenzatoru vlastite kapacitivnosti C nije bilo akumulirane elektrostatske energije, tada će promjena električnog napona, što vlada između njegovih elektroda od trenutka t_0 , kada se zatvori prekidač T , mijenjati u skladu sa dinamikom, opisanom slijedećom jednačinom:

$$E = v_c(t). \quad (1.72)$$

U relaciji (1.72), očigledno nema izražene brzine promjene analiziranog napona $v_c(t)$, što implicira zaključak da električni napon između elektroda kondenzatora $v_c(t)$, može da skokovito mijenja svoju vrijednost s iznosa 0 , na iznos E (formalno matematski gledano funkcija $v_c(t)$ tada dozivlja prekid I vrste, pa tada nema konačan I izvod). Uzme li se potom u obzir, da je taj isti napon $v_c(t)$ povezan sa strujom $i(t)$, kojom se opterećuju elektrode analiziranog kondenzatora, pomoću relacije:

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}, \quad (1.73)$$

tada bi takva struja pri opisanoj skokovitoj promjeni napona $v_c(t)$, poprimila beskonačnu amplitudu, što je fizikalni apsurd.

Kako u realnim fizičkim sistemima nije moguće realizovati takvo stanje, to je neophodno modificirati odnose iskazane jednačinom (1.72). Za prvi korak u pravcu neophodne modifikacije, pokazuje se sasvim dovoljnim da se uzme u obzir samo realnost konfiguracije naponskog izvora stalnog jednosmjernog napona, dakle da je $R_E > 0$. Nije teško

uočiti da je tada i $R = R_E > 0$, pa su u novouspostavljenim uslovima, odnosi unutar električnog kruga sa *Slike 1.15* opisani slijedećom jednačinom dinamičke ravnoteže:

$$E = \frac{q}{C} + R_E \cdot i; \quad i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (1.74)$$

$$E = \frac{q}{C} + R_E \cdot \frac{dq}{dt} . \quad (1.75)$$

Jednačina (1.75) se u matematičkoj teoriji klasificira kao linearna diferencijalna jednačina I reda po promjenljivoj $q(t)$ i ima rješenje u obliku:

$$q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (1.76)$$

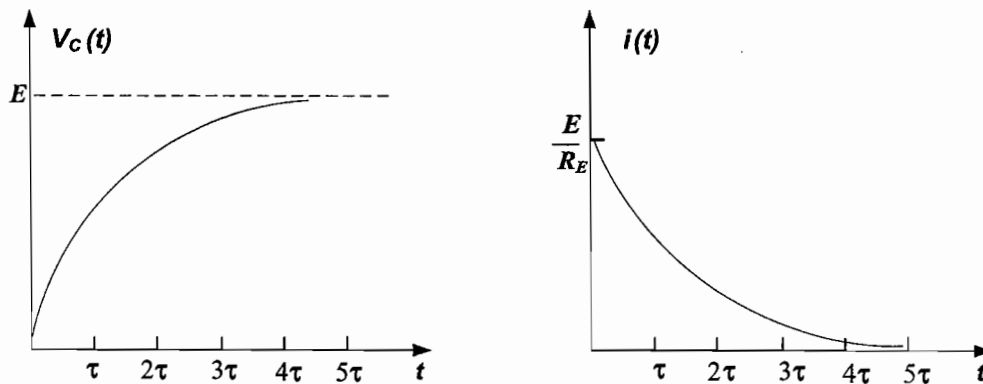
Simbol $\tau = R_E \cdot C$, označava vremensku konstantu analiziranog kruga (U teoriji automatskog upravljanja, relacija oblika (1.76) naziva se aperiodskim blokom I reda. Vremenska konstanta aperiodskog bloka prvog reda τ , određuje se kao vrijeme koje je potrebno da odskočni odziv analizirane koordinate – dakle u ovom slučaju električnog naboja, dostigne 63 % vrijednosti novog stacionarnog stanja – za analizirani električni krug to je 63 % vrijednosti električnog naboja EC).

Između električnog naboja $q(t)$, kojim se opterećuju elektrode razmatranog kondenzatora, i napona između tih elektroda $v_C(t)$ važi relacija:

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (1.77)$$

Relacija (1.77) predstavlja analitički izraz za vremensku promjenu napona $v_C(t)$.

Na *Slici 1.16* dat je grafički prikaz toka uspostavljanja električnog napona između elektroda kondenzatora $v_C(t)$, kao i tok električne struje $i(t)$, u okolnostima prikazanim na električnoj shemi sa *Slike 1.15*.



Slika 1.16 Grafički prikaz toka uspostavljanja električnog napona između elektroda kondenzatora te toka električne struje $i(t)$ u električnoj shemi sa **Slike 1.15**

Da bi se stekao osjećaj za vrijeme potrebno za opterećivanje idealnog, linearnog, vremenski nepromjenljivog kondenzatora (LVNC), može se uzeti primjer električnog kondenzatora kapaciteta $C=2 \mu\text{F}$, priključenog na izvor jednosmjernog napona unutrašnjeg aktivnog otpora $R_E = 0,1 \Omega$, za koji je vremenska konstanta $\tau = 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.

Realni kondenzatori, zbog uvažavanja električnog otpora R_C , imaju nešto veću vremensku konstantu, ali je ona još uvijek tako mala da se praktično napon uspostavlja gotovo trenutno.

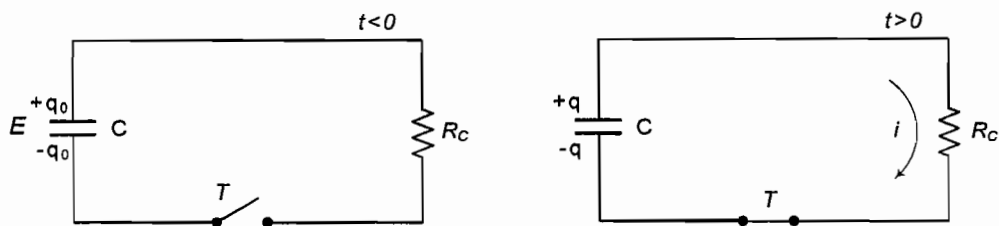
S energetskeg stanovišta, važno je naglasiti da u fazi uspostavljanja stalne jednosmjerne struje, upotrijebljeni naponski izvor odaje električnu energiju koja se troši ne samo na savladavanje Jouleovih gubitaka na otporu R_E , već i na savladavanje elektromotorne sile kondenzatora, kojom se kondenzator protivi težnji da se provede polarizacija dielektrika kondenzatora. Može se dokazati da je električni rad generatora utrošen na savladavanje elektromotorne sile kondenzatora, brojno jednak prirastu elektrostatske energije u analiziranom kondenzatoru.

Ako se u uslovima uspostavljene stacionarne vrijednosti električnog napona kondenzatora $v_c(t) = E$, naglo zatvori prekidač **T**, napon $v_c(t)$ neće moći trenutno pasti na vrijednost nula, nego će se toj vrijednosti približavati kroz dinamički proces opisan jednačinama:

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} = R_C \cdot i; \quad i(t) = - \frac{dq(t)}{dt} \quad (1.78)$$

$$0 = \frac{q(t)}{C} + R_C \frac{dq(t)}{dt}. \quad (1.79)$$

Na *Slici 1.17* je prikazan ekvivalentni električni krug putem koga se provodi rasterećenje razmatranog kondenzatora za koji je pretpostavljeno da zbog svoje nesavršenosti posjeduje i aktivnu otpornost R_C .



Slika 1.17 Ekvivalentni električni krug putem koga se provodi rasterećenje razmatranog kondenzatora

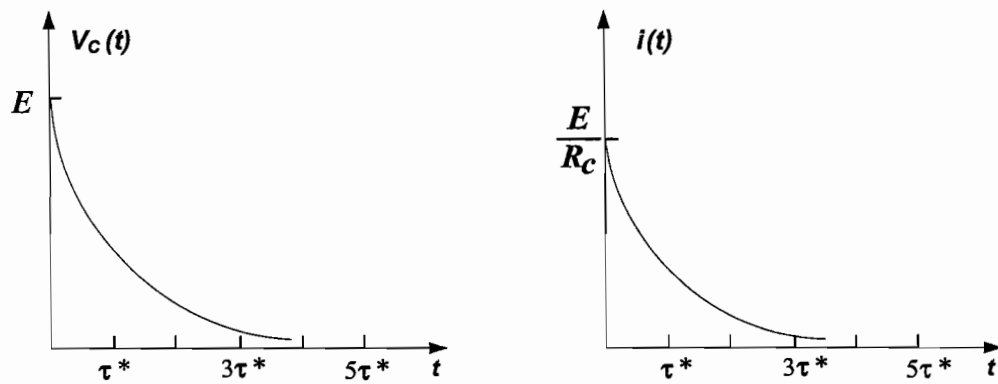
Treba naglasiti da je u posljednjoj jednačini aktivni električni otpor $R_C \gg R_E$, zbog čega je vremenska konstanta $\tau^* = C \cdot R_C$, koja karakteriše proces pražnjenja prethodno opterećenog kondenzatora, znatno veća od vremenske konstante τ , koja karakteriše proces njegovog opterećavanja.

Na *Slici 1.18* su grafički prikazani procesi rasterećenja električnog kondenzatora, posredstvom električnog napona na kondenzatoru $v_C(t)$ i električne struje $i(t)$.

Tokom trajanja procesa iščezavanja električnog napona $v_C(t)$, u razmatranom električnom krugu sa *Slike 1.17*, dolazi do depolarizacije dielektrika kondenzatora, a energija koja se oslobađa tokom tog procesa (to je akumulirana elektrostatska energija kondenzatora) transformiše se u Jouleove gubitke na otporniku R_C .

Sama struja iščezavanja može se odrediti na osnovu jednačine (1.79), pri čemu ona ima oblik:

$$i(t) = \frac{E}{R_C} e^{-\frac{t}{\tau^*}}. \quad (1.80)$$



Slika 1.18 Grafički prikaz toka iščezavanja električnog napona između elektroda kondenzatora, te toka elekirične struje $i(t)$ u električnoj shemi sa **Slike 1.17**

- 1) Vita si uti scias, longa est**
Život je dovoljno dug, ako ga znaš iskoristiti (**Seneca**)
- 2) Vino intrante foras subito sapientia vadit**
Čim vino uđe, pamet odmah izlazi
- 3) Veritas amara est**
Istina je gorka (**Hieronymus**)
- 4) Venit morbus eques, suevit abire pedes**
Bolest dođe kao konjanik, a obično ode kao pješak
- 5) Varium et mutabile semper femina**
Žena je uvijek nepostojana i promjenljiva
- 6) Ut ameris, ama**
Da budeš ljubljen ljubi (**Martialis**)
- 7) Unicuique dedit vitium natura creato**
Priroda je svakom biću dala manu
- 8) Tu fallaci nimium ne crede lucernae**
Varljivoj svjetiljci ne vjeruj previše (**Ovidius**)
(Vezuje se za procjenu ženske ljepote noću)
- 9) Tantum possumus, quantum scimus**
Možemo onoliko, koliko znamo
- 10) Sus Minervam docet**
Svinja podučava Minervu
(alegorija, koja se koristi kada nestručnjak podučava stručnjaka)

Taciturnitas stulto homini pro sapientia est

Glupom čovjeku ćutanje služi kao mudrost

GLAVA 2

U ovoj glavi su obrađene osnovne karakteristike elementarnih potrošača električne energije predstavljenih pomoću aktivne otpornosti, idealnih ili realnih induktivnosti, te idealnih ili realnih kapacitivnosti elemenata. Pbrojani elementi analizirani su u ovoj glavi u uslovima uspostavljene njihove serijske, paralelne ili mješovite veze i stavljanja takve veze pod dejstvo prostoperiodičnog naponskog izvora. Kvantificirano su iskazani i odnosi koji nastaju tokom razmjene električne energije između tih elemenata i upotrijebljenog naponskog izvora električne energije. Posebno su obrađene pojave naponske i strujne rezonanse u odgovarajućim R L C krugovima.

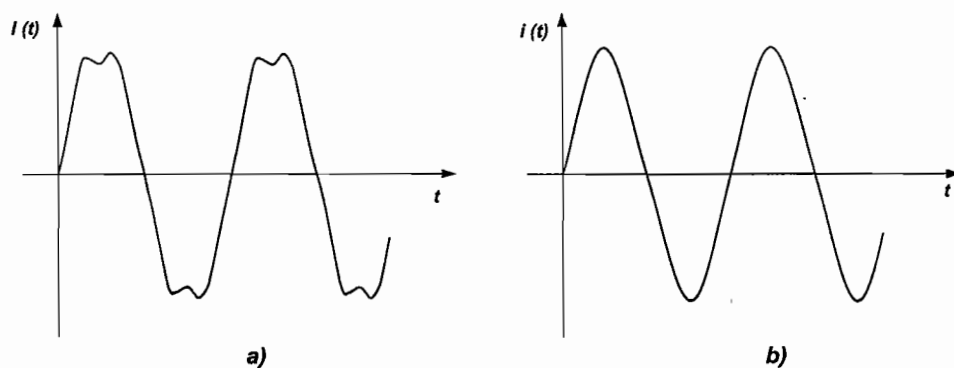
2. Električni krugovi u stacionarnom sinusoidalnom režimu

Pri proučavanju električnih krugova stalnih jednosmjernih struja i napona, konstatovano je da je karakteristično za takve električne struje da im srednja brzina makroskopskog pomjeranja električnih naboja, u svakom trenutku vremena t , ima konstantan iznos, pravac i smjer. Ova osobina srednje brzine, direktna je posljedica činjenice da je vektor jačine stranog električnog polja, koje djeluje na električne naboje u tim okolnostima, vektor koji ima ne samo stalnu amplitudu, nego i stalan pravac i smjer svog djelovanja

Već kod proučavanja vremenski promjenljivih struja i napona, koje se registruju pri uključenju i isključenju **RC** i **RL** električnog kruga na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona, uočeno je da se električna struja javlja u formi vremenski promjenljive struje, kod koje je smjer toka stalan, ali se njena amplituda mijenja u svakom trenutku vremena t tokom trajanja tog prelaznog režima. Saglasno tome i srednja brzina pomjeranja električnih naboja, u takvim okolnostima, ima stalan pravac i smjer pomjeranja, ali promjenljivu amplitudu, odnosno intenzitet pomjeranja. Ovdje treba primjetiti da je uspostavljena brzina pomjeranja predmetnih električnih naboja, rezultat ne samo djelovanja elektromotorne sile vanjskog izvora (kao što je to bio slučaj tokom uspostavljanja struje i pada napona u električnom krugu s potrošačem u formi aktivnog otpora, nakon njihovog priključenja na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona), nego i istovremenog djelovanja elektromotorne sile samoindukcije (u slučaju električnog induktiviteta), odnosno elektromotorne sile kojom se dielektrik suprotstavlja njegovoj polarizaciji ili depolarizaciji (u slučaju električnog kapaciteta).

Za razliku od ovakvih slučajeva, u najopštijem slučaju električnih krugova s vremenski promjenljivim strujama i naponima, koji su posljedica djelovanja vanjskih vremenski promjenljivih električnih polja, električne struje ne samo da mogu mijenjati intenzitet svoga toka, nego čak i smjer tog istog toka. Na *Slici 2.1* grafički su prikazani upravo takvi slučajevi:

- a) složenoperiodična struja,
- b) prostoperiodična struja.



Slika 2.1 Vremenski dijagram periodično promjenljive – izmjenične struje $i = f(t)$

Unutar široke klase ovakvih električnih krugova, posebno se detaljno izučavaju električni krugovi, kod kojih se električne struje i naponi mijenjaju po periodičnoj formi promjene, i to najčešće, upravo po sinusoidalnom zakonu promjene, kao u slučaju na **Slici 2.1 b**).

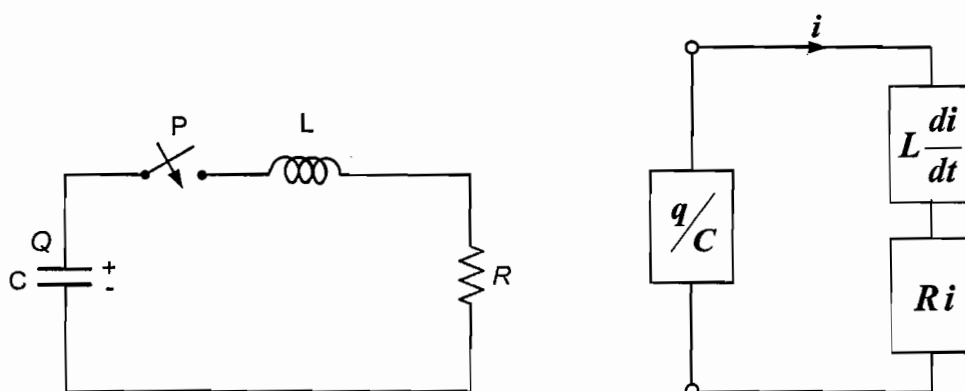
Razlog za ovakvo stanje treba tražiti u tehničkoj praksi, unutar koje je upotreba električnih krugova, zasnovanih na uspostavljanju prostoperiodičnih struja i napona «industrijskih frekvencija» ($f = 50 \text{ s}^{-1}$, odnosno $f = 60 \text{ s}^{-1}$), ili visokih frekvencija (radiofrekvencije - HF), vrlo visokih frekvencija (VHF) te ultra visokih frekvencija (UHF), mnogo rasprostranjenija od prisutnosti električnih krugova stalnih jednosmjernih napona i struja.

S druge strane, i sama tehnička praksa nametnula je ovakvo stanje, u prvom redu zbog jednostavnije i ekonomičnije proizvodnje električne energije, bazirane na izmjeničnim naponima i strujama, jednostavnije transformacije takve energije s jednog naponskog nivoa na drugi naponski nivo, te racionalnije konverzije ovako stvorene električne energije u druge vidove energije, odnosno olakšanog uspostavljanja i prekidanja strujnog kruga.

Za uspješno izučavanje električnih krugova sa sinusoidalnim naponima i strujama, korisno je razmatranje započeti s analizom serijskog spoja aktivnog otpora R , električne zavojnice induktivnosti L , te električnog kondenzatora kapacitivnosti C , i to u uslovima kada je prisutni električni kondenzator, na svoje elektrode prethodno već akumulirao električni naboj Q .

2.1 Električni krug baziran na serijskom spoju R, L, C elemenata

Na *Slici 2.2* je prikazana električna shema serijskog spoja linearnog, vremenski nepromjenljivog, aktivnog otpora **R** - (LVNR), linearne, idealizirane, vremenski nepromjenljive električne zavojnice, induktivnosti **L** - (LVNL), te linearnog, idealiziranog, vremenski nepromjenljivog električnog kondenzatora, kapacitivnosti **C** - (LVNC) i to u uslovima, kada je prisutni električni kondenzator, prethodno, već akumulirao na svoje elektrode električni naboj **Q**.



Slika 2.2 Serijski R-L-C krug

U skladu s uvedenom pretpostavkom, zbog prisustva električnog naboja na njegovim elektrodama, između elektroda LVNC vlada električni napon v , koji je opet, saglasno II Kirchhoffovom zakonu, uravnotežen sa zbirom električnih napona uspostavljenih između krajeva zavojnice LVNL, odnosno krajeva aktivne otpornosti LVNR. Uz pretpostavku da gornja elektroda upotrijebljenog kondenzatora, raspolaže s pozitivnim električnim nabojem $q(t) = Q = \text{konst.}$, koji se nakon zatvaranja prekidača P započinje mijenjati po vremenski ovisnoj funkciji $q(t)$, pri naznačenom smjeru električne struje i , važe slijedeće relacije:

$$i = - \frac{dq}{dt}; \quad q = C v; \quad v = L \frac{di}{dt} + Ri . \quad (2.1)$$

Nije teško pokazati da se na osnovu prve dvije relacije u (2.1), struja $i(t)$, može definisati i u obliku:

$$i = - C \frac{dv}{dt} , \quad (2.2)$$

što omogućava da se, na osnovu takvog oblika za struju $i(t)$ i treće relacije u (2.1), formira diferencijalna jednačina kojom su opisane vremenske promjene električnog napona v :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot v = 0. \quad (2.3)$$

Diferencijalna jednačina predstavljena relacijom (2.3), u skladu s Teorijom diferencijalnih jednačina, je linearna, homogena diferencijalna jednačina II reda, s konstantnim koeficijentima, čije je opšte rješenje definisano relacijom:

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t). \quad (2.4)$$

Uvažavajući prethodno navedene početne uslove: $v(0) = V$, $i(0) = 0$, lako se pokazuje da je električni napon na LVNC kondenzatoru, $v(t)$, tada jednak:

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} (V \cdot \cos \omega t). \quad (2.5)$$

Na osnovu relacija (2.2) i (2.5), može se pokazati i da je električna struja $i(t)$, posredstvom koje se prazni ili puni LVNC kondenzator, definisana relacijom:

$$i(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot V \cdot C \cdot \omega \left(\frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t + \sin \omega t \right). \quad (2.6)$$

U prethodnim relacijama, α je konstantna veličina koja je obrnuto proporcionalna vremenskoj konstanti analiziranog električnog kruga, dok je ω kružna frekvencija kojom se odvijaju oscilacije nastale u tom istom krugu. Te veličine su određene relacijama:

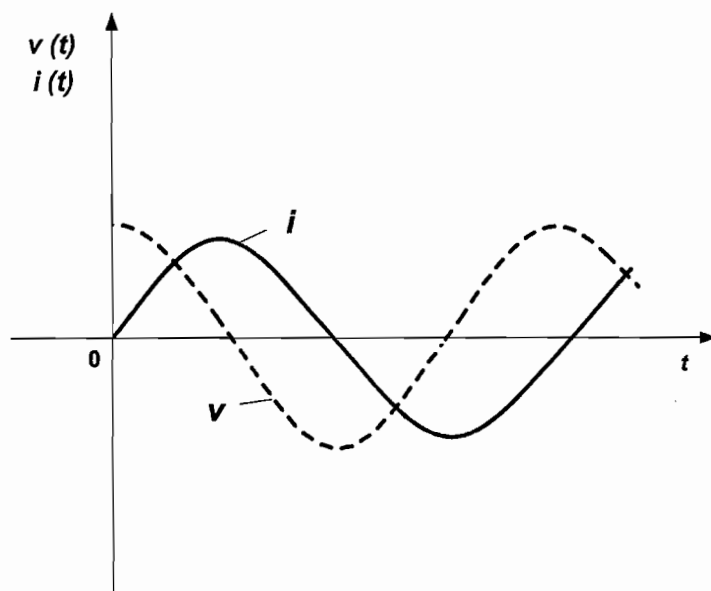
$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L}; \quad \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}. \quad (2.7)$$

Uzimajući u obzir da je kružna frekvencija ω , po svojoj fizikalnoj prirodi, nenegativan realan broj, a da je i bez obzira na to svakako $\omega^2 > 0$, proizilazi da mora biti i $(R^2/(4L^2)) < (1/(LC))$.

U ovim uslovima električni napon između elektroda razmatranog LVNC kondenzatora $v(t)$ (jasno pod pretpostavkom da je i aktivna otpornost $R > 0$), mijenja se u skladu sa zakonitošću prigušenih harmonijskih oscilacija.

Ukoliko je aktivna otpornost $R = 0$, tada će se električni krug, čija je električna shema prikazana na *Slici 2.2*, transformisati u idealni rezonantni krug, u kojem se uspostavlja postojana – vremenski neograničena, razmjena energije između LVNC kondenzatora i LVNL zavojnice. Na *Slici 2.3* prikazani su dijagrami vremenske promjene električnog napona na kondenzatoru $v(t)$ i električne struje $i(t)$, uz čiju pomoć se vrše energetske transformacije u slučaju idealiziranog oscilatornog kruga.

Električna struja, putem koje se u jednom ciklusu vrši prenos električne energije iz LVNC kondenzatora u LVNL zavojnicu, odnosno u narednom ciklusu, povrat te iste električne energije u LVNC kondenzator (i to upravo iz LVNL zavojnice, posredstvom njene magnetne energije), pri $R = 0$, odlikuje se amplitudom stalne vrijednosti. S obzirom na pretpostavljenu idealnost L i C elemenata, pri $R = 0$, u analiziranom krugu nema transformacije električne energije u toplotnu energiju, tokom njenih prethodno opisanih transfera. Stoga takav proces, uz navedeni dodatni uslov $R = 0$, može vremenski trajati neograničeno dugo.



Slika 2.3 Vremenska promjena električnog napona na kondenzatoru $v(t)$ i električne struje, $i(t)$, uz čiju pomoć se vrše energetske transformacije u slučaju idealiziranog oscilatornog kruga

Ukoliko su međutim na snazi uslovi: $R > 0$ i $(R^2 / (4L^2)) < 1 / (LC)$, tada se energetske procesi u električnom krugu sa *Slike 2.2* odvijaju, kao što je već ranije konstatovano, uz prigušene oscilatorne promjene električnog napona na kondenzatoru $v(t)$ i električne struje, $i(t)$, uz čiju pomoć se vrše predmetni energetske transferi.

Na *Slici 2.4* grafički je prikazana razmjena energije između LVNC kondenzatora i LVNL zavojnice i to za slučaj kada je odnos $\alpha/\omega = 0,04$. Prikazana električna struja u tom slučaju fazno zaostaje za električnim naponom na LVNC kondenzatoru, gotovo za četvrtinu oscilatornog perioda.

Treba primjetiti da porast vrijednosti aktivne otpornosti R , ima za posljedicu intenzivnije prigušenje amplituda onih veličina koje se mijenjaju u skladu s harmonijskim zakonom promjene.

Prigušenje oscilatornog procesa često se izražava brojem Q^* , koji se u tehničkoj literaturi naziva Q^* faktorom ili faktorom dobrote. Ako je prigušenje uspostavljenih oscilacija slabije tada je Q^* faktor veći. Kod oscilatora ugaone brzine ω , faktor Q^* se definiše relacijom:

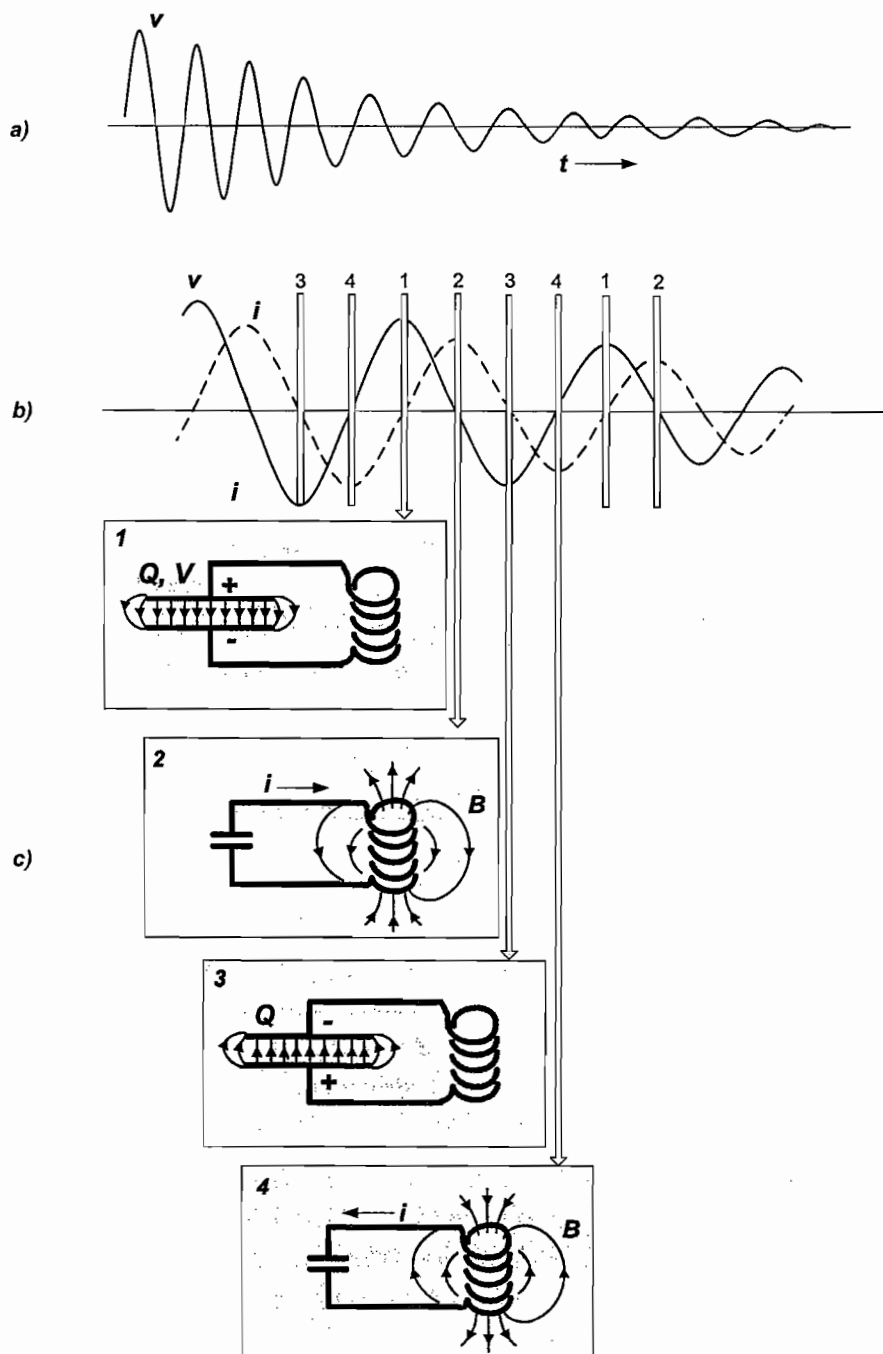
$$Q^* = \omega \cdot \frac{\text{sadržaj energije u el. krugu sa Slike 2.2}}{\text{prosječna el. snaga što se gubi u tom krugu}}, \quad (2.8)$$

Odakle se faktor Q^* može izraziti i u formi:

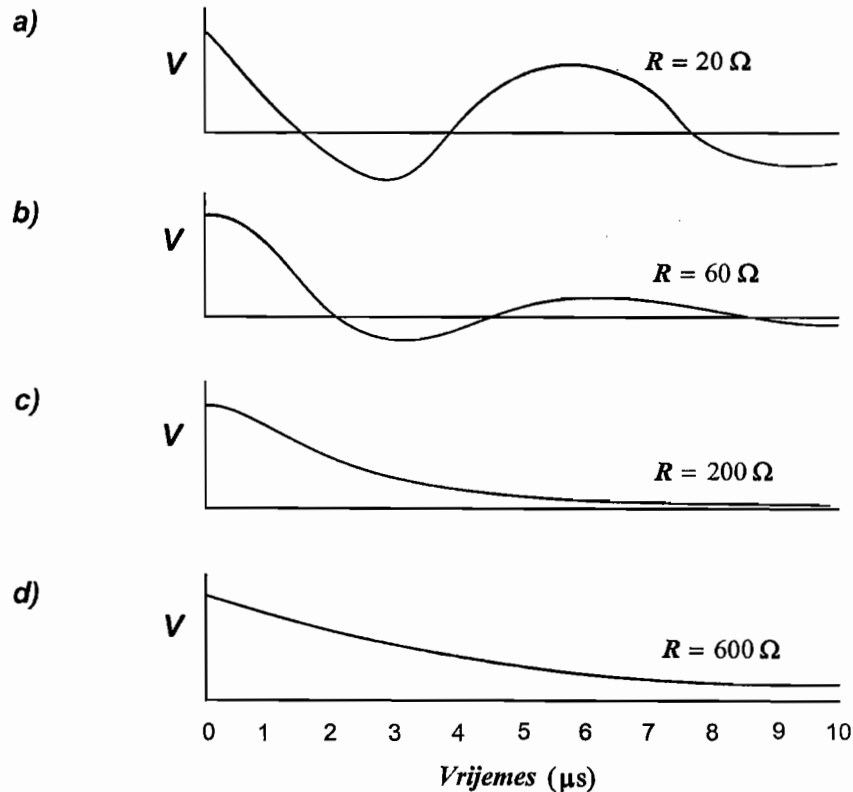
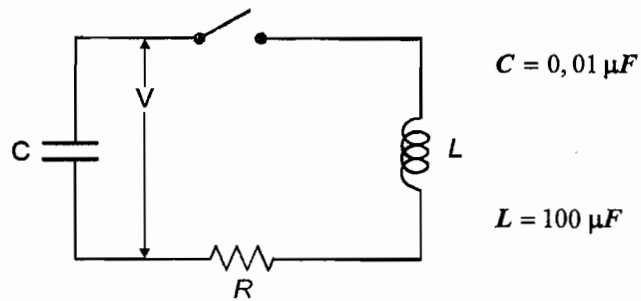
$$Q^* = \omega \cdot \frac{L}{R}.$$

Da bi se napravila potpuna analiza oscilatornog ponašanja električnog kruga sa *Slike 2.2*, potrebno je sagledati i tok električnih procesa, kada je $R > 0$ i $(R^2/(4L^2)) \geq (1/(LC))$. Pri ovakvim ograničenjima, na osnovu relacija (2.2) i (2.3), lako se izračunava da se vremenske promjene električnog napona na kondenzatoru $v(t)$ i električne struje $i(t)$ (uz čiju pomoć se vrše opisani energetske transferi), ne dešavaju po zakonu harmonijskih oscilacija, nego se ove veličine postepeno – aperiodski smanjuju ka nultoj vrijednosti.

Poseban slučaj unutar ovog primjera, nastaje ukoliko je $(R^2/(4L^2)) = (1/(LC))$, jer se pokazuje da se u takvim uslovima, zatečena energija u analiziranom RLC krugu najbrže pretvara u toplotu (ovakvo stanje nastupa na *Slici 2.5*, kada je $R = 200 \Omega$).



Slika 2.4 Grafički prikaz razmjena energije između LVNC kondenzatora i LVNL zavojnice i to za slučaj kada je odnos $\alpha/\omega = 0,04$.



Slika 2.5 Nakon što se kondenzator optereti električnim nabojem q , pri kojem je $v(t) = V$, zatvara se prekidač, a potom snimaju i promjene tog napona za različite vrijednosti aktivnog otpora R i nepromjenljivost parametara L i C

Sva prethodna razmatranja procesa, koji se odvijaju u analiziranom oscilatornom **RLC** krugu, provedena su, očigledno, u odsustvu, kontinuiranog djelovanja izvora električne energije, pomoću koga bi se eventualno nadoknađivali nepovratni energetske gubici (tokom transformacije električne energije u toplotnu energiju, uslijed prisustva aktivnog otpora R).

Stoga su uočene oscilatorne promjene, po pravilu više ili manje prolaznog karaktera, jer prije ili kasnije one nestaju.

Prije nego što se pristupi analizi ponašanja osnovnih električnih krugova, u kojima pored navedenih R , L , C elemenata, djeluje i idealni naponski izvor, čija se elektromotorna sila mijenja u skladu sa harmonijskim zakonima, korisno je definisati (pored već ranije uvedene kružne frekvencije ω), još nekoliko veličina, koje su upravo karakteristične za neprigušene harmonijske oscilacije.

Ako postoji realan broj $T > 0$, takav da za svaku vrijednost argumenta t , iz definicionog područja predmetne funkcije $i(t)$, važi relacija:

$$i(t) = i(t + T). \quad (2.9)$$

tada kažemo da je $i(t)$ periodična funkcija, a broj T se tada označava kao njen period. Nije teško pokazati da, ako funkciji $i(t)$ pripada period T , tada je i kT također period te iste funkcije, pri čemu je k proizvoljan cijeli broj, različit od nule.

Broj cjelovitih promjena periodične funkcije $i(t)$, tokom jedne sekunde, određuje učestanost ili frekvenciju f tih periodičnih promjena. U skladu s prethodno uvedenim definicijama, očigledno vrijedi odnos:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (2.10)$$

Pod pretpostavkom da je periodična veličina $i(t)$ harmonijska funkcija, odnosno prostoperiodična funkcija u opštem slučaju, ona se tada u vremenskom domenu opisuje relacijom:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \Psi). \quad (2.11)$$

Izraz $\alpha(t) = (\omega t + \Psi)$ označava trenutni fazni ugao analizirane sinusoidalne funkcije, dok simbol Ψ predstavlja početnu vrijednost tog faznog ugla (očigledno važi relacija $\alpha(0) = \Psi$).

U kontekstu ranije upotrijebljenih oznaka, sada se kružna frekvencija može definisati i kao brzina promjene trenutne vrijednosti faznog ugla $\alpha(t)$, dakle:

$$w = \frac{d\alpha(t)}{dt}. \quad (2.12)$$

S obzirom da za prostoperiodičnu funkciju važi relacija: $\omega T = 2 \cdot \pi$, to ima osnove pisati i da je:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f . \quad (2.13)$$

Simbolom I_m označena je maksimalna vrijednost struje $i(t)$. To je dakle najveća vrijednost analizirane prostoperiodične veličine, koja se može dosegnuti u bilo kojem trenutku vremena t .

Međutim, baš zbog činjenice da se radi o vrijednosti koja se postiže samo u jednom trenutku vremena, za inženjersku praksu su mnogo interesantniji pokazatelji osobina uspostavljene struje, koji je reprezentuju u nekom dužem vremenskom intervalu (recimo, pri mjerenju električne struje nije jednostavno izmjeriti struju upravo u željenom trenutku, a i kada se to uspije, eventualna mala odstupanja u registrovanoj vrijednosti mjerene veličine, mogu izazvati ozbiljne pogreške u fazi projektovanja ili nekog drugog vida inženjerskog odlučivanja).

Poželjno reprezentovanje analizirane periodične veličine (struje, napona) u nekom dužem vremenskom intervalu, može se ostvariti pomoću srednje vrijednosti te veličine, ili pomoću efektivne vrijednosti te veličine.

Srednja vrijednost analizirane veličine se može definisati na više načina, koji uglavnom ovise o karakteru promjene veličine za koju se želi odrediti srednja vrijednost.

U tom smislu se za kontinuirane veličine, njihova srednja vrijednost može definisati kao konstantna veličina, koja nakon množenja s dužinom trajanja vremenskog intervala, tokom kojeg se analizirana veličina prati (za periodične veličine, taj se vremenski period određuje ili kao poluperiod ($T/2$), ili kao period T), geometrijski ograničava istu površinu (očigledno to je površina pravougaonika $T \cdot I_{sr}$), kao i analizirana kontinuirana veličina, tokom istog vremenskog intervala.

Opisani odnosi između analizirane kontinuirane veličine i pripadajuće joj srednje vrijednosti, za električnu struju $i(t)$, mogu se analitički iskazati relacijom:

$$T \cdot I_{sr} = \int_0^T | i(t) | dt , \quad (2.14)$$

u kojoj symbol I_{sr} označava srednju vrijednost električne struje $i(t)$.

Posljednja relacija se, u slučaju električne struje, može tumačiti i kao jednakost količine električnog naboja, koji protekne tokom prolaska stalne jednosmjerne struje I_{sr} tokom vremenskog intervala T , sa količinom električnog naboja, koji protekne tokom prolaska analizirane kontinuirane veličine $i(t)$ tokom istog vremenskog intervala T .

Pored pojma srednje vrijednosti analizirane kontinuirane veličine $i(t)$, u elektrotehnici se veoma rašireno koristi i pojam efektivne vrijednosti, te kontinuirane veličine.

Efektivna vrijednost kontinuirane prostoperiodične veličine $i(t)$, definiše se također kao neka stalna jednosmjerna fiktivna struja I_e , koja prolazeći kroz aktivni otpornik R , tokom vremenskog intervala, jednakog periodu T , stvori iste Jouleove gubitke na predmetnom otporniku, kao i analizirana kontinuirana veličina–struja $i(t)$, pri prolasku kroz isti aktivni otpornik R , tokom identičnog vremenskog intervala T . Ovi odnosi pretočeni u analitičku formu dovode do slijedeće relacije:

$$T \cdot (I_e)^2 \cdot R = \int_0^T i^2(t) \cdot R dt, \quad (2.15)$$

odakle se efektivna vrijednost struje I_e može računati korištenjem relacije:

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}. \quad (2.16)$$

Ukoliko je analizirana kontinuirana veličina, struja $i(t)$, prostoperiodična u smislu zakonitosti njene promjene, dakle ako je: $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \Psi)$, tada je njena efektivna vrijednost određena relacijom: $I_e = 0,707 I_m$.

U istim okolnostima, na osnovu izraza (2.14), dobija se da je veza između srednje vrijednosti i maksimalne vrijednosti struje $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \Psi)$, iskazana relacijom: $I_{sr} = 0,637 I_m$.

Formiranjem odnosa efektivne vrijednosti analizirane kontinuirane veličine i srednje vrijednosti te iste veličine, dobija se faktor oblika te veličine. Za sinusoidalni oblik analizirane veličine, dobija se da je faktor oblika: $k_\theta = (I_e / I_{sr}) = 1,11$.

Slično kao što su definisane srednja vrijednost i efektivna vrijednost električne struje, moguće je definisati i srednju vrijednost i efektivnu vrijednost električnog napona $v(t)$:

$$T \cdot V_{sr} = \int_0^T |v(t)| dt \quad (2.17)$$

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} . \quad (2.18)$$

Za trenutnu vrijednost električne snage $p(t)$, njena srednja vrijednost se računa pomoću relacije:

$$T \cdot P_{sr} = \int_0^T |p(t)| dt . \quad (2.19)$$

S obzirom da trenutna vrijednost električne snage predstavlja periodičnu veličinu, koja ima dvostruko veću frekvenciju nego njoj pridružene veličine (kontinuirana prostoperiodična veličina struja $i(t)$, odnosno električni napon $v(t)$), srednju vrijednost trenutne električne snage $p(t)$, moguće je računati i uz upotrebu relacije (2.19 a):

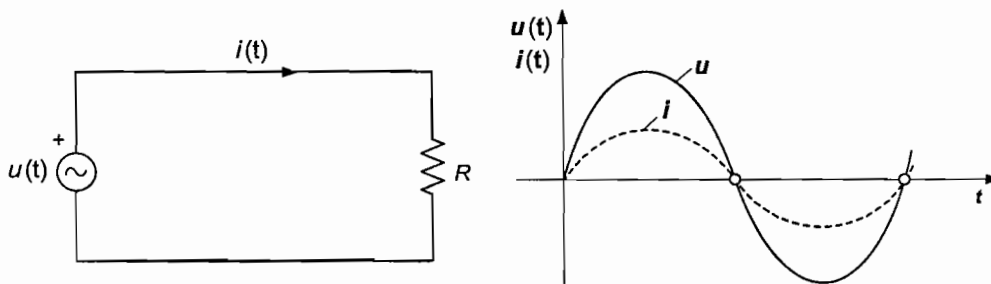
$$(T/2) \cdot P_{sr} = \int_0^{T/2} p(t) dt . \quad (2.19 a)$$

Treba primjetiti da trenutna vrijednost električne snage $p(t)$, ne mora biti simetrična u odnosu na vremensku - t osu u koordinatnom (t, p) sistemu.

2.2 Aktivni električni otpor otpornosti R u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona

Analizu ponašanja potrošača električne energije, u električnom krugu, unutar kojeg djeluje idealni naponski izvor, čiji se napon $u(t)$, mijenja u skladu s prostoperiodičnom zakonitošću $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, uobičajno je započeti s najjednostavnijom strukturom potrošača – dakle potrošačem, koji se može dovoljno dobro predstaviti linearnim vremenski nepromjenljivim aktivnim otporom R (LVNR).

Na *Slici 2.6* predstavljena je šema električnog kruga sa aktivnim otporom kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, kao generatorom.



Slika 2.6 Električni krug s aktivnim otporom kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, kao generatorom

Ako se s $i(t)$ označi električna struja, koja se upostavlja u električnom krugu sa **Slike 2.6**, tada jednačina dinamičke ravnoteže, koja važi u svakom trenutku t , glasi:

$$u(t) = R \cdot i(t) = u_R(t), \quad (2.20)$$

odakle se veoma lako određuje električna struja $i(t)$ u obliku: $i(t) = (U_m / R) \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$.

Simbolom $u_R(t)$, označen je pad napona na LVNR, nastao usljed toka električne struje $i(t)$, kroz LVNR.

Treba naglasiti da aktivna električna otpornost, LVNR, u uslovima proticanja sinusoidalne električne struje kroz takav otpornik, nema istu vrijednost električnog otpora kao kada se kroz taj isti element uspostavlja stalna jednosmjerna električna struja. Uopšteno govoreći, aktivni električni otpor ima veću vrijednost kada se kroz njega usmjerava sinusoidalna električna struja. Razlog ovakvog stanja nalazi se u činjenici da se pri brzim promjenama električne struje, pojavljuje sve veća koncentracija električnih naboja uz samu površinu otpornika R (zbog ovakvog ponašanja očigledno se ravnomjerno ne koristi cijeli poprečni presjek provodnika od kojeg je napravljen električni otpornik, pa električna otpornost raste zbog smanjenja poprečnog presjeka provodnika).

Na osnovu **Slike 2.6** i na osnovu analitičkih izraza za električni napon $u(t)$, odnosno električnu struju $i(t)$: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$; $i(t) = (U_m/R) \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, može se zaključiti da napon $u(t)$ i struja $i(t)$ jednovremeno poprimaju kako ekstremne vrijednosti, tako i vrijednost nula.

Dakle važna karakteristika razmatranog električnog kruga je, fazna usaglašenost električnog napona na aktivnom otporniku LVNR u_R , sa električnom strujom $i(t)$, koja prolazeći kroz taj LVNR otpornik, upravo i stvara pad napon u_R .

Trenutna električna snaga $p(t)$, koju angažuje LVNR, određuje se pomoću relacije:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u_R(t) \cdot i(t), \quad (2.21)$$

što uz uvažavanje ranije utvrđenih relacija: da je pad napona $u_R(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$, a električna struja $i(t) = (U_m/R) \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, rezultira novim oblikom izraza za trenutnu vrijednost električne snage:

$$\begin{aligned} p(t) &= u_R(t) \cdot i(t) = U_m I_m \sin^2(\omega t + \theta_u) = \\ &= U_m \cdot I_m \cdot \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos 2 \cdot (\omega t + \theta_u)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Prema relaciji (2.22), trenutna vrijednost električne snage, angažovane LVNR otpornikom, je u svakom trenutku nenegativna veličina, što omogućava zaključak da se u razmatranom električnom krugu, u svakom trenutku vremena t , električna energija isključivo usmjerava od izvora električne energije ka potrošaču – odnosno LVNR otporniku.

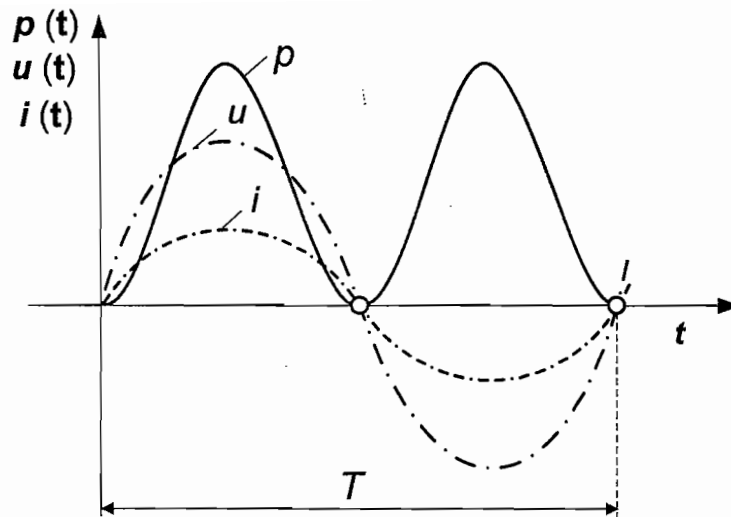
Analizom oblika promjene trenutne električne snage $p(t)$, koja je grafički prikazana na *Slici 2.7*, može se uočiti da je brzina promjene argumenta, trenutne električne snage $p(t)$ dvostruko veća, i od brzine promjene argumenta električnog napona $u(t)$, i od brzine promjene argumenta električne struje $i(t)$.

S obzirom da je električna energija, koja se tokom nekog intervala $(0, t)$ iz naponskog izvora usmjerava ka LVNR otporniku, određena relacijom:

$$W = \int_0^t p(t) dt, \quad (2.23)$$

to u slučaju da se vremenski interval podudara s veličinom perioda T , sinusoidalne struje $i(t)$, odnosno sinusoidalnog napona $u_R(t)$, električna energija, angažovana tokom tog vremenskog intervala iznosi:

$$W = \int_0^T p(t) dt = P_{sr} \cdot T. \quad (2.24)$$



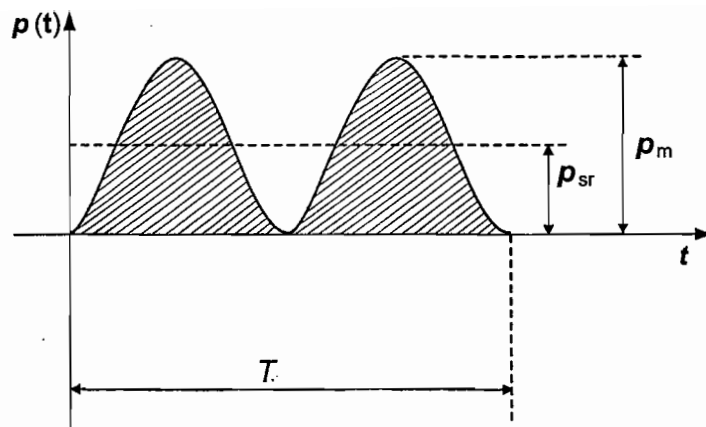
Slika 2.7 Grafički prikaz promjene trenutne električne snage $p(t)$, u električnom krugu sa **Slike 2.6**

Sa simbolom P_{sr} , označena je srednja vrijednost trenutne električne snage $p(t)$. Ta srednja vrijednost može se izvesti na dva načina.

Pri prvoj opciji, koristi se relacija za određivanje iznosa električne energije, angažovane iz raspoloživog naponskog izvora sinusoidalnog napona tokom vremenskog intervala T uz uzimanje u obzir trenutne vrijednosti električne snage (angažovana električna energija je u ovom slučaju proporcionalna površini ograničenoj krivom $p(t)$ i dijelom vremenske ose t , za $t \in (0, T)$).

Pri drugoj opciji za određivanje te iste električne energije, koristi se relacija koja tu energiju određuje pomoću srednje vrijednosti trenutne električne snage, tokom istog vremenskog intervala T (angažovana električna energija je u ovom slučaju proporcionalna površini pravougaonika stranica P_{sr} , odnosno T). Na **Slici 2.8** data je grafička ilustracija ove energetske ravnoteže.

Treba naglasiti da je srednja vrijednost trenutne električne snage $p(t)$, dakle električna snaga P_{sr} , za bilo kakav potrošač električne energije, ustvari jedan od osnovnih parametara električne snage $p(t)$, jer predstavlja onaj dio električne snage preuzete iz spoljnjih izvora, koji se može konvertovati u toplotu, ili iskoristiti za obavljanje mehaničkog rada (recimo preko osovina elektromotora).



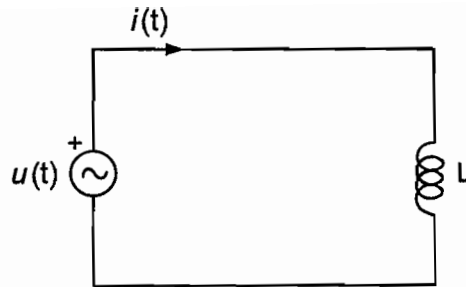
Slika 2.8 Grafička ilustracija energetske ravnoteže, koja može biti osnova za određivanje srednje vrijednosti električne snage P_{sr}

Električna snaga specificirana na potrošačima električne enèrgije, koja je definisana uz oznaku njene kvantitativne mjere **W** (Watt), ustvari je srednja vrijednost angažovane trenutne električne snage $p(t)$. U elektrotehnici se srednja električna snaga P_{sr} naziva još i *aktivnom električnom snagom*.

2.3 Idealna električna zavojnica induktivnosti L u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona

Nakon što je razmotren potrošač s najjednostavnijom strukturom – dakle potrošač, koji se može dovoljno dobro predstaviti linearnim, vremenski nepromjenljivim aktivnim otporom R (LVNR), analizu ponašanja potrošača električne energije, u električnom krugu, unutar kojeg djeluje idealni naponski izvor, čiji se napon $u(t)$ mijenja u skladu sa prostoperiodičnom zakonitošću: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, uobičajeno je nastaviti putem razmatranja promjena koje se dešavaju ukoliko se takav potrošač zamijeni, idealiziranom, linearnom, vremenski nepromjenljivom električnom zavojnicom induktivnosti L (LVNL), ili idealiziranim, linearnim, vremenski nepromjenljivim električnim kondenzatorom, kapacitivnosti C (LVNC).

Na *Slici 2.9*, shematski je prikazan elementarni električni krug, sa električnom zavojnicom (LVNL), kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, kao generatorom.



Slika 2.9 Električni krug, s električnom zavojnicom (LVNL) kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, kao generatorom

Ako se s $i(t)$ označi električna struja, koja se uspostavlja u električnom krugu sa **Slike 2.9**, tada jednačina dinamičke ravnoteže, koja važi u svakom trenutku t , glasi:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = u_L(t) , \quad (2.25)$$

odakle se lako određuje električna struja $i(t)$, u obliku:

$$i(t) = \frac{U_m}{\omega L} \cdot \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{\pi}{2}\right) . \quad (2.26)$$

Simbolom $u_L(t)$ označen je pad napona na LVNL zavojnici, nastao uslijed savladavanja pripadajuće elektromotorne sile samoindukcije e_L , definisane relacijom:

$$e_L = -L \frac{di(t)}{dt} . \quad (2.27)$$

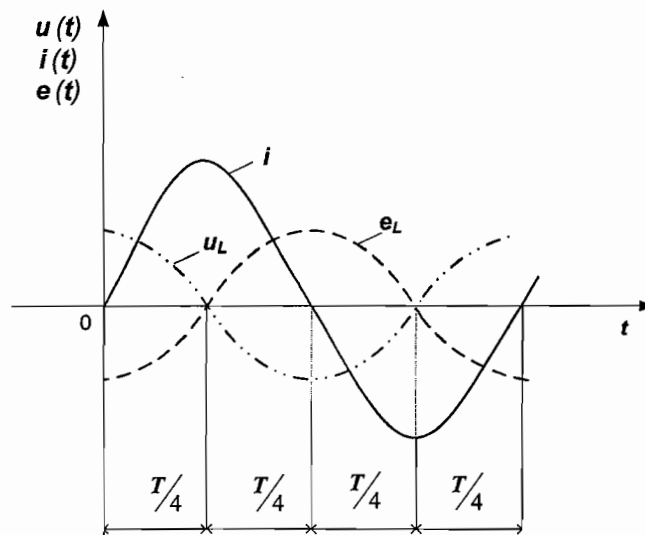
Elektromotorna sila samoindukcije e_L i pripadajući električni napon, $u(t)$ idealnog naponskog izvora, saglasno II Kirchhoffovom zakonu zadovoljavaju relaciju:

$$u(t) + e_L(t) = 0 . \quad (2.28)$$

Prethodno uspostavljene relacije, od (2.25) do (2.28), omogućavaju izvođenje slijedećih zaključaka:

1. U električnom krugu sa *Slike 2.9*, uspostavljena električna struja $i(t)$, fazno zaostaje, za ugao od $\pi/2$ radijana, u odnosu na pad napona $u_L(t)$, nastao na analiziranoj zavojnici, uslijed prolaska upravo te struje.
2. S druge strane, indukovana elektromotorna sila samoindukcije $e_L(t)$, fazno zaostaje, u odnosu na električnu struju $i(t)$, također za ugao od $\pi/2$ radijana, zbog čega su električni napon $u(t)$ i indukovana elektromotorna sila samoindukcije $e_L(t)$ međusobno u opoziciji.
3. Na osnovu izraza, koji određuje maksimalnu vrijednost električne struje $i(t)$, $I_m = (U_m / (\omega L))$, proizilazi da proizvod ωL , ima prirodu električnog otpora, zbog čega se u elektrótehnici on i naziva induktivnim električnim otporom. Induktivni električni otpor se formalno, obično obilježava simbolom: $X_L = \omega L$.

Na *Slici 2.10* su grafički prikazane vremenske promjene: električne struje $i(t)$, kroz LVNL zavojnicu, pada električnog napona $u_L(t)$, koji nastaje na istoj električnoj zavojnici, upravo zbog prolaska električne struje $i(t)$ i indukovane elektromotorne sile samoindukcije $e_L(t)$.



Slika 2.10 Grafički prikaz vremenskih promjena električne struje $i(t)$, kroz LVNL zavojnicu, pada električnog napona $u_L(t)$, koji nastaje na toj električnoj zavojnici, zbog prolaska električne struje $i(t)$ i indukovane elektromotorne sile samoindukcije $e_L(t)$, za slučaj kada je $\theta_u = \pi/2$ radijana.

Trenutna električna snaga $p(t)$, koju angažuje LVNL zavojnica u analiziranom električnom krugu, određuje se pomoću relacije:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u_L(t) \cdot i(t), \quad (2.29)$$

što uz uvažavanje ranije utvrđenih relacija: da je pad napona $u_L(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, a električna struja $i(t) = (U_m / (\omega L)) \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \pi/2)$, rezultira novom relacijom za trenutnu vrijednost električne snage:

$$\begin{aligned} p(t) &= u_L(t) \cdot i(t) = -U_m I_m [\sin(\omega t + \theta_u)] \cdot [\cos(\omega t + \theta_u)] = \\ &= -(U_m)^2 \cdot \frac{1}{2\omega L} \cdot [\sin 2(\omega t + \theta_u)]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Izraz za trenutnu vrijednost električne snage, angažovane od strane LVNL zavojnice, pokazuje da se ta snaga mijenja po sinusoidalnom zakonu, i to s frekvencijom koja je dva puta veća od frekvencije promjena napona izvora i električne struje, koja se usmjerava kroz zavojnicu.

Srednja vrijednost trenutne električne snage $p(t)$, određena je relacijom:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0, \quad (2.31)$$

koja pokazuje da se na osnovu električne snage, angažovane pomoću LVNL zavojnice, ne može obavljati koristan rad.

Vrijednost električne energije angažovana tokom vremenskog intervala $(0, t)$, određena je relacijom:

$$W = \int_0^t p(t) dt. \quad (2.32)$$

U skladu s relacijama (2.31) i (2.32), može se zaključiti da postoje vremenski intervali (kada je trenutna vrijednost električne snage $p(t)$ pozitivna) tokom kojih se električna snaga usmjerava iz naponskog izvora ka LVNL zavojnici (koja je akumulira u sebi kao vlastitu magnetnu energiju), ali i vremenski intervali (kada je trenutna vrijednost električne snage $p(t)$ negativna) tokom kojih se električna snaga usmjerava od LVNL zavojnice ka naponskom izvoru.

Ovakvo oscilovanje ili njihanje električne snage, ne samo u smislu promjene njene amplitude, nego i u smislu promjene smjera njenog toka, tumači se kao svojevrsna reakcija LVNL zavojnice na preduzetu akciju - djelovanje naponskog izvora.

Energija koja se angažuje tokom upravo opisanih procesa zato i ima atribut reaktivna, odnosno označava se kao reaktivna energija.

Maksimalna vrijednost trenutne električne snage, angažovane od strane LVNL zavojnice, koja iznosi:

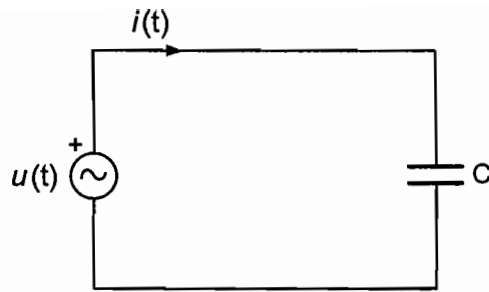
$$Q_L = -\frac{U_m^2}{2\omega L}$$

u elektrotehnici se naziva **induktivna reaktivna snaga**. Treba naglasiti da je algebarski predznak u izrazu za induktivnu reaktivnu električnu snagu, uslovne prirode. Mora se uvijek imati na umu da je predznak induktivne reaktivne električne snage, po pravilu suprotan od predznaka kapacitivne reaktivne električne snage.

2.4 Idealni električni kondenzator kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona

Elementarnu analizu ponašanja potrošača električne energije, u električnom krugu, unutar kojeg djeluje idealni naponski izvor, čiji se napon $u(t)$, mijenja u skladu s prostoperiodičnom zakonitošću: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, uobičajno je nastaviti razmatranjem promjena, koje se dešavaju ukoliko se takav potrošač predstavi idealiziranim, linearnim, vremenski nepromjenljivim električnim kondenzatorom kapacitivnosti C (LVNC).

Na *Slici 2.11*, shematski je prikazan elementarni električni krug, sa električnim kondenzatorom (LVNC) kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, kao generatorom.



Slika 2.11 Električni krug, s električnim kondenzatorom (LVNC) kao potrošačem i idealnim naponskim izvorom sinusoidalnog napona: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, kao generatorom.

Ako se s $i(t)$ označi električna struja, koja se upostavlja u električnom krugu sa **Slike 2.11**, a s $u_C(t)$ pad napona koji nastaje na (LVNC) kondenzatoru, tokom prolaska te struje kroz provodnike, koji povezuju elektrode kondenzatora sa ostatkom razmatranog električnog kruga, tada se uz pomoć jednačina dinamičke ravnoteže, koje važe u svakom trenutku t , a glase:

$$u(t) = u_C(t); \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (2.33)$$

lako određuje električna struja $i(t)$, u obliku:

$$i(t) = U_m \omega C \cdot \sin\left(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.34)$$

Simbolom $u_C(t)$, označen je pad napona na LVNC kondenzatoru, nastao zbog savladavanja protivljenja raspoloživog dielektrika da se provede njegova polarizacija.

Pad napona na LVNC kondenzatoru $u_C(t)$ i pripadajući električni napon idealnog naponskog izvora $u(t)$ zadovoljavaju, u skladu s II Kirchhoffovim zakonom, relaciju:

$$-u(t) + u_C(t) = 0. \quad (2.35)$$

Uvede li se termin kontraelektromotorna sila, $e_C(t)$, za veličinu kojom se iskazuje protivljenje dielektrika kondenzatora da se izvrši njegova polarizacija (kada je nepolarizovan) ili depolarizacija (ukoliko je već polarizovan), relacija (2.35) se može transformisati i u oblik:

$$u(t) + e_C(t) = 0. \quad (2.36)$$

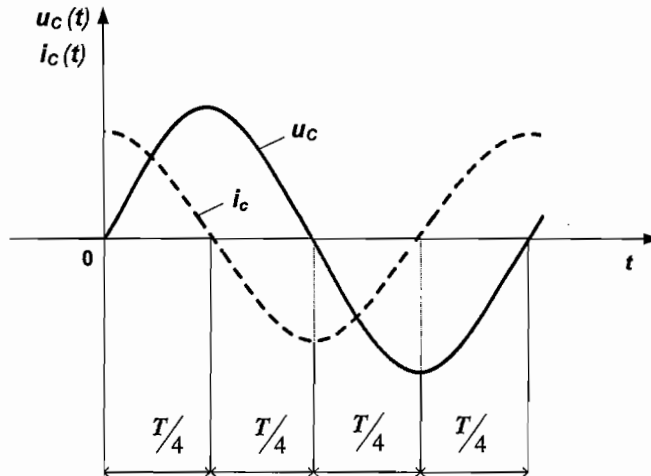
Uspostavljene relacije, od (2.33) do (2.36), omogućavaju da se izvedu slijedeći zaključci:

1. U električnom krugu sa *Slike 2.11*, uspostavljena električna struja $i(t)$, fazno prednjači, u odnosu na pad napona $u_c(t)$, (nastao na analiziranom kondenzatoru, upravo tokom prolaska te struje) za ugao od $\pi/2$ radijana.
2. Kontraelektromotorna sila, $e_c(t)$, s druge strane, fazno prednjači, u odnosu na tu električnu struju $i(t)$, također za ugao od $\pi/2$ radijana, zbog čega su električni napon $u(t)$ i kontraelektromotorna sila $e_c(t)$, međusobno gledano, u opziciji.
3. Na osnovu izraza, koji određuje maksimalnu vrijednost električne struje $i(t)$, $I_m = U_m \omega C$, proizilazi da izraz $(1/\omega C)$ ima prirodu električnog otpora, pa se u elektrotehnici on i naziva kapacitivnim električnim otporom. Kapacitivni električni otpor formalno se obično obilježava sa simbolom: $X_C = (1/\omega C)$.

Ako se ne analiziraju prelazni procesi, odnosno prelazna stanja, pri uspostavljanju struje kroz LVNL zavojnicu ili prelazni procesi pri uspostavljanju električnog napona između elektroda LVNC kondenzatora, tada treba birati početni fazni stav napona naponskog izvora, tako da i električna struja kroz LVNL zavojnicu i električni napon između elektroda LVNC kondenzatora startaju od nulte vrijednosti, u trenutku kada započne njihovo izlaganje dejstvu tog naponskog izvora.

Ovakvi zahtjevi nametnuti su fizikalnim osobinama pobrojanih elemenata, koje su takve da se električna struja kroz LVNL zavojnicu ne može skokovito mijenjati, kao ni napon između elektroda LVNC kondenzatora.

Na *Slici 2.12* su grafički prikazane vremenske promjene električne struje $i(t)$, kojom se puni ili prazni razmatrani električni kondenzator, i pada električnog napona $u_c(t)$, koji nastaje na tom istom električnom kondenzatoru, zbog prolaska električne struje $i(t)$, pri čemu su uvažene prethodno navedene napomene.



Slika 2.12 Grafički prikaz vremenskih promjena električne struje $i(t)$ i pada električnog napona $u_c(t)$, koji nastaje na tom električnom kondenzatoru, zbog prolaska električne struje $i(t)$, kroz njega i to za slučaj $\theta_u = 0$ radijana.

Trenutna električna snaga $p(t)$, koju angažuje LVNC kondenzator u analiziranom električnom krugu, određuje se pomoću relacije:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u_c(t) \cdot i(t), \quad (2.36)$$

što uz uvažavanje ranije utvrđenih relacija: da je pad napona $u_c(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, a električna struja $i(t) = U_m \omega C \cdot \sin(\omega t + \theta_u + \pi/2)$, rezultira novom relacijom za trenutnu vrijednost električne snage:

$$\begin{aligned} p(t) &= u_c(t) \cdot i(t) = U_m I_m [\sin(\omega t + \theta_u)] \cdot [\cos(\omega t + \theta_u)] = \\ &= (U_m)^2 \omega C \frac{1}{2} \cdot [\sin 2(\omega t + \theta_u)]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Izraz za trenutnu vrijednost električne snage, angažovane od strane LVNC kondenzatora, pokazuje da se ta snaga mijenja po sinusoidalnom zakonu i to s frekvencijom, koja je dva puta veća od frekvencije promjena napona izvora i električne struje, koja se usmjerava kroz kondenzator.

Srednja vrijednost trenutne električne snage $p(t)$, određena je relacijom:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 0, \quad (2.38)$$

koja pokazuje da se na osnovu električne snage, angažovane pomoću LVNC kondenzatora, ne može obavljati koristan rad. Električna energija, angažovana tokom vremenskog intervala $(0, t)$, određena je relacijom:

$$W = \int_0^t p(t) dt. \quad (2.39)$$

U skladu s relacijama (2.37) i (2.38), može se zaključiti da postoje vremenski intervali (kada je trenutna vrijednost električne snage $p(t)$ pozitivna) tokom kojih se električna snaga usmjerava iz naponskog izvora ka LVNC kondenzatoru (koji je akumulira u sebi kao vlastitu elektrostatsku energiju), ali i vremenski intervali (kada je trenutna vrijednost električne snage $p(t)$ negativna), tokom kojih se električna snaga usmjerava od LVNC kondenzatora ka naponskom izvoru.

Ovakvo oscilovanje ili njihanje električne snage, ne samo u smislu promjene njene amplitude, nego i u smislu promjene smjera njenog toka, tumači se kao svojevrsna reakcija LVNC kondenzatora na djelovanje naponskog izvora.

Energija koja se angažuje tokom opisanih procesa, zato i ima atribut reaktivna, odnosno označava se kao reaktivna energija.

Maksimalni iznos trenutne električne snage, angažovane od strane LVNC kondenzatora, koji iznosi:

$$Q_L = \frac{U_m^2 \omega C}{2},$$

u elektrotehnici se naziva **kapacitivna reaktivna snaga**. Treba naglasiti da je algebarski predznak u izrazu za kapacitivnu reaktivnu električnu snagu, uslovne prirode. Mora se uvijek imati na umu da je predznak kapacitivne reaktivne električne snage uvijek suprotan od predznaka induktivne reaktivne električne snage.

2.5 Realna električna zavojnica induktivnosti L u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona

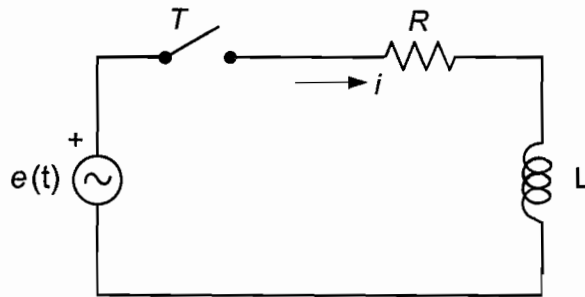
Ponašanje realne zavojnice induktivnosti L , kada se nađe u električnom krugu sa naponskim izvorom prostoperiodičnog napona $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$, može se dovoljno dobro predstaviti na osnovu razmatranja serijskog spoja linearnog, vremenski nepromjenljivog, aktivnog otpora R (LVNR) i idealizirane, linearne, vremenski

nepromjenljive električne zavojnice induktivnosti L (LVNL), u uslovima kada se takav spoj izloži djelovanju idealnog naponskog izvora, sinusoidalnog napona $u(t)$.

Na *Slici 2.13*, shematski je prikazan električni krug, u kojem je potrošač, iskazan kao serijski spoj LVNR aktivnog otpornika i LVNL zavojnice, izložen djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u)$.

Ako se s $i(t)$ označi električna struja, koja se upostavlja u električnom krugu sa *Slike 2.13*, a s $u_L(t)$ i $u_R(t)$, padovi napona, koji nastaju na LVNL zavojnici, odnosno na LVNR aktivnom otporniku, zbog prolaska struje $i(t)$, tada jednačine dinamičke ravnoteže, koje važe u svakom trenutku t , za predočenu električnu shemu (one proizilaze iz II Kirchhoffovog zakona) glase:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t); \quad u_R(t) = Ri(t); \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (2.40)$$



Slika 2.13 Električni krug, u kojem se potrošač, iskazan kao serijski spoj LVNR aktivnog otpornika i LVNL zavojnice, izlaže djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona

Na osnovu relacija (2.40) i izraza za promjenu napona $u(t)$, može se formirati i jednačina:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.41)$$

koja, u skladu s Teorijom diferencijalnih jednačina, pripada klasi linearnih nehomogenih diferencijalnih jednačina I reda, s konstantnim koeficijentima. Uz uvažavanje početnog uslova: $i(0) = 0$, lako se pokazuje da je rješenje jednačine (2.41) električna struja $i(t)$, koja ima slijedeći oblik vlastite promjene:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \varphi_L) - I_m \cdot \sin(\theta_u - \varphi_L) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (2.42)$$

Nije teško primjetiti da se električna struja $i(t)$, praktično sastoji od dvije komponente, odnosno da se može pisati:

$$i(t) = i_S(t) + i_P(t).$$

Pri tome je komponenta: $i_S(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \varphi_L)$, ona električna struja koja se javlja i održava tokom ustaljenog, dakle stacionarnog radnog režima analiziranog električnog kruga, dok se komponenta: $i_P(t) = -I_m \cdot \sin(\theta_u - \varphi_L) \cdot e^{-(R/L) \cdot t}$ pojavljuje samo u trenucima uspostavljanja analizirane električne struje $i(t)$, te traje kraće ili duže vrijeme. S obzirom da struja $i_P(t)$, nakon nekog vremena iščezava, ona se u elektrotehnici i označava kao struja prelaznog radnog režima analiziranog kruga.

Saglasno s Teorijom diferencijalnih jednačina, električna struja $i(t)$ predstavlja ono partikularno rješenje diferencijalne jednačine (2.41), koje se dobije iz opšteg rješenja te diferencijalne jednačine, kada se uvažava navedeni početni uslov: $i(0) = 0$ (opšte rješenje bilo koje nehomogene diferencijalne jednačine jednako je zbiru opšteg rješenja, koje je utvrđeno za homogeni dio analizirane jednačine (u predmetnom slučaju to je komponenta: $i_P(t)$) i bilo kojeg partikularnog rješenja cjelokupne, nehomogene diferencijalne jednačine (u predmetnom slučaju to je komponenta $i_S(t)$).

Veličine, korištene u prethodnim relacijama poglavlja 2.5, definirane su slijedećim izrazima:

$$I_m = \frac{U_m}{Z_L}; \quad Z_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi_L = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

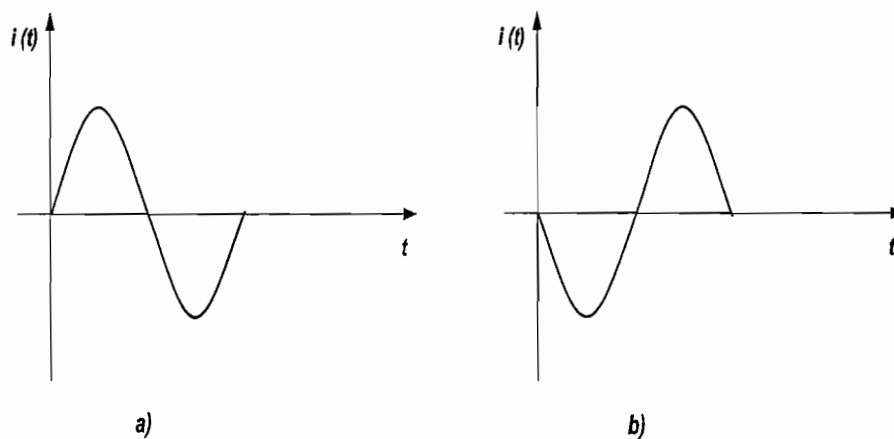
Simbolom I_m , označena je maksimalna vrijednost električne struje stacionarnog stanja, koja se uspostavlja u električnom krugu čija je shema prikazana na slici 2.13.

Simbolom Z_L , označena je ukupna električna otpornost analiziranog **R-L** električnog kruga, kojoj se vrlo često pridružuje i znatno kraći naziv – **induktivna impedansa**.

Ugao φ_L , iskazuje fazni pomjeraj struje $i(t)$, u odnosu na električni napon $u(t)$ i zajedno s uglom θ_u značajno utiče na tok uspostavljanja električne struje $i(t)$ u električnom krugu čija je shema prikazana na **Slici 2.13**.

1. Ukoliko je ugao Θ , određen relacijom: $\Theta = (\theta_u - \varphi_L)$, jednak nula radijana, ili je pak taj ugao Θ , takav da vrijedi relacija: $\Theta = \pm \pi$ radijana, tada je komponenta $i_p(t)$ (kojom se opisuje struja prelaznog režima, unutar izraza za električnu struju $i(t)$) jednaka nuli u bilo kojem trenutku vremena t , pa se prema grafičkim prikazima sa **Slike 2.14**, odmah uspostavlja stacionarni režim električne struje, jer vrijede odnosi:

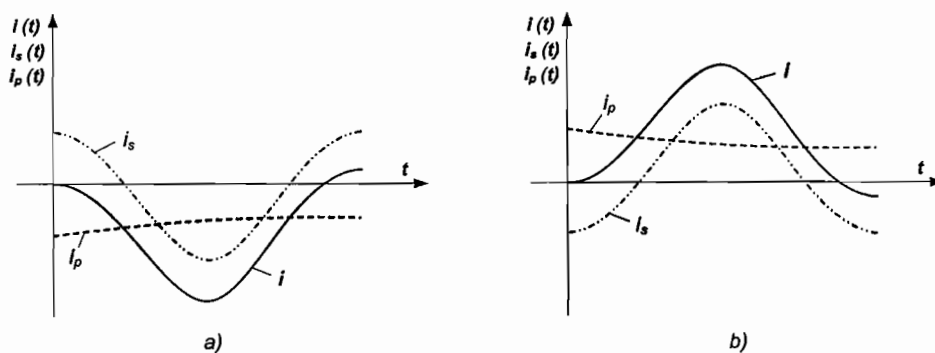
$$i(t) = i_s(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_u - \varphi_L) = I_m \sin(\omega t + \Theta).$$



Slika 2.14 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električne struje, $i(t)$, u uslovima kada je: a) $\Theta = 0$ radijana; b) $\Theta = \pm \pi$ radijana.

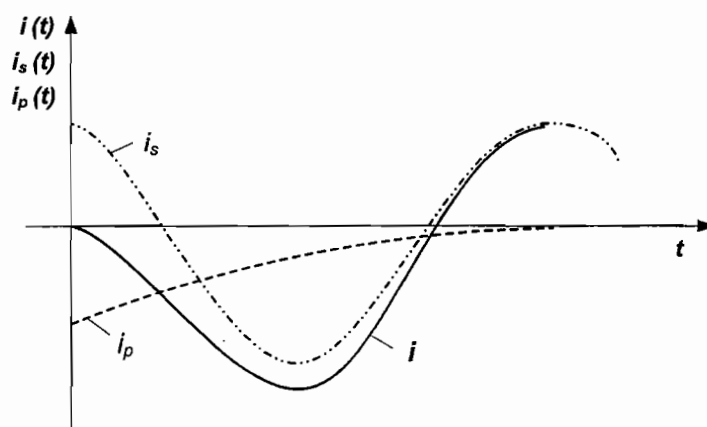
2. Ukoliko je ugao Θ , određen relacijom $\Theta = (\theta_u - \varphi_L)$, takav da važi relacija: $\Theta = (\pi / 2)$ radijana, ili je pak ugao Θ , takav da vrijedi relacija: $\Theta = -(\pi / 2)$ radijana, tada je komponenta $i_p(t)$ (kojom se opisuje struja prelaznog režima, unutar integralnog izraza za električnu struju $i(t)$) maksimalno izražena, pa u nekom trenutku vremena t , koji se desi prije uspostavljanja stacionarnog režima električne struje $i(t)$, prema grafičkim prikazima sa **Slike 2.15**, ona može i vrlo značajno povećati iznos amplitude ukupne struje $i(t)$. U ovom slučaju promjena struje $i(t)$ opisana je relacijom:

$$i(t) = I_m \cdot \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \pm (-I_m) \cdot e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}.$$



Slika 2.15 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električne struje, $i(t)$, u uslovima kada je: a) $\Theta = (\pi/2)$ radijana, odnosno kada je: b) $\Theta = -(\pi/2)$ radijana.

Na **Slici 2.16** je dat grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električne struje, $i(t)$, u uslovima kada fazni stav Θ ima neku vrijednost, koja nije jednaka graničnim vrijednostima prikazanim ranije na **Slikama 2.14** i **2.15**.



Slika 2.16 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električne struje, $i(t)$, u uslovima kada je fazni stav Θ takav da vrijedi $\Theta \neq 0, \pm(\pi/2), \pm(\pi)$ radijana.

Trenutna električna snaga $p(t)$, koju angažuje realna zavojnica, u analiziranom električnom krugu sa **Slike 2.13**, određuje se pomoću relacije:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = [(u_L(t) + u_R(t))] \cdot i(t). \quad (2.43)$$

Uobičajeno je analizirati trenutnu električnu snagu $p(t)$, u uslovima kada se uspostavila stacionarna vrijednost struje $i(t)$.

U skladu s ovim ograničenjem i uz uvažavanje ranije utvrđenih relacija: da je električni napon $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$, a električna struja $i(t) = (U_m/Z_L) \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \varphi_L)$, moguće je uspostaviti novu relaciju za trenutnu vrijednost električne snage $p(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u) \cdot I_m \sin(\omega t + \theta_u - \varphi_L) = \\ &= U_m^2 \frac{1}{2 Z_L} \cdot \{\cos \varphi_L - \cos [2 \cdot (\omega t + \theta_u) - \varphi_L]\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Izraz za trenutnu električnu snagu, angažovanu od strane realne zavojnice pokazuje da ta snaga ima dvije komponente: jednu koja nije funkcija vremena i drugu koja je harmonijska funkcija vremena. Ta druga komponenta je pri tome i harmonijska funkcija vremena s dvostruko većom frekvencijom nego napon naponskog izvora, ili uspostavljena struja $i(t)$ u analiziranom kolu.

Srednja vrijednost trenutne električne snage $p(t)$, određena je relacijom:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = U_m^2 \frac{1}{2 Z_L} \cos \varphi_L, \quad (2.45)$$

i određuje onaj dio električne snage, angažovane pomoću realne zavojnice, koji se nepovratno transformiše u toplotu, po osnovu Jouleovih gubitaka na aktivnom otporu R . Takva snaga se naziva i aktivnom električnom snagom, a formalno se označava simbolom P .

Ukoliko se umjesto maksimalnih vrijednosti napona U_m i električne struje $I_m = (U_m / Z_L)$, uvedu efektivne vrijednosti istog napona (U) i iste struje (I), pri čemu vrijedi da je: $U_m = (2)^{1/2}U$, $I_m = (2)^{1/2}I$, tada se aktivna električna snaga P može izraziti i u obliku:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = P = UI \cos \varphi_L. \quad (2.46)$$

Druga komponenta trenutne vrijednosti električne snage izražene relacijom (2.44), koja je harmonijska funkcija vremena i to dvostruko veće frekvencije nego napon naponskog izvora, može se dodatno razložiti na dvije subkomponente:

- prvu subkomponentu $-UI \cos \varphi_L \cos [2 \cdot (\omega t + \theta_u)]$,
- drugu subkomponentu $-UI \sin \varphi_L \sin [2 \cdot (\omega t + \theta_u)]$.

Prva subkomponenta $-UI \cos \varphi_L \cos [2 \cdot (\omega t + \theta_u)]$ predstavlja dio trenutne snage, koji oscilira oko stalne vrijednosti $UI \cos \varphi_L$, odnosno oko aktivne snage P .

Druga subkomponenta je dio trenutne snage, čija je amplituda određena relacijom $-UI \sin \varphi_L$ i primarno označava snagu koja oscilira između naponskog izvora i induktivne komponente realne zavojnice. S obzirom da se ova električna snaga ne može konvertovati u koristan rad, nego samo služi za izgradnju ili razgradnju magnetnog polja zavojnice, ona ima prirodu reaktivne snage.

Ova reaktivna snaga se formalno označava simbolom Q_i , ukoliko se odnosi na induktivni element, a definisana je izrazom $-UI \sin \varphi_L$.

Reaktivna snaga Q_i i aktivna snaga P , zajedno određuju prividnu snagu S , na koju uvijek mora biti dimenzioniran naponski izvor u električnom krugu sa *Slike 2.13*:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_i^2} . \quad (2.47)$$

Jedinica mjere za aktivnu električnu snagu je W (Watt), za reaktivnu električnu snagu jedinica mjere je VAR (volt-amper reaktivni), dok se prividna električna snaga izražava u VA (volt-amper)

Električna energija, angažovana tokom vremenskog intervala $(0, t)$, određena je relacijom:

$$W = \int_0^t p(t) \cdot dt , \quad (2.48)$$

dakle, funkcionalno gledano na isti način kao što je to iskazano u relacijama (2.23), (2.32) i (2.39) tokom analiziranja LVNR otpornika, LVNL zavojnice, te LVNC respektivno.

2.6 Realni električni kondenzator kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona

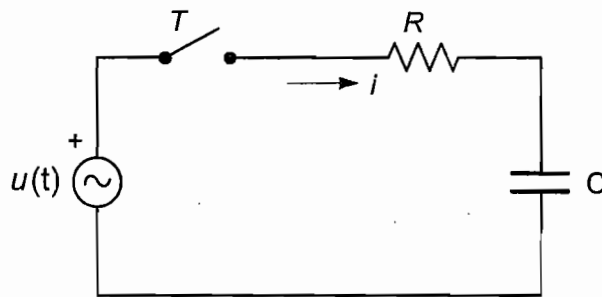
Ponašanje realnog kondenzatora kapacitivnosti C, kada se nađe u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$, može se dovoljno dobro predstaviti na osnovu razmatranja serijskog spoja linearnog, vremenski nepromjenljivog, aktivnog otpora R LVNR i idealiziranog, linearnog, vremenski nepromjenljivog električnog kondenzatora kapacitivnosti C LVNC,

kada se takav spoj izloži djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona $u(t)$.

Na *Slici 2.17*, shematski je prikazan električni krug, u kojem je potrošač, iskazan kao serijski spoj LVNR aktivnog otpornika i LVNC kondenzatora, izložen djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$.

Ako se s $i(t)$ označi električna struja, koja se upostavlja u električnom krugu sa *Slike 2.17*, a s $u_C(t)$ i $u_R(t)$, padovi napona, koji nastaje na LVNC kondenzatoru, odnosno na LVNR aktivnom otporniku, zbog prolaska te iste struje $i(t)$, tada jednačine dinamičke ravnoteže koje važe u svakom trenutku t , za predočenu električnu shemu (one proizilaze iz II Kirchhoffovog zakona) glase:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t); \quad u_R(t) = Ri(t); \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (2.49)$$



Slika 2.17 Električni krug, u kojem se potrošač, iskazan kao serijski spoj LVNR aktivnog otpornika i LVNC kondenzatora, izlaže djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona.

Na osnovu relacija (2.49) i izraza za promjenu napona $u(t)$, može se formirati i jednačina:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u) = u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (2.50)$$

koja, u skladu s Teorijom diferencijalnih jednačina, pripada klasi linearnih nehomogenih diferencijalnih jednačina I reda s konstantnim koeficijentima.

Uz uvažavanje početnog uslova: $u_C(0) = 0$, dakle pretpostavke da LVNC kondenzator, u trenutku priključenja analiziranog realnog

kondenzatora na odabrani naponski izvor, nije raspolagao s električnim nabojem na svojim elektrodama, lako se pokazuje da je rješenje jednačine (2.50), onaj električni napon na LVNC kondenzatoru, koji ima slijedeći oblik vlastite promjene:

$$u_c(t) = -U_{cm} \cos(\omega t + \theta_u - \varphi_c) + U_{cm} \cos(\theta_u - \varphi_c) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (2.51)$$

Nije teško primjetiti da se električni napon $u_c(t)$ praktično sastoji od dvije komponente, odnosno da se može pisati: $u_c(t) = u_{cs}(t) + u_{cp}(t)$.

Pri tome je komponenta: $u_{cs}(t) = -U_{cm} \cos(\omega t + \theta_u - \varphi_c)$ onaj električni napon koji se javlja i održava tokom ustaljenog, dakle stacionarnog režima rada analiziranog kruga, dok se komponenta: $u_{cp}(t) = U_{cm} \cos(\theta_u - \varphi_c) \cdot e^{-(1/RC) \cdot t}$ pojavljuje samo u trenucima uspostavljanja analiziranog električnog napona $u_c(t)$, te traje kraće ili duže vrijeme.

S obzirom da električni napon $u_{cp}(t)$, obavezno, nakon nekog vremena, iščezava, on se u elektrotehnici i označava kao napon prelaznog režima za LVNC kondenzator, u radu analiziranog kruga.

Veličine korištene u prethodnim relacijama poglavlja 2.6, definisane su slijedećim izrazima:

$$U_{cm} = \frac{U_m}{\omega C Z_C}; \quad Z_C = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$\varphi_c = -\arctg \frac{1}{\omega CR}.$$

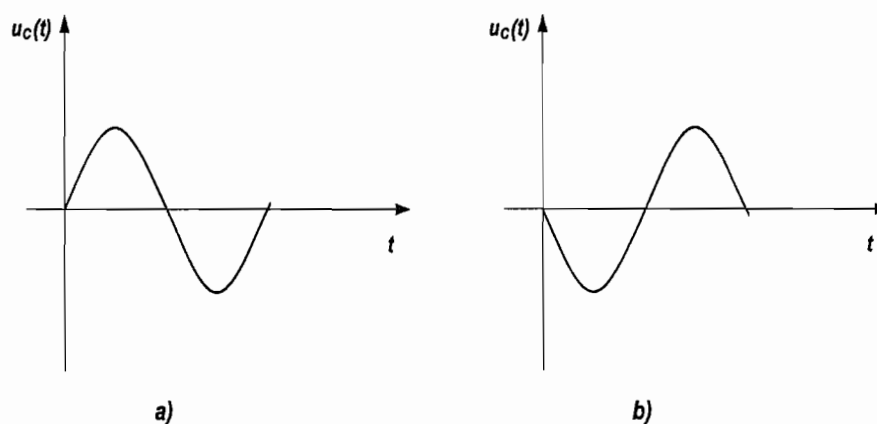
Simbol U_{cm} je pridružen maksimalnoj vrijednosti električnog napona $u_c(t)$ i to tokom njegovog ustaljenog radnog režima.

Simbolom Z_C , označena je ukupna električna otpornost analiziranog R-C električnog kruga, kojoj se vrlo često pridružuje i znatno kraći naziv – **kapacitivna impedansa**.

Ugao φ_c , iskazuje fazni pomjeraj struje $i(t)$, u odnosu na električni napon $u(t)$ i zajedno s uglom θ_u značajno utiče na tok uspostavljanja električnog napona $u_c(t)$ u električnom krugu, čija je shema prikazana na *Slici 2.17*.

- 1 Ukoliko je ugao Θ , određen relacijom: $\Theta = (\theta_u - \varphi_C)$, takav da ima vrijednost: $\Theta = \pm (\pi/2)$ radijana, tada je komponenta $u_{CP}(t)$ (kojom se opisuje napon na kondenzatoru u prelaznom režimu, unutar izraza za električni napon $u_C(t)$) jednaka nuli, u bilo kojem trenutku vremena t , pa se prema grafičkim prikazima sa **Slike 2.18** odmah uspostavlja stacionarni režim električnog napona $u_C(t)$, jer vrijede odnosi:

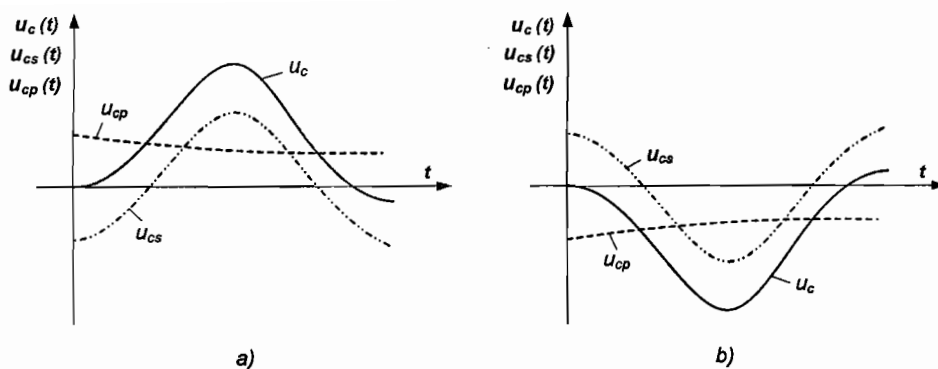
$$u_C(t) = u_{CS}(t) = -U_{Cm} \cos(\omega t + \theta_u - \varphi_C).$$



Slika 2.18 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električnog napona, $u_C(t)$, u uslovima kada je: a) $\Theta = (\pi/2)$ radijana; b) $\Theta = -(\pi/2)$ radijana.

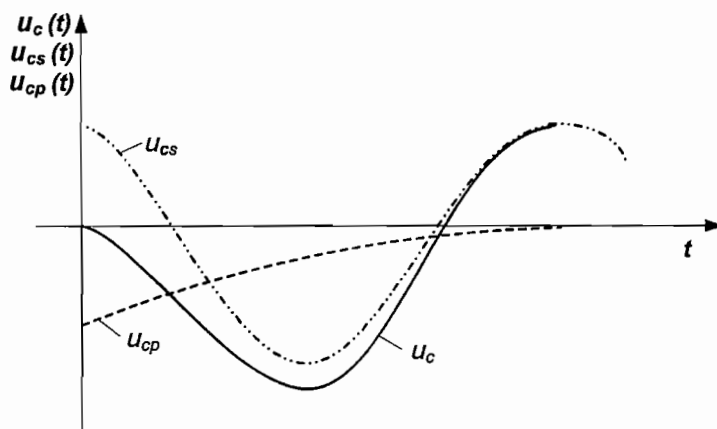
- 2 Ukoliko je ugao Θ , određen relacijom: $\Theta = (\theta_u - \varphi_C)$, takav da važi relacija: $\Theta = 0$ radijana, ili je pak ugao Θ , takav da vrijedi relacija: $\Theta = \pm (\pi)$ radijana, tada je komponenta $u_{CP}(t)$ (kojom se opisuje napon prelaznog režima na kondenzatoru, unutar integralnog izraza za električni napon $u_C(t)$) maksimalno izražena, pa u nekom trenutku vremena t , koji se desi prije uspostavljanja stacionarnog režima električnog napona $u_C(t)$, prema grafičkim prikazima sa **Slike 2.19**, ona može i vrlo značajno povećati iznos amplitude ukupnog napona $u_C(t)$. U ovom slučaju promjena napona $u_C(t)$ opisana je relacijom:

$$u_C(t) = \mp U_{Cm} \cdot \cos \omega t \pm U_{Cm} e^{-\frac{1}{RC} t}.$$



Slika 2.19 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električnog napona, $u_c(t)$, u uslovima kada je: a) $\Theta = 0$ radijana, odnosno kada je: b) $\Theta = \pm \pi$ radijana.

Na **Slici 2.20** je dat grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električnog napona $u_c(t)$, u uslovima kada fazni stav Θ , ima neku vrijednost koja nije jednaka ranije analiziranim graničnim vrijednostima ($0, \pm(\pi/2), \pm \pi$).



Slika 2.20 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električnog napona, $u_c(t)$, u uslovima kada je fazni stav Θ takav da vrijedi relacija $\Theta \neq 0, \pm(\pi/2), \pm(\pi)$.

Trenutna električna snaga $p(t)$, koju angažuje realni kondenzator u analiziranom električnom krugu sa **Slike 2.17**, određuje se pomoću relacije:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = (u_c(t) + u_R(t)) \cdot i(t). \quad (2.52)$$

Uobičajeno je analizirati trenutnu električnu snagu $p(t)$, u uslovima kada su se uspostavile stacionarna vrijednosti električnog napona $u(t)$ i električne struje $i(t)$.

U skladu s ovim ograničenjem i uz uvažavanje ranije utvrđenih relacija: da je električni napon $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$, a električna struja $i(t) = (U_m/Z_C) \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \varphi_C)$, moguće je uspostaviti novu relaciju za trenutnu vrijednost električne snage, $p(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \theta_u) \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \varphi_C) = \\ &= U_m^2 \frac{1}{2 Z_C} \cdot (\cos \varphi_C - \cos(2 \cdot (\omega t + \theta_u) - \varphi_C)). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Izraz za trenutnu električnu snagu, angažovanu od strane realnog kondenzatora, pokazuje, prema relaciji (2.53), da ta snaga ima dvije komponente: jednu koja nije funkcija vremena, i drugu koja je harmonijska funkcija vremena i to dvostruko veće frekvencije nego napon naponskog izvora ili uspostavljena struja $i(t)$.

Srednja vrijednost trenutne električne snage $p(t)$, određena je relacijom:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{U_m^2}{2 Z_C} \cdot \cos \varphi_C, \quad (2.54)$$

i određuje onaj dio električne snage, angažovane pomoću realnog kondenzatora, koji se nepovratno transformiše u toplotu, po osnovu Jouleovih gubitaka na aktivnom otporu R . Takva snaga, naziva se i aktivnom električnom snagom i formalno označava simbolom P .

Ukoliko se umjesto maksimalnih vrijednosti napona U_m i električne struje $I_m = (U_m/Z_C)$, uvedu efektivne vrijednosti istog napona (U) i iste struje (I), ($U_m = (2)^{1/2} U$), tada se aktivna električna snaga P može izraziti i u obliku:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = P = (U \cdot I) \cdot \cos \varphi_C \quad (2.55)$$

Druga komponenta trenutne vrijednosti električne snage izražene sa relacijom (2.53), koja je harmonijska funkcija vremena i to dvostruko veće frekvencije nego napon naponskog izvora, ili pak uspostavljena struja $i(t)$, može se razviti na dvije subkomponente:

- prvu subkomponentu $-UI \cos \varphi_c \cdot \cos [2 \cdot (\omega t + \theta_u)]$
- drugu subkomponentu $-UI \sin \varphi_c \cdot \sin [2 \cdot (\omega t + \theta_u)]$

Prva subkomponenta $-UI \cos \varphi_c \cdot \cos [2 \cdot (\omega t + \theta_u)]$ predstavlja onaj dio trenutne snage $p(t)$, koji oscilira oko stalne vrijednosti $U \cdot I \cos \varphi_c$, odnosno oko aktivne snage P .

Druga subkomponenta $-UI \sin \varphi_c \cdot \sin [2 \cdot (\omega t + \theta_u)]$ je onaj dio trenutne snage $p(t)$, čija je amplituda određena relacijom $-UI \sin \varphi_c$ i primarno označava snagu koja oscilira između naponskog izvora i kapacitivne komponente realnog kondenzatora. S obzirom da se ova električna snaga ne može konvertovati u koristan rad, nego samo služi za izgradnju, ili razgradnju elektrostatskog polja prisutnog kondenzatora, ona ima prirodu reaktivne snage.

Formalno se označava simbolom $Q_C = -UI \sin \varphi_c$, jasno kada se odnosi na kapacitivni element.

Zbog ograničenja $(-\pi/2) < \varphi_c < 0$, reaktivna snaga Q_C ima suprotan znak u odnosu na reaktivnu snagu Q_i .

Reaktivna snaga Q_C i aktivna snaga P , zajedno, po osnovu relacije (2.56), određuju prividnu snagu S , na koju mora biti uvijek dimenzioniran naponski izvor u električnom krugu sa *Slike 2.17*:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_C^2} \quad (2.56)$$

Kao što je već ranije naglašeno jedinica mjere za aktivnu električnu snagu je W (Watt), za reaktivnu električnu snagu Q_C jedinica mjere je VAR (volt-amper reaktivni), dok se prividna električna snaga izražava u VA (volt-amper)

Vrijednost električne energije, angažovane tokom vremenskog intervala $(0, t)$, i kod realnog LVNC kondenzatora definisana je funkcionalno gledano na isti način kao što je to iskazano u relacijama (2.23), (2.32), (2.39) i (2.48) uspostavljenim tokom analiziranja idealnog LVNR aktivnog otpornika, idealne LVNL zavojnice, idealnog LVNC kondenzatora i realne LVNL zavojnice, respektivno, dakle relacijom:

$$W = \int_0^t p(t) dt \quad (2.57)$$

2.7 Serijski spoj aktivnog električnog otpora otpornosti R , električne zavojnice induktivnosti L i električnog kondenzatora kapacitivnosti C u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona

Ponašanje serijskog spoja realna zavojnica induktivnosti L i realnog kondenzatora električne kapacitivnosti C , kada se isti nađu u električnom krugu s naponskim izvorom prostoperiodičnog napona $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$, može se dovoljno dobro predstaviti na osnovu razmatranja serijskog spoja, idealiziranog, linearnog, vremenski nepromjenljivog aktivnog otpora R (LVNR), idealizirane, linearne, vremenski nepromjenljive električne zavojnice induktivnosti L (LVNL) i idealiziranog, linearnog, vremenski nepromjenljivog električnog kondenzatora kapacitivnosti C (LVNC), podvrgnutog djelovanju idealnog naponskog izvora, sa sinusoidalnog napona $u(t)$.

Na *Slici 2.21*, shematski je prikazan električni krug, u kojem je upravo potrošač, iskazan kao serijski spoj LVNR aktivnog otpornika, LVNL zavojnice i LVNC kondenzatora, izložen djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona $u(t)$.

Ako se s $i(t)$ označi električna struja, koja se upostavlja u električnom krugu sa *Slike 2.21*, a s $u_R(t)$, $u_L(t)$ i $u_C(t)$, padovi napona, koji nastaju zbog prolaska struje na LVNR aktivnom otporniku, LVNL zavojnici, odnosno na LVNC kondenzatoru, jednačine dinamičke ravnoteže, koje važe u svakom trenutku t , za predočenu električnu šemu (one proizilaze iz II Kirchhoffovog zakona) glase:

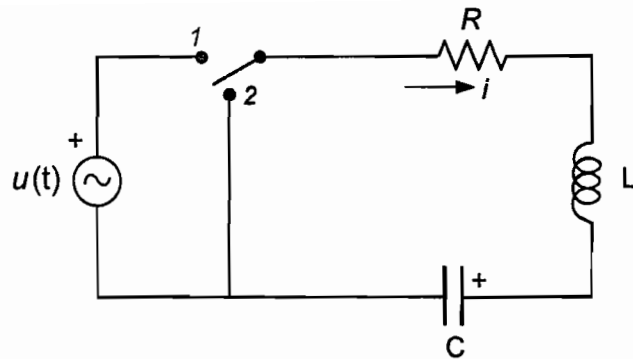
$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t);$$

$$u_R(t) = R i(t); \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad u_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (2.58)$$

Na osnovu relacije (2.58), može se formirati i jednačina:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + A \quad (2.59)$$

u kojoj je s A označena konstanta, čiju vrijednost određuje familija primitivnih funkcija, koja se dobija u okviru proračuna pada napona $u_C(t)$, pomoću relacije: $i(t) = C \cdot [du_C(t)/dt]$.



Slika 2.21 Električni krug, u kojem se potrošač, iskazan kao serijski spoj *LVNR* aktivnog otpornika, *LVNL* zavojnice i *LVNC* kondenzatora, izlaže djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona.

Nakon diferenciranja integralno-diferencijalne jednačine (2.59), lako se formira i relacija:

$$U_m \cdot \omega C \cdot \cos(\omega t + \theta_u) = RC \frac{di(t)}{dt} + LC \frac{d^2i(t)}{dt^2} + i(t), \quad (2.60)$$

koja u skladu s Teorijom diferencijalnih jednačina pripada klasi linearnih, nehomogenih, diferencijalnih jednačina II reda, sa konstantnim koeficijentima. Uz uvažavanje, početnih uslova: $i(0) = 0$ i $u_C(0) = 0$, nakon provođenja odgovarajućeg postupka rješavanja, može se pokazati da je rješenje jednačine (2.60), upravo ona električna struja, $i(t)$, koja u vremenskom domenu ima slijedeći oblik:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_u - \varphi) - \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sin \alpha} \cdot \left[\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot U_{mC} \cos(\theta_u - \varphi) \sin \omega_s t - I_m \sin(\theta_u - \varphi) \sin(\omega_s t - \alpha) \right] \quad (2.61)$$

Nije teško primjetiti da se električna struja $i(t)$, praktično sastoji od dvije komponente, odnosno da se može pisati: $i(t) = i_S(t) + i_P(t)$.

Pri tome je komponenta: $i_S(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_u - \varphi)$, ona električna struja koja se javlja i održava tokom ustaljenog (stacionarnog) režima rada analiziranog kruga, dok se komponenta $i_P(t)$:

$$i_P(t) = \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sin\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left[\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot U_{mC} \cos(\theta_u - \varphi) \sin\omega_s t - I_m \sin(\theta_u - \varphi) \sin(\omega_s t - \alpha) \right],$$

pojavljuje samo u trenucima uspostavljanja analizirane električne struje $i(t)$ i traje kraće ili duže vrijeme. S obzirom da struja $i_P(t)$, obavezno, nakon nekog vremena iščezava, ona se u elektrotehnici označava kao struja prelaznog režima u radu analiziranog kruga.

Oznake, koje su korištene u prethodnim relacijama pri definisanju struja $i_S(t)$ i $i_P(t)$, imaju slijedeća značenja:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}; \quad Z = R^2 + \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R};$$

$$\sin\alpha = \omega_s \sqrt{LC}; \quad \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2};$$

$$U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C}.$$

Saglasno Teoriji diferencijalnih jednačina, proizilazi da električna struja $i(t)$ predstavlja ono partikularno rješenje diferencijalne jednačine (2.60), koje se dobije iz opšteg rješenja te diferencijalne jednačine, kada se uvažavaju navedeni početni uslovi: $i(0) = 0$ i $u_C(0) = 0$.

Pri određivanju početnih uslova za tražene promjenljive veličine, tokom rješavanja diferencijalnih jednačina, generalno treba uvažavati slijedeće relacije:

$$i(t) = i_P(t) + i_S(t); \quad u_C(t) = u_{CP}(t) + u_{CS}(t). \quad (2.62)$$

Veličine U_{C0} i I_0 , koje za slobodni režim predstavljaju nezavisne početne uslove, imaju u predmetnom postupku, ulogu početnih uslova slobodnog režima, pri čemu njihovi iznosi zavise od stvarnih nezavisnih početnih uslova, u svakom konkretnom slučaju. Oni se određuju tako, da budu zadovoljeni nezavisni početni uslovi analiziranog konkretnog slučaja, ali i odnosi iskazani relacijom (2.62), i to u trenutku $t = 0_+$:

$$U_{C0} = u_{CP}(0_+) = u_C(0) - u_{CS}(0_+);$$

$$I_0 = i_P(0_+) = i_P(0) - i_S(0_+). \quad (2.63)$$

Prema posljednjoj relaciji, ukoliko je: $i(0) = 0$, zbog $i_S(0) = I_m \sin(\theta_u - \varphi)$, struja I_0 mora imati vrijednost: $I_0 = -I_m \sin(\theta_u - \varphi)$.

Koristeći se odnosima iskazanim relacijom (2.58), uz pomoć relacije (2.61), moguće je doći do izraza koji opisuje vremenski tok promjene napona $u_C(t)$ u električnom krugu sa *Slike 2.21*:

$$u_C(t) = -U_{mC} \cos(\omega t + \theta_u - \varphi) + \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sin \alpha} \cdot \left[U_{mC} \cos(\theta_u - \varphi) \sin(\omega_s t + \alpha) - I_m \sin(\theta_u - \varphi) \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \omega_s \right] \quad (2.64)$$

Nakon uvažavanja početnog uslova: $u_C(0) = 0$, ali i podatka da prema (2.64) vrijedi: $u_{CS}(0_+) = -U_{mC} \cos(\theta_u - \varphi)$, za napon U_{C0} se dobija relacija:

$$U_{C0} = u_{CP}(0_+) = u_C(0) - u_{CS}(0_+) = U_{mC} \cos(\theta_u - \varphi).$$

Veličina definisana relacijom:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

predstavlja ukupnu električnu otpornost analiziranog serijskog **RLC** električnog kruga, kojoj se vrlo često pridružuje i znatno kraći naziv – **impedansa serijskog R-L-C električnog kruga**.

Ugao:

$$\varphi = \arctg \frac{(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C})}{R},$$

iskazuje fazni pomjeraj struje $i(t)$ u odnosu na električni napon $u(t)$ i zajedno s uglom θ_u , značajno utiče na tok uspostavljanja električne struje $i(t)$ u električnom krugu čija je shema prikazana na **Slici 2.21**. Tokom analize uticaja faznog stava električne struje $i(t)$, dakle ugla: $\Theta = \theta_u - \varphi$, na tok uspostavljanja te iste električne struje $i(t)$ i električnog napona $u_C(t)$, potrebno je posebnu pažnju obratiti na slijedeće slučajeve:

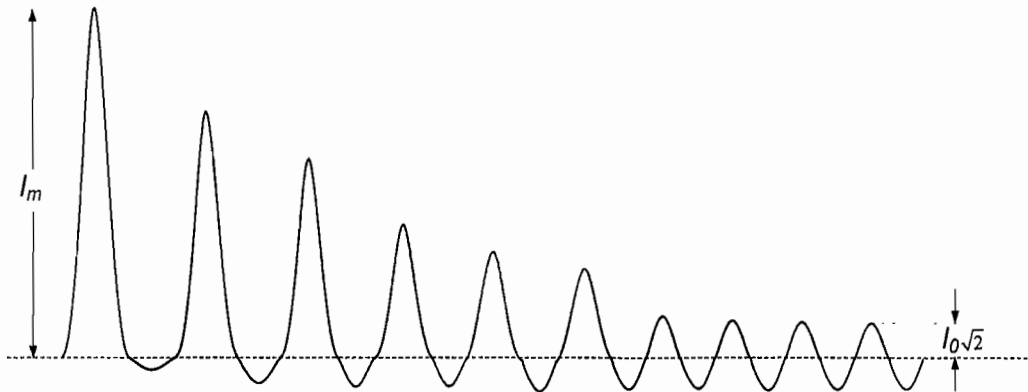
1. Ukoliko ugao Θ , određen relacijom: $\Theta = \theta_u - \varphi$ takav da vrijedi relacija: $\Theta = 0_+$ ili $\Theta = \pi_+$ radijana, tada se vremenske promjene električne struje $i(t)$ i električnog napona $u_C(t)$, analitički opisana slijedećim izrazima:

$$\begin{aligned} i(t) &= \pm I_m \sin \omega t - \left(\pm \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sin \alpha} \right) \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot U_{mc} \sin \omega_S t = \\ &= \pm I_m \sin \omega t - \left(\pm \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{(\sin \alpha)^2} \right) \cdot \frac{\omega_S}{\omega} \cdot I_m \sin \omega_S t ; \end{aligned}$$

$$u_C(t) = -(\pm U_{mc} \cos \omega t) \pm \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sin \alpha} \cdot [U_{mc} \sin(\omega_S t + \alpha)].$$

S obzirom da kod nekih energetske uređaja (transformatora, asinhronih motora...) važe relacije: $\sin \alpha \approx 1$; ($\omega_s \gg \omega$), neposredno nakon trenutka njihovog uključivanja na izvor električne energije, amplituda električne struje, koju oni povlače iz izvora, može višestruko premašiti nominalnu vrijednost amplitude struje stacionarnog stanja (tako pri uključenju asinhronog motora, udarna struja uključenja, može dostići čak i 7-8 puta veću vrijednost u odnosu na vrijednost, nominalne amplitude struje stacionarnog stanja; slično tome pri uključenju neopterećenih energetske transformatora, udarna struja njihovog uključenja, može dosegnuti čak i vrijednosti, koje su 50-100 puta veće, od amplitude struje praznog hoda u stacionarnom stanju – pogledati **Sliku 2.22**. Električni napon na LVNC kondenzatoru, prema prethodno

navedenom izrazu, može doseći i dvostruku vrijednost u odnosu na U_{mC} .



Slika 2.22 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električne struje praznog hoda energetskog transformatora u uslovima kada je udarna struja uključjenja jako izražena

2. Ukoliko je ugao Θ , određen relacijom: $\Theta = \theta_u - \varphi$, upravo takav, da važi relacija: $\Theta = \pm \pi/2$ radijana, tada je komponenta $i_p(t)$ (koja opisuje struju prelaznog režima, unutar integralnog izraza za električnu struju $i(t)$) ponovo prisutna u izrazu za ukupnu električnu struju, koja se registruje neposredno nakon trenutka pomenutog uključjenja na izvor električne energije, pa u nekom trenutku vremena t , koji se desi prije uspostavljanja stacionarnog režima električna struja $i(t)$, prema relaciji koja slijedi može dostići i dvostruku vrijednost amplitude I_m :

$$i(t) = \pm I_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \pm (-I_m) \cdot \frac{e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin(\omega_s t - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

U ovakvim okolnostima, električni napon na LVNC kondenzatoru $u_C(t)$ mijenja se tokom vremena, u skladu s funkcionalnom vezom koja slijedi:

$$u_C(t) = \pm U_{mC} \cdot \sin \omega t - \left(\pm e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \frac{\omega_s}{\omega} \cdot U_{mC} \cdot \sin \omega_s t \right).$$

Zbog već ranije uočenog odnosa $\omega_s \gg \omega$, električni napon na LVNC kondenzatoru $u_C(t)$, u ovakvim uslovima, može i značajnije premašiti amplitudu U_{mC} .

3. U posebnom slučaju, kada R ima malu vrijednost, dakle kada vrijedi $R \rightarrow 0$, tada važe i relacije:

$$\omega_s \gg \frac{R}{2L} \quad \text{i} \quad \omega_s \approx \omega ,$$

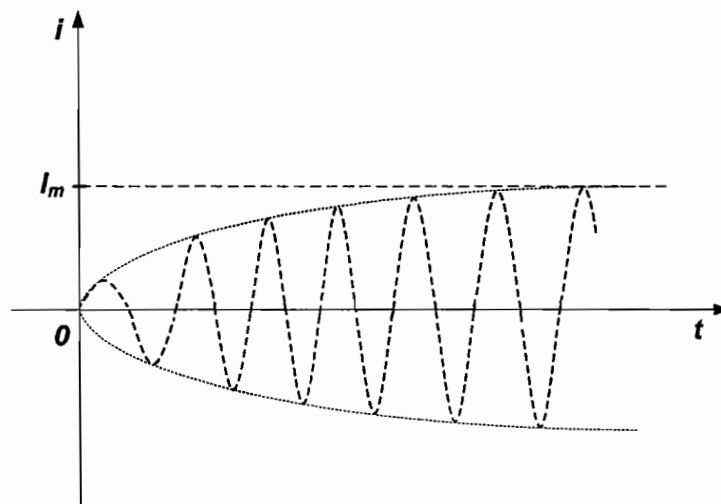
pa je promjena struje $i(t)$, opisana relacijom:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \varphi) - I_m \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \sin(\omega t + \theta_u - \varphi) .$$

Opisana promjena struje je grafički interpretirana na *Slici 2.23*.

Uspostavljanje električne struje $i(t)$, sada se očigledno, odvija vrlo lagano, s postepenim porastom amplitude, koja će tek nakon okončanja prelaznog procesa doći do nominalne vrijednosti;

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} .$$



Slika 2.23 Grafički prikaz uspostavljanja stacionarnog režima električne struje $i(t)$, u uslovima kada $R \rightarrow 0$ i kada važe i relacije: $\omega_s \gg (R/2L)$, $\omega_s \approx \omega$

Trenutna električna snaga $p(t)$, koju angažuje potrošač, predstavljen kao serijski spoj **LVNR** aktivnog otpornika, **LVNL** zavojnice i **LVNC** kondenzatora, kada je izložen djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona određuje se pomoću relacije:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = [u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)] \cdot i(t). \quad (2.65)$$

Kao što je već i ranije naglašavano, električnu snagu $p(t)$ uobičajno je analizirati tek, kada se uspostavila stacionarna vrijednost struje $i(t)$ i napona $u(t)$.

U skladu s ovim ograničenjem i uz uvažavanje ranije utvrđenih relacija:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u), \quad i(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \theta_u - \varphi),$$

moguće je uspostaviti novu relaciju za trenutnu vrijednost električne snage $p(t)$, u obliku:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m I_m [\sin(\omega t + \theta_u)] \cdot [\sin(\omega t + \theta_u - \varphi)] = \\ &= (U_m)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot Z} \cdot [\cos \varphi - \cos[2 \cdot (\omega t + \theta_u) - \varphi]]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Izraz (2.66) za trenutni oblik električne snage, angažovane od strane serijskog spoja **LVNR** aktivnog otpornika, **LVNL** zavojnice i **LVNC** kondenzatora, kada je ovaj izložen djelovanju idealnog naponskog izvora, sinusoidalnog napona, prema relaciji (2.66), pokazuje, da ta snaga ima dvije komponente: jednu koja nije funkcija vremena i drugu koja je harmonijska funkcija vremena i to dvostruko veće frekvencije nego napon naponskog izvora $u(t)$, ili uspostavljena struja $i(t)$.

Srednja vrijednost trenutne električne snage $p(t)$, određena je relacijom:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = (U_m)^2 \cdot \frac{1}{2Z} \cdot \cos \varphi, \quad (2.67)$$

Snaga P_{sr} određuje onaj dio električne snage, angažovane od potrošača, predstavljenog serijskim spojem **LVNR** aktivnog otpornika, **LVNL** zavojnice i **LVNC** kondenzatora, kad je ovaj električni spoj izložen djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona, koji se nepovratno transformiše u toplotu, po osnovu Jouleovih gubitaka na

aktivnom otporu R . Takva snaga, naziva se i **aktivnom električnom snagom** i formalno označava simbolom P .

Ukoliko se umjesto maksimalnih vrijednosti napona U_m i električne struje $I_m = U_m / Z$, uvedu efektivne vrijednosti istog napona (U) i iste struje (I), pri čemu vrijede odnosi: $U_m = \sqrt{2}U$; $I_m = \sqrt{2}I$, tada se aktivna električna snaga P , može izraziti i u obliku:

$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = P = UI \cdot \cos\varphi, \quad (2.68)$$

Druga komponenta trenutne vrijednosti električne snage izražene sa relacijom (2.66), koja je harmonijska funkcija vremena dvostruko veće frekvencije nego napon naponskog izvora, ili uspostavljena struja $i(t)$, može se očigledno, razviti na dvije subkomponente:

- subkomponenta broj 1 je: $\left[-UI \cos\varphi \cdot \cos [2 \cdot (\omega t + \theta_u)] \right]$,
- subkomponenta broj 2 je: $\left[-UI \sin\varphi \cdot \sin [2 \cdot (\omega t + \theta_u)] \right]$.

Subkomponenta $\left[-UI \cos\varphi \cdot \cos [2 \cdot (\omega t + \theta_u)] \right]$, predstavlja onaj dio trenutne snage, $p(t)$, koji oscilira oko stalne vrijednosti: $UI \cos\varphi$, odnosno oko aktivne snage P .

Subkomponenta $\left[-UI \sin\varphi \cdot \sin [2 \cdot (\omega t + \theta_u)] \right]$, je onaj dio trenutne snage, čija je amplituda određena relacijom: $UI \sin\varphi$ i primarno označava snagu koja oscilira između naponskog izvora i reaktivnog električnog otpora:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

koji je sastavni dio ukupne impedanse Z , analiziranog serijskog R , L , C spoja. S obzirom da se ova električna snaga ne može konvertovati u koristan rad, nego služi samo za izgradnju ili razgradnju magnetnog polja zavojnice, odnosno električnog polja kondenzatora, ona očigledno ima prirodu **reaktivne snage**.

Takva električna snaga, formalno se označava simbolom $Q = - UI \sin\varphi$.

Obično se uvažava slijedeća konvencija: ukoliko je analizirani spoj potrošača, pretežno induktivan, odnosno ako vrijedi relacija:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) > 0,$$

tada za reaktivnu snagu važi: $Q < 0$.

Ukoliko je, analizirani spoj potrošača pretežno kapacitivan, odnosno ako vrijedi relacija:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) < 0,$$

tada za reaktivnu snagu važi: $Q > 0$.

Reaktivna snaga Q i aktivna snaga P , određuju **prividnu snagu** S , na koju mora biti dimenzioniran ispravno upotrijebljeni naponski izvor:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} . \quad (2.69)$$

U okviru prenosa električne energije na daljinu, nastoji se preko ispravno upotrijebljenog dalekovodnog prenosnog sistema prenositi što manji iznos reaktivne snage Q .

U okviru oblasti Racionalno korištenje električne energije, pokazuje se da generisanje reaktivne snage direktno na mjestu njene potrošnje, ima punu tehnoekonomsku opravdanost (Većina industrijskih potrošača, može se grubo aproksimirati kao električni krugovi **R-L** tipa. Stoga je potrebno, neposredno uz njih, instalirati baterije električnih kondenzatora, da bi se povećao faktor snage ($\cos \varphi$) novoformiranog sistema (baterija kondenzatora + električni krug **R-L** tipa), koji se spaja na napojnu električnu mrežu. Ovakav pristup se u tehničkoj literaturi označava kao kompenzacija reaktivne snage ili pak popravka faktora snage).

Iznos električne energije, angažovane tokom vremenskog intervala $(0, t)$, u slučaju potrošača, predstavljenog serijskim spojem **LVNR** aktivnog otpornika, **LVNL** zavojnice i **LVNC** kondenzatora, u uslovima kada je takav električni spoj izložen djelovanju idealnog naponskog izvora, sinusoidalnog napona, $u(t)$, određena je relacijom;

$$W = \int_0^t p(t) dt . \quad (2.70)$$

2.8 Predstavljanje prostoperiodičnih signala pomoću fazora

Ponašanje karakterističnih veličina (električnih napona i električnih struja) u linearnim električnim krugovima stalnih jednosmjernih struja i napona, u uslovima kada je u krugu uspostavljeno stacionarno stanje, opisuje se putem linearnih algebarskih jednačina, čija su rješenja po pravilu konstantne veličine.

S takvim veličinama, tada očigledno nije teško provesti sve potrebne elementarne algebarske operacije, bilo da one proizilaze iz primjene Kirchhoffovih zakona, ili su pak nametnute, upotrebom drugih metoda za rješavanje linearnih električnih krugova.

Međutim, i u takvim električnim krugovima, ukoliko se pristupi analizi prelaznih stanja, odnosno utvrđivanju zakonitosti po kojima se uspostavljaju ili pak iščezavaju električne struje i naponi u razmatranom krugu, odgovarajući analitički opis takvih procesa se mora oslanjati i na diferencijalne jednačine. To odmah navodi na zaključak, da proces dobijanja analitičkih izraza, koji određuju karakteristične veličine, u tim slučajevima nije više tako jednostavan, kao u uslovima stacionarnog stanja.

Kod razmatranja električnih krugova, unutar kojih se uspostavljaju prostoperiodične struje i naponi, na poteškoće se nailazi već i u uslovima sagledavanja stacionarnih stanja. Naime u ovim električnim krugovima svi izvori prostoperiodičnih struja i napona unutar jednog električnog kruga, moraju imati istu frekvenciju vlastitih promjena. Ali postoji mogućnost da amplitude struja i napona, kao i njihovi pripadajući fazni stavovi, mogu imati međusobno različite vrijednosti. Radi toga nije jednostavno ispuniti ni elementarni zahtjev, naprimjer da se izračuna vrijednost prostoperiodične struje, koju formiraju dvije, ili tri struje grana, što su vezane u zajedničko čvorište (navedeni primjeri posljedica su primjene I Kirchhoffovog zakona).

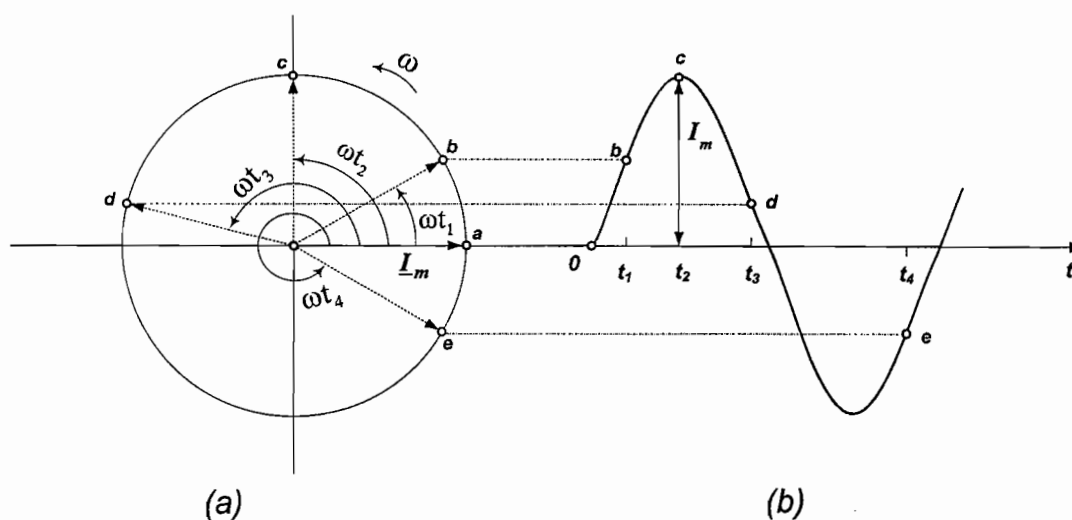
Ovakav problem značajno se može reducirati, ukoliko se tražena algebarska operacija, umjesto u vremenskom domenu (dakle direktno sabiranje sinusoidalnih veličina: $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, odnosno $i(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$) obavi uz pomoć fazorskih dijagrama.

Prikazivanje prostoperiodičnih veličina posredstvom fazorskih dijagrama, bazira se na uvođenju fazora, veličine koja ima i dosta sličnosti sa obrtnim vektorom, ali ipak i neke vrlo bitne, čak suštinske rezlike, u odnosu na te iste obrtne vektore (fazori se naime mogu, ne samo sabirati, oduzimati i množiti (mada je množenje fazora, bitno drugačije od množenja vektora), nego čak i dijeliti).

Ipak, uvođenje i ovakvog formalizovanog pojma fazora, a s tim i otvaranje prostora za jednostavno provođenje mogućih raspoloživih računskih operacija s njima, u mnogim osnovnim analizama električnih krugova prostoperiodičnih struja i napona, omogućava kao što to pokazuje praksa, da se vrlo brzo dođe do osnovnih traženih informacija. Fazor, kao i svaki obrtni vektor, svojom dužinom izražava veličinu vlastitog intenziteta, dok se položajem nosača fazora, u odnosu na pozitivan smjer apscisne ose, određuje pravac i smjer njegovog djelovanja.

Činjenica da je fazor kao veličina formalno potpuno određen sa samo dva parametra (dužinom fazora i položajem nosača fazora u odnosu na pozitivan smjer apscisne ose), uz ranije izrečenu konstataciju da i prostoperiodične veličine (električne napone i električne struje) u linearnom električnom krugu, definisane frekvencije, potpuno određuju samo njihova amplituda i početna faza, omogućava uspostavljanje vrlo jednostavne korespondencije, između prostoperiodične forme prikazivanja struja i napona i njoj ekvivalentnog fazorskog predstavljanja istih veličina.

Na *Slici 2.24* dat je grafički prikaz predstavljanja električne struje $i(t)$, u fazorskoj formi, slika (a) i u klasičnom vremenskom prostoperiodičnom prikazu slika (b).

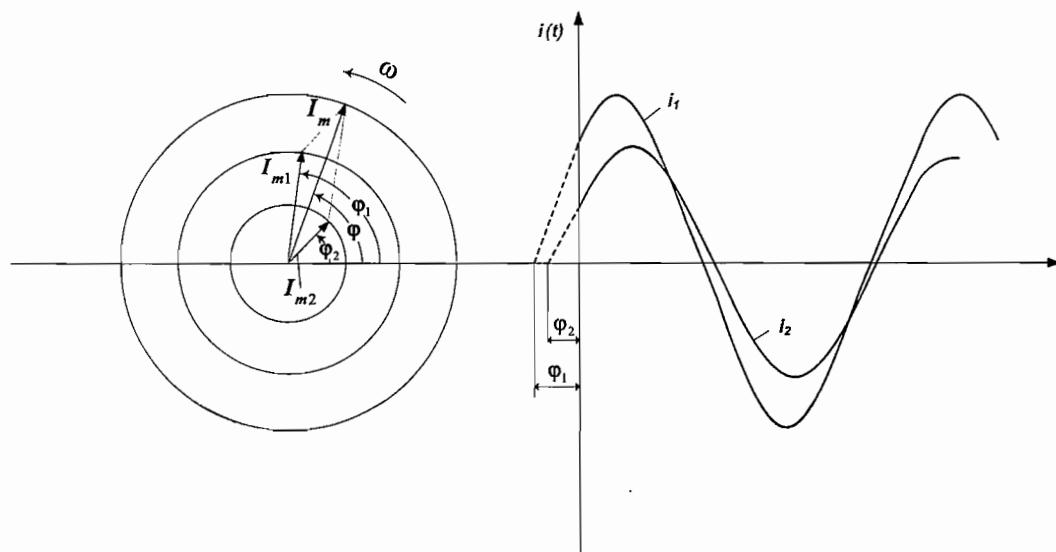


Slika 2.24 Grafički prikaz električne struje $i(t)$: (a) fazorska forma (b) klasična vremenska prostoperiodična forma

S predstavljenog fazorskog prikaza, vidi se da se trenutna vrijednost neke prostoperiodične struje $i(t)$, $i(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \Theta_1)$ u proizvoljnom trenutku t_i , određuje tako da se nosač fazora iz svog osnovnog položaja, kada leži na pozitivnom dijelu apscisne ose, zarotira, oko koordinatnog početka, suprotno smjeru kazaljke na satu, za ugao $(\omega t_i + \Theta_1)$. U novom položaju fazora, njegova projekcija na ordinatnu osu, određuje vrijednost električne struje $i(t)$ u trenutku t_i , odnosno $i(t_i) = I_{m1} \sin(\omega t_i + \Theta_1)$.

Na *Slici 2.25*, dat je primjer, kako se, uz pomoć fazorskog računa, može znatno jednostavnije ostvariti sabiranje prostoperiodičnih veličina $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$i(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$



Slika 2.25 Primjer korištenja fazorskog računa za računanje rezultantne struje: $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$

Ukoliko se sa $i(t)$, označi tražena rezultantna struja, zbog okvirno poznate relacije za tu struju: $i(t) = I_m \sin(\omega t + \Theta)$, nepoznate vrijednosti parametara rezultantne struje I_m i Θ , određuju se direktno s fazorskog dijagrama, pomoću relacija:

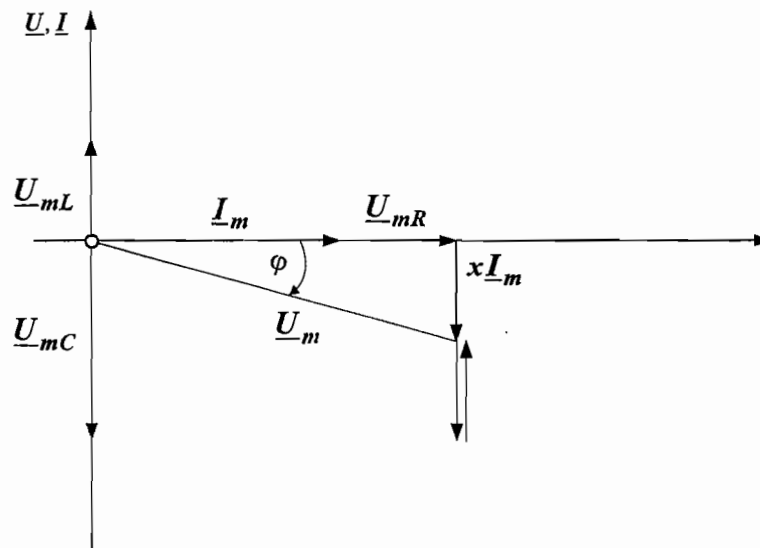
$$\begin{aligned} I_m \sin(\Theta) &= I_{m1} \sin \varphi_1 + I_{m2} \sin \varphi_2, \\ I_m \cos(\Theta) &= I_{m1} \cos \varphi_1 + I_{m2} \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Sada se može mnogo brže doći i do analitičkih izraza za određivanje parametara I_m i Θ , nego što je to slučaj kada se koristi postupak određivanja ekvivalentne sinusoide:

$$I_m = (I_{m1})^2 + (I_{m2})^2 + 2 I_{m1} I_{m2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (2.71)$$

$$\Theta = \arctg \frac{I_{m1} \sin\varphi_1 + I_{m2} \sin\varphi_2}{I_{m1} \cos\varphi_1 + I_{m2} \cos\varphi_2}. \quad (2.72)$$

Na *Slici 2.26* dat je fazorski dijagram serijskog spoja LVNR aktivnog otpornika, LVNL zavojnice i LVNC kondenzatora, u uslovima kada je takav električni spoj izložen djelovanju idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$. Zbog jednostavnijeg crtanja fazorskog dijagrama, uvedena je i dodatna pretpostavka, da je početna faza φ , uspostavljene struje $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, jednaka nuli, dakle važi relacija $\varphi = 0$.



Slika 2.26 Fazorski dijagram serijskog spoja LVNR aktivnog otpornika, LVNL zavojnice i LVNC kondenzatora, u uslovima kada je $X_L < X_C$, a takav električni spoj je izložen djelovanju idealnog naponskog izvora, sinusoidalnog napona $u(t)$.

Fazori se simbolički označavaju tako da im se iskaže amplituda i pripadajući im argument. Tako bi za električni napon $u(t)$

$$u(t) = 310 \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right),$$

njegovo fazorsko predstavljanje bilo u obliku:

$$\bar{U} = 310 \angle \frac{\pi}{4} .$$

2.9 Simbolički pristup u rješavanju linearnih električnih krugova s prostoperiodičnim strujama i naponima

Tokom prethodnih razmatranja je zaključeno, da analiza linearnih električnih krugova s prostoperiodičnim strujama i naponima, kada se provodi u vremenskom domenu najčešće zahtjeva i rješavanje diferencijalnih jednačina, koje se pojavljuju kao jednačine dinamičke ravnoteže za takve krugove.

Pojednostavljenja koja donosi primjena fazorskog računa dobrodošla su ipak samo za jednostavnije električne krugove.

U traženju pristupa koji bi problem iznalaženja karakterističnih veličina stacionarnog stanja linearnih električnih krugova sa prostoperiodičnim strujama i naponima, učinio jednostavnijim i lakšim (postupci rješavanja linearnih električnih krugova sa stalnim jednosmjernim strujama i naponima, zasnovani na rješavanju linearnih algebarskih jednačina s realnim koeficijentima i vlastitim rješenjima, u formi realnih brojeva, bili su vodilja u predmetnom traženju prikladnijeg pristupa), zadovoljavjuće rezultate je ponudio takozvani **simbolički pristup**.

Simbolički pristup se bazira na ideji, da se prostoperiodične veličine formalno iskažu pomoću kompleksnih brojeva, nakon čega se odmah otvara put da se i integralno-diferencijalne jednačine, pridružene analiziranom linearnom električnom krugu, a proistekle iz jednačina njegove dinamičke ravnoteže, zamjene sa linearnim algebarskim jednačinama sa kompleksnim koeficijentima, koje u opštem slučaju imaju rješenja u formi kompleksnih brojeva.

Ovakvo simboličko predstavljanje formalno se iskazuje oznakom: \underline{Z} , koja predstavlja impedansu neke grane. Ova impedansa može se na nekoliko načina razložiti na vlastite komponente.

Ukoliko se koristi algebarski oblik kompleksnog broja za impedansu \underline{Z} , tada je: $\underline{Z} = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j \text{Im}\{\underline{Z}\}$, pri čemu komponenta $\text{Re}\{\underline{Z}\}$ određuje aktivnu otpornost u predmetnoj impedansi, dok komponenta $\text{Im}\{\underline{Z}\}$ određuje reaktivnu otpornost u istoj impedansi.

Pri upotrebi trigonometrijskog oblika predstavljanja kompleksnog broja, za istu impedansu važi relacija: $\underline{Z} = Z (\cos\varphi + j \sin\varphi)$.

Ipak, najčešće se u tehničkoj praksi u okviru predstavljanja, bilo impedanse \underline{Z} , bilo električne struje ili električnog napona, koristi eksponencijalni oblik za izražavanje kompleksnog broja, baziran na Eulerovom obrascu $\cos\varphi + j \sin\varphi = e^{j\varphi}$.

Sve ono što omogućuju fazori, može se ostvariti i primjenom ovakvog simboličkog pristupa, ako se tokom njegove primjene odgovarajuća amplituda iskaže u kompleksnom obliku:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi} . \quad (2.73)$$

Množenjem ovakve kompleksne amplitude s faktorom $e^{j\omega t}$ ista se praktično zarotira za ugao ωt , u pozitivnom matematičkom smjeru.

Kada se odredi relacija za električnu struju u obliku $\underline{I}_m(t) = (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t})$, tada se vrlo jednostavno pronalazi tražena struja $i(t)$ u vremenskom domenu, koristeći relaciju:

$$i(t) = \text{Im}\{\underline{I}_m(t)\} = \text{Im}\{I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\} = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

U slučaju kada prostoperiodična struja $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, prolazi kroz LVNR aktivni otpornik otpornosti R , stvoreni pad napona $u_R(t)$ na tom otporniku, koji je po smjeru usaglašen sa tom strujom, u vremenskom domenu je definisan relacijom:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.74)$$

Ukoliko se pak iskazivanje istih odnosa provede uz pomoć simboličkog pristupa, tada se uz pomoć kompleksnog izraza za struju $i(t)$, dakle uz korištenje relacije: $\underline{I}_m(t) = (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t})$, odgovarajući kompleksni izraz $\underline{U}_{mR}(t)$ za pad napona na LVNR aktivnom otporniku otpornosti R , određuje u formi:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mR}(t) &= R \cdot \underline{I}_m(t) = R \cdot I_m \cdot e^{j\omega t} = \underline{U}_{mR} \cdot e^{j\omega t}; \\ \underline{U}_{mR} &= R \cdot \underline{I}_m = R \cdot I_m e^{j\varphi} . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Uz pomoć relacije (2.75) sada se lako može rekonstruisati i izraz za pad napona $u_R(t)$ na LVNR otporniku otpornosti R , koji je po smjeru usaglašen sa strujom $i(t)$:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= \text{Im} \{ \underline{U}_{mR}(t) \} = \text{Im} \{ R \cdot I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \} = \\ &= U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Nije teško primjetiti da se i u okviru simboličkog pristupa, ponovo potencira važna činjenica, da između električne struje u kompleksnom obliku $\underline{I}_m(t)$ i pada napona na LVNR otporniku otpornosti R u kompleksnom obliku $\underline{U}_R(t)$, izazvanog upravo prolaskom te struje, nema faznog pomaka, jer je:

$$\arg[\underline{U}_{mR}(t)] - \arg[\underline{I}_m(t)] = \arg(\underline{U}_{mR}) - \arg(\underline{I}_m) = 0. \quad (2.77)$$

U skladu s posljednjom relacijom slijedi zaključak da se pri simboličkom pristupu, argument dobijen nakon provedenih matematičkih operacija može odrediti i korištenjem samo vrijednosti kompleksnih amplituda.

Kada prostoperiodična struja: $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, prolazi kroz LVNL zavojnicu induktivnosti L , stvoreni pad napona $u_L(t)$ na toj zavojnici, koji je po smjeru usaglašen s tom strujom, u vremenskom domenu je definisan relacijom:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{d i(t)}{dt} = \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= U_{mL} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Ukoliko se iskazivanje istih odnosa provede uz pomoć simboličkog pristupa, tada se uz pomoć kompleksnog izraza za struju $i(t)$, dakle uz korištenje relacije $\underline{I}_m(t) = (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t})$, odgovarajući kompleksni izraz $\underline{U}_{mL}(t)$ za pad napona na LVNL zavojnici induktivnosti L , određuje u formi:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mL}(t) &= L \cdot \frac{d \underline{I}_m(t)}{dt} = L \cdot \frac{d (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t})}{dt} = \\ &= j\omega L \cdot (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}); \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{mL}(t) &= \omega L \cdot \left(I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t + j\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \omega L \cdot \left(I_m e^{j(\varphi + \omega t + \frac{\pi}{2})} \right).\end{aligned}\quad (2.80)$$

Uz pomoć relacije (2.80), sada se lako može rekonstruisati i izraz za pad napona $u_L(t)$ na LVNL zavojnici induktivnosti L , koji je po smjeru usaglašen sa strujom $i(t)$:

$$\begin{aligned}u_L(t) &= \text{Im} \{ \underline{U}_{mL}(t) \} = \text{Im} \left\{ \omega L \cdot \left(I_m e^{j(\varphi + \omega t + \frac{\pi}{2})} \right) \right\} = \\ &= \omega L \cdot I_m \cdot \sin \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= U_{mL} \cdot \sin \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.81)$$

U okviru simboličkog pristupa ponovo se potencira važna činjenica, da između električne struje u kompleksnom obliku $\underline{I}_m(t)$ i pada napona na LVNL zavojnici induktivnosti L , u kompleksnom obliku $\underline{U}_L(t)$, izazvanog upravo prolaskom te struje, postoji fazni pomak od $\frac{\pi}{2}$ radijana jer je:

$$\begin{aligned}\arg[\underline{U}_{mL}(t)] - \arg[\underline{I}_m(t)] &= \\ = \arg(\underline{U}_{mL}) - \arg(\underline{I}_m) &= \frac{\pi}{2} \text{ radijana.}\end{aligned}\quad (2.82)$$

Prema posljednjoj relaciji ponovo slijedi zaključak da se pri simboličkom pristupu, argument dobijen nakon provedenih matematičkih operacija, može odrediti na osnovu vrijednosti kompleksnih amplituda upotrebljenih veličina.

Veličina određena relacijom ωL , ima prirodu električnog otpora i u elektrotehnici se naziva **induktivna otpornost**. Ova otpornost se formalno označava sa X_L . Induktivnoj otpornosti X_L , pridružuje se vrijednost impendanse $\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L$.

Na osnovu prethodnih relacija može se uočiti da se u okviru simboličkog pristupa, efekat diferenciranja formalno iskazuje množenjem sa operatorom j , odnosno unošenjem dodatnog faznog pomaka od $\frac{\pi}{2}$ radijana.

Sa stanovišta simboličkog pristupa, ima smisla pisati da po Ohmovom zakonu, pri usaglašenim smjerovima električne struje i pada električnog

napona na zavojnici nastalog zbog prolaska te struje, vrijedi slijedeći odnos:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{mL} &= \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_m = j\omega L \cdot \underline{I}_m = j\omega L \cdot I_m e^{j\varphi} = \\ &= \omega L \cdot I_m e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = U_{mL} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}.\end{aligned}$$

Kada prostoperiodična struja: $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, prolazi kroz LVNC kondenzator, kapacitivnosti C , stvoreni pad napona $u_C(t)$ na tom kondenzatoru, koji je po smjeru usaglašen sa tom strujom, u vremenskom domenu je definisan relacijom:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}; \quad u_C(t) = U_{mC} \cdot \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}). \quad (2.83)$$

Ukoliko se iskazivanje istih odnosa provede uz pomoć simboličkog pristupa, tada se uz pomoć kompleksnog izraza za struju $i(t)$, dakle uz korištenje relacije $I_m(t) = (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t})$, te odgovarajućeg kompleksnog izraza $\underline{U}_{mC} = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}_C$ za pad napona na LVNC kondenzatoru kapacitivnosti C , dolazi na osnovu relacije:

$$\underline{U}_{mC}(t) = \frac{1}{C} \cdot \int (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) dt + A. \quad (2.84)$$

Sa A je označena integraciona konstanta, koja se pojavljuje pri računanju neodređenog integrala, a određuje se u skladu sa zadatim početnim uslovima. Ukoliko kondenzator nije raspolagao nabojem u trenutku $t = 0$, tada je $A = 0$, pa se iz relacije (2.84) dobiva:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{mC}(t) &= \left(\frac{1}{j\omega C}\right) \cdot (I_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \\ &= \left(\frac{1}{\omega C}\right) \cdot (I_m e^{j(\varphi + \omega t - \frac{\pi}{2})}).\end{aligned} \quad (2.85)$$

Uz pomoć relacije (2.85), sada se lako može rekonstruisati i izraz za pad napona $u_C(t)$ na LVNC kondenzatoru kapacitivnosti C , koji je po smjeru usaglašen sa strujom, $i(t)$:

$$u_C(t) = \text{Im}\{\underline{U}_{mC}(t)\} = \text{Im}\left[\left(\frac{1}{\omega C}\right) \cdot I_m e^{j(\varphi + \omega t - \frac{\pi}{2})}\right] =$$

$$\begin{aligned}
&= I_m \left[\left(\frac{1}{\omega C} \right) \cdot I_m \cdot \sin \left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\
&= U_{mC} \cdot \sin \left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.86)
\end{aligned}$$

I u ovom slučaju u okviru simboličkog pristupa ponovo se potencira važna činjenica, da između električne struje u kompleksnom obliku $\underline{I}_m(t)$ i pada napona na LVNC kondenzatoru kapacitivnosti C , u kompleksnom obliku $\underline{U}_C(t)$, izazvanog upravo prolaskom te struje, postoji fazni pomak od $-\frac{\pi}{2}$ radijana jer je:

$$\begin{aligned}
&\arg[\underline{U}_{mC}(t)] - \arg[\underline{I}_m(t)] = \\
&= \arg(\underline{U}_{mC}) - \arg(\underline{I}_m) = -\frac{\pi}{2} \text{ radijana.} \quad (2.87)
\end{aligned}$$

Prema posljednjoj relaciji slijedi i novo potvrđivanje već spominjanog zaključka, da se pri simboličkom pristupu, argument dobijen nakon provedenih matematičkih operacija, može odrediti na osnovu vrijednosti kompleksnih amplituda upotrebljenih veličina. Veličina određena relacijom $1/\omega C$ ima također prirodu električnog otpora i u elektrotehnici se naziva **kapacitivna otpornost**. Ova otpornost se formalno označava sa X_C . Kapacitivnoj otpornosti X_C pridružuje se vrijednost impedanse:

$$\underline{Z}_C = -jX_C ; \quad \underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} .$$

Na osnovu prethodnih relacija, može se uočiti da se u okviru simboličkog pristupa, efekat integriranja formalno iskazuje množenjem s $(-j)$, odnosno unošenjem dodatnog faznog pomaka od $-\frac{\pi}{2}$ radijana.

Sa stanovišta simboličkog pristupa ima smisla pisati da po Ohmovom zakonu, pri usaglašenim smjerovima električne struje i pada električnog napona na kondenzatoru, nastalog zbog prolaska te struje, vrijedi slijedeći odnos:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{mC} &= \underline{Z}_C \cdot \underline{I}_m = \left(\frac{-j}{\omega C} \right) \cdot \underline{I}_m = \left(\frac{-j}{\omega C} \right) \cdot I_m e^{j\varphi} = \\
&= \left(\frac{1}{\omega C} \right) \cdot I_m e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} = U_{mC} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})}. \quad (2.88)
\end{aligned}$$

2.10 Rezonantne pojave u linearnim R, L, C krugovima s prostoperiodičnim električnim naponima i strujama

Pod određenim uslovima, u linearnim R, L, C krugovima prostoperiodičnih električnih napona i struja, mogu nastupiti stacionarna stanja, koja su okarakterisana i uspostavljanjem izuzetno velikih amplituda električne struje ili električnih napona.

U tom smislu, u serijskim linearnim R, L, C krugovima, napajanim iz naponskih ili strujnih izvora prostoperiodičnog napona odnosno prostoperiodične struje, može nastupiti **serijska rezonansa**. Tokom nastanka serijske rezonanse, električna struja u razmatranom serijskom električnom krugu ima maksimalnu amplitudu i u faznom je skladu s električnim naponom naponskog izvora. Za ovakvu pojavu se ravnopravno koristi i termin naponska rezonansa, jer se pri njoj amplitude padova napona na LVNL zavojnici induktivnosti L i LVNC kondenzatoru kapacitivnosti C, međusobno izjednačavaju. Dakle, tokom ovakve rezonanse, dolazi do izjednačavanja amplituda napona na navedenim, serijski spojenim reaktivnim otporima.

Slično tome, u linearnim R, L, C električnim krugovima, unutar kojih postoje bar dvije, međusobno paralelno spojene grane (pri čemu jedna od tih grana mora biti pretežno induktivna, a druga grana mora biti pretežno kapacitivna), može nastupiti **paralelna rezonansa**. Tokom paralelne rezonanse, električna struja preuzeta iz izvora električne energije u stacionarnom stanju ima minimalnu amplitudu, a električne struje koje se uspostavljaju kroz paralelno spojene grane poprimaju iste amplitude, ali i međusobno suprotne smjerove.

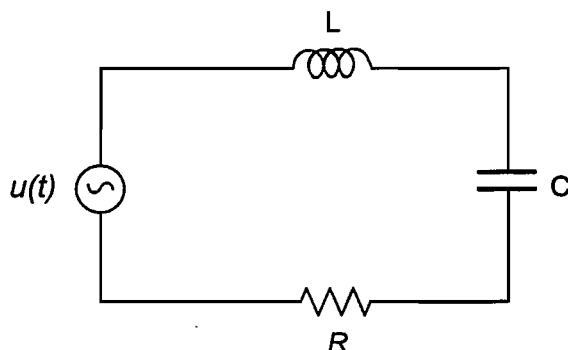
2.10.1 Osnovne karakteristike naponske rezonanse

Na *Slici 2.27* prikazana je električna shema linearnog, serijskog R, L, C kruga, napajanog iz idealnog naponskog izvora prostoperiodičnog napona, u kojem je, tokom stacionarnog stanja, moguće uspostaviti režim naponske rezonanse.

Ukupna impedansa ovakvog električnog kruga \underline{Z} , određena je relacijama:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C} \right]^2};$$

$$\arg \underline{Z} = \varphi = \arctg \left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (2.89)$$



Slika 2.27 Električna shema linearnog, serijskog R , L , C kruga, napajanog iz idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona $u(t)$.

Ukupna impedansa ovakvog električnog kruga \underline{Z} , određena je relacijama:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C} \right]^2};$$

$$\arg \underline{Z} = \varphi = \arctg \left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (2.89)$$

Ukoliko frekvencija naponskog izvora ω , zadovoljava uslov:

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega C}; \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.90)$$

ukupna impedansa, linearnog, serijskog R , L , C kruga, sa *Slike 2.27*, poprima svoj minimalni iznos: $\underline{Z}_{\min} = R$, a argument te iste impedanse ima nultu vrijednost:

$$\arg(\underline{Z}_{\min}) = \varphi_0 = 0. \quad (2.91)$$

Pri rezonantnoj frekvenciji: $\omega = \omega_0$, amplituda električne struje u linearnom, serijskom R , L , C krugu sa *Slike 2.27*, poprima maksimalnu vrijednost, koja iznosi:

$$(I_m)_{\max} = \frac{U_m}{R}. \quad (2.92)$$

Padovi napona na električnoj zavojnici induktivnosti L i električnom kondenzatoru kapacitivnosti C , po intenzitetu su isti, ali su im smjerovi suprotni, što se analitički iskazuje relacijama:

$$U_L = U_C; \quad \underline{U}_L = -\underline{U}_C. \quad (2.93)$$

Nastanak naponske rezonanse, unutar razmatranog električnog kruga, ne donosi samo opasnost zbog porasta amplitude struje I , nego su opasnosti prisutne i zbog činjenice da pri naponskoj rezonansi i nepovoljnom odnosu relevantnih R , L , C parametara kruga, padovi napona na električnoj zavojnici induktivnosti L i električnom kondenzatoru kapacitivnosti C , mogu po intenzitetu čak i prevazići amplitudu napona izvora U_m , što je posebno opasno za električni kondenzator. Iznos aktivnog električnog otpora R u serijskom R , L , C krugu, sa *Slike 2.27*, značajno utiče ne samo na vrijednost amplitude struje I_m , nego i na vrijednosti argumenta impedanse Z .

Na *Slikama 2.28 i 2.29*, dati su grafički prikazi navedenih uticaja, pri amplitudi napona naponskog izvora $U_m = 100$ V, te tri diskretne vrijednosti aktivnog otpora: $R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 60 \Omega$; $R_3 = 200 \Omega$, i nepromjenljivim iznosima induktivnosti $L = 100 \mu\text{H}$, odnosno kapacitivnosti $C = 10$ nF.

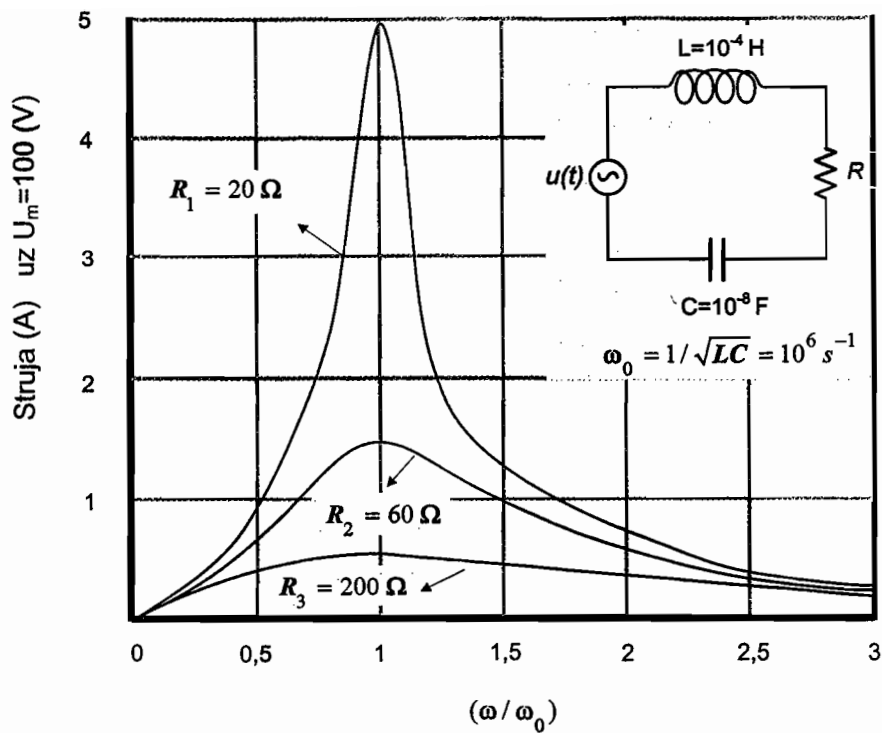
Lako se utvrđuje da je pri navedenim vrijednostima L , C elemenata, rezonantna frekvencija razmatranog električnog kruga:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ s}^{-1}.$$

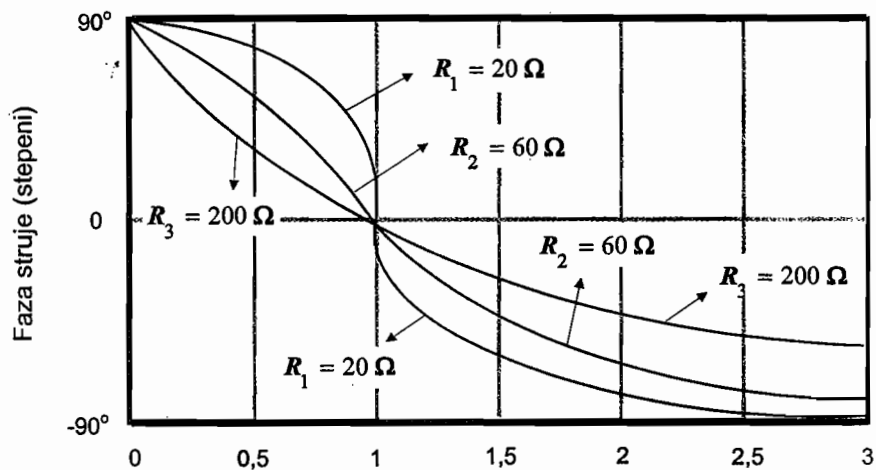
Za svaku od prethodno navedenih vrijednosti aktivnog otpora R , moguće je izračunati i odgovarajući Q^* faktor pri rezonantnoj učestanosti, saglasno relaciji:

$$Q^* = \omega_0 \cdot \frac{L}{R}.$$

Nije teško uočiti slijedeću zakonomjernost: pri manjim vrijednostima aktivnog otpora R , Q^* faktor ima veću vrijednost, odnosno, prisutni rezonantni špic je tada znatnije izražen. Za navedene parametre, lako se dobija da je $Q_{\max} = 5$. Električni krugovi sa znatno većom vrijednošću Q^* faktora, susreću se u radioprijemnicima, gdje Q^* faktor može imati vrijednost i od nekoliko stotina (radiostanice se biraju i međusobno razlikuju, upravo i pomoću rezonantnih krugova). Moguće je načiniti čak i mikrotalasne rezonantne krugove, kod kojih Q^* faktor poprima vrijednosti reda 10^4 , ili čak 10^5 .



Slika 2.28 Grafički prikaz promjene amplitude struje u električnom krugu sa **Slike 2.27**, u funkciji odnosa ω/ω_0 , i vrijednosti aktivnog otpora R (početna faza napona izvora $\theta_u = \pi/2$ radijana)



Slika 2.29 ; Grafički prikaz promjene argumenta električne struje $\varphi_I = -\varphi$, u električnom krugu sa **Slike 2.27**, u funkciji odnosa ω/ω_0 , i vrijednosti aktivnog otpora R (početna faza napona izvora $\theta_u = \pi/2$ radijana)

Prema **Slici 2.29**, argument električne struje \underline{I} na niskim frekvencijama (odnosno frekvencijama koje su manjeg iznosa od rezonantne frekvencije ω_0) je pozitivan, a kapacitivna otpornost:

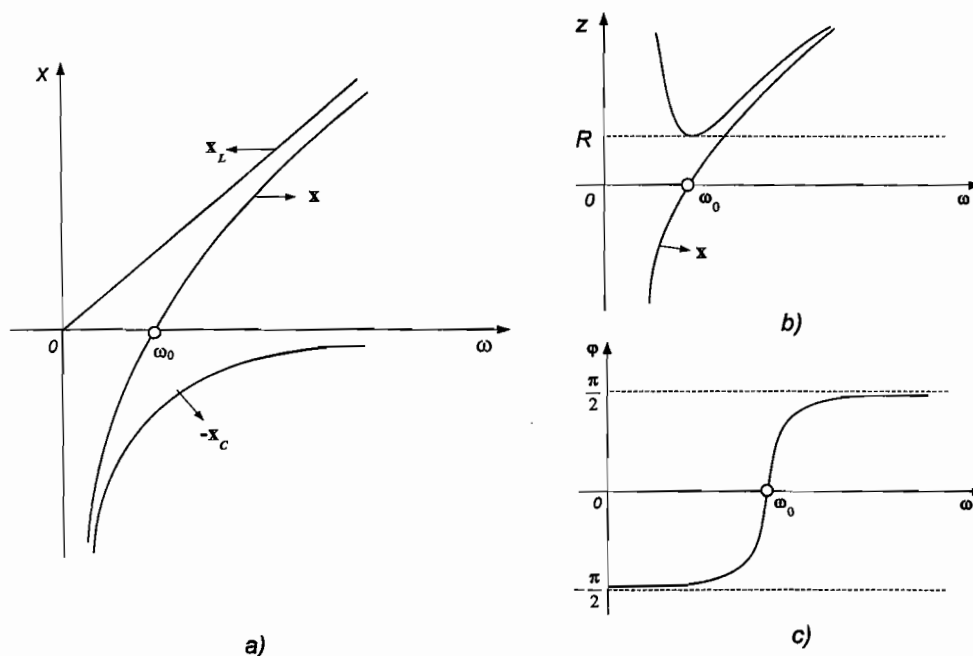
$$X_C = -\frac{1}{\omega C},$$

u tim okolnostima je dominirajući otpor, koji ograničava još veći porast amplitude struje I_m .

Na visokim frekvencijama, odnosno na frekvencijama koje imaju veći iznos od rezonantne frekvencije ω_0 , argument impedanse \underline{Z} postaje negativan, pri čemu sada induktivni otpor $X_L = \omega L$, postaje dominirajući otpor, koji najviše utiče na ograničenje još većeg povećanja amplitude električne struje I_m .

Sa **Slike 2.29** može se zaključiti, da pri većim vrijednostima Q faktora, argument električne struje \underline{I} naglije prelazi iz područja pozitivnih vlastitih vrijednosti u područje negativnih vlastitih vrijednosti.

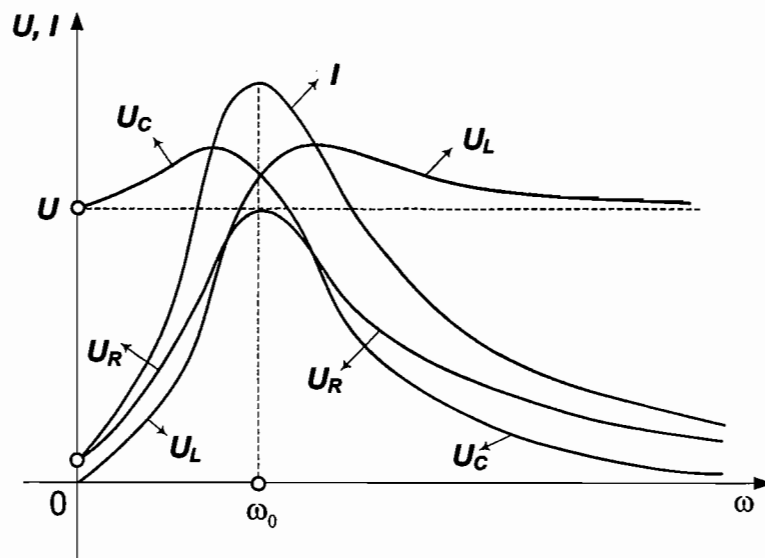
Na **Slici 2.30** prikazane su promjene reaktivnih otpornosti, modula impedanse serijskog R, L, C kruga, kao i promjene argumenta te impedanse, u funkciji frekvencije ω .



Slika 2.30 Promjene reaktivnih otpornosti (slika a), modula impedanse serijskog R, L, C kruga (slika b), kao i promjene argumenta impedanse, (slika c) u funkciji frekvencije ω

Grafički prikaz promjena amplituda ukupne električne struje I_m i padova napona na aktivnom otporu električne otpornosti R (U_R), zavojnici električne induktivnosti L (U_L), te na kondenzatoru električne kapacitivnosti C (U_C), u funkciji frekvencije ω , naponskog izvora, prostoperiodičnog napona, predočeni su na **Slici 2.31**.

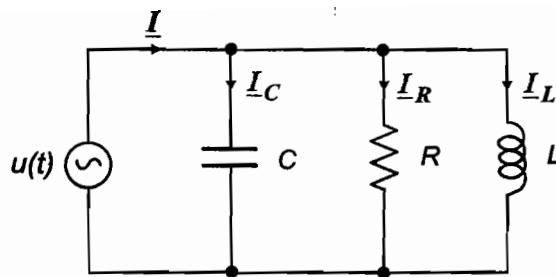
Slike 2.30 i 2.31 predstavljaju dodatni izvor informacija za potpunije razumijevanje pojave naponske rezonanse u linearnom serijskom R , L , C krugu, koji se napaja iz idealnog naponskog izvora prostoperiodičnog napona: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$.



Slika 2.31 Funkcionalne zavisnosti promjena amplituda ukupne električne struje I_m i padova napona, U_R , U_L i U_C , u funkciji frekvencije ω , upotrebljenog naponskog izvora prostoperiodičnog napona

2.10.2 Osnovne karakteristike strujne rezonanse

Na **Slici 2.32** prikazana je električna shema linearnog, paralelnog R , L , C kruga, napajanog iz idealnog naponskog izvora prostoperiodičnog napona, u kojem je moguće tokom stacionarnog stanja uspostaviti režim strujne rezonanse.



Slika 2.32 Električna shema linearnog, paralelnog R , L , C kruga, napajanog iz idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona $u(t)$.

Ukoliko se sa simbolom \underline{I} označi ukupna struja, koju idealni naponski izvor daje potrošačima u električnom krugu sa **Slike 2.32**, tada prema I Kirchhoffovom zakonu važi relacija:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C. \quad (2.94)$$

Zbog međusobnog paralelnog spoja postojećih grana razmatranog električnog kruga, svi elementi na **Slici 2.32** podvrgnuti su djelovanju istog prostoperiodičnog napona, efektivne vrijednosti U , zbog čega se relacija (2.94) može transformisati u oblik:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{U}{R} + \frac{U}{j\omega L} + \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}}. \quad (2.95)$$

U skladu s Ohmovim zakonom, za električni krug shematski prikazan na **Slici 2.31**, važi relacija:

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}}; \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right). \quad (2.96)$$

Veličina $G = 1/R$ u elektrotehnici se označava kao **električna provodnost**, dok se za veličinu $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ u elektrotehnici koristi naziv **kompleksna provodnost, ili admitansa**.

Veličina:

$$B = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = B_L + B_C,$$

naziva se **reaktivnom provodnošću, ili susceptansom**.

Jedinica mjere za električnu provodnost **G**, reaktivnu električnu provodnost **B** i admitansu **Y**, je (S) (Siemens).

Ukoliko je ispunjen uslov:

$$\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = 0,$$

tada ukupna admitansa, **Y** linearnog, paralelnog **R**, **L**, **C** kruga sa *Slike 2.31* ima minimalnu vrijednost modula:

$$Y_{min} = \frac{1}{R},$$

a argument te impedanse $(\varphi_0)_y$ poprima nultu vrijednost, odnosno važi:

$$\arg(Y_{min}) = (\varphi_0)_y = 0. \quad (2.97)$$

Električna struja u analiziranom linearnom, paralelnom **R**, **L**, **C** krugu, sa *Slike 2.27*, pri frekvenciji $\omega = \omega_0$, poprima minimalnu vrijednost amplitude, koja iznosi:

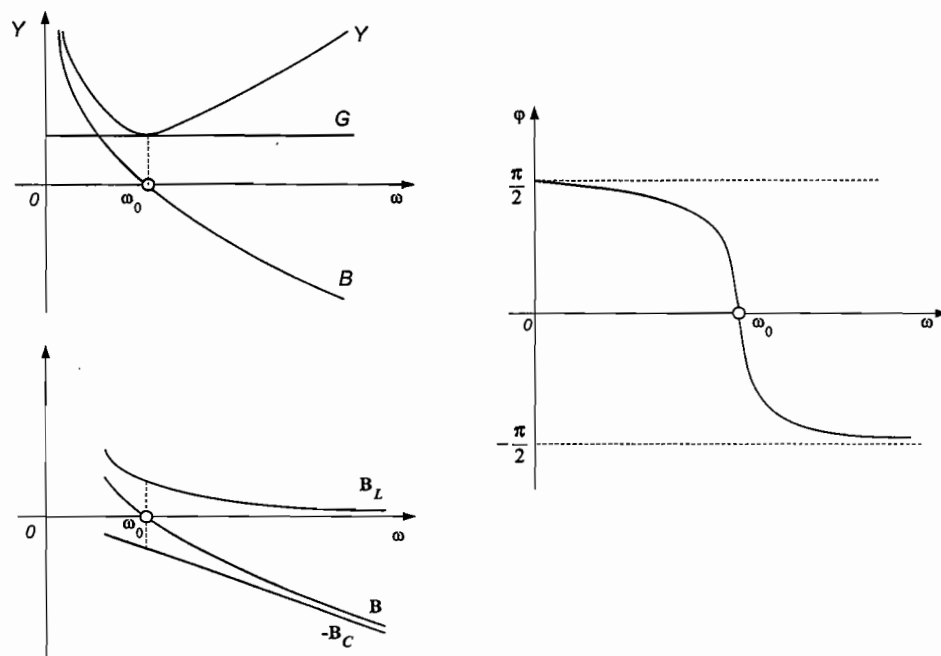
$$(I_m)_{min} = \frac{U_m}{R}. \quad (2.98)$$

Električne struje kroz električnu zavojnicu, induktivnosti **L** i spojne provodnike vezane za elektrode električnog kondenzatora, kapacitivnosti **C**, po intenzitetu su iste, ali su im smjerovi toka suprotni, što se analitički iskazuje relacijama:

$$I_L = I_C; \quad \underline{I}_L = -\underline{I}_C. \quad (2.99)$$

Nastanak strujne rezonanse unutar razmatranog linearnog električnog kruga, donosi dodatnu opasnost, zbog činjenice da pri takvoj rezonansi i nepovoljnom odnosu relevantnih **R**, **L**, **C** parametara kruga, amplitude električnih struja što se usmjeravaju kroz električnu zavojnicu induktivnosti **L**, i spojne provodnike vezane za elektrode električnog

kondenzatora kapacitivnosti C , po intenzitetu mogu čak i prevazići amplitudu struje izvora I_m , što je posebno opasno za prisutnu električnu zavojnicu.



Slika 2.33 *Grafički prikaz promjena reaktivnih provodnosti, amplitude admitanse paralelnog R, L, C kruga i argumenta impedanse, koja odgovara analiziranoj admitansi, u funkciji frekvencije ω , idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona $u(t)$.*

Prema **Slici 2.33**, argument impedanse \underline{Z} na niskim frekvencijama (odnosno frekvencijama koje su niže vrijednosti od rezonantne frekvencije ω_0) je pozitivan, a induktivna provodnost:

$$B_L = \frac{1}{\omega L},$$

u tim okolnostima je dominirajuća provodnost, koja omogućava značajniji porast amplitude struje I_m , odnosno struje I_{mL} . Na visokim frekvencijama, odnosno na frekvencijama koje imaju veću vrijednost od rezonantne frekvencije ω_0 , argument impedanse \underline{Z} , postaje negativan, pri čemu kapacitivna provodnost:

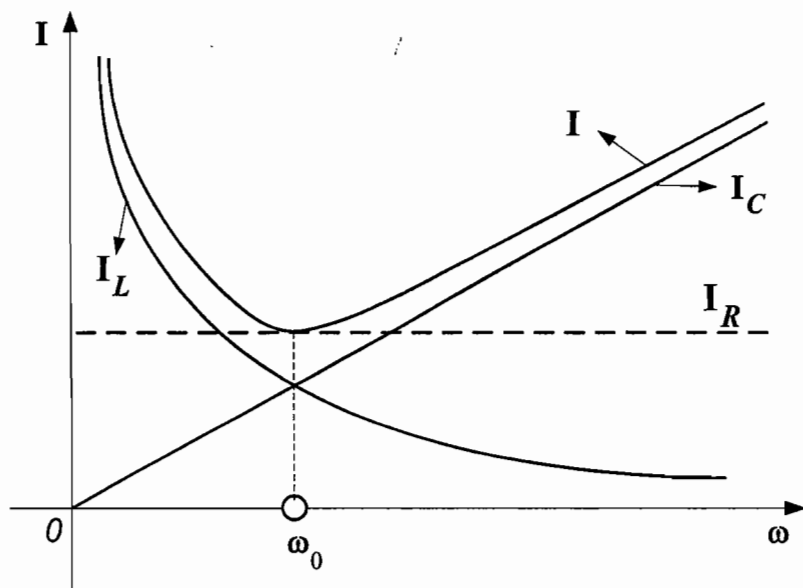
$$B_C = \omega C,$$

postaje dominirajuća provodnost, čiji iznos najviše utiče na omogućavanje značajnijeg porasta amplitude struje I_m , odnosno struje I_{mC} .

Grafički prikaz promjena amplituda ukupne električne struje I_m , struje kroz granu s aktivnim otporom I_R , struje kroz granu sa zavojnicom I_L , te struje kroz granu s kondenzatorom I_C , u funkciji frekvencije ω , naponskog izvora prostoperiodičnog napona, kao nezavisno promjenljive veličine, predložen je na *Slici 2.34*.

Slike 2.33 i *2.34* predstavljaju dodatni izvor informacija za potpunije razumijevanje pojave strujne rezonanse u paralelnom, linearnom R, L, C krugu, koji se napaja iz naponskog izvora sinusoidalnog napona:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u).$$



Slika 2.34 Grafički prikaz promjena amplituda ukupne električne struje I_m , struje kroz granu s aktivnim otporom I_R , struje kroz granu sa zavojnicom I_L , te struje kroz granu s kondenzatorom, I_C u funkciji frekvencije ω , naponskog izvora prostoperiodičnog napona.

Interesantno je uočiti, da u idealiziranom slučaju, kada je provodnost admitanse $G = 0$, pri eventualnom nastupanju strujne rezonanse, iz idealnog naponskog izvora električnog napona:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u),$$

se ne preuzima električna struja, mada u granama takvog električnog kruga postoji tok električne struje kroz zavojnicu induktivnosti L i kroz grane koje su spojene za elektrode kondenzatora električne kapacitivnosti C .

Objašnjenje za ovu pojavu leži u činjenici da u idealiziranom oscilatornom krugu, nakon što se jedanput dovede određena količina električne energije, osciliranje te energije može trajati neograničeno dugo, bez dovođenja dodatne električne energije iz spoljnjih izvora.

U linearnim električnim krugovima, u slučaju da je u krugu nastupila naponska ili strujna rezonansa, iz izvora električne energije angažuje se isključivo aktivna snaga.

Drugačije rečeno, trenutna vrijednost angažovane električne snage iz upotrijebljenog naponskog izvora $p(t)$, u svakom trenutku je, tokom postojanja rezonanse, nenegativnog iznosa.

2.11 Ravnoteža električnih snaga u električnom krugu

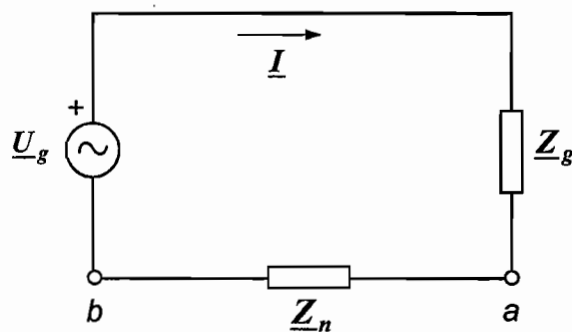
U Osnovama elektrotehnike je pokazano da u svim linearnim električnim krugovima stalnih jednosmjernih napona i struja, u svakom trenutku vremena t , u skladu sa Zakonom o održanju električne energije, postoji uravnoteženost električnih snaga pridruženih naponskim i strujnim generatorima s električnim snagama pridruženim potrošačima električne energije.

Može se pokazati da ovakav zaključak važi i za linearne električne krugove u kojima su uspostavljeni prostoperiodični naponi i prostoperiodične struje, odnosno da je i u takvim električnim krugovima, u skladu sa Zakonom o održanju električne energije, u svakom trenutku vremena t , algebarski zbir snaga svih potrošača i snaga svih generatora jednak nuli:

$$\sum_{l=1}^n P_{gl}(t) + \sum_{k=1}^m P_k(t) = 0. \quad (2.100)$$

U posljednjoj relaciji simbolom $P_{gi}(t)$ označena je trenutna vrijednost električne snage pridružene i -tom generatoru, dok je simbolom $P_k(t)$ označena trenutna električna snaga pridružena k -tom potrošaču.

Energetski odnosi iskazani relacijom (2.100), mogu se iskazati i u simboličkom obliku označavanja karakterističnih veličina, što će biti pokazano na primjeru jednostavnog linearnog električnog kruga, formiranog od realnog naponskog izvora prostoperiodičnog napona: $u_g(t) = U_{gm} \sin(\omega t + \theta_u)$, čija je unutrašnja impedansa \underline{Z}_g i potrošača električne energije, predodčenog impedansom \underline{Z}_n . Električna shema takvog električnog kruga prikazana je na *Slici 2.35*.



Slika 2.35 Električna shema jednostavnog linearnog električnog kruga, formiranog od realnog naponskog izvora prostoperiodičnog napona $u_g(t) = U_{gm} \sin(\omega t + \theta_u)$, čija je unutrašnja impedansa \underline{Z}_g i potrošača električne energije, predodčenog impedansom \underline{Z}_n

U skladu s uvedenim pravilima simboličnog - kompleksnog označavanja, kompleksna snaga, pridružena potrošaču električne energije impedansom \underline{Z}_n , iznosi:

$$\underline{S} = \underline{U}_n \cdot \underline{I}^* = \underline{U}_{ab} \cdot \underline{I}^* = (V_a - V_b) \cdot \underline{I}^*. \quad (2.101)$$

S obzirom da se električni napon između tačaka a i b , može definisati i putem relacije:

$$(V_a - V_b) = \underline{U}_g - \underline{Z}_g \cdot \underline{I}, \quad (2.102)$$

tada se kompleksni izraz za električnu snagu iskazan relacijom (2.101), može transformisati i u oblik:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U}_n \cdot \underline{I}^* = (V_a - V_b) \cdot \underline{I}^* = (\underline{U}_g - \underline{Z}_g \cdot \underline{I}) \cdot \underline{I}^* = \\ &= (\underline{U}_g \cdot \underline{I}^* - \underline{Z}_g \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^*) = (\underline{U}_g \cdot \underline{I}^* - \underline{Z}_g \cdot I^2).\end{aligned}\quad (2.103)$$

Generalizacijom, odnosno primjenom relacije (2.103) na linearni električni krug formiran od n izvora električne energije i m potrošača električne energije, pri kompleksnom načinu zapisivanja energetske odnosa u takvom krugu, može se pisati da važi:

$$\sum_{i=1}^n \underline{S}_{gi} = \sum_{k=1}^m \underline{S}_k. \quad (2.104)$$

Korisno je naglasiti da je pri smjerovima električnih struja i napona kao na **Slici 2.35**, kompleksna električna snaga i -tog generatora definisana relacijom: $\underline{S}_{gi} = \underline{U}_g \cdot \underline{I}^*$, pri čemu struja \underline{I} u trenutku definisanja navedene relacije izlazi iz one stezaljke generatora koja trenutno ima veći električni potencijal. Kompleksna električna snaga k -tog potrošača definisana je relacijom: $\underline{S}_k = \underline{U}_k \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_k \cdot I^2$. Kompleksna električna snaga k -tog potrošača \underline{S}_k , računa se u uslovima kada električna struja \underline{I} prvo ulazi u tačku na potrošaču koja trenutno ima veći potencijal.

2.12 Uslov maksimalne aktivne snage na potrošaču

Kao što se moglo zaključiti iz prethodnog razmatranja, realni električni generatori raspolažu i vlastitom unutrašnjom impedansom \underline{Z}_g , koja se u razmatranom električnom krugu ponaša kao dodatni - parazitni potrošač. Kakva je uloga ove impedanse u odnosu na zahtjeve potrošača za aktivnom snagom, pokazat će razmatranja koja slijede.

U skladu s oznakama na **Slici 2.35**, pretpostavit će se da je impedansa potrošača određena relacijom: $\underline{Z}_n = R_n + j X_n$, (s R_n je označen aktivni, a s X_n reaktivni otpor impedanse \underline{Z}_n), dok je unutrašnja impedansa generatora definisana relacijom: $\underline{Z}_g = R_g + j X_g$.

Električna struja \underline{I} tada je određena relacijom:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_g} = \frac{\underline{U}_g}{(R_n + R_g) + j(X_g + X_n)}, \quad (2.105)$$

a kompleksna snaga analiziranog potrošača \underline{S}_n , relacijom:

$$\underline{S}_n = P_n + j Q_n = \underline{Z}_n \cdot I^2 = (R_n + j X_n) \cdot I^2. \quad (2.106)$$

Uzevši u obzir da se u električnom krugu sa *Slike 2.35*, za električnu struju \underline{I} može uspostaviti relacija:

$$\underline{I} \cdot \underline{I}^* = I^2 = \frac{U_g^2}{(R_n + R_g)^2 + (X_g + X_n)^2}, \quad (2.107)$$

aktivna električna snaga P_n je onda definisana relacijom:

$$P_n = R_n \cdot I^2 = R_n \cdot \frac{U_g^2}{(R_n + R_g)^2 + (X_g + X_n)^2}. \quad (2.108)$$

Aktivna električna snaga P_n , može se analizirati i kao funkcija argumenata R_n i X_n , dakle u formi $P_n = f(R_n, X_n)$, odnosno kao funkcija dvije promjenljive veličine R_n i X_n , koje određuju karakter potrošača \underline{Z}_n .

U skladu s potrebnim uslovima za određivanje tačaka u kojim funkcija više promjenljivih ima ekstremne vrijednosti, dobija se da su uslovi:

$$\frac{\partial P_n}{\partial R_n} = \frac{\partial [f(R_n, X_n)]}{\partial R_n} = 0,$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial X_n} = \frac{\partial [f(R_n, X_n)]}{\partial X_n} = 0,$$

ispunjeni ukoliko je: $(X_g + X_n) = 0$. S obzirom da impedansa generatora po pravilu ima induktivnu reaktansu, tada će se maksimalna aktivna snaga predavati potrošaču samo kada je njegova reaktansa kapacitivna. Aktivna otpornost i kod impedanse generatora i kod impedanse potrošača mora biti pozitivna. Stoga se u opisanim uslovima na potrošaču ostvaruje maksimalna korisna snaga ukoliko je: $X_g + X_n = 0$ i $R_n = R_g$. Drugim riječima, da bi se na potrošaču impedanse \underline{Z}_n

angažovala maksimalna aktivna snaga, pri datom naponu generatora U_g mora biti unutrašnja impedansa tog generatora usaglašena s impedansom potrošača i to tako da važi relacija: $\underline{Z}_g = (\underline{Z}_n)^*$, u kojoj $(\underline{Z}_n)^*$ predstavlja konjugirano - kompleksni izraz od \underline{Z}_n .

Treba primjetiti da se koeficijent korisnog dejstva prenosa električne snage u ovakvim uslovima može prihvatiti samo za male snage (s obzirom da se isti iznos aktivne električne snage angažuje i na unutrašnjoj impedansi generatora i na impedansi potrošača električne energije).

Kod snažnijih potrošača električne energije, aktivna električna snaga angažovana putem njihove impedanse, mora biti znatno veća od aktivne električne snage angažovane na unutrašnjoj impedansi generatora (odnos je čak dva reda veličine).

Ipak, saznanja dobijena tokom ove analize dobra su osnova za kvalitetno rješavanje problema racionalnog korištenja električne energije.

Charles Bukovski

- 1) **Feminizam postoji samo radi toga da bi se ružne žene integrirale u društvo.**

Burt Reynolds

- 2) **Svaka žena je bespomoćna dok se ne osuši lak na noktima.**

Princ Charles

- 3) **Tko u braku ne poludi, stvarno nije normalan.**

Shakespeare

- 4) **Bolje je biti dobro obješen nego loše oženjen.**

Dante Alighieri

- 5) **Žena ti kaže „Idi k vragu“. Ti odeš, a ona te i tamo dočeka.**

Casanova

- 6) **Lijepe žene su stvorene za muškarce koji nemaju mašte, a pametne za one koji nemaju sreće.**

Shakespeare

- 7) **Dobro otvori oči kada se ženiš, poslije ih zatvori.**

Shakespeare

- 8) **Nije zanimljivo ono što vam žene kažu, zanimljivo je ono što vam prešute.**

Petrarca

- 9) **Muškarac je sretan sa bilo kojom ženom, dok je ne zavoli.**

Charles Bukovski

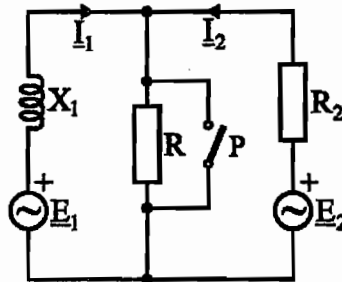
- 10) **Bog je izmislio pijanice da ružne žene ne ostaju same.**

Zadaci za samostalan rad uz glavu 2

Primjer 2.1

Za električni krug sa *slike 2.30* poznato je: $R = 8 \Omega$; $X_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 8 \Omega$. Kada je prekidač P zatvoren, kroz grane kruga s naponskim generatorima protiču struje: $\underline{I}_1 = -j3 \text{ A}$ i $\underline{I}_2 = 4 \text{ A}$.

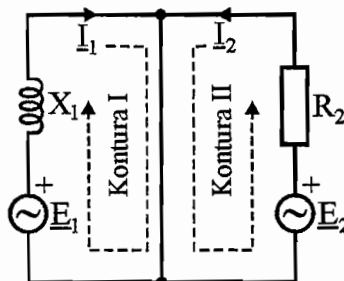
Odrediti fazor struje \underline{I}_R u grani s otpornikom R kada je prekidač P otvoren.



Slika 2.30 Shema električnog kruga uz primjer 2.1

Rješenje

Shema električnog kruga kod zatvorenog prekidača P prikazana je na *slici 2.30.1*.



Slika 2.30.1 Shema električnog kruga kod zatvorenog prekidača P

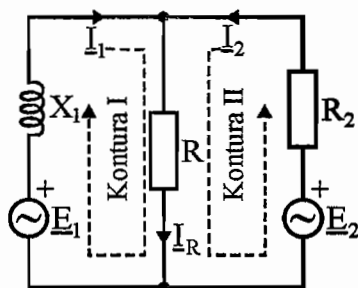
Za konturu I može se postaviti relacija:

$$\underline{E}_1 = \underline{I}_1 \cdot jX_1 = -j3 \cdot j3 = 9 \text{ V}.$$

Za konturu II vrijedi izraz:

$$\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \cdot R_2 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ V}.$$

Nakon određivanja fazora napona naponskih generatora može se analizirati režim rada kad je prekidač P otvoren. Shema električnog kruga kod otvorenog prekidača P prikazana je na *slici 2.30.2*.



Slika 2.30.2 Shema električnog kruga kod otvorenog prekidača P

Određivanje traženog fazora struje \underline{I}_R će biti provedeno direktnom primjenom Kirchhoffovih zakona. U krugu sa slike 2.30.2 postoje $N_N = 2$ čvora i $N_L = 3$ grane. Potrebni broj kontura za pisanje jednažbi po II Kirchhoffovom zakonu određuje se po relaciji:

$$N_K = N_L - (N_N - 1) = 2.$$

Odabrane konture s naznačenim smjerom obilaska prikazane su na slici 2.30.2.

Potrebni broj relacija napisanih primjenom I Kirchhoffovog zakona je:

$$N_N - 1 = 1.$$

Za konture I i II vrijede relacije:

$$\underline{E}_1 = \underline{I}_1 \cdot jX_1 + \underline{I}_R \cdot R;$$

$$\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \cdot R_2 + \underline{I}_R \cdot R.$$

Jednažba po I Kirchhoffovom zakonu glasi:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 + \underline{I}_2.$$

Nakon uvrštavanja relacije za \underline{I}_R u izraze za \underline{E}_1 i \underline{E}_2 i sređivanja, dobiva se sistem jednažbi u kojemu su nepoznate struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 :

$$\underline{E}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R + jX_1) + \underline{I}_2 \cdot R;$$

$$\underline{E}_2 = \underline{I}_1 \cdot R + \underline{I}_2 \cdot (R + R_2).$$

Determinanta sistema definirana je izrazom:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R + jX_1 & R \\ R & R + R_2 \end{vmatrix} = R \cdot R_2 + jX_1 \cdot (R + R_2) = (64 + j48) = 80 \cdot e^{j36,87^\circ}.$$

Determinante Δ_1 i Δ_2 su:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{E}_1 & R \\ \underline{E}_2 & R + R_2 \end{vmatrix} = \underline{E}_1 \cdot (R + R_2) - \underline{E}_2 \cdot R = -112$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{R} + j\mathbf{X}_1 & \underline{\mathbf{E}}_1 \\ \mathbf{R} & \underline{\mathbf{E}}_2 \end{vmatrix} = \underline{\mathbf{E}}_2 \cdot (\mathbf{R} + j\mathbf{X}_1) - \underline{\mathbf{E}}_1 \cdot \mathbf{R} = (184 + j96) = 207,5 \cdot e^{j27,55^\circ}$$

Struje $\underline{\mathbf{I}}_1$ i $\underline{\mathbf{I}}_2$ računaju se na osnovu prethodno određenih determinanti:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1,4 \cdot e^{-j36,87^\circ} = (-1,12 + j0,84) \text{ A};$$

$$\underline{\mathbf{I}}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2,59 \cdot e^{-j9,32^\circ} = (2,556 - j0,419) \text{ A}.$$

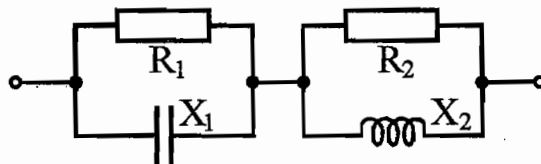
Tražena struja kroz otpornik \mathbf{R} je:

$$\underline{\mathbf{I}}_R = \underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 = (1,44 + j0,42) \text{ A}.$$

Primjer 2.2

Za složenu vezu radnih otpornosti i reaktansi prikazanu na slici 2.31 poznato je: $\mathbf{X}_1 = 2 \Omega$; $\mathbf{R}_1 = 4 \Omega$.

Odrediti radnu otpornost \mathbf{R}_2 i induktivnu reaktansu \mathbf{X}_2 tako da ukupna impedansa prikazanog spoja bude čisto radna i ima vrijednost $\underline{\mathbf{Z}} = 4 \Omega$.



Slika 2.31 Shema električnog kruga uz primjer 2.2

Rješenje

Impedanse paralelne veze radne otpornosti \mathbf{R}_1 i kapacitivne reaktanse \mathbf{X}_1 te paralelne veze radne otpornosti \mathbf{R}_2 i induktivne reaktanse \mathbf{X}_2 su:

$$\underline{\mathbf{Z}}_1 = \frac{\mathbf{R}_1 \cdot (-j\mathbf{X}_1)}{\mathbf{R}_1 - j\mathbf{X}_1} \quad \underline{\mathbf{Z}}_2 = \frac{\mathbf{R}_2 \cdot j\mathbf{X}_2}{\mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}_2}.$$

Ukupna impedansa spoja prikazanog na slici 2.31 je:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Z}}_1 + \underline{\mathbf{Z}}_2 &= -\frac{\mathbf{R}_1 \cdot j\mathbf{X}_1}{\mathbf{R}_1 - j\mathbf{X}_1} \cdot \frac{\mathbf{R}_1 + j\mathbf{X}_1}{\mathbf{R}_1 + j\mathbf{X}_1} + \frac{\mathbf{R}_2 \cdot j\mathbf{X}_2}{\mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}_2} \cdot \frac{\mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}_2}{\mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}_2} = \\ &= \left[\frac{\mathbf{X}_1^2 \cdot \mathbf{R}_1}{\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_1^2} + \frac{\mathbf{X}_2^2 \cdot \mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_2^2} \right] + j \left[\frac{\mathbf{R}_2^2 \cdot \mathbf{X}_2}{\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_2^2} - \frac{\mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{X}_1}{\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_1^2} \right]. \end{aligned}$$

Prema uvjetu datom u zadatku mora biti zadovoljeno:

$$\operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{Z}}\} = \left[\frac{\mathbf{X}_1^2 \cdot \mathbf{R}_1}{\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_1^2} + \frac{\mathbf{X}_2^2 \cdot \mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_2^2} \right] = 4 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\{\underline{\mathbf{Z}}\} = \left[\frac{\mathbf{R}_2^2 \cdot \mathbf{X}_2}{\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_2^2} - \frac{\mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{X}_1}{\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_1^2} \right] = 0.$$

Iz relacija za $R_e\{\underline{Z}\}$ i $I_m\{\underline{Z}\}$ se nakon uvrštavanja vrijednosti za R_1 i X_1 dobiva:

$$\frac{X_2^2 \cdot R_2}{R_2^2 + X_2^2} = 3,2 \quad \text{i} \quad \frac{R_2^2 \cdot X_2}{R_2^2 + X_2^2} = 1,6.$$

Nakon dijeljenja posljednje dvije relacije dobiva se:

$$X_2 = 2 \cdot R_2.$$

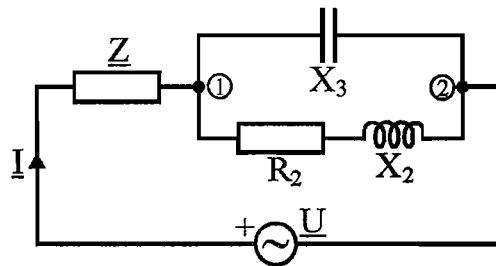
Kombiniranjem posljednjeg izraza i neke od prethodne dvije relacije dobiva se:

$$R_2 = 4 \Omega \quad \text{i} \quad X_2 = 8 \Omega.$$

Primjer 2.3

Za električni krug prikazan na slici 2.32 poznato je: $X_2 = 100 \Omega$; $R_2 = 40 \Omega$; $X_3 = 20 \Omega$. Efektivna vrijednost napona napajanja strujnog kruga je $U = 30 \text{ V}$, a efektivna vrijednost ukupne struje je $I = 12 \text{ A}$. Impedansa \underline{Z} je čisto reaktivna.

Odrediti karakter i veličinu impedanse \underline{Z} .



Slika 2.32 Shema električnog kruga uz primjer 2.3

Rješenje

Impedansa dijela električnog kruga između čvorova ① i ② definirana je izrazom:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{(R_2 + jX_2) \cdot (-jX_3)}{R_2 + j(X_2 - X_3)} = (2 - j24) \Omega.$$

Ukupna impedansa električnog kruga sa slike 2.32 je:

$$\underline{Z}_E = \underline{Z} + \underline{Z}_{12}.$$

Modul ukupne impedanse može se odrediti na osnovu efektivnih vrijednosti napona napajanja U i ukupne struje u krugu I :

$$Z_E = \frac{U}{I} = 2,5 \Omega.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, impedansa \underline{Z} mora biti čisto reaktivna. Dakle, postoje dvije mogućnosti:

1. impedansa \underline{Z} je čisto induktivna, tj. definirana je izrazom $\underline{Z} = j\mathbf{X}$, pri čemu je $\mathbf{X} > 0$;
2. impedansa \underline{Z} je čisto kapacitivna, tj. definirana je izrazom $\underline{Z} = -j\mathbf{X}$, pri čemu je $\mathbf{X} > 0$.

U nastavku će biti analizirana oba slučaja.

1. $\underline{Z} = j\mathbf{X}, \mathbf{X} > 0$

Izraz za ukupnu impedansu kruga u kompleksnom obliku je:

$$\underline{Z}_E = j\mathbf{X} + \underline{Z}_{12} = 2 + j(\mathbf{X} - 24).$$

Modul impedanse računa se po izrazu:

$$Z_E = \sqrt{4 + (\mathbf{X} - 24)^2} = 2,5.$$

Posljednji izraz predstavlja kvadratnu jednadžbu čijim se rješavanjem dobiva:

$$\mathbf{X}_1 = 25,5 \, \Omega \quad \text{i} \quad \mathbf{X}_2 = 22,5 \, \Omega.$$

Oba rješenja zadovoljavaju uvjet $\mathbf{X} > 0$, tako da impedansa \underline{Z} može biti zamijenjena idealnom zavojnicom reaktanse \mathbf{X}_1 ili \mathbf{X}_2 .

2. $\underline{Z} = -j\mathbf{X}, \mathbf{X} > 0$

Izraz za ukupnu impedansu kruga u kompleksnom obliku je:

$$\underline{Z}_E = -j\mathbf{X} + \underline{Z}_{12} = 2 - j(\mathbf{X} + 24).$$

Modul impedanse računa se po izrazu:

$$Z_E = \sqrt{4 + (\mathbf{X} + 24)^2} = 2,5.$$

Posljednji izraz predstavlja kvadratnu jednadžbu čijim se rješavanjem dobiva:

$$\mathbf{X}_1 = -25,5 \, \Omega \quad \text{i} \quad \mathbf{X}_2 = -22,5 \, \Omega.$$

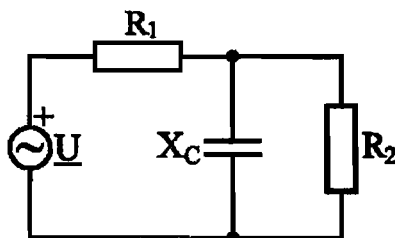
Oba rješenja ne zadovoljavaju uvjet $\mathbf{X} > 0$, tako da impedansa \underline{Z} ne može biti zamijenjena idealnim kondenzatorom.

Primjer 2.4

Za električni krug prikazan na slici 2.33 poznato je: $R_1 = 100 \Omega$, $X_C = 100 \Omega$.

Odrediti otpornost otpornika R_2 tako da odnos efektivnih vrijednosti pada napona na ovom otporniku U_2 i napona napajanja U zadovoljava

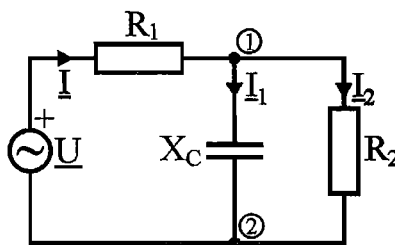
relaciju: $\frac{U_2}{U} = \frac{1}{2}$.



Slika 2.33 Shema električnog kruga uz primjer 2.4

Rješenje

Usvojit će se oznake i pretpostaviti smjerovi struja kao na slici 2.33.1.



Slika 2.33.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Kao referentni fazor odabire se fazor struje \underline{I}_2 , pa vrijedi:

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j0^\circ} = I_2,$$

gdje je I_2 efektivna vrijednost struje u grani s otpornikom R_2 . Napon na ovom otporniku \underline{U}_2 jednak je naponu \underline{U}_{12} između čvorova ① i ②.

S obzirom da napon na radnoj otpornosti i struja kroz tu otpornost imaju isti fazni stav, mora vrijediti:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{12} = U_2 \cdot e^{j0^\circ} = U_2.$$

Napon na idealnom kondenzatoru reaktanse X_C također je jednak naponu \underline{U}_2 . Struja \underline{I}_1 , koja prolazi kroz idealni kondenzator, fazno je pomjerena u odnosu na napon na tom kondenzatoru za $+90^\circ$, tako da vrijedi:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j90^\circ} = jI_1.$$

Efektivne vrijednosti struja \underline{I}_1 i \underline{I}_2 su:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{X}_C} \quad \text{i} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{R}_2}.$$

Izraz za ukupnu struju \underline{I} dobiva se primjenom I Kirchhoffovog zakona na čvor ①:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \cdot \left(\frac{j}{\underline{X}_C} + \frac{1}{\underline{R}_2} \right).$$

Izraz za ukupnu impedansu električnog kruga prikazanog na slici 2.33.1 u kompleksnom obliku je:

$$\underline{Z} = \underline{R}_1 + \frac{\underline{R}_2 \cdot (-j\underline{X}_C)}{\underline{R}_2 - j\underline{X}_C},$$

a za napon napajanja vrijedi:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \underline{U}_2 \cdot \left(\frac{j}{\underline{X}_C} + \frac{1}{\underline{R}_2} \right) \cdot \left[\underline{R}_1 + \frac{\underline{R}_2 \cdot (-j\underline{X}_C)}{\underline{R}_2 - j\underline{X}_C} \right] = \underline{U}_2 \cdot \left[\left(1 + \frac{\underline{R}_1}{\underline{R}_2} \right) + j \frac{\underline{R}_1}{\underline{X}_C} \right].$$

Efektivna vrijednost napona napajanja računa se po izrazu:

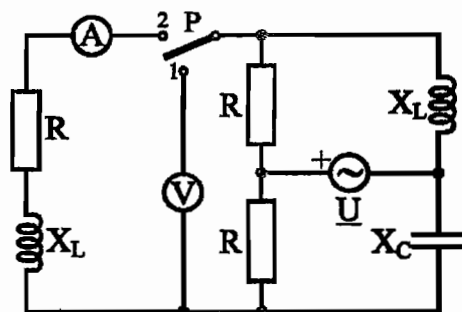
$$U = \sqrt{[\underline{R}_e \{ \underline{U} \}]^2 + [\underline{I}_m \{ \underline{U} \}]^2} = \underline{U}_2 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\underline{R}_1}{\underline{R}_2} \right)^2 + \left(\frac{\underline{R}_1}{\underline{X}_C} \right)^2}.$$

Nakon sređivanja prethodnog izraza i uvrštavanja vrijednosti za \underline{R}_1 , \underline{X}_C i odnos U/\underline{U}_2 dobiva se:

$$\underline{R}_2 = \frac{\underline{R}_1}{\sqrt{\left(\frac{U}{\underline{U}_2} \right)^2 - \left(\frac{\underline{R}_1}{\underline{X}_C} \right)^2} - 1} = 136,6 \, \Omega.$$

Primjer 2.5

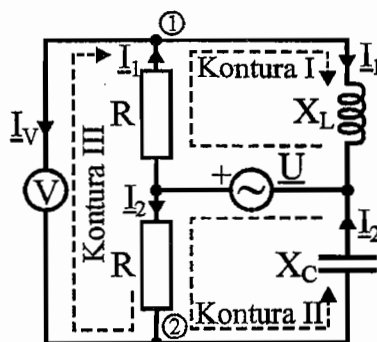
Za električni krug prikazan na slici 2.34 poznato je: $\underline{R} = \underline{X}_L = \underline{X}_C = 5 \, \Omega$. Kada je prekidač **P** u položaju 1, idealni voltmetar pokazuje $U_V = 10 \, \text{V}$. Korištenjem metode konturnih struja odrediti pokazivanje idealnog ampermetra \underline{I}_A kada se prekidač **P** prebaci u položaj 2.



Slika 2.34 Shema električnog kruga uz primjer 2.5

Rješenje

Shema električnog kruga kada je prekidač **P** u poziciji 1 prikazana je na slici 2.34.1.



Slika 2.34.1 Shema električnog kruga u slučaju da je prekidač **P** u poziciji 1

S obzirom da je, prema uvjetu datom u zadatku, voltmetar idealan, znači da ima beskonačno veliku unutrašnju otpornost ($R_V \rightarrow \infty$), odnosno da vrijedi:

$$I_V = 0.$$

Za krug prikazan na slici 2.34.1 vrijede slijedeće relacije:

- Kontura I: $\underline{U} = I_1 \cdot (\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L)$
- Kontura II: $\underline{U} = I_2 \cdot (\mathbf{R} - j\mathbf{X}_C)$
- Kontura III: $\underline{U}_{12} = \underline{U}_V = I_2 \cdot \mathbf{R} - I_1 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot (I_2 - I_1).$

Iz relacija napisanih za konture I i II dobiva se:

$$I_1 = I_2 \cdot \frac{\mathbf{R} - j\mathbf{X}_C}{\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L}.$$

Ako se fazor napona \underline{U}_{12} odabere kao referentni, može se pisati:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_V = U_V \cdot e^{j0^\circ} = U_V.$$

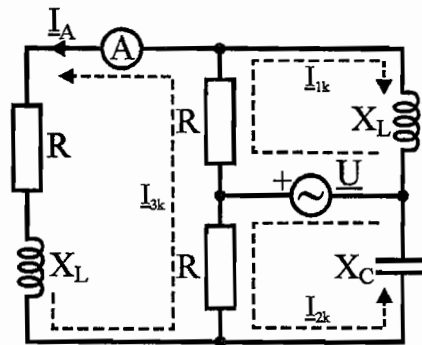
Nakon uvrštavanja izraza za struju \underline{I}_1 i napon \underline{U}_{12} u relaciju napisanu za konturu III i sređivanja, dobiva se:

$$\underline{I}_2 = U_V \cdot \frac{\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L}{\mathbf{R} \cdot j(\mathbf{X}_L + \mathbf{X}_C)} = \frac{U_V}{2\mathbf{R}} \cdot (1 - j) = (1 - j) \text{ A}.$$

Nakon uvrštavanja dobivenog izraza za struju \underline{I}_2 u relaciju napisanu po II Kirchhoffovom zakonu za konturu II, može se odrediti fazor napona naponskog generatora:

$$\underline{U} = \underline{I}_2 \cdot (\mathbf{R} - j\mathbf{X}_C) = -j10 \text{ V}.$$

Kada je prekidač \mathbf{P} u poziciji 2, shema električnog kruga prikazana je na slici 2.34.2.



Slika 2.34.2 Shema električnog kruga u slučaju da je prekidač \mathbf{P} u poziciji 2

Prema uvjetu datom u zadatku, određivanje struje ampermetra I_A treba biti provedeno primjenom metode konturnih struja. U krugu sa slike 2.34.2 postoje $N_N = 4$ čvora i $N_L = 6$ grana. Potrebni broj kontura za pisanje jednadžbi po metodi konturnih struja određuje se po relaciji:

$$N_K = N_L - (N_N - 1) = 3.$$

Odabrane konture s naznačenim pretpostavljenim smjerovima konturnih struja prikazane su na slici 2.34.2.

Sistem jednadžbi napisan primjenom metode konturnih struja glasi:

$$\underline{U} = \underline{I}_{1k} \cdot (\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L) + \underline{I}_{3k} \cdot \mathbf{R};$$

$$\underline{U} = \underline{I}_{2k} \cdot (\mathbf{R} - j\mathbf{X}_C) - \underline{I}_{3k} \cdot \mathbf{R};$$

$$0 = \underline{I}_{3k} \cdot (3\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L) - \underline{I}_{2k} \cdot \mathbf{R} + \underline{I}_{1k} \cdot \mathbf{R}.$$

Kod pisanja prethodnog sistema jednažbi uzeta je u obzir činjenica da je ampermetar idealan, odnosno da je njegova unutrašnja otpornost jednaka nuli ($R_A = 0$).

Sa sheme prikazane na slici 2.34.2 vidi se da vrijedi:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{3k},$$

što znači da kod rješavanja sistema jednažbi treba odrediti samo konturnu struju \underline{I}_{3k} .

Ako se iz prve dvije jednažbe sistema izraze struje \underline{I}_{1k} i \underline{I}_{2k} , dobiva se:

$$\underline{I}_{1k} = \frac{U - \underline{I}_{3k} \cdot R}{R + jX_L} \quad \text{i} \quad \underline{I}_{2k} = \frac{U + \underline{I}_{3k} \cdot R}{R - jX_C}.$$

Nakon uvrštavanja izraza za struje \underline{I}_{1k} i \underline{I}_{2k} u treću jednažbu sistema i sređivanja dobiva se:

$$\underline{I}_{3k} = \frac{jU}{R \cdot (2 + j)} = (0,8 - j0,4) \text{ A}.$$

Ampermetar pokazuje efektivnu vrijednost struje \underline{I}_{3k} :

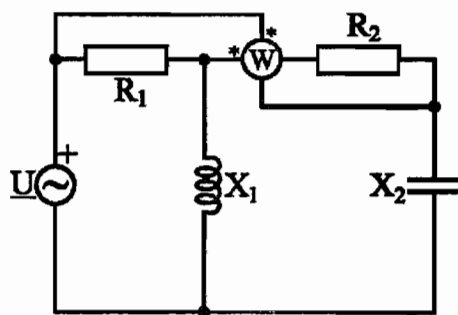
$$I_A = \sqrt{[R_e \{ \underline{I}_{3k} \}]^2 + [I_m \{ \underline{I}_{3k} \}]^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,4^2} = 0,894 \text{ A}.$$

Primjer 2.6

Za električni krug prikazan na slici 2.35 poznato je:

$U = 120 \text{ V}$; $R_1 = 10 \text{ } \Omega$; $R_2 = 20 \text{ } \Omega$; $X_1 = 40 \text{ } \Omega$; $X_2 = 20 \text{ } \Omega$.

Odrediti pokazivanje idealnog vatmetra P_W .



Slika 2.35 Shema električnog kruga uz primjer 2.6

Rješenje

Kod rješavanja zadatka koristit će se direktna primjena Kirchhoffovih zakona. U krugu sa slike 2.35 postoje $N_N = 2$ čvora i $N_L = 3$ grane.

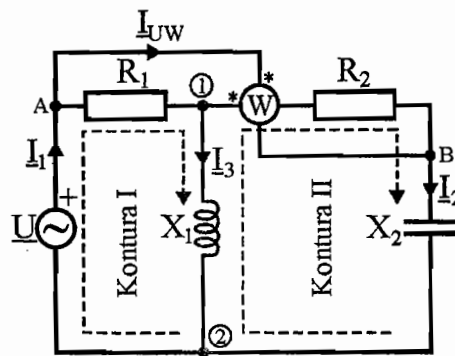
Potrebni broj kontura za pisanje jednađbi po II Kirchhoffovom zakonu određuje se po relaciji:

$$N_K = N_L - (N_N - 1) = 2.$$

Potrebni broj relacija napisanih primjenom I Kirchhoffovog zakona je:

$$N_N - 1 = 1.$$

Odabrane konture s naznačenim smjerovima obilaska i pretpostavljeni smjerovi struja u granama kruga prikazani su na slici 2.35.1.



Slika 2.35.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i smjerovima obilaska kontura

S obzirom da je vatmetar idealan, za otpornost naponske grane vrijedi $R_{Uw} \rightarrow \infty$, odnosno kroz ovu granu ne protiče struja ($I_{Uw} = 0$). Za otpornost strujne grane vatmetra vrijedi $R_{Iw} = 0$, tako da protjecanje struje I_2 kroz ovu granu ne izaziva pad napona. Fazor napona izvora \underline{U} će biti odabran kao referentni:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ} = U.$$

Za konture I i II vrijede slijedeće relacije napisane primjenom II Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R}_1 + \underline{I}_3 \cdot j\underline{X}_1;$$

$$0 = \underline{I}_2 \cdot (\underline{R}_2 - j\underline{X}_2) - \underline{I}_3 \cdot j\underline{X}_1.$$

Jednađba napisana za čvor ① po I Kirchhoffovom zakonu glasi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

Ako se iz posljednje relacije izrazi struja \underline{I}_3 i dobiveni izraz uvrsti u prve dvije jednađbe, dobiva se sistem s dvije jednađbe:

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \cdot (\underline{R}_1 + j\underline{X}_1) - \underline{I}_2 \cdot j\underline{X}_1;$$

$$0 = -\underline{I}_1 \cdot j\underline{X}_1 + \underline{I}_2 \cdot (\underline{R}_2 - j\underline{X}_2 + j\underline{X}_1).$$

Iz druge jednadžbe sistema izrazi se struja \underline{I}_1 :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cdot \frac{\underline{R}_2 - j\underline{X}_2 + j\underline{X}_1}{j\underline{X}_1},$$

a nakon uvrštavanja dobivenog izraza i numeričkih podataka u prvu jednadžbu sistema dobiva se fazor struje koja teče kroz strujnu granu vatmetra:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\frac{(\underline{R}_1 + j\underline{X}_1) \cdot (\underline{R}_1 + j\underline{X}_1 - j\underline{X}_2)}{j\underline{X}_1} - j\underline{X}_1} = 2,4 \cdot (1 + j) = 3,39 \cdot e^{j45^\circ} \text{ A}.$$

Nakon uvrštavanja numeričkih podataka u izraz za struju \underline{I}_1 dobiva se:

$$\underline{I}_1 = 2,4 \text{ A}.$$

Napon između tačkaka priključenja naponske grane vatmetra A i B računa se po izrazu:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{R}_2 = (72 + j48) = 86,53 \cdot e^{j33,7^\circ} \text{ V}.$$

Iz izraza za fazore napona \underline{U}_{AB} i struje \underline{I}_2 vidi se da su fazni stavovi ovih veličina:

$$\varphi_U = 33,7^\circ \quad \text{i} \quad \varphi_I = 45^\circ.$$

Može se zaključiti da ugao između fazora napona \underline{U}_{AB} i struje \underline{I}_2 iznosi:

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = -11,3^\circ,$$

odnosno fazor napona \underline{U}_{AB} zaostaje u odnosu na fazor struje \underline{I}_2 za ugao φ .

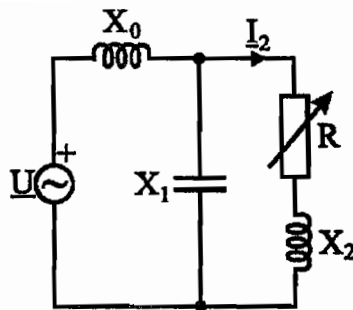
Vatmetar mjeri aktivnu snagu P koja se računa na osnovu ugla $\varphi = -11,3^\circ$ te efektivnih vrijednosti napona naponske grane $U_{AB} = 86,53 \text{ V}$ i struje strujne grane $I_2 = 3,39 \text{ A}$ po izrazu:

$$P = U_{AB} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi = 287,65 \text{ W}.$$

Primjer 2.7

Za električni krug prikazan na slici 2.36 poznato je: $U = 100 \text{ V}$; $X_1 = 10 \Omega$.

- Koji odnos mora postojati između reaktansi X_1 i X_0 pa da struja I_2 ne ovisi o otpornosti otpornika R ?
- Odrediti fazor struje \underline{I}_2 ako je poznato da ova struja ne ovisi o otpornosti otpornika R .



Slika 2.36 Shema električnog kruga uz primjer 2.7

Rješenje

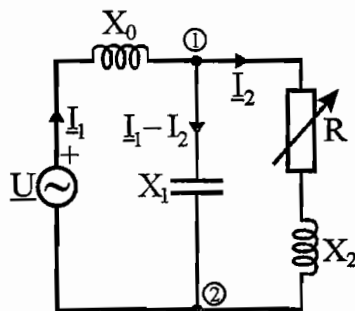
Pretpostavit će se smjerovi struja u preostalim granama električnog kruga kao što je prikazano na slici 2.36.1.

Impedansa dijela kruga između čvorova ① i ② je:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{(\mathbf{R} + j\mathbf{X}_2) \cdot (-j\mathbf{X}_1)}{\mathbf{R} + j(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)},$$

a ukupna impedansa prikazanog električnog kruga je:

$$\underline{Z} = j\mathbf{X}_0 + \underline{Z}_{12} = j\mathbf{X}_0 + \frac{(\mathbf{R} + j\mathbf{X}_2) \cdot (-j\mathbf{X}_1)}{\mathbf{R} + j(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)}.$$



Slika 2.36.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Ako se s \underline{U}_{12} označi napon između čvorova ① i ②, za struju \underline{I}_2 vrijedi:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{12}}{\mathbf{R} + j\mathbf{X}_2}.$$

Napon \underline{U}_{12} može se odrediti po izrazu:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{12}$$

odakle se nakon uvrštavanja u prethodnu relaciju za struju \underline{I}_2 dobiva:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{12}}{\underline{R} + j\underline{X}_2}$$

Ukupna struja u krugu može se odrediti po relaciji:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

pa se za struju \underline{I}_2 konačno dobiva izraz:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z} \cdot (\underline{R} + j\underline{X}_2)} \cdot \underline{U}$$

Nakon uvrštavanja relacija za impedanse \underline{Z}_{12} i \underline{Z} u posljednju relaciju i sređivanja dobiva se:

$$\underline{I}_2 = \frac{-j\underline{X}_1}{\underline{X}_1 \cdot \underline{X}_2 - \underline{X}_0 \cdot (\underline{X}_2 - \underline{X}_1) + j\underline{R} \cdot (\underline{X}_0 - \underline{X}_1)} \cdot \underline{U}$$

Struja \underline{I}_2 neće ovisiti o otpornosti otpornika \underline{R} samo ako je član u posljednjoj relaciji u kojem se pojavljuje ova otpornost jednak nuli:

$$\underline{R} \cdot (\underline{X}_0 - \underline{X}_1) = 0.$$

Posljednja jednadžba zadovoljena je ako vrijedi:

$$\underline{X}_1 = \underline{X}_0.$$

Dakle, reaktanse \underline{X}_1 i \underline{X}_0 moraju biti međusobno jednake da struja \underline{I}_2 ne bi ovisila o otpornosti otpornika \underline{R} .

U ovom slučaju za struju \underline{I}_2 vrijedi:

$$\underline{I}_2 = \frac{-j\underline{X}_1}{\underline{X}_1 \cdot \underline{X}_2 - \underline{X}_0 \cdot (\underline{X}_2 - \underline{X}_1)} \cdot \underline{U} = \frac{-j\underline{X}_1}{\underline{X}_1 \cdot \underline{X}_2 - \underline{X}_1 \cdot \underline{X}_2 + \underline{X}_1^2} \cdot \underline{U} = -j \frac{\underline{U}}{\underline{X}_1}$$

Ako se pretpostavi da je fazor napona izvora referentni, odnosno da vrijedi:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ} = U,$$

nakon uvrštavanja numeričkih podataka dobiva se:

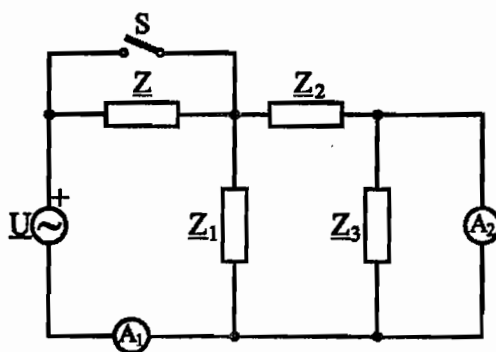
$$\underline{I}_2 = -j10 \text{ A}.$$

Primjer 2.8

U električnom krugu prostoperiodičnih struja i napona, čija je električna shema prikazana na slici 2.37, pri zatvorenom prekidaču S idealni ampermetri A_1 i A_2 imaju slijedeća pokazivanja: $I_{A1} = 11 \text{ A}$; $I_{A2} = 1 \text{ A}$.

Za prikazani električni krug poznati su slijedeći podaci: $\underline{U} = 10 \text{ V}$; $\underline{Z} = -j10 \Omega$; sva preostala trošila u krugu su idealni linearni stacionarni kondenzatori.

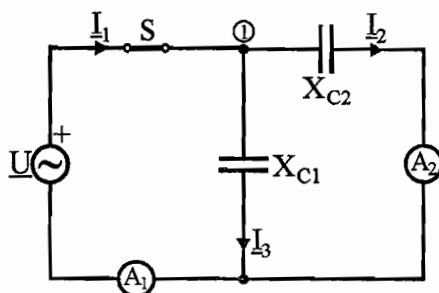
Odrediti pokazivanja ampermetara A_1 i A_2 kada se otvori prekidač S.



Slika 2.37 Shema električnog kruga uz primjer 2.8

Rješenje

Kad je prekidač S zatvoren, shema razmatranog električnog kruga prikazana je na slici 2.37.1.



Slika 2.37.1 Shema električnog kruga u slučaju da je prekidač S zatvoren

Reaktansa kondenzatora X_{C2} može se odrediti po relaciji:

$$X_{C2} = \frac{U}{I_2} = 10 \Omega.$$

Fazor struje I_2 određuje se po izrazu:

$$I_2 = \frac{U}{-jX_{C2}} = 1 \cdot e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

Ukupna impedansa električnog kruga je:

$$\underline{Z}_E = \frac{-jX_{C1} \cdot (-jX_{C2})}{-jX_{C1} - jX_{C2}} = \frac{X_{C1} \cdot X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} \cdot e^{-j90^\circ}.$$

Za fazor struje \underline{I}_1 vrijedi slijedeća relacija:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_E} = 11 \cdot e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

Za fazor struje \underline{I}_3 vrijedi slijedeća relacija:

$$\underline{I}_3 = \frac{U}{-jX_{C1}} = I_3 \cdot e^{j90^\circ}.$$

Za čvor ① može se napisati relacija po I Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3,$$

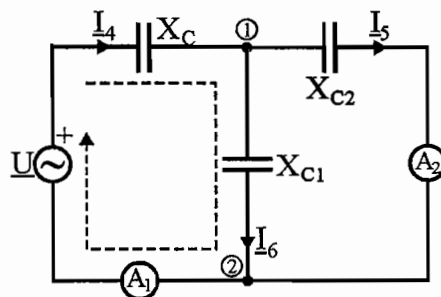
odakle se dobiva:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 10 \text{ A}.$$

Reaktansa kondenzatora X_{C1} može se odrediti po relaciji:

$$X_{C1} = \frac{U}{I_3} = 1 \Omega.$$

Shema razmatranog električnog kruga nakon otvaranja prekidača S , prikazana je na slici 2.37.2.



Slika 2.37.2 Shema električnog kruga u slučaju da je prekidač S otvoren

Ukupna impedansa električnog kruga prikazanog na slici 2.37.2 je:

$$\underline{Z}_E = -jX_C + \left(-j \cdot \frac{X_{C1} \cdot X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2}} \right) = -j \frac{120}{11} \Omega.$$

Fazor struje \underline{I}_4 je:

$$\underline{I}_4 = \frac{U}{\underline{Z}_E} = \frac{11}{12} \cdot e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

Ampermetar A_1 pokazuje efektivnu vrijednost struje \underline{I}_4 , pa vrijedi:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{11}{12} \text{ A} = 0,9167 \text{ A}.$$

Za konturu naznačenu na slici 2.37.2 može se postaviti relacija po II Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U} - (-j\mathbf{X}_C) \cdot \underline{I}_4 = \frac{10}{12} \text{ V}.$$

Fazor struje \underline{I}_5 je:

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{12}}{-j\mathbf{X}_{C2}} = \frac{1}{12} \cdot e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

Ampermetar A_2 pokazuje efektivnu vrijednost struje \underline{I}_5 , pa vrijedi:

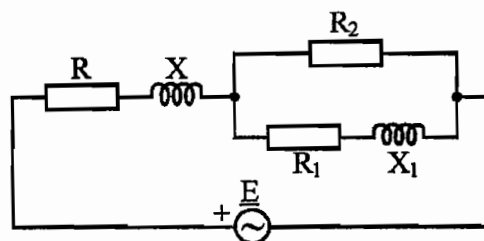
$$\underline{I}_{A2} = \frac{1}{12} \text{ A} = 0,0833 \text{ A}.$$

Primjer 2.9

Za električni krug sa slike 2.38 poznato je:

$R = 3 \Omega$; $X = 9 \Omega$; $R_1 = 20 \Omega$; $X_1 = 10 \Omega$.

Odrediti otpor R_2 tako da ukupna struja u krugu fazno zaostaje u odnosu na napon napajanja za $\pi/4$ radijana.



Slika 2.38 Shema električnog kruga uz primjer 2.9

Rješenje

Ukupna impedansa električnog kruga u kompleksnom obliku data je relacijom:

$$\underline{Z} = R + jX + \frac{(R_1 + jX_1) \cdot R_2}{(R_1 + R_2) + jX_1}.$$

Ukupna struja u električnom krugu računa se po izrazu:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}},$$

gdje je \underline{E} kompleksni izraz za napon napajanja.

Ako se usvoji pretpostavka $\underline{E} = Ee^{j0^\circ} = E$, tada iz uvjeta datog u zadatku da ukupna struja mora fazno zaostajati za naponom napajanja za ugao $\varphi = \pi/4 \text{ rad} = 45^\circ$, slijedi da se ukupna struja u kompleksnom obliku može predstaviti izrazom:

$$\underline{I} = Ie^{-j\varphi} = \frac{E}{Z} e^{-j\varphi} = \frac{E}{Ze^{j\varphi}} = \frac{E}{\underline{Z}}.$$

U posljednjoj relaciji \underline{I} predstavlja efektivnu vrijednost ukupne struje, E je efektivna vrijednost napona napajanja, a Z modul impedanse.

Iz relacija za struju \underline{I} dobiva se: $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$.

Nakon razdvajanja realnog i imaginarnog dijela u izrazu za impedansu \underline{Z} dobiva se:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + R_2 \frac{R_1 \cdot (R_1 + R_2) + X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} + j \left[X + \frac{X_1 \cdot R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} \right].$$

Argument kompleksnog broja \underline{Z} , tj. ugao impedanse φ , može se odrediti iz izraza:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}45^\circ = 1 = \frac{I_m\{\underline{Z}\}}{R_e\{\underline{Z}\}}.$$

Posljednja relacija pokazuje da će fazni pomak između napona napajanja i ukupne struje u krugu biti 45° ako su realni dio impedanse $R_e\{\underline{Z}\}$ i imaginarni dio impedanse $I_m\{\underline{Z}\}$ međusobno jednaki. Dakle, mora biti zadovoljeno:

$$R + R_2 \frac{R_1 \cdot (R_1 + R_2) + X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} = X + \frac{X_1 \cdot R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2}.$$

Nakon sređivanja posljednjeg izraza dobiva se kvadratna jednadžba:

$$R_2^2(R + R_1 - X - X_1) + R_2(R_1^2 + X_1^2 + 2RR_1 - 2R_1X) + (R_1^2 + X_1^2)(R - X) = 0$$

koja nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti dobiva slijedeći oblik:

$$R_2^2 + 65R_2 - 750 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su: $(R_2)_1 = 10 \Omega$ i $(R_2)_2 = -75 \Omega$.

S obzirom da aktivni otpor ne može biti negativan, konačno se dobiva:

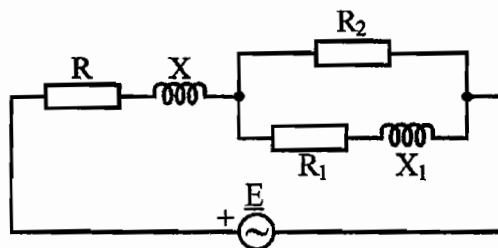
$$R_2 = 10 \Omega.$$

Primjer 2.10

Za električni krug sa slike 2.39 poznato je:

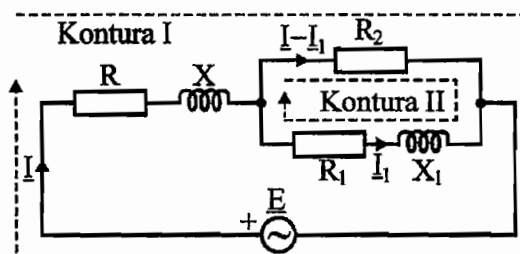
$$\mathbf{R} = 5 \Omega; \mathbf{X} = 11 \Omega; \mathbf{R}_1 = 10 \Omega; \mathbf{X}_1 = 25 \Omega.$$

Odrediti otpor \mathbf{R}_2 tako da struja u grani s otporom \mathbf{R}_1 i reaktansom \mathbf{X}_1 fazno zaostaje u odnosu na napon napajanja za $\pi/2$ radijana.



Slika 2.39 Shema električnog kruga uz primjer 2.10

Rješenje



Slika 2.39.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i smjerovima obilaska kontura

Pretpostave se smjerovi struja kao na slici 2.39.1 i odaberu dvije konture ($\mathbf{N}_K = \mathbf{N}_L - \mathbf{N}_N + 1 = 2$) za koje se postave relacije po II Kirchoffovom zakonu:

$$\text{Kontura I: } \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{R} + j\mathbf{X}) + (\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{I}}_1) \cdot \mathbf{R}_2;$$

$$\text{Kontura II: } 0 = (\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{I}}_1)\mathbf{R}_2 - \underline{\mathbf{I}}_1 \cdot (\mathbf{R}_1 + j\mathbf{X}_1).$$

Iz relacije za konturu II se nakon sređivanja dobiva:

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}_1}{\mathbf{R}_2} \cdot \underline{\mathbf{I}}_1.$$

Nakon uvrštavanja posljednje relacije u izraz za konturu I i sređivanja, dobiva se:

$$\underline{\mathbf{E}} = \left[\frac{(\mathbf{R} + \mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}_1)}{\mathbf{R}_2} - \mathbf{R}_2 \right] \cdot \underline{\mathbf{I}}_1.$$

U posljednjoj relaciji \underline{E} je kompleksni izraz za napon napajanja za koji se može pretpostaviti da vrijedi:

$$\underline{E} = E e^{j0^\circ} = E.$$

Iz uvjeta datog u zadatku, da struja \underline{I}_1 mora fazno zaostajati za naponom napajanja za ugao $\varphi = \pi/2$ radijana = 90° , slijedi da se ova struja u kompleksnom obliku može predstaviti izrazom:

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{-j90^\circ} = I_1 \cdot (\cos 90^\circ - j \sin 90^\circ) = -j I_1,$$

gdje je I_1 efektivna vrijednost struje u grani s otporom R_1 i reaktansom X_1 .

Nakon sređivanja posljednja tri izraza dobiva se:

$$E = \left[-j \frac{(R + R_2) \cdot (R_1 + R_2) - X \cdot X_1 - R_2^2}{R_2} + \frac{X_1 \cdot (R + R_2) + X \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} \right] \cdot I_1 = A - jB.$$

Za posljednji izraz vrijedi:

- s lijeve strane znaka jednakosti nalazi se kompleksan broj koji ima realni dio različit od nule, a imaginarni dio jednak nuli;
- s desne strane znaka jednakosti nalazi se kompleksan broj, čiji su realni dio A i imaginarni dio B različiti od nule.

Dva kompleksna broja međusobno su jednaka ako su im jednaki i realni i imaginarni dijelovi. Dakle, da bi lijeva strana posljednjeg izraza bila jednaka njegovoj desnoj strani, mora imaginarni dio B biti jednak nuli:

$$B = I_1 \cdot \frac{(R + R_2) \cdot (R_1 + R_2) - X \cdot X_1 - R_2^2}{R_2} = 0.$$

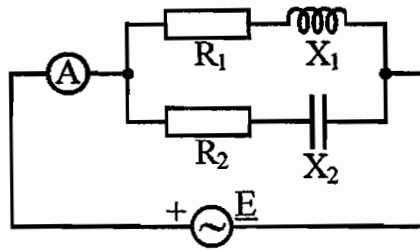
Nakon sređivanja posljednjeg izraza, i uz uzimanje u obzir da vrijedi $I_1 \neq 0$, dobiva se:

$$R_2 = \frac{X \cdot X_1 - R \cdot R_1}{R + R_1} = 15 \Omega.$$

Primjer 2.11

Odrediti aktivnu snagu u električnom krugu prikazanom na slici 2.40 ako idealni ampermetar pokazuje $I_A = 3,36$ A.

Poznato je: $R_1 = 5 \Omega$; $X_1 = 5 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$; $X_2 = 10 \Omega$.



Slika 2.40 Shema električnog kruga uz primjer 2.11

Rješenje

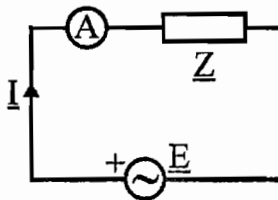
Ukupna impedansa električnog kruga u kompleksnom obliku data je relacijom:

$$\underline{Z} = \frac{(\underline{R}_1 + j\underline{X}_1) \cdot (\underline{R}_2 - j\underline{X}_2)}{(\underline{R}_1 + \underline{R}_2) + j(\underline{X}_1 - \underline{X}_2)}$$

Nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti u izraz za \underline{Z} , dobiva se:

$$\underline{Z} = (6 + j2) \Omega.$$

Ekvivalentni električni krug koji se dobiva nakon određivanja ukupne impedanse prikazan je na slici 2.40.1.



Slika 2.40.1 Shema ekvivalentnog električnog kruga

Ampermetar mjeri efektivnu vrijednost struje \underline{I} , pa vrijedi:

$$I_A = I = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{I}\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{I}\}]^2}.$$

Član $\operatorname{Re}\{\underline{I}\}$ predstavlja realni, a član $\operatorname{Im}\{\underline{I}\}$ predstavlja imaginarni dio kompleksnog izraza za struju \underline{I} .

Aktivna snaga u električnom krugu sa slike 2.40.1 može se odrediti na osnovu kompleksnog izraza za prividnu snagu \underline{S} :

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}^* = \underline{I} \cdot \underline{Z} \cdot \underline{I}^* = I^2 \cdot \underline{Z} = I_A^2 \cdot \underline{Z} = P + jQ.$$

\underline{I}^* predstavlja konjugirano-kompleksni izraz za struju \underline{I} , P je aktivna, a Q reaktivna snaga u električnom krugu.

Aktivna snaga P određuje se po relaciji:

$$P = I_A^2 \cdot R_e\{\underline{Z}\}.$$

Član $R_e\{\underline{Z}\}$ predstavlja realni dio kompleksnog izraza za impedansu \underline{Z} .
(Iz $\underline{Z} = (6 + j2) \Omega \Rightarrow R_e\{\underline{Z}\} = 6 \Omega$).

Nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti dobiva se:

$$P = 67,7 \text{ W}.$$

Da je bilo potrebno odrediti i reaktivnu snagu Q , mogla bi se izračunati po relaciji:

$$Q = I_A^2 \cdot I_m\{\underline{Z}\}.$$

Član $I_m\{\underline{Z}\}$ predstavlja imaginarni dio kompleksnog izraza za impedansu \underline{Z} .

(Iz $\underline{Z} = (6 + j2) \Omega \Rightarrow I_m\{\underline{Z}\} = 2 \Omega$).

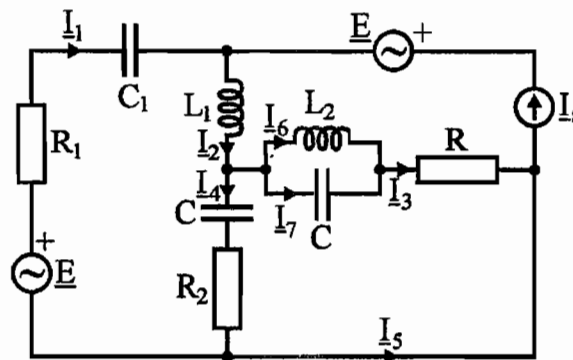
Primjer 2.12

Za električni krug sa slike 2.41 poznati su slijedeći podaci:

$\underline{E} = (20 + j50) \text{ V}$; $\underline{I}_S = 5 \text{ A}$; $\omega = 5000 \text{ rad/s}$; $C = 50 \mu\text{F}$; $C_1 = 40 \mu\text{F}$;

$L_1 = L_2 = 0,8 \text{ mH}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 4 \Omega$; $R = 5 \Omega$.

Primjenom metode struja kontura odrediti struje u granama električnog kruga.



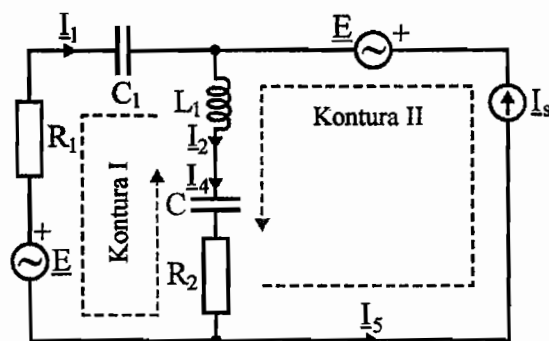
Slika 2.41 Shema električnog kruga uz primjer 2.12

Rješenje

U razmatranom električnom krugu postoji paralelna veza zavojnice induktiviteta L_2 i kondenzatora kapaciteta C . U tom slučaju može doći do pojave strujne (paralelne) rezonance. Radi toga će se prvo provjeriti da li je u tom dijelu kruga zaista nastupila rezonanca. Impedansa ove paralelne veze je:

$$\underline{Z}_{L_2C} = \frac{j\omega L_2 \cdot \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}} = -j \frac{\omega L_2 C}{C \cdot (\omega^2 L_2 C - 1)} \rightarrow \infty.$$

Dakle, impedansa ovog dijela kruga je beskonačna, odnosno admitansa \underline{Y}_{L_2C} je jednaka nuli, što je pokazatelj da je nastupila strujna rezonanca. U tom dijelu krug se ponaša kao da je u prekidu, što znači da kroz granu 3 neće teći nikakva struja. Može se zaključiti da vrijedi: $\underline{I}_3 = 0$ A. U ovom slučaju nema potrebe da se analizira grana 3, pa se polazna shema kruga može pojednostaviti kako je pokazano na slici 2.41.1.



Slika 2.41.1 Shema pojednostavljenog električnog kruga

U krugu sa slike 2.41.1 odabrane su dvije konture s naznačenim smjerovima obilaska. Potreban broj kontura određen je na osnovu broja grana $N_L = 3$ i broja čvorova $N_N = 2$, po izrazu $N_K = N_L - N_N + 1 = 2$. Da bi se mogle odrediti struje grana neophodno je izračunati konturne struje \underline{I}_{1k} i \underline{I}_{2k} . Prvo se postavlja jednačba po II Kirchoffovom zakonu za konturu I:

$$-\underline{E} = \underline{I}_{1k} \cdot \left(R_1 - j\frac{1}{\omega C_1} \right) + (\underline{I}_{1k} - \underline{I}_{2k}) \cdot \left(R_2 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C} \right).$$

Kontura II sadrži idealni strujni generator \underline{I}_S . Zato nema potrebe postavljati jednačbu po II Kirchoffovom zakonu za ovu konturu, jer je struja konture po iznosu jednaka struji strujnog generatora. S obzirom da se orijentacija konture i smjer djelovanja generatora slažu, struja konture ima pozitivan predznak. Dakle, vrijedi:

$$\underline{I}_{2k} = \underline{I}_S.$$

Nakon rješavanja sistema kojeg čine jednačbe napisane za konture I i II i uvrštavanja numeričkih vrijednosti, dobiva se:

$$\underline{I}_{1k} = (5 - j5) \text{ A}; \quad \underline{I}_{2k} = 5 \text{ A}.$$

Nakon što su određene struje kontura može se početi s određivanjem struja grana. Sa sheme prikazane na slici 2.41.1 vidi se da vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_4 = \underline{I}_{2k} - \underline{I}_{1k} = 5 - 5 + j5 = j5 \text{ A};$$

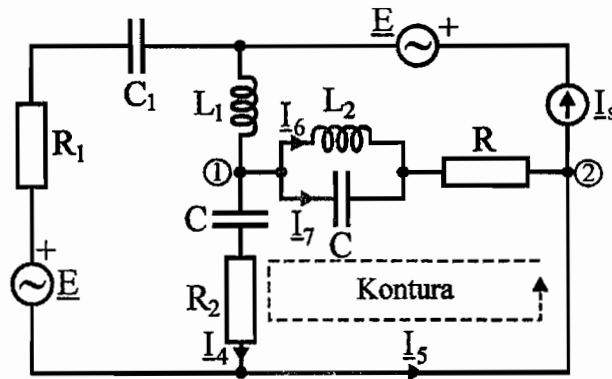
$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_{1k} = (-5 + j5) \text{ A};$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{2k} = \underline{I}_S = 5 \text{ A}.$$

Ranije je dobiveno:

$$\underline{I}_3 = 0 \text{ A}.$$

Za određivanje struja \underline{I}_6 i \underline{I}_7 koristit će se shema prikazana na slici 2.41.2.



Slika 2.41.2 Shema električnog kruga za određivanje struja \underline{I}_6 i \underline{I}_7

Napon između čvorova ① i ② dat je relacijom:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_4 \cdot \left(\underline{R}_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) + \underline{I}_5 \cdot 0 = (20 + j20) \text{ V}.$$

Tražene struje određuju se prema izrazima:

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{U}_{12}}{j\omega L_2} = (5 - j5) \text{ A};$$

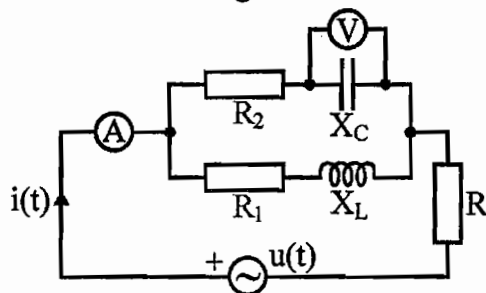
$$\underline{I}_7 = \frac{\underline{U}_{12}}{1/j\omega C} = \underline{U}_{12} \cdot j\omega C = (-5 + j5) \text{ A}.$$

Primjer 2.13

Idealni voltmetar priključen u električnom krugu prikazanom na slici 2.42 pokazuje $U_V = 50 \text{ V}$. Poznati su slijedeći podaci:

$R = R_2 = X_L = X_C = 10 \ \Omega$; $R_1 = 5 \ \Omega$.

- Odrediti pokazivanje idealnog ampermetra.
- Napisati izraze za trenutne vrijednosti napona $u(t)$ i struje $i(t)$.
- Odrediti aktivnu i reaktivnu snagu u električnom krugu.

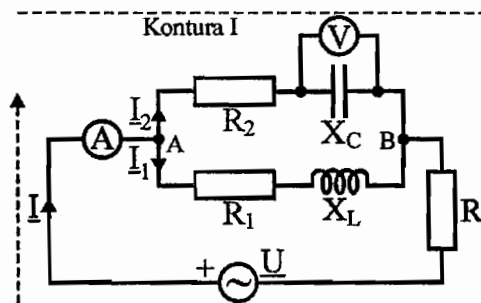


Slika 2.42 Shema električnog kruga uz primjer 2.13

Rješenje

a.)

Pretpostave se oznake i smjerovi struja kao na slici 2.42.1.



Slika 2.42.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i smjerom obilaska konture

Proračun efektivne vrijednosti struje I_2 :

$$I_2 = \frac{U_V}{X_C} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}.$$

Kompleksni izraz za impedansu grane s aktivnim otporom R_2 i kapacitivnom reaktansom X_C je:

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_C = 10 - j10 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} \cdot e^{-j \arctg \frac{X_C}{R_2}} = 10\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} \ \Omega.$$

Efektivna vrijednost napona U_{AB} (napon između čvorova označenih na slici 2.42.1 s A i B) je:

$$U_{AB} = I_2 \cdot Z_2 = I_2 \cdot \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = 5 \cdot 10\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \text{ V.}$$

Kompleksni izraz za impedansu grane s aktivnim otporom R_1 i induktivnom reaktansom X_L je:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 5 + j10 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} \cdot e^{j \arctg \frac{X_L}{R_1}} = 5\sqrt{5} \cdot e^{j63.43^\circ} \Omega.$$

Proračun efektivne vrijednosti struje I_1 :

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{Z_1} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = \frac{50\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{10} \text{ A.}$$

Za čvor A vrijedi slijedeća relacija napisana po I Kirchoffovom zakonu:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2.$$

Dakle, za određivanje fazora struje \underline{I} neophodno je poznavati fazore struja \underline{I}_1 i \underline{I}_2 , tj. pored njihovih efektivnih vrijednosti moraju se odrediti i njihovi fazni stavovi.

Pretpostavi se da je fazor napona \underline{U}_{AB} referentni, tj. da vrijedi:

$$\underline{U}_{AB} = U_{AB} e^{j0^\circ} = U_{AB}.$$

Proračun fazora struja \underline{I}_1 i \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{AB}}{Z_1} = \frac{U_{AB}}{R_1 + jX_L} = \frac{50\sqrt{2}}{5\sqrt{5} \cdot e^{j63.43^\circ}} = 2\sqrt{10} \cdot e^{-j63.43^\circ} = (2,829 - j5,657) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{AB}}{Z_2} = \frac{U_{AB}}{R_1 - jX_C} = \frac{50\sqrt{2}}{10\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}} = 5 \cdot e^{j45^\circ} = (3,536 + j3,536) \text{ A.}$$

Nakon uvrštavanja izraza za struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 u relaciju za \underline{I} , dobiva se:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (2,829 - j5,657) + (3,536 + j3,536) = (6,365 - j2,121) \text{ A.}$$

Ampermetar mjeri efektivnu vrijednost struje I :

$$I_A = I = \sqrt{[R_e \{I\}]^2 + [I_m \{I\}]^2} = \sqrt{6,365^2 + 2,121^2} = 3\sqrt{5} \text{ A.}$$

b.)

Izraz kojim se definira fazor struje \underline{I} može se zapisati i na slijedeći način:

$$\underline{I} = \sqrt{6,365^2 + 2,121^2} \cdot e^{-j \arctg \frac{2,121}{6,365}} = 3\sqrt{5} \cdot e^{-j18,43^\circ} \text{ A.}$$

Posljednji izraz pokazuje da struja \underline{I} zaostaje za referentnim fazorom za ugao $\varphi_I = 18,43^\circ$ i da ima efektivnu vrijednost:

$$I = 3\sqrt{5} \text{ A}.$$

Opći oblik relacije za vremensku promjenu neke prostoperiodične veličine $x(t)$ je:

$$x(t) = X_m \cdot \sin(\omega t \pm \varphi) = X\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t \pm \varphi).$$

Ista ova veličina se u obliku fazora može predstaviti na slijedeći način:

$$\underline{X} = X e^{\pm j\varphi}.$$

U posljednjim izrazima je s X_m označena maksimalna, a s X efektivna vrijednost veličine.

Izraz za vremensku promjenu struje $i(t)$ je:

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi_I) = 3\sqrt{10} \cdot \sin(\omega t - 18,43^\circ) \text{ A}.$$

Za određivanje vremenske promjene napona izvora $u(t)$ potrebno je prvo naći izraz za fazor \underline{U} . Ako se za konturu naznačenu na slici 2.42.1 napiše relacija po II Kirchoffovom zakonu, dobiva se:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_{AB} + \underline{I} \cdot \underline{R} = 134,36 - j21,21 = \\ &= \sqrt{134,36^2 + 21,21^2} \cdot e^{-j \arctan \frac{21,21}{134,36}} = 136 \cdot e^{-j8,97^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

Fazor napona \underline{U} ima efektivnu vrijednost $U = 136 \text{ V}$ i kasni u odnosu na referentni fazor za ugao $\varphi_U = 8,97^\circ$, pa je vremenska promjena napona $u(t)$ data izrazom:

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi_U) = 136\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 8,97^\circ) \text{ V}.$$

Izrazi za $i(t)$ i $u(t)$ pokazuju da napon $u(t)$ prednjači struji $i(t)$, tj. da je ukupna impedansa električnog kruga radno-induktivnog karaktera.

c.)

Ukupna prividna snaga računa se kao proizvod napona \underline{U} i konjugirano-kompleksne vrijednosti struje \underline{I}^* :

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ = 136 \cdot e^{-j8,97^\circ} \cdot 3\sqrt{5} \cdot e^{j18,43^\circ} = \\ &= 912,316 \cdot e^{j9,46^\circ} = (900 + j150) \text{ VA}. \end{aligned}$$

Vidi se da vrijedi: $P = \text{Re}\{\underline{S}\}$ (aktivna snaga) i $Q = \text{Im}\{\underline{S}\}$ (reaktivna snaga), pa je:

$$P = 900 \text{ W}; \quad Q = 150 \text{ VAR}.$$

Aktivna i reaktivna snaga kruga mogle su se odrediti i na slijedeći način.

Ukupna impedansa razmatranog električnog kruga je:

$$\underline{Z} = \mathbf{R}_E + j\mathbf{X}_E = \mathbf{R} + \frac{(\mathbf{R}_1 + j\mathbf{X}_L) \cdot (\mathbf{R}_2 - j\mathbf{X}_C)}{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) + j(\mathbf{X}_L - \mathbf{X}_C)} = (10 + j3,33) \Omega.$$

Proračun aktivne snage:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}^2 \cdot \mathbf{R}_E = (3\sqrt{5})^2 \cdot 10 = 900 \text{ W}.$$

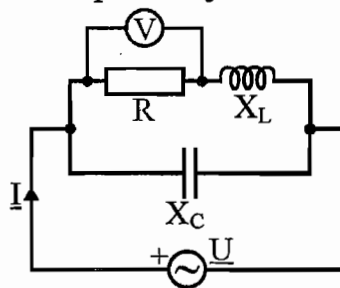
Proračun reaktivne snage:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}^2 \cdot \mathbf{X}_E = (3\sqrt{5})^2 \cdot 3,33 = 150 \text{ VAr}.$$

Primjer 2.14

U električnom krugu prikazanom na *slici 2.43* poznati su slijedeći podaci o elementima kruga: $\mathbf{R} = 10 \Omega$; $\mathbf{X}_L = 10 \Omega$; $\mathbf{X}_C = 20 \Omega$. Pokazivanje idealnog voltmetara je $U_V = 20 \text{ V}$.

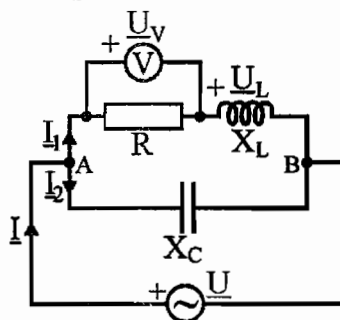
Odrediti efektivnu vrijednost ukupne struje \mathbf{I} .



Slika 2.43 Shema električnog kruga uz primjer 2.14

Rješenje

Pretpostave se smjerovi struja i polariteti napona kao na *slici 2.43.1*.



Slika 2.43.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i napona

Za struju \underline{I}_1 vrijedi:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_V}{R}.$$

Ako se pretpostavi da je fazor napona \underline{U}_V referentni, vrijedi:

$$\underline{U}_V = U_V e^{j0^\circ} = U_V.$$

Nakon uvrštavanja izraza za napon \underline{U}_V u relaciju za struju \underline{I}_1 i unosa numeričkih vrijednosti, dobiva se:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_V}{R} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}.$$

Pad napona na induktivnoj reaktansi X_L može se izračunati na slijedeći način:

$$\underline{U}_L = \underline{I}_1 \cdot jX_L = 2 \cdot j10 = j20 = 20e^{j90^\circ} \text{ V}.$$

Sa sheme prikazane na *slici 2.43.1* vidi se da vrijedi:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_V + \underline{U}_L = 20 + j20 = \sqrt{20^2 + 20^2} \cdot e^{j \arctg \frac{20}{20}} = 20\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ V}.$$

Struja \underline{I}_2 kroz kapacitivnu reaktansu X_C može se izračunati na slijedeći način:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{-jX_C} = \frac{20\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}}{20 \cdot e^{-j90^\circ}} = \sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ} = (-1 + j) \text{ A}.$$

Za čvor koji je na *slici 2.43.1* označen s A vrijedi slijedeća relacija napisana primjenom I Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2 - 1 + j = (1 + j) \text{ A}.$$

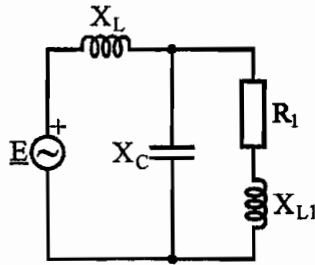
Efektivna vrijednost fazora struje \underline{I} računa se po relaciji:

$$I = \sqrt{[R_e \{\underline{I}\}]^2 + [I_m \{\underline{I}\}]^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ A}.$$

Primjer 2.15

Shema električnog kruga prikazana je na *slici 2.44*. U ovom krugu treba ostvariti slijedeći uvjet: struja u grani s otporom R_1 i reaktansom X_{L1} i pad napona na reaktansi X_L trebaju biti međusobno fazno pomjereni za ugao π radijana.

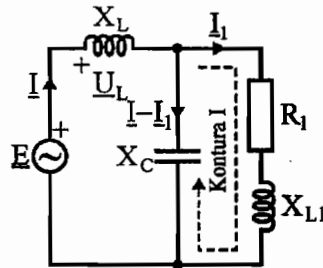
Kakav odnos mora postojati između parametara kruga da bi se postigao navedeni uvjet?



Slika 2.44 Shema električnog kruga uz primjer 2.15

Rješenje

Pretpostave se smjerovi struja kao na slici 2.44.1 i za naznačenu konturu postavi se relacija po II Kirchhoffovom zakonu.



Slika 2.44.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i smjerom obilaska konture

Kontura I:

$$\underline{I}_1 \cdot (\underline{R}_1 + j\underline{X}_{L1}) - (\underline{I} - \underline{I}_1) \cdot (-j\underline{X}_C) = 0.$$

S obzirom na pretpostavljeni polaritet napona \underline{U}_L , vrijedi i relacija:

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot j\underline{X}_L.$$

Nakon uvrštavanja posljednjeg izraza u relaciju napisanu za konturu I i sređivanja, dobiva se:

$$\underline{I}_1 \cdot [\underline{R}_1 + j(\underline{X}_{L1} - \underline{X}_C)] = -\frac{\underline{X}_C}{\underline{X}_L} \cdot \underline{U}_L.$$

Ako se pretpostavi da je referentni fazor napona \underline{U}_L na reaktansi \underline{X}_L , vrijedi relacija:

$$\underline{U}_L = U_L e^{j0^\circ} = U_L.$$

- U zadatku je dat uvjet da struja \underline{I}_1 mora biti fazno pomjerena u odnosu na napon \underline{U}_L za ugao $\varphi = \pi \text{ rad} = 180^\circ$. S obzirom da je pretpostavljeno da je fazor napona \underline{U}_L referentni, tj. da vrijedi $\underline{U}_L = U_L \cdot e^{j0^\circ}$, fazor struje \underline{I}_1 može prednjačiti ili zaostajati u odnosu na \underline{U}_L za 180° .

Dakle, fazor struje \underline{I}_1 može se predstaviti izrazom:

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{\pm j180^\circ} = I_1 \cdot (\cos 180^\circ \pm j \sin 180^\circ) = -I_1.$$

U posljednjem izrazu I_1 predstavlja efektivnu vrijednost ove struje. Predznak + odgovara slučaju da struja prednjači naponu \underline{U}_L , a predznak – odgovara slučaju da struja kasni za naponom \underline{U}_L .

Nakon sređivanja posljednja tri izraza, dobiva se:

$$I_1 \cdot R_1 + jI_1 \cdot (X_{L1} - X_C) = \frac{X_C}{X_L} \cdot U_L.$$

Da bi lijeva i desna strana posljednje relacije bile međusobno jednake, mora imaginarni dio lijeve strane relacije biti jednak nuli, jer član na desnoj strani također ima imaginarni dio jednak nuli. Dakle, mora vrijediti:

$$I_1 \cdot (X_{L1} - X_C) = 0.$$

S obzirom da vrijedi $I_1 \neq 0$, konačno se dobiva:

$$X_{L1} = X_C.$$

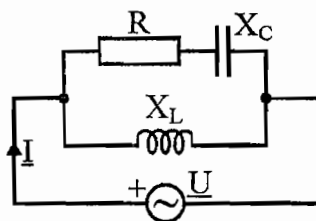
Primjer 2.16

Serijska veza idealnog otpornika otpornosti $R = 100 \Omega$ i idealnog kondenzatora kapacitivnosti $C = 10 \mu\text{F}$ predstavlja trošilo. Ovo trošilo priključeno je na izvor prostoperiodičnog napona kružne frekvencije $\omega = 314 \text{ rad/s}$.

Odrediti induktivnost zavojnice L koju treba priključiti paralelno trošilu da bi faktor snage trošila postao maksimalan.

Rješenje

Shema električnog kruga koji nastaje nakon priključenja zavojnice prikazana je na slici 2.45.



Slika 2.45 Shema električnog kruga nakon priključenja zavojnice

Kondenzator kapacitivnosti C ima reaktansu:

$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$

a zavojnica induktivnosti L ima reaktansu:

$$X_L = \omega L.$$

Maksimalna vrijednost faktora snage trošila je $\cos\varphi = 1$. U ovom slučaju fazor napona izvora \underline{U} i fazor ukupne struje u električnom krugu \underline{I} imaju isti fazni stav. To znači da postoji samo radna komponenta ukupne impedanse odnosno admitanse električnog kruga, dok su reaktivne komponente jednake nuli. Da bi se to postiglo u krugu mora nastupiti rezonancija. S obzirom na strukturu kruga, može nastupiti samo strujna (paralelna) rezonancija. Ukupna admitansa prikazanog električnog kruga je:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1 - jX_C} + \frac{1}{jX_L} = \frac{RX_L^2}{(X_L X_C)^2 + (X_L R)^2} + jX_L \cdot \frac{X_C(X_L - X_C) - R^2}{(X_L X_C)^2 + (X_L R)^2} = G + jB.$$

Kako je ranije rečeno, faktor snage je $\cos\varphi = 1$ ako vrijedi:

$$B = X_L \cdot \frac{X_C(X_L - X_C) - R^2}{(X_L X_C)^2 + (X_L R)^2} = 0.$$

Iz posljednje relacije se dobiva:

$$X_L = \frac{R^2 + X_C^2}{X_C} = \frac{\omega^2 R^2 C^2 + 1}{\omega C},$$

odnosno:

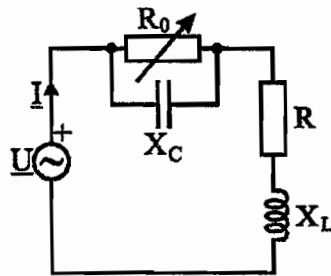
$$L = \frac{\omega^2 R^2 C^2 + 1}{\omega^2 C} = 1,11 \text{ H}.$$

Primjer 2.17

Za električni krug prikazan na slici 2.46 poznato je:

$$U = 100 \text{ V}; R = 15 \Omega; X_L = 5 \Omega; X_C = 10 \Omega.$$

- Odrediti otpornost otpornika R_0 uz koju će u električnom krugu nastupiti rezonancija.
- Odrediti efektivnu vrijednost ukupne struje I ako je u električnom krugu nastupila rezonancija.



Slika 2.46 Shema električnog kruga uz primjer 2.17

Rješenje

Impedanse paralelne veze radne otpornosti R_0 i kapacitivne reaktanse X_C te serijske veze radne otpornosti R i induktivne reaktanse X_L su:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_0 \cdot (-jX_C)}{R_0 - jX_C} \quad \underline{Z}_2 = R + jX_L.$$

Ukupna impedansa u električnom krugu prikazanom na slici 2.17 je:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \left[R + \frac{X_C^2 R_0}{R_0^2 + X_C^2} \right] + j \left[X_L - \frac{R_0^2 X_C}{R_0^2 + X_C^2} \right] = R_e \{ \underline{Z} \} + jI_m \{ \underline{Z} \}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, u krugu treba nastupiti naponska (serijska) rezonancija. Uvjet nastanka ove rezonancije je:

$$I_m \{ \underline{Z} \} = X_L - \frac{R_0^2 X_C}{R_0^2 + X_C^2} = 0.$$

Rješavanjem posljednje jednadžbe dobiva se:

$$R_0 = X_C \cdot \sqrt{\frac{X_L}{X_C - X_L}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{5}{10 - 5}} = 10 \Omega.$$

Ako u krugu vlada rezonancija, za impedansu \underline{Z} vrijedi:

$$\underline{Z} = R_e \{ \underline{Z} \} = R + \frac{X_C^2 R_0}{R_0^2 + X_C^2} = 15 + \frac{10^2 \cdot 10}{10^2 + 10^2} = 20 \Omega.$$

Efektivna vrijednost ukupne struje I računa se po izrazu:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{20} = 5 \text{ A}.$$

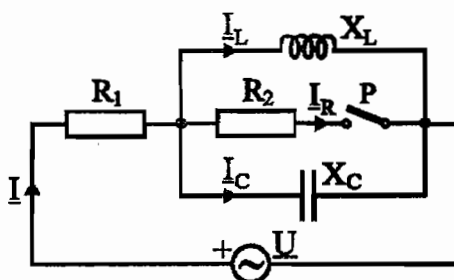
Fazori napona \underline{U} i struje \underline{I} imaju isti fazni stav.

Primjer 2.18

Za električni krug prikazan na slici 2.47 poznato je:

$$U = 120 \text{ V}; R_1 = R_2 = X_L = X_C = 25 \Omega.$$

- Odrediti efektivnu vrijednost ukupne struje I i efektivne vrijednosti struja grana I_L i I_C ako je prekidač P otvoren.
- Odrediti efektivnu vrijednost ukupne struje I i efektivne vrijednosti struja grana I_L , I_C i I_R ako je prekidač P zatvoren.



Slika 2.47 Shema električnog kruga uz primjer 2.18

Rješenje

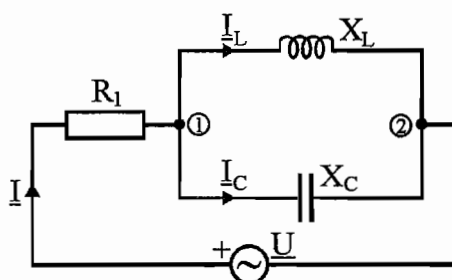
a.

Shema električnog kruga kod otvorenog prekidača P prikazana je na slici 2.47.1. Između čvorova ① i ② paralelno su spojeni idealni kondenzator i idealna zavojnica koji imaju međusobno jednake reaktanse. Radi toga je impedansa ovog dijela električnog kruga beskonačno velika, odnosno došlo je do prekida kruga:

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{j(X_L - X_C)} \rightarrow \infty.$$

S obzirom da se krug nalazi u prekidu, vrijedi:

$$I = 0 \text{ A}.$$



Slika 2.47.1 Shema električnog kruga u slučaju da je prekidač P otvoren

Kroz otpornik R_1 ne teče struja, što znači da na ovom otporniku nema pada napona. Radi toga je napon između čvorova ① i ② jednak naponu izvora U :

$$U_{12} = U.$$

Efektivna vrijednost struje kroz zavojnicu je:

$$I_L = \frac{U_{12}}{X_L} = 4,8 \text{ A}.$$

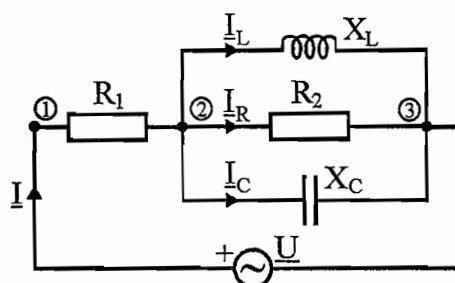
Efektivna vrijednost struje kroz kondenzator je:

$$I_C = \frac{U_{12}}{X_C} = I_L = 4,8 \text{ A}.$$

Dakle, ove dvije struje imaju istu efektivnu vrijednost, ali su međusobno fazno pomjerene za 180° .

b.

Shema električnog kruga kod zatvorenog prekidača P prikazana je na slici 2.47.2.



Slika 2.47.2 Shema električnog kruga u slučaju da je prekidač P zatvoren

Admitansa dijela kruga između čvorova ② i ③ je:

$$\underline{Y}_{23} = \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{-jX_C}.$$

Impedansa ovog dijela kruga je:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{1}{\underline{Y}_{23}} = \frac{R_2 X_L X_C}{X_L X_C + jR_2 \cdot (X_L - X_C)}.$$

S obzirom da vrijedi $R_2 = X_L = X_C$, posljednji izraz može se napisati u obliku:

$$\underline{Z}_{23} = R_2 = 25 \Omega.$$

Ukupna impedansa električnog kruga prikazanog na slici 2.47.2 je:

$$\underline{Z} = R_1 + \underline{Z}_{23} = R_1 + R_2 = 50 \Omega.$$

Impedansa je čisto aktivna, a njen modul je: $Z = 50 \Omega$.
 Efektivna vrijednost ukupne struje I je:

$$I = \frac{U}{Z} = 2,4 \text{ A}.$$

Za određivanje napona između čvorova ② i ③ koristi se relacija napisana po II Kirchhoffovom zakonu:

$$U_{23} = U - I \cdot R_1 = 60 \text{ V}.$$

Kod pisanja posljednje relacije uzeta je u obzir činjenica da fazori struje \underline{I} i napona izvora \underline{U} imaju isti fazni stav. Efektivne vrijednosti struja kroz zavojnicu, kondenzator i otpornik su:

$$I_L = \frac{U_{23}}{X_L} = 2,4 \text{ A};$$

$$I_C = \frac{U_{23}}{X_C} = 2,4 \text{ A};$$

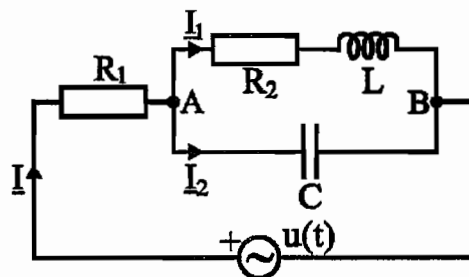
$$I_R = \frac{U_{23}}{R_2} = 2,4 \text{ A}.$$

Primjer 2.19

Za električni krug prikazan na slici 2.48 poznato je:

$$u(t) = 50\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}; R_1 = R_2 = 40 \Omega; L = 20 \text{ mH}; C = 4 \mu\text{F}.$$

- Odrediti kružnu frekvenciju generatora ω pri kojoj će u električnom krugu nastupiti strujna rezonancija.
- Odrediti fazore struja \underline{I} , \underline{I}_1 i \underline{I}_2 i fazor napona \underline{U}_{AB} ako je u električnom krugu nastupila strujna rezonancija.
- Odrediti prividnu snagu \underline{S} ako je u električnom krugu nastupila strujna rezonancija.



Slika 2.48 Shema električnog kruga uz primjer 2.19

Rješenje

a.

Strujna (paralelna) rezonancija može nastupiti u dijelu električnog kruga između čvorova A i B gdje su paralelno vezani kondenzator kapaciteta C i zavojnica induktivnosti L. Admitansa ovog dijela električnog kruga je:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{AB} &= \frac{1}{R_2 + jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{R_2 - jX_L}{R_2^2 + X_L^2} + j\frac{1}{X_C} = \\ &= \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} + j\frac{R_2^2 + X_L^2 - X_C X_L}{X_C(R_2^2 + X_L^2)} = G_{AB} + jB_{AB}.\end{aligned}$$

Uvjet nastanka strujne rezonancije je:

$$B_{AB} = \frac{R_2^2 + X_L^2 - X_C X_L}{X_C(R_2^2 + X_L^2)} = 0,$$

što je zadovoljeno ako vrijedi:

$$R_2^2 + X_L^2 - X_C X_L = 0.$$

Ako se u posljednju jednadžbu uvrste izrazi za reaktanse kondenzatora i zavojnice:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{i} \quad X_L = \omega L,$$

nakon sređivanja se dobiva:

$$\omega = \sqrt{\frac{L - R_2^2 C}{L^2 C}} = 2915,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b.

Reaktanse kondenzatora i zavojnice su:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 85,75 \Omega;$$

$$X_L = \omega L = 58,3 \Omega.$$

Ukupna impedansa prikazanog električnog kruga ima radni karakter i računa se po izrazu:

$$\underline{Z} = R_1 + \underline{Z}_{AB} = R_1 + \frac{1}{G_{AB}} = R_1 + \frac{R_2^2 + X_L^2}{R_2} = 165 \Omega.$$

Iz izraza za vremensku promjenu napona izvora $u(t)$ može se zaključiti:

- efektivna vrijednost napona: $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 50 \text{ V}$;
- početna faza: $\varphi_U = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$.

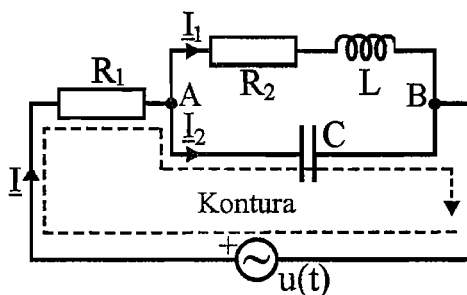
Izraz za napon izvora u kompleksnom obliku je:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_U} = 50 \cdot e^{j90^\circ} = j50 \text{ V} .$$

Ukupna struja u električnom krugu je:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = j0,303 = 0,303 \cdot e^{j90^\circ} \text{ A} .$$

Za određivanje napona između čvorova A i B može se napisati relacija po II Kirchhoffovom zakonu za konturu označenu na slici 2.48.1.



Slika 2.48.1 Shema električnog kruga s naznačenim smjerom obilaska konture

Za označenu konturu vrijedi:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U} - \underline{I} \cdot \underline{R}_1 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{AB} = j37,9 = 37,9 \cdot e^{j90^\circ} \text{ V} .$$

Struje u paralelno vezanim granama električnog kruga su:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{R}_2 + j\underline{X}_L} = 0,536 \cdot e^{j34,45^\circ} \text{ A} ;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{-j\underline{X}_C} = 0,442 \cdot e^{j180^\circ} = -0,442 \text{ A} .$$

c.

Ukupna prividna snaga je:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 50 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 0,303 \cdot e^{-j90^\circ} = 15,15 \text{ W} .$$

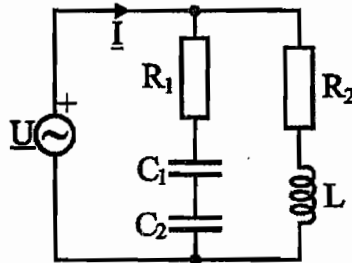
U posljednjoj relaciji je s \underline{I}^* označena konjugirano-kompleksna vrijednost struje. Izraz za prividnu snagu ima samo realni dio, odnosno generator u električni krug predaje samo aktivnu snagu dok je reaktivna jednaka nuli.

Primjer 2.20

Za električni krug prikazan na slici 2.49 poznato je:

$U = 4000 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 20 \text{ } \Omega$; $L = 1 \text{ mH}$; $C_1 = C_2 = 0,2 \text{ } \mu\text{F}$.

Odrediti kružnu frekvenciju generatora ω pri kojoj će u električnom krugu nastupiti rezonancija, a zatim odrediti impedansu kruga \underline{Z} , fazor ukupne struje \underline{I} i snagu P .



Slika 2.49 Shema električnog kruga uz primjer 2.20

Rješenje

S obzirom na paralelnu vezu kondenzatora i zavojnice, u krugu može nastupiti jedino strujna (paralelna) rezonancija. Kondenzatori imaju isti kapacitet, pa vrijedi $X_{C1} = X_{C2} = X_C$. Admitansa grane sa serijskom vezom radne otpornosti R_1 i kondenzatora C_1 i C_2 je:

$$\underline{Y}_{RC} = \frac{1}{R_1 - jX_{C1} - jX_{C2}} = \frac{1}{R_1 - j2X_C}.$$

Admitansa grane sa serijskom vezom radne otpornosti R_2 i zavojnice L je:

$$\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R_2 + jX_L}.$$

Ukupna admitansa električnog kruga je:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_{RC} + \underline{Y}_{RL} = \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + R_1 X_L^2 + 4R_2 X_C^2}{(R_1 R_2 + 2X_L X_C)^2 + (R_1 X_L - 2R_2 X_C)^2} + j \frac{2X_C (X_L^2 + R_2^2) - X_L (4X_C^2 + R_1^2)}{(R_1 R_2 + 2X_L X_C)^2 + (R_1 X_L - 2R_2 X_C)^2} = G + jB.$$

Uvjet nastanka strujne rezonancije je:

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{X}_C(\mathbf{X}_L^2 + \mathbf{R}_2^2) - \mathbf{X}_L(4\mathbf{X}_C^2 + \mathbf{R}_1^2)}{(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + 2\mathbf{X}_L\mathbf{X}_C)^2 + (\mathbf{R}_1\mathbf{X}_L - 2\mathbf{R}_2\mathbf{X}_C)^2} = 0,$$

što je zadovoljeno ako vrijedi:

$$2\mathbf{X}_C(\mathbf{X}_L^2 + \mathbf{R}_2^2) - \mathbf{X}_L(4\mathbf{X}_C^2 + \mathbf{R}_1^2) = 0.$$

Ako se u posljednju jednadžbu uvrste izrazi za reaktanse kondenzatora i zavojnice, uz uzimanje u obzir $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}$:

$$\mathbf{X}_C = \frac{1}{\omega\mathbf{C}} \quad \text{i} \quad \mathbf{X}_L = \omega\mathbf{L},$$

nakon sređivanja se dobiva:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\mathbf{L} - 2\mathbf{R}_2^2\mathbf{C}}{2\mathbf{L}^2\mathbf{C} - \mathbf{R}_1^2\mathbf{L}\mathbf{C}^2}} = 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Reaktanse kondenzatora i zavojnice su:

$$\mathbf{X}_C = \frac{1}{\omega\mathbf{C}} = 50 \Omega;$$

$$\mathbf{X}_L = \omega\mathbf{L} = 100 \Omega.$$

Admitansa električnog kruga je:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} = \frac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) + \mathbf{R}_1\mathbf{X}_L^2 + 4\mathbf{R}_2\mathbf{X}_C^2}{(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + 2\mathbf{X}_L\mathbf{X}_C)^2 + (\mathbf{R}_1\mathbf{X}_L - 2\mathbf{R}_2\mathbf{X}_C)^2} = 3,846 \text{ mS},$$

a impedansa:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}} = 260 \Omega.$$

Ako se fazor napona generatora $\underline{\mathbf{U}}$ odabere kao referentni, može se pisati:

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \cdot e^{j0^\circ} = \mathbf{U}.$$

Fazor ukupne struje ima isti fazni stav kao i fazor napona $\underline{\mathbf{U}}$ i može se izračunati po relaciji:

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{Z}}} = 15,4 \text{ A}.$$

Generator u električni krug predaje samo aktivnu snagu jer je $\cos\varphi = 1$ (φ je ugao između fazora napona $\underline{\mathbf{U}}$ i struje $\underline{\mathbf{I}}$).

Ova snaga može se odrediti po izrazima:

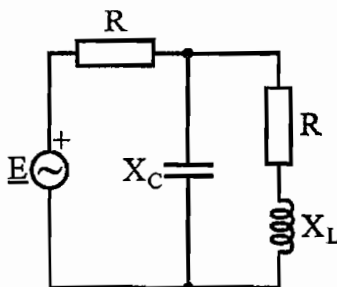
$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R_e \{Z\} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 = 61,66 \text{ kW} .$$

U posljednjoj relaciji s I_1 i I_2 označene su efektivne vrijednosti struja koje teku kroz otpornosti R_1 i R_2 . Ove struje mogu se odrediti prema izrazima:

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + 4X_C^2}} \quad \text{i} \quad I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} .$$

Primjer 2.21

Odrediti reaktansu X_C pri kojoj u električnom krugu prikazanom na slici 2.50 nastupa strujna rezonancija, a zatim nacrtati fazorski dijagram napona i struja. Poznato je: $R = 6 \Omega$; $X_L = 8 \Omega$.



Slika 2.50 Shema električnog kruga uz primjer 2.21

Rješenje

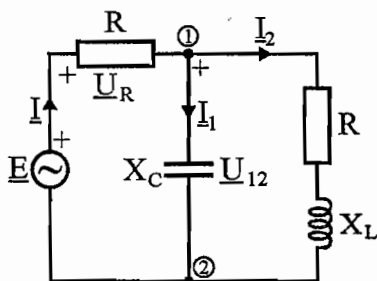
Uvjet nastanka strujne (paralelne) rezonancije u električnom krugu je da imaginarni dio ukupne admitanse bude jednak nuli. Opći oblik izraza za admitansu je:

$$\underline{Y} = G + jB ,$$

a struja rezonancija nastaje ako je zadovoljeno:

$$B = 0 .$$

Usvojit će se oznake i pretpostaviti smjerovi struja kao na slici 2.50.1.



Slika 2.50.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Admitansa grane sa serijskom vezom radnog otpora \mathbf{R} i induktivne reaktanse \mathbf{X}_L je:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{RL} = \frac{1}{\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L}.$$

Admitansa grane s kapacitivnom reaktansom \mathbf{X}_C je:

$$\underline{\mathbf{Y}}_C = \frac{1}{-j\mathbf{X}_C} = j\frac{1}{\mathbf{X}_C}.$$

Admitansa dijela kruga između čvorova ① i ② je:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{12} = \underline{\mathbf{Y}}_{RL} + \underline{\mathbf{Y}}_C = \frac{1}{\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L} + \frac{1}{-j\mathbf{X}_C} = \frac{\mathbf{R} + j(\mathbf{X}_L - \mathbf{X}_C)}{(\mathbf{R} + j\mathbf{X}_L) \cdot (-j\mathbf{X}_C)}.$$

Ukupna admitansa kruga je:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{\frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{12}}{\frac{1}{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{Y}}_{12}} = \frac{\underline{\mathbf{Y}}_{12}}{1 + \mathbf{R} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{12}}.$$

Nakon sređivanja izraza za ukupnu admitansu kruga dobiva se:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}^2 + \mathbf{X}_L^2) + 2\mathbf{R}\mathbf{X}_C(\mathbf{X}_C - \mathbf{X}_L)}{(\mathbf{R}^2 + \mathbf{X}_L\mathbf{X}_C)^2 + \mathbf{R}^2(\mathbf{X}_L - 2\mathbf{X}_C)^2} + j\frac{\mathbf{X}_C(\mathbf{X}_L^2 + \mathbf{R}^2) - \mathbf{X}_C^2\mathbf{X}_L}{(\mathbf{R}^2 + \mathbf{X}_L\mathbf{X}_C)^2 + \mathbf{R}^2(\mathbf{X}_L - 2\mathbf{X}_C)^2}.$$

Imaginarni dio s desne strane posljednjeg izraza mora biti jednak nuli, tj. mora vrijediti:

$$\mathbf{X}_C(\mathbf{X}_L^2 + \mathbf{R}^2) - \mathbf{X}_C^2\mathbf{X}_L = 0,$$

odakle se dobiva:

$$\mathbf{X}_C = \frac{\mathbf{X}_L^2 + \mathbf{R}^2}{\mathbf{X}_L} = 12,5 \Omega.$$

Posljedica strujne rezonancije je da napon izvora $\underline{\mathbf{E}}$ i ukupna struja u krugu $\underline{\mathbf{I}}$ imaju isti fazni stav ("u fazi su"). Admitansa $\underline{\mathbf{Y}}$ ima minimalno moguću vrijednost, a s obzirom da vrijedi $\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{Y}}$ jasno je da i ukupna struja u krugu ima minimalno moguću vrijednost.

Kod crtanja fazorskog dijagrama usvojit će se pretpostavka da je fazor napona izvora $\underline{\mathbf{E}}$ referentni, tj. pretpostavit će se da vrijedi:

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}e^{j0^\circ} = \mathbf{E}.$$

S obzirom da je ukupna struja u fazi s naponom izvora, vrijedi:

$$\underline{I} = I e^{j0^\circ} = I.$$

Svi fazori koji se moraju nacrtati na dijagramu prikazani su na shemi kruga sa *slike 2.50.1*.

Fazor pada napona na radnom otporu R mora biti u fazi sa strujom koja teče kroz taj otpornik:

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = I \cdot R \cdot e^{j0^\circ} = U_R \cdot e^{j0^\circ} = U_R.$$

Fazor napona između čvorova ① i ② je:

$$\underline{U}_{12} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}_{12}} = I \cdot \frac{(R + jX_L) \cdot (-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)} = U_{12} \cdot e^{j0^\circ} = U_{12}.$$

Posljednja relacija pokazuje da je i napon \underline{U}_{12} u fazi sa strujom \underline{I} .

Struja kroz kapacitivnu reaktansu X_C mora prednjačiti u odnosu na napon kondenzatora (napon \underline{U}_{12}) za 90° :

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j90^\circ}.$$

Struja kroz serijsku vezu radnog otpora R i induktivne reaktanse X_L fazno zaostaje u odnosu na napon na krajevima te veze (napon \underline{U}_{12}) za ugao φ :

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{-j\varphi},$$

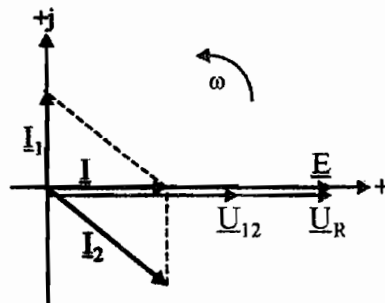
gdje je:

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}.$$

Treba voditi računa da kod crtanja fazorskog dijagrama moraju biti zadovoljene i slijedeće relacije:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \quad \underline{E} = \underline{U}_R + \underline{U}_{12}.$$

Fazorski dijagram napona i struja u razmatranom krugu prikazan je na *slici 2.50.2*.



Slika 2.50.2 Fazorski dijagram napona i struja

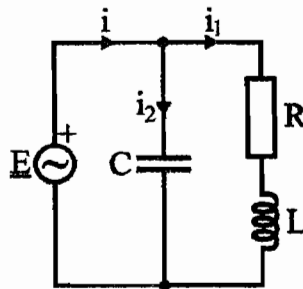
Primjer 2.22

Za električni krug sa slike 2.51 poznato je:

$$R = 1 \Omega; X_L = 1 \Omega; i(t) = 5\sqrt{2} \sin(10^4 t + 30^\circ) \text{ A.}$$

Ovaj električni krug nalazi se u režimu rezonancije.

Odrediti kapacitet kondenzatora C , trenutne vrijednosti struja $i_1(t)$ i $i_2(t)$ i snagu u krugu.



Slika 2.51 Shema električnog kruga uz primjer 2.22

Rješenje

Na slici 2.51 prikazan je električni krug s paralelno spojenim idealnim kondenzatorom i realnom zavojnicom. S obzirom na tu paralelnu vezu, u krugu može nastupiti jedino strujna (paralelna) rezonancija.

Uvjet nastanka strujne rezonancije u krugu je da imaginarni dio ukupne admitanse bude jednak nuli. Opći oblik izraza za admitansu je:

$$\underline{Y} = G + jB,$$

a struja rezonancija nastaje ako je zadovoljeno:

$$B = 0.$$

Admitansa grane 1 sa serijskom vezom radnog otpora R i induktivne reaktanse X_L je:

$$\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R + jX_L}.$$

Admitansa grane 2 s kapacitivnom reaktansom X_C je:

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{-jX_C} = j\frac{1}{X_C}.$$

Ukupna admitansa \underline{Y} određuje se po relaciji:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_C.$$

Nakon uvrštavanja izraza za \underline{Y}_{RL} i \underline{Y}_C u posljednju relaciju i sređivanja, dobiva se:

$$\underline{Y} = \underline{G} + j\underline{B} = \frac{\underline{R}}{\underline{R}^2 + \underline{X}_L^2} + j \left(\frac{1}{\underline{X}_C} - \frac{\underline{X}_L}{\underline{R}^2 + \underline{X}_L^2} \right).$$

Uz uzimanje u obzir uvjeta $\underline{B} = 0$, dobiva se:

$$\underline{X}_C = \frac{\underline{X}_L^2 + \underline{R}^2}{\underline{X}_L} = 2 \Omega.$$

U tekstu zadatka data je vremenska promjena struje $\underline{i}(t)$:

$$\underline{i}(t) = 5\sqrt{2} \sin(10^4 t + 30^\circ) \text{ A},$$

a iz ovog izraza može se zaključiti:

- efektivna vrijednost struje: $\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 5 \text{ A};$
- kružna učestanost: $\omega = 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}};$
- početna faza: $\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ.$

Nakon što je određena kružna učestanost ω , može se izračunati i traženi kapacitet kondenzatora:

$$C = \frac{1}{\omega \underline{X}_C} = \frac{1}{10^4 \cdot 2} = 50 \mu\text{F}.$$

Kod određivanja trenutnih vrijednosti struja $\underline{i}_1(t)$ i $\underline{i}_2(t)$ pogodnije je računski postupak provesti primjenom simboličkog računa (račun s kompleksnim brojevima) nego raditi s izrazima za vremenske promjene. Dakle, potrebno je napisati izraz za struju \underline{I} , a zatim odrediti struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 i na osnovu njih napisati tražene izraze za trenutne vrijednosti $\underline{i}_1(t)$ i $\underline{i}_2(t)$.

Struja $\underline{i}(t)$ može se predstaviti u kompleksnom obliku:

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_1} = 5 \cdot e^{j30^\circ} \text{ A}.$$

Sa sheme prikazane na slici 2.51 vidi se da vrijedi:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{R} + j\underline{X}_L},$$

gdje je:

$$\underline{E} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{I}}{\underline{G}} = \frac{\underline{I}(\underline{R}^2 + \underline{X}_L^2)}{\underline{R}}.$$

Nakon uvrštavanja posljednje relacije u izraz za struju \underline{I}_1 dobiva se:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}(\underline{R}^2 + \underline{X}_L^2)}{\underline{R}(\underline{R} + j\underline{X}_L)} = \underline{I}_1 \cdot e^{j\varphi_{I1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j15^\circ} \text{ A}.$$

Struja \underline{I}_2 može se odrediti prema jednom od slijedećih izraza:

$$\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{-j\underline{X}_C} = \frac{\underline{I}(\underline{R}^2 + \underline{X}_L^2)}{\underline{R}(-j\underline{X}_C)},$$

odakle se dobiva:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2 \cdot e^{j\varphi_{I2}} = 5 \cdot e^{j120^\circ} \text{ A}.$$

Na osnovu izraza za struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 mogu se odrediti i izrazi za vremenske promjene tih struja $i_1(t)$ i $i_2(t)$:

$$i_1(t) = \underline{I}_{m1} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{I1}) = \underline{I}_1 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{I1}) = 10 \cdot \sin(10^4 t - 15^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = \underline{I}_{m2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{I2}) = \underline{I}_2 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{I2}) = 5 \sqrt{2} \cdot \sin(10^4 t + 120^\circ) \text{ A}.$$

Jedna od posljedica strujne rezonancije je da napon izvora \underline{E} i ukupna struja \underline{I} imaju isti fazni stav ("u fazi su"). U ovom slučaju vrijedi $\cos\varphi = \cos 0^\circ = 1$ i $\sin\varphi = \sin 0^\circ = 0$, gdje je φ ugao između fazora \underline{E} i \underline{I} . Aktivna snaga \underline{P} i reaktivna snaga \underline{Q} koje izvor daje u krug računaju po relacijama:

$$\underline{P} = \underline{E} \cdot \underline{I} \cdot \cos\varphi \neq 0$$

$$\underline{Q} = \underline{E} \cdot \underline{I} \cdot \sin\varphi = 0.$$

Posljednje dvije relacije pokazuju da u slučaju rezonancije izvor u krug daje samo aktivnu snagu, a da je reaktivna jednaka nuli, bez obzira što u krugu postoje dva reaktivna elementa (zavojnica i kondenzator).

Iz relacije za snagu \underline{P} dobiva se:

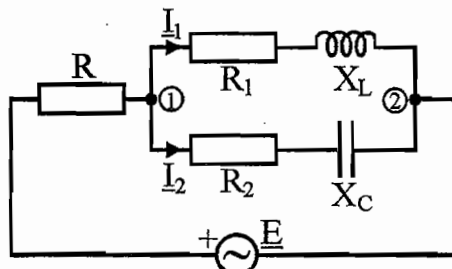
$$\underline{P} = \underline{E} \cdot \underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} \cdot \underline{I} = \frac{\underline{I}^2}{\underline{Y}} = \frac{\underline{I}^2}{\underline{G}} = \frac{\underline{I}^2(\underline{R}^2 + \underline{X}_L^2)}{\underline{R}} = 50 \text{ W}.$$

Snaga \underline{P} mogla se odrediti i po izrazu:

$$\underline{P} = \underline{I}_1^2 \cdot \underline{R} = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 1 = 50 \text{ W}.$$

Primjer 2.23

U električnom krugu prikazanom na slici 2.52 postignuta je strujna rezonancija. Poznati su slijedeći podaci: $I_1 = 10 \text{ A}$; $I_2 = 5 \text{ A}$; $X_C = 40 \Omega$. Odrediti vrijednost reaktanse X_L .



Slika 2.52 Shema električnog kruga uz primjer 2.23

Rješenje

Uvjet nastanka strujne rezonancije u krugu je da imaginarni dio ukupne admitanse bude jednak nuli. Opći oblik izraza za admitansu je:

$$\underline{Y} = G + jB,$$

a struja rezonancija nastaje ako je zadovoljeno:

$$B = 0.$$

Admitansa grane 1 sa serijskom vezom radnog otpora R_1 i induktivne reaktanse X_L je:

$$\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R_1 + jX_L}.$$

Admitansa grane 2 sa serijskom vezom radnog otpora R_2 i kapacitivne reaktanse X_C je:

$$\underline{Y}_{RC} = \frac{1}{R_2 - jX_C}.$$

Admitansa dijela kruga između čvorova ① i ② je:

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_{RC} = \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{R_1 + R_2 + j(X_L - X_C)}{(R_1 + jX_L)(R_2 - jX_C)}.$$

Ukupna admitansa kruga je:

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{\frac{1}{R} \cdot \underline{Y}_{12}}{\frac{1}{R} + \underline{Y}_{12}} = \frac{\underline{Y}_{12}}{1 + R \cdot \underline{Y}_{12}}.$$

Nakon sređivanja posljednjeg izraza dobiva se da je njegov imaginarni dio dat relacijom:

$$\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{X}_L - \mathbf{X}_C)[\mathbf{R}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{X}_L\mathbf{X}_C]}{[\mathbf{R}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{X}_L\mathbf{X}_C]^2 + [\mathbf{R}(\mathbf{X}_L - \mathbf{X}_C) + \mathbf{R}_2\mathbf{X}_L - \mathbf{R}_1\mathbf{X}_C]^2} - \frac{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)[\mathbf{R}(\mathbf{X}_L - \mathbf{X}_C) + \mathbf{R}_2\mathbf{X}_L - \mathbf{R}_1\mathbf{X}_C]}{[\mathbf{R}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{X}_L\mathbf{X}_C]^2 + [\mathbf{R}(\mathbf{X}_L - \mathbf{X}_C) + \mathbf{R}_2\mathbf{X}_L - \mathbf{R}_1\mathbf{X}_C]^2}.$$

Nakon uvrštavanja $\mathbf{B} = 0$ i sređivanja, dobiva se:

$$\mathbf{X}_C(\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_L^2) = \mathbf{X}_L(\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_C^2).$$

Impedanse grana 1 i 2 su:

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\text{RL}} = \mathbf{Z}_{\text{RL}} \cdot e^{j\varphi_{\text{RL}}} = \mathbf{R}_1 + j\mathbf{X}_L = \sqrt{\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_L^2} \cdot e^{j\arctg \frac{\mathbf{X}_L}{\mathbf{R}_1}},$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\text{RC}} = \mathbf{Z}_{\text{RC}} \cdot e^{-j\varphi_{\text{RC}}} = \mathbf{R}_2 - j\mathbf{X}_C = \sqrt{\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_C^2} \cdot e^{-j\arctg \frac{\mathbf{X}_C}{\mathbf{R}_2}},$$

gdje su sa \mathbf{Z}_{RL} i \mathbf{Z}_{RC} označeni moduli ovih impedansi:

$$\mathbf{Z}_{\text{RL}} = \sqrt{\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_L^2};$$

$$\mathbf{Z}_{\text{RC}} = \sqrt{\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_C^2}.$$

Efektivne vrijednosti struja \mathbf{I}_1 i \mathbf{I}_2 date su slijedećim relacijama:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{U}_{12} \cdot \mathbf{Y}_{\text{RL}} = \frac{\mathbf{U}_{12}}{\mathbf{Z}_{\text{RL}}};$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{U}_{12} \cdot \mathbf{Y}_{\text{RC}} = \frac{\mathbf{U}_{12}}{\mathbf{Z}_{\text{RC}}}.$$

U posljednjim izrazima korištene su slijedeće oznake: \mathbf{U}_{12} - efektivna vrijednost napona između čvorova ① i ②, \mathbf{Y}_{RL} - modul admitanse grane 1, \mathbf{Y}_{RC} - modul admitanse grane 2.

Ako se izrazi za struje \mathbf{I}_1 i \mathbf{I}_2 kvadriraju i iskoriste relacije za \mathbf{Z}_{RL} i \mathbf{Z}_{RC} , dobiva se:

$$\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{X}_L^2 = \frac{\mathbf{U}_{\text{AB}}^2}{\mathbf{I}_1^2};$$

$$\mathbf{R}_2^2 + \mathbf{X}_C^2 = \frac{\mathbf{U}_{\text{AB}}^2}{\mathbf{I}_2^2}.$$

Nakon uvrštavanja posljednja dva izraza u relaciju:

$$X_C(R_1^2 + X_L^2) = X_L(R_2^2 + X_C^2),$$

dobiva se:

$$X_C \cdot \frac{U_{AB}^2}{I_1^2} = X_L \cdot \frac{U_{AB}^2}{I_2^2}.$$

Konačno se, nakon sređivanja izraza i uvrštavanja numeričkih vrijednosti, dobiva:

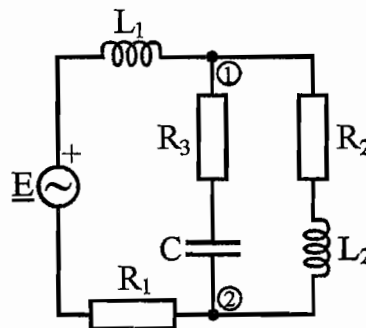
$$X_L = X_C \cdot \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = 40 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 10 \Omega.$$

Primjer 2.24

Na slici 2.53 prikazan je električni krug za koji su poznati slijedeći podaci:

$R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$; $L_1 = 6,37 \text{ mH}$; $C = 637 \mu\text{F}$; $f = 50 \text{ Hz}$.

Određiti induktivnost L_2 pri kojoj u električnom krugu nastupa naponska rezonancija.



Slika 2.53 Shema električnog kruga uz primjer 2.24

Rješenje

Uvjet nastanka naponske (serijske) rezonancije u električnom krugu je da imaginarni dio ukupne impedanse bude jednak nuli. Opći oblik izraza za impedansu je:

$$\underline{Z} = \mathbf{R} + j\mathbf{X},$$

a naponska rezonancija nastaje ako je zadovoljeno:

$$\mathbf{X} = 0.$$

Impedansa dijela kruga između čvorova ① i ② je:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{(\mathbf{R}_2 + j\mathbf{X}_{L_2}) \cdot (\mathbf{R}_3 - j\mathbf{X}_C)}{(\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) + j(\mathbf{X}_{L_2} - \mathbf{X}_C)}.$$

Induktivna reaktansa X_{L2} i kapacitivna reaktansa X_C u posljednjem izrazu određene su prema relacijama:

$$X_{L2} = \omega L_2 = 2\pi f L_2 \quad \text{i} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}.$$

Ukupna impedansa kruga je:

$$\underline{Z} = R_1 + jX_{L1} + \underline{Z}_{12} = R_1 + jX_{L1} + \frac{(R_2 + jX_{L2})(R_3 - jX_C)}{(R_2 + R_3) + j(X_{L2} - X_C)},$$

gdje je:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1.$$

Nakon sređivanja izraza za impedansu \underline{Z} dobiva se da je njegov imaginarni dio dat relacijom:

$$X = X_{L1} + \frac{(X_{L2}R_3 - R_2X_C)(R_2 + R_3) - (X_{L2} - X_C)(R_2R_3 + X_{L2}X_C)}{(R_2 + R_3)^2 + (X_{L2} - X_C)^2}.$$

Da bi u krugu nastala naponska rezonancija mora vrijediti $X = 0$. Nakon sređivanja izraza za X dobiva se kvadratna jednačba:

$$X_{L2}^2(X_{L1} - X_C) + X_{L2}(R_3^2 + X_C^2 - 2X_{L1}X_C) + X_{L1}(R_2 + R_3)^2 + X_{L1}X_C^2 - R_2^2X_C = 0,$$

koja nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti prelazi u slijedeći oblik:

$$3 \cdot X_{L2}^2 - 14 \cdot X_{L2} - 80 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednačbe su:

$$(X_{L2})_1 = 8 \Omega \quad \text{i} \quad (X_{L2})_2 = -3,33 \Omega.$$

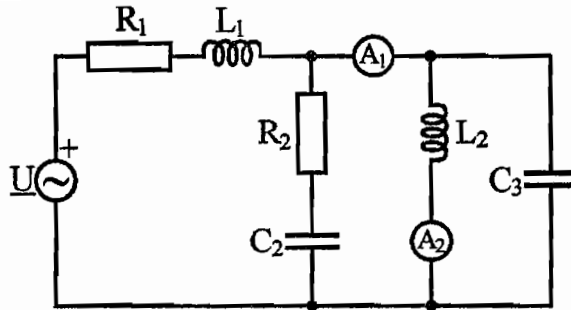
S obzirom da mora biti zadovoljeno $X_{L2} > 0$, tačno rješenje je: $X_{L2} = 8 \Omega$.

Induktivitet zavojnice L_2 određuje se po izrazu:

$$L_2 = \frac{X_{L2}}{\omega} = \frac{X_{L2}}{2\pi f} = \frac{8}{2\pi \cdot 50} = 25,46 \text{ mH}.$$

Primjer 2.25

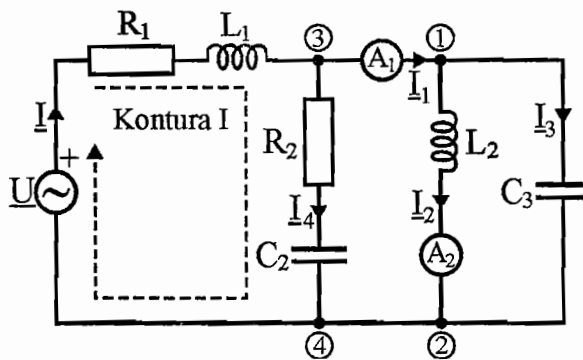
U električnom krugu prikazanom na slici 2.54 idealni ampermetar A_1 pokazuje vrijednost 0 A. Poznato je: $U = 10 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 50 \Omega$; $L_1 = 0,2 \text{ H}$; $L_2 = 0,1 \text{ H}$; $C_2 = 5 \mu\text{F}$; $C_3 = 10 \mu\text{F}$.
Odrediti pokazivanje idealnog ampermetra A_2 .



Slika 2.54 Shema električnog kruga uz primjer 2.25

Rješenje

Pretpostavit će se smjerovi struja u granama kruga kao što je prikazano na slici 2.54.1.



Slika 2.54.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i smjerom obilaska konture

Prema uvjetu zadatka ampermetar A_1 pokazuje 0 A, što znači da je $I_1 = 0$ A.

Relacija po I Kirchhoffovom zakonu za čvor ③ glasi:

$$I = I_1 + I_4 = I_4.$$

Relacija po I Kirchhoffovom zakonu za čvor ① glasi:

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -I_3.$$

Da bi vrijedilo $I_1 = 0$ A, impedansa dijela kruga između čvorova ① i ② mora biti beskonačno velika (prekid kruga), tj. mora vrijediti $Z_{12} \rightarrow \infty$. Ako je impedansa beskonačno velika, onda je admitansa tog dijela kruga jednaka nuli, tj. mora vrijediti $Y_{12} = 0$. Može se zaključiti da je u dijelu kruga između čvorova ① i ② nastupila strujna (paralelna) rezonancija.

Admitansa grane sa zavojnicom L_2 je:

$$\underline{Y}_{L_2} = \frac{1}{j\omega L_2}.$$

Admitansa grane s kondenzatorom C_3 je:

$$\underline{Y}_{C_3} = \frac{1}{j\omega C_3} = j\omega C_3.$$

Admitansa dijela kruga između čvorova ① i ② (paralelna veza zavojnice L_2 i kondenzatora C_3) je:

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{L_2} + \underline{Y}_{C_3} = j\left(\omega C_3 - \frac{1}{\omega L_2}\right) = 0.$$

Iz posljednje relacije dobiva se kružna učestanost izvora napajanja ω koja nije data u zadatku:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C_3}} = \sqrt{\frac{10^6}{0,1 \cdot 10}} = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ampermetar A_2 mjeri efektivnu vrijednost struje I_2 . Ova struja može se odrediti po relaciji:

$$I_2 = \frac{U_{12}}{\omega L_2},$$

gdje je U_{12} efektivna vrijednost napona između čvorova ① i ②.

S obzirom da u grani s ampermetrom A_1 nema padova napona, napon između čvorova ① i ② jednak je naponu između čvorova ③ i ④:

$$U_{12} = U_{34}.$$

Dalje rješavanje zadatka svodi se na određivanje efektivne vrijednosti napona U_{34} između čvorova ③ i ④.

Sa *slike 2.54.1* vidi se da se fazor napona \underline{U}_{34} može odrediti kao:

$$\underline{U}_{34} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{34} = \underline{I} \cdot \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right),$$

a njegova efektivna vrijednost U_{34} kao:

$$U_{34} = I \cdot Z_{34} = I \cdot \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2} \right)^2}.$$

Za određivanje fazora struje $\underline{I} = \underline{I}_4$ mora se napisati relacija po II Kirchhoffovom zakonu za konturu I prikazanu na slici 2.54.1:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = \underline{I} \cdot \left[\underline{R}_1 + \underline{R}_2 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right].$$

Iz posljednje relacije može se izračunati efektivna vrijednost struje I :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2}} = 0,1 \text{ A.}$$

Nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti u izraz za napon U_{34} dobiva se:

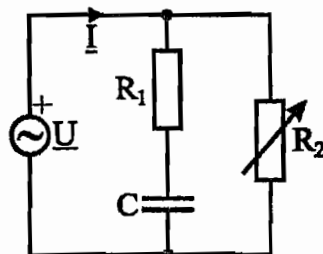
$$U_{34} = I \cdot \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2} \right)^2} = 0,1 \cdot \sqrt{50^2 + \left(\frac{10^6}{10^3 \cdot 5} \right)^2} = 20,62 \text{ V.}$$

Struja kroz ampermetar A_2 je:

$$I_2 = \frac{U_{12}}{\omega L_2} = \frac{U_{34}}{\omega L_2} = \frac{20,62}{1000 \cdot 0,1} = 0,2062 \text{ A.}$$

Test - zadaci

- U električnom krugu prikazanom na slici 2.55 povećava se otpornost R_2 . Fazni pomak između referentnog fazora napona izvora \underline{U} i fazora struje \underline{I} pri tome:
 - se prvo povećava, a zatim se smanjuje.
 - se smanjuje.
 - se povećava.
 - ostaje nepromijenjen.
 (Zaokružiti tačan odgovor).



Slika 2.55 Shema električnog kruga uz test-zadatak 1

Rješenje

Ukupna admitansa prikazanog električnog kruga je:

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{R_1 - jX_C} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + jX_C}{R_1^2 + X_C^2} + \frac{1}{R_2} = \\ &= \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_C^2} + \frac{1}{R_2} \right) + j \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2} = Y e^{j\varphi}.\end{aligned}$$

U posljednjoj relaciji Y predstavlja modul, a φ argument admitanse \underline{Y} . Ovaj argument može se odrediti po relaciji:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_m\{\underline{Y}\}}{R_e\{\underline{Y}\}} = \frac{X_C R_2}{R_1 R_2 + R_1^2 + X_C^2} = \frac{X_C}{R_1 + \frac{R_1^2 + X_C^2}{R_2}}.$$

S obzirom da je, prema uvjetu datom u zadatku, fazor napona izvora \underline{U} referentni, vrijedi:

$$\underline{U} = U e^{j0^\circ} = U.$$

Ukupna struja je:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = U \cdot Y e^{j\varphi} = I e^{j\varphi}.$$

Ugao φ u posljednjoj relaciji je argument admitanse \underline{Y} , ali istovremeno predstavlja i fazni pomak fazora struje \underline{I} u odnosu na referentni fazor napona \underline{U} , pri čemu fazor struje prednjači u odnosu na fazor napona ($0 < \varphi < 90^\circ$). Da bi se dao odgovor na pitanje postavljeno u zadatku, mora se analizirati promjena $\operatorname{tg}\varphi$ pri povećanju otpornosti R_2 .

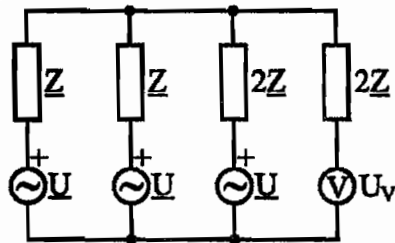
Ako se R_2 povećava, doći će do smanjenja količnika $\frac{R_1^2 + X_C^2}{R_2}$,

odnosno smanjit će se nazivnik izraza za $\operatorname{tg}\varphi$. To znači da će se povećati $\operatorname{tg}\varphi$, odnosno ugao φ . Dakle, pri povećanju otpornosti R_2 doći će do povećanja faznog pomaka između fazora napona \underline{U} i struje $\underline{I} \Rightarrow \textcircled{3}$.

2. U električnom krugu prikazanom na slici 2.56 napon U_V koji mjeri idealni voltmetar iznosi:

1. $U_V = U$. 2. $U_V = \frac{U}{2}$. 3. $U_V = 2U$. 4. $U_V = \frac{3U}{2}$.

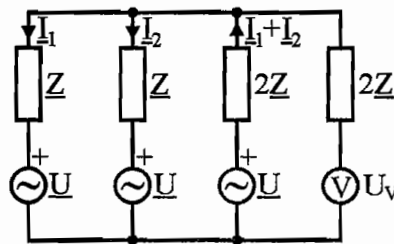
(Zaokružiti tačan odgovor).



Slika 2.56 Shema električnog kruga uz test-zadatak 2

Rješenje

Pretpostave se smjerovi struja kao na slici 2.56.1.



Slika 2.56.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

S obzirom da je voltmetar idealan, vrijedi $R_V \rightarrow \infty$, što znači da struja ne teče kroz granu s voltmetrom. Za preostali dio kruga mogu se napisati dvije jednačbe po II Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{U} - \underline{U} = 2\underline{Z} \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} \Rightarrow 2\underline{I}_1 = -3\underline{I}_2;$$

$$\underline{U} - \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z} - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_2.$$

Prethodni sistem jednačbi moguć je samo ako vrijedi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = 0,$$

tj. ako kroz grane kruga ne teku struje.

Napon grane s voltmetrom je:

$$\underline{U}_V = \underline{U} + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z} = \underline{U}.$$

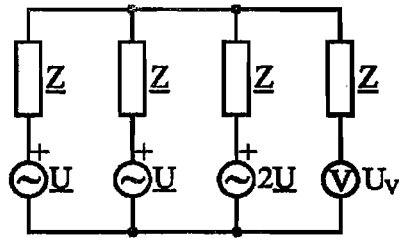
Voltmetar mjeri efektivnu vrijednost napona \underline{U}_V , pa je:

$$U_V = U \Rightarrow \textcircled{1}.$$

3. U električnom krugu prikazanom na slici 2.57 napon U_V koji mjeri idealni voltmetar iznosi:

1. $U_V = U$. 2. $U_V = \frac{3U}{2}$. 3. $U_V = 2U$. 4. $U_V = \frac{4U}{3}$.

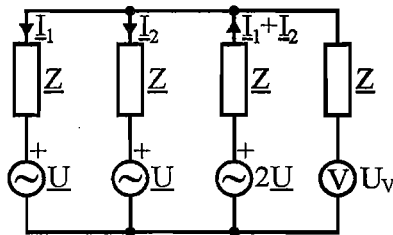
(Zaokružiti tačan odgovor).



Slika 2.57 Shema električnog kruga uz test-zadatak 3

Rješenje

Pretpostave se smjerovi struja kao na slici 2.57.1.



Slika 2.57.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Voltmetar je idealan, što znači da struja ne teče kroz granu s voltmetrom. Za preostali dio kruga mogu se napisati dvije jednačbe po II Kirchhoffovom zakonu:

$$2\underline{U} - \underline{U} = (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \cdot \underline{Z} + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} \Rightarrow \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z} + 2\underline{I}_2 \cdot \underline{Z};$$

$$\underline{U} - \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z} - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_2.$$

Iz prethodnih jednačbi se dobiva:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{3\underline{Z}}.$$

Napon grane s voltmetrom je:

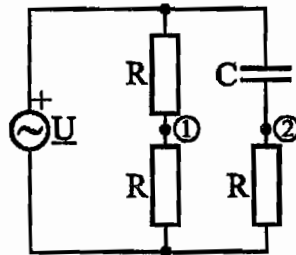
$$\underline{U}_v = \underline{U} + \underline{I}_1 \underline{Z} = \underline{U} + \frac{\underline{U}}{3} = \frac{4\underline{U}}{3}.$$

Voltmetar mjeri efektivnu vrijednost napona \underline{U}_v , pa je:

$$U_v = \frac{4U}{3} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

4. U električnom krugu prikazanom na slici 2.58 efektivna vrijednost napona izvora U je konstantna, a frekvencija napona izvora f se mijenja. Da li se pri promjeni frekvencije mijenjaju efektivna vrijednost napona između čvorova ① i ② U_{12} i njegov fazni stav u odnosu na napon U ? (Zaokružiti tačan odgovor).

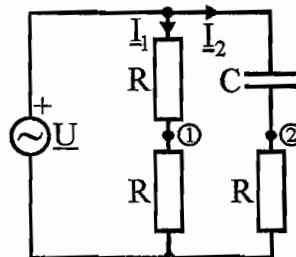
1. Efektivna vrijednost napona U_{12} se ne mijenja, a fazni stav se mijenja.
2. Efektivna vrijednost napona U_{12} i fazni stav se ne mijenjaju.
3. Efektivna vrijednost napona U_{12} i fazni stav se mijenjaju.
4. Efektivna vrijednost napona U_{12} se mijenja, a fazni stav se ne mijenja.



Slika 2.58 Shema električnog kruga uz test-zadatak 4

Rješenje

Usvojit će se oznake i pretpostaviti smjerovi struja kao na slici 2.58.1.



Slika 2.58.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Također, pretpostavit će se da je fazor napona izvora \underline{U} referentni:

$$\underline{U} = Ue^{j0^\circ} = U.$$

Struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 mogu se izračunati po relacijama:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{2R};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U}{R - jX_C} = U \frac{R + jX_C}{R^2 + X_C^2}.$$

Napon \underline{U}_{12} može se odrediti po izrazu:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R} - \underline{I}_2 \cdot \underline{R} = \frac{\underline{U}}{2(\underline{R}^2 + \underline{X}_C^2)} \left[(\underline{X}_C^2 - \underline{R}^2) - j2\underline{R}\underline{X}_C \right].$$

Efektivna vrijednost napona \underline{U}_{12} može se odrediti po relaciji:

$$U_{12} = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{U}_{12}\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{U}_{12}\}]^2},$$

gdje je $\operatorname{Re}\{\underline{U}_{12}\}$ realni, a $\operatorname{Im}\{\underline{U}_{12}\}$ imaginarni dio izraza za \underline{U}_{12} nakon čijeg uvrštavanja i sređivanja se dobiva:

$$U_{12} = \frac{U}{2}.$$

Posljednji izraz pokazuje da efektivna vrijednost napona U_{12} ne ovisi o frekvenciji napona izvora, tj. da se ne mijenja pri njenoj promjeni.

Fazni stav fazora napona \underline{U}_{12} u odnosu na referentni fazor \underline{U} definiran je relacijom:

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = \frac{\operatorname{Im}\{\underline{U}_{12}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{U}_{12}\}} = \frac{2\underline{R}\underline{X}_C}{\underline{R}^2 - \underline{X}_C^2}.$$

Reaktansa kondenzatora \underline{X}_C ovisi o frekvenciji napona izvora f :

$$\underline{X}_C = \frac{1}{2\pi fC}.$$

Ako se izraz za \underline{X}_C uvrsti u izraz za $\operatorname{tg}\varphi_{12}$, nakon sređivanja se dobiva:

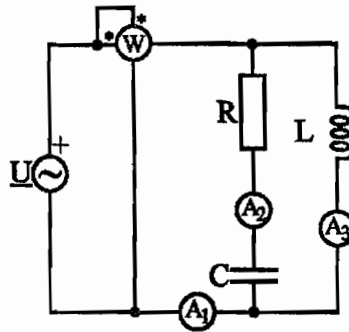
$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = \frac{4\pi fRC}{4\pi^2 f^2 (RC)^2 - 1}.$$

Posljednji izraz pokazuje da fazni stav napona \underline{U}_{12} ovisi o frekvenciji f , odnosno da se mijenja pri njenoj promjeni.

Dakle, efektivna vrijednost napona U_{12} se ne mijenja, a fazni stav se mijenja pri promjeni frekvencije napona izvora \Rightarrow ①.

5. U električnom krugu prikazanom na slici 2.59 efektivna vrijednost napona izvora U je konstantna, a frekvencija napona izvora f se može povećavati. Kako se mijenja pokazivanje idealnih mjernih instrumenata pri povećanju frekvencije? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. Snaga koju mjeri vatmetar W ostaje nepromijenjena.
2. Struja koju mjeri ampermetar A_2 se smanjuje.
3. Struja koju mjeri ampermetar A_3 ostaje nepromijenjena.
4. Struja koju mjeri ampermetar A_2 se povećava.

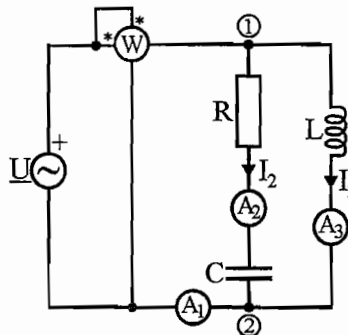


Slika 2.59 Shema električnog kruga uz test-zadatak 5

Rješenje

S obzirom da je efektivna vrijednost napona izvora konstantna i da se zanemaruju padovi napona na mjernim instrumentima, napon između čvorova ① i ② (slika 2.59.1) neće se mijenjati pri promjeni frekvencije, odnosno vrijedi:

$$U_{12} = U = \text{const.}$$



Slika 2.59.1 Shema električnog kruga s naznačenim oznakama struja i čvorova

Za struju koju mjeri ampermetar A_3 vrijedi:

$$I_3 = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{2\pi f L}.$$

Na osnovu posljednjeg izraza može se zaključiti da pokazivanje ampermetra A_3 ovisi o frekvenciji napona napajanja f i da se s njenim povećanjem smanjuje intenzitet struje koju mjeri ovaj ampermetar \Rightarrow odgovor 3. nije tačan.

Aktivna snaga koju mjeri vatmetar može se odrediti po izrazu:

$$P_W = I_2^2 R = \frac{U^2 R}{R^2 + X_C^2} = \frac{U^2 R}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{U^2 R}{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}.$$

Iz izraza za snagu P_W može se zaključiti da pokazivanje vatmetra ovisi o frekvenciji napona napajanja f i da s njenim povećanjem dolazi do povećanja aktivne snage koju električni krug preuzima iz izvora napajanja \Rightarrow odgovor 1. nije tačan.

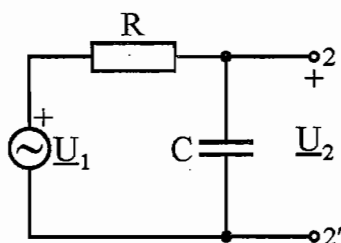
Za struju koju mjeri ampermetar A_2 vrijedi:

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2}}$$

Posljednji izraz pokazuje da se pri povećanju frekvencije napona napajanja f mijenja intenzitet struje koji mjeri ampermetar A_2 . Pri povećanju f smanjuje se vrijednost člana u nazivniku izraza za I_2 , što znači da se povećava intenzitet struje koju mjeri ampermetar $A_2 \Rightarrow$ ④.

6. Pri kojoj frekvenciji f će u električnom krugu prikazanom na slici 2.60 fazor napona \underline{U}_2 kasniti za fazorom napona izvora \underline{U}_1 za ugao 60° ?

1. $f = \frac{1}{2\pi RC}$ 2. $f = \frac{\sqrt{3}}{2\pi RC}$ 3. $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}RC}$ 4. $f = \frac{2\pi}{\sqrt{3}RC}$



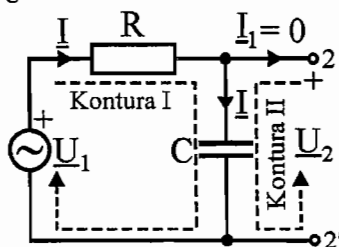
Slika 2.60 Shema električnog kruga uz test-zadatak 6

Rješenje

S obzirom da su stezaljke 2 i 2' otvorene, kroz R i C teče ista struja \underline{I} , pa se za konture I i II naznačene na slici 2.60.1 mogu napisati slijedeće relacije:

$$\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot (\underline{R} - jX_C);$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot (-jX_C) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{R} - jX_C} (-jX_C).$$



Slika 2.60.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Ako se pretpostavi da je fazor napona \underline{U}_1 referentni, tj. da vrijedi:

$$\underline{U}_1 = U_1 e^{j0^\circ} = U_1,$$

može se pisati:

$$\underline{U}_2 = \frac{U_1}{R - jX_C} (-jX_C) = U_1 \frac{X_C^2 - jRX_C}{R^2 + X_C^2}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, fazor napona \underline{U}_2 treba kasniti u odnosu na fazor napona \underline{U}_1 za ugao 60° , tj. ugao fazora napona \underline{U}_2 definiran je relacijom $\varphi_2 = -60^\circ$. Iz relacije za fazor napona \underline{U}_2 može se odrediti fazni stav ovog fazora kao:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{R}{X_C}.$$

S obzirom da vrijedi $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, dobiva se:

$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{R}{X_C} = 2\pi fRC.$$

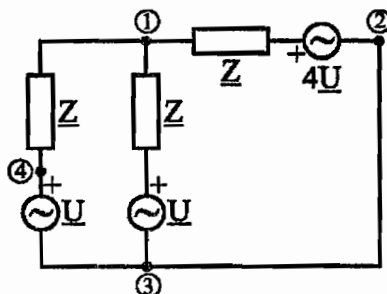
Konačno je:

$$f = \frac{\operatorname{tg}60^\circ}{2\pi RC} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi RC} \Rightarrow \textcircled{2}.$$

7. U električnom krugu prikazanom na slici 2.61 napon između čvorova ① i ③ \underline{U}_{13} može se odrediti po relaciji:

1. $\underline{U}_{13} = 4\underline{U}$. 2. $\underline{U}_{13} = 6\underline{U}$. 3. $\underline{U}_{13} = 2\underline{U}$. 4. $\underline{U}_{13} = \underline{U}$.

(Zaokružiti tačan odgovor).



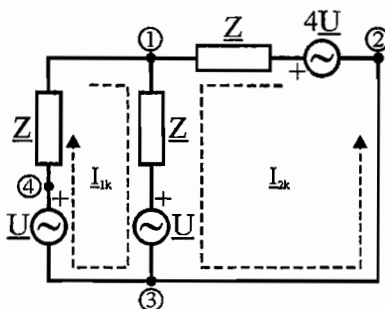
Slika 2.61 Shema električnog kruga uz test-zadatak 7

Rješenje

U krugu prikazanom na slici 2.61 postoje $N_N = 4$ čvora i $N_L = 5$ grana. Potrebni broj kontura za pisanje jednažbi po metodi kontrunih struja određuje se po relaciji:

$$N_K = N_L - (N_N - 1) = 2.$$

Odabrane konture s naznačenim pretpostavljenim smjerovima kontrunih struja prikazane su na slici 2.61.1.



Slika 2.61.1 Shema električnog kruga s naznačenim smjerovima kontrunih struja

Sistem jednažbi napisan primjenom metode kontrunih struja glasi:

$$\underline{U} - \underline{U} = \underline{I}_{1k} \cdot 2\underline{Z} + \underline{I}_{2k} \cdot \underline{Z};$$

$$4\underline{U} - \underline{U} = \underline{I}_{1k} \cdot \underline{Z} + \underline{I}_{2k} \cdot 2\underline{Z}.$$

Iz prve jednažbe sistema dobiva se:

$$\underline{I}_{1k} = -\frac{\underline{I}_{2k}}{2}.$$

Nakon uvrštavanja izraza za \underline{I}_{1k} u drugu jednažbu sistema i sređivanja dobiva se:

$$\underline{I}_{2k} = \frac{2\underline{U}}{\underline{Z}}.$$

S obzirom da su čvorovi ② i ③ kratkospojeni, vrijedi: $\underline{U}_{12} = \underline{U}_{13}$. Napon između čvorova ① i ③ može se odrediti prema relaciji:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{13} = 4\underline{U} - \underline{I}_{2k} \cdot \underline{Z} = 2\underline{U} \Rightarrow \text{③}.$$

8. U električnom krugu prikazanom na slici 2.61, napon između čvorova ① i ④ \underline{U}_{14} može se odrediti po relaciji:

$$1. \underline{U}_{14} = 4\underline{U}. \quad 2. \underline{U}_{14} = 6\underline{U}. \quad 3. \underline{U}_{14} = 2\underline{U}. \quad 4. \underline{U}_{14} = \underline{U}.$$

Rješenje

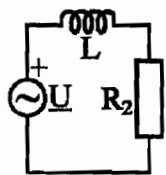
Postupak rješavanja identičan je kao u test-zadatku 7. Nakon postavljanja jednadžbi po metodu konturnih struja i sređivanja dobiva se:

$$\underline{I}_{1k} = -\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

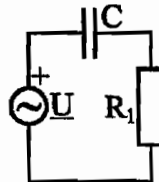
Napon između čvorova ① i ④ može se odrediti po relaciji:

$$\underline{U}_{14} = -\underline{I}_{1k} \cdot \underline{Z} = \underline{U} \Rightarrow \textcircled{4}$$

9. U električnim krugovima prikazanim na slikama 2.62.1 i 2.62.2 efektivna vrijednost napona izvora U je konstantna, a frekvencija napona izvora f se mijenja. Koji od prikazanih dijagrama je pogrešan? (Zaokružiti tačan odgovor).

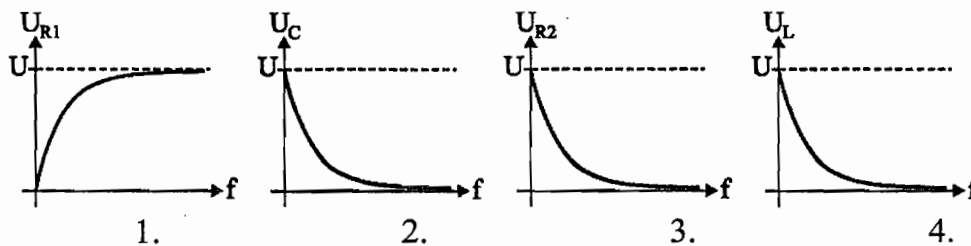


1. serijski R-L krug



2. serijski R-C krug

Slika 2.62 Sheme električnih krugova uz test-zadatak 9



Rješenje

Za krug sa slike 2.62.2 vrijedi sljedeća relacija:

$$U_{R1} = I \cdot R_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}} R_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}} R_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Za } f \rightarrow 0 \Rightarrow U_{R1} \rightarrow 0. \\ \text{Za } f \rightarrow \infty \Rightarrow U_{R1} \rightarrow U. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Dijagram 1. je tačan.}$$

Za krug sa *slike 2.62.2* vrijedi slijedeća relacija:

$$U_C = I \cdot X_C = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}} X_C = \frac{U}{\sqrt{(2\pi f C R_1)^2 + 1}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Za } f \rightarrow 0 \Rightarrow U_C \rightarrow U. \\ \text{Za } f \rightarrow \infty \Rightarrow U_C \rightarrow 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Dijagram 2. je tačan.}$$

Za krug sa *slike 2.62.1* vrijedi slijedeća relacija:

$$U_{R2} = I \cdot R_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} R_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (2\pi f L)^2}} R_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Za } f \rightarrow 0 \Rightarrow U_{R2} \rightarrow U. \\ \text{Za } f \rightarrow \infty \Rightarrow U_{R2} \rightarrow 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Dijagram 3. je tačan.}$$

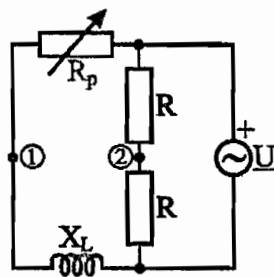
Za krug sa *slike 2.62.1* vrijedi slijedeća relacija:

$$U_L = I \cdot X_L = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} X_L = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{2\pi f L}\right)^2 + 1}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Za } f \rightarrow 0 \Rightarrow U_L \rightarrow 0. \\ \text{Za } f \rightarrow \infty \Rightarrow U_L \rightarrow U. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Dijagram 4. nije tačan.} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

10. U električnom krugu prikazanom na *slici 2.63* efektivna vrijednost napona izvora U i frekvencija f su konstantni, a otpornost otpornika R_p se smanjuje. Da li se pri smanjenju otpornosti R_p mijenjaju efektivna vrijednost napona između čvorova ① i ② U_{12} i njegov fazni stav u odnosu na napon U ? (Zaokružiti tačan odgovor).

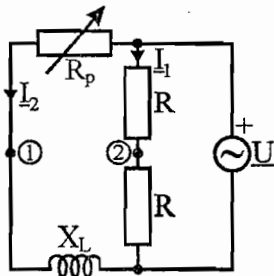
1. Efektivna vrijednost napona U_{12} i fazni stav se mijenjaju.
2. Efektivna vrijednost napona U_{12} i fazni stav se ne mijenjaju.
3. Efektivna vrijednost napona U_{12} se ne mijenja, a fazni stav se mijenja.
4. Efektivna vrijednost napona U_{12} se mijenja, a fazni stav se ne mijenja.



Slika 2.63 Shema električnog kruga uz test-zadatak 10

Rješenje

Usvojit će se oznake i pretpostaviti smjerovi struja kao na slici 2.63.1.



Slika 2.63.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Također, pretpostavit će se da je fazor napona izvora \underline{U} referentni:

$$\underline{U} = Ue^{j0^\circ} = U.$$

Struje \underline{I}_1 i \underline{I}_2 mogu se izračunati po relacijama:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{2R};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U}{R_p + jX_L} = U \frac{R_p - jX_L}{R_p^2 + X_L^2}.$$

Napon \underline{U}_{12} može se odrediti po izrazu:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot R - \underline{I}_2 \cdot R_p = \frac{U}{2(R_p^2 + X_L^2)} \left[(X_L^2 - R_p^2) + j2R_p X_L \right].$$

Efektivna vrijednost napona \underline{U}_{12} može se odrediti po relaciji:

$$U_{12} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{12} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{12} \}]^2},$$

gdje je $R_e\{\underline{U}_{12}\}$ realni, a $I_m\{\underline{U}_{12}\}$ imaginarni dio izraza za \underline{U}_{12} nakon čijeg uvrštavanja i sređivanja se dobiva:

$$U_{12} = \frac{U}{2}.$$

Posljednji izraz pokazuje da efektivna vrijednost napona U_{12} ne ovisi o otpornosti otpornika R_P , tj. da se ne mijenja pri njenoj promjeni.

Fazni stav fazora napona \underline{U}_{12} u odnosu na referentni fazor \underline{U} definiran je relacijom:

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = \frac{I_m\{\underline{U}_{12}\}}{R_e\{\underline{U}_{12}\}} = \frac{2R_P X_L}{X_L^2 - R_P^2}.$$

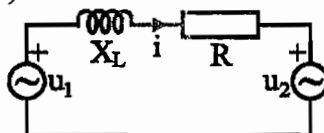
Posljednji izraz pokazuje da fazni stav napona \underline{U}_{12} ovisi o otpornosti R_P , odnosno da se mijenja pri njenoj promjeni.

Dakle, efektivna vrijednost napona U_{12} se ne mijenja, a fazni stav se mijenja pri promjeni otpornosti $R_P \Rightarrow \textcircled{3}$.

11. U električnom krugu prikazanom na slici 2.64 vrijedi: $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$, $u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + 90^\circ)$, $R = X_L$ i $U_{1m} = U_{2m} = U_m$. Ako je s Z označen modul impedanse električnog kruga, trenutna vrijednost struje i definirana je relacijom:

- | | |
|--|---|
| 1. $i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t - 90^\circ)$. | 2. $i = \frac{U_m \sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t - 90^\circ)$. |
| 3. $i = \frac{2U_m}{Z} \sin \omega t$. | 4. $i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + 90^\circ)$. |

(Zaokružiti tačan odgovor).



Slika 2.64 Shema električnog kruga uz test-zadatak 11

Rješenje

Prostoperiodične vremenske promjene napona u_1 i u_2 mogu se korištenjem simboličkog pristupa predstaviti u slijedećem obliku:

$$\underline{U}_1 = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0^\circ} = U \cdot e^{j0^\circ} = U;$$

$$\underline{U}_2 = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j90^\circ} = U \cdot e^{j90^\circ} = jU.$$

U posljednjim relacijama s U je označena efektivna vrijednost napona izvora.

Impedansa prikazanog električnog kruga je:

$$\underline{Z} = R + jX_L = R \cdot (1 + j),$$

a modul ove impedanse je:

$$Z = \sqrt{[R_e\{\underline{Z}\}]^2 + [I_m\{\underline{Z}\}]^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = R\sqrt{2}.$$

S obzirom na zadati smjer struje, vrijedi relacija:

$$\underline{I} = \frac{U_1 - U_2}{\underline{Z}} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1-j}{1+j} = -j \frac{U}{R}.$$

Uz korištenje izraza:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad R = \frac{Z}{\sqrt{2}},$$

relacija za struju \underline{I} može se napisati u obliku:

$$\underline{I} = -j \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{Z} \cdot e^{-j90^\circ}.$$

Efektivna i maksimalna vrijednost struje \underline{I} su:

$$I = \frac{U_m}{Z}, \quad I_m = I\sqrt{2} = \frac{U_m\sqrt{2}}{Z},$$

a početna faza:

$$\varphi_I = -90^\circ = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Izraz za promjenu struje kruga u vremenskom domenu je:

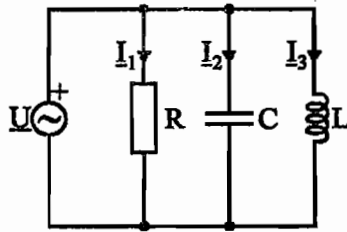
$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) = \frac{U_m\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t - 90^\circ) \Rightarrow \textcircled{2}.$$

12. U električnom krugu prikazanom na slici 2.65 poznato je:

$U = 100 \text{ V}$; $I_1 = 6 \text{ A}$; $I_2 = 10 \text{ A}$; $I_3 = 4 \text{ A}$. Ukupna prividna snaga je:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| 1. $S = 2000 \text{ VA}$. | 2. $S = 600\sqrt{2} \text{ VA}$. |
| 3. $S = 1200 \text{ VA}$. | 4. $S = 1232,9 \text{ VA}$. |

(Zaokružiti tačan odgovor).



Slika 2.65 Shema električnog kruga uz test-zadatak 12

Rješenje

Pretpostavit će se da je fazor napona izvora \underline{U} referentni:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ}$$

S obzirom na vrstu trošila u pojedinim granama kruga, struje grana u kompleksnom obliku definirane su izrazima:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j0^\circ} \quad (\text{u fazi s naponom } \underline{U});$$

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j90^\circ} \quad (\text{prednjači u odnosu na napon } \underline{U} \text{ za } 90^\circ);$$

$$\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{-j90^\circ} \quad (\text{kasni u odnosu na napon } \underline{U} \text{ za } 90^\circ).$$

Ukupna struja u krugu (struja koju izvor daje u krug) može se odrediti na osnovu I Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 6 + j10 - j4 = (6 + j6) \text{ A}$$

Ukupna prividna snaga u kompleksnom obliku je:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

gdje je \underline{I}^* konjugirano-kompleksna vrijednost struje \underline{I} .

Nakon uvrštavanja brojčanih podataka u posljednju relaciju dobiva se:

$$\underline{S} = 100(6 - j6) = 600(1 - j) \text{ VA}$$

Modul prividne snage je:

$$S = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{S}\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{S}\}]^2} = 600 \cdot \sqrt{1+1} = 600\sqrt{2} \text{ VA} \Rightarrow \textcircled{2}$$

13. Koji od izraza za sinusoidalno promjenljivi napon nije tačan? (Zaokružiti odgovor).

1. $f = \frac{1}{T}$. 2. $\omega = 2\pi f$. 3. $U_{sr} > U$. 4. $U_{sr} \neq 0$.

Rješenje

Period T i frekvencija napona f vezani su relacijom:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \text{odgovor 1. je tačan.}$$

Ugaona frekvencija (kružna učestanost) ovog napona definirana je izrazom:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \text{odgovor 2. je tačan.}$$

Srednja vrijednost sinusoidalno promjenljivog napona može se na osnovu maksimalne vrijednosti napona U_m odrediti po relaciji:

$$U_{sr} = \frac{2U_m}{\pi} = 0,637 \cdot U_m \neq 0 \Rightarrow \text{odgovor 4. je tačan.}$$

Efektivna vrijednost sinusoidalno promjenljivog napona data je relacijom:

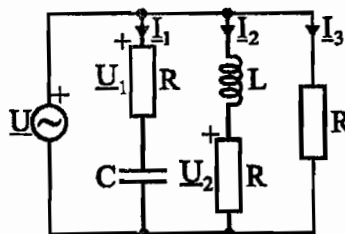
$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m.$$

Usporedba izraza za U_{sr} i U pokazuje da vrijedi relacija:

$$U_{sr} < U \Rightarrow \textcircled{3}.$$

14. Za električni krug prikazan na slici 2.66 poznato je: $\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ}$.
Koja od navedenih relacija je tačna? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{-j \arctg\left(\frac{X_C}{R}\right)}$. 2. $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j \arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)}$.
3. $\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{-j \arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)}$. 4. $\underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{-j \arctg\left(\frac{X_C}{R}\right)}$.



Slika 2.66 Shema električnog kruga uz test-zadatak 14

Rješenje

Prema uvjetu datom u zadatku, fazor napona izvora \underline{U} je referentni.

S obzirom da su u grani 1 serijski spojeni kondenzator C i radna otpornost R , fazor struje \underline{I}_1 mora biti pomjeren u odnosu na referentni fazor napona \underline{U} za

ugao $0^\circ < \varphi_1 < 90^\circ$, gdje je $\varphi_1 = \arctg\left(\frac{X_C}{R}\right)$. Dakle, tačan izraz za struju \underline{I}_1 u

kompleksnom obliku je:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\arctg\left(\frac{X_C}{R}\right)} \Rightarrow \text{odgovor 1. nije tačan.}$$

Fazor pada napona \underline{U}_1 na radnom otporu R mora imati isti fazni stav kao i fazor struje \underline{I}_1 jer su polaritet ovog pada napona i smjer struje u grani 1 međusobno usaglašeni. Tačan izraz za napon \underline{U}_1 u kompleksnom obliku je:

$$\underline{U}_1 = I_1 \cdot R \cdot e^{j\arctg\left(\frac{X_C}{R}\right)} = U_1 \cdot e^{j\arctg\left(\frac{X_C}{R}\right)} \Rightarrow \text{odgovor 4. nije tačan.}$$

U grani 2 serijski su spojeni zavojnica L i radna otpornost R , pa fazor struje \underline{I}_2 mora biti pomjeren u odnosu na referentni fazor napona \underline{U} za ugao

$-90^\circ < \varphi_2 < 0^\circ$, gdje je $\varphi_2 = -\arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)$. Tačan izraz za struju \underline{I}_2 u

kompleksnom obliku je:

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{-j\arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)} \Rightarrow \text{odgovor 2. nije tačan.}$$

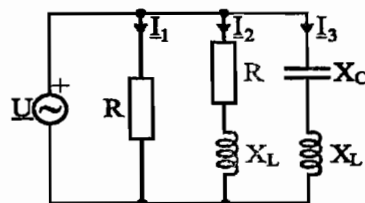
Fazor pada napona \underline{U}_2 na radnom otporu R mora imati isti fazni stav kao i fazor struje \underline{I}_2 jer su polaritet ovog pada napona i smjer struje u grani 2 međusobno usaglašeni. Tačan izraz za napon \underline{U}_2 u kompleksnom obliku je:

$$\underline{U}_2 = I_2 \cdot R \cdot e^{-j\arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)} = U_2 \cdot e^{-j\arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)} \Rightarrow \textcircled{3}.$$

15. Za električni krug prikazan na slici 2.67 poznato je: $X_L > X_C$, $\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j0^\circ}$.

Koja od navedenih relacija je tačna? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{-j90^\circ}$.
2. $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\left(90^\circ - \arctg\frac{X_L}{R}\right)}$.
3. $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\left(90^\circ + \arctg\frac{X_L}{R}\right)}$.
4. $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j0^\circ}$.



Slika 2.67 Shema električnog kruga uz test-zadatak 15

Rješenje

Prema uvjetu datom u zadatku, fazor struje u grani 3 \underline{I}_3 je referentni.

U grani 3 serijski su spojeni zavojnica reaktanse X_L i kondenzator reaktanse X_C za koje vrijedi $X_L > X_C$. To znači da se ovaj spoj ponaša se kao pretežno induktivan. U ovom slučaju fazor napona \underline{U} na krajevima ove grane mora prednjačiti za 90° u odnosu na referentni fazor struje \underline{I}_3 :

$$\underline{U} = \underline{I}_3 \cdot j(X_L - X_C) = I_3 e^{j0^\circ} (X_L - X_C) e^{j90^\circ} = I_3 (X_L - X_C) e^{j90^\circ} = U e^{j90^\circ},$$

pri čemu je $U > 0$.

S obzirom da je u grani 1 spojena samo radna otpornost R , fazor struje \underline{I}_1 mora imati isti fazni stav kao i fazor napona \underline{U} jer su polaritet ovog napona i smjer struje u grani 1 međusobno usaglašeni. Dakle, tačan izraz za struju \underline{I}_1 u kompleksnom obliku je:

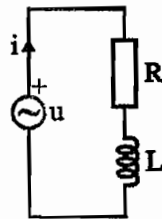
$$\underline{I}_1 = \frac{U}{R} \cdot e^{j90^\circ} = I_1 \cdot e^{j90^\circ} \Rightarrow \text{odgovori 1. i 4. nisu tačni.}$$

U grani 2 serijski su spojeni zavojnica L i radna otpornost R , pa fazor struje \underline{I}_2 mora biti pomjeren u odnosu na fazor napona \underline{U} za ugao $-90^\circ < \varphi_2 < 0^\circ$, gdje je $\varphi_2 = -\arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)$. Tačan izraz za struju \underline{I}_2 u kompleksnom obliku je:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{U}{Z_2} = \frac{U e^{j90^\circ}}{\sqrt{R^2 + X_L^2} \cdot e^{j\arctg\frac{X_L}{R}}} = \\ &= \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot e^{j\left(90^\circ - \arctg\frac{X_L}{R}\right)} = I_2 \cdot e^{j\left(90^\circ - \arctg\frac{X_L}{R}\right)} \Rightarrow \textcircled{2}. \end{aligned}$$

16. U električnom krugu prikazanom na slici 2.68 vremenske promjene napona i struje opisane su slijedećim izrazima: $u = 141 \sin(314t + 80^\circ)$ V, $i = 14,1 \sin(314t + 20^\circ)$ A. Radna snaga P koju izvor daje u krug iznosi:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. $P = 866$ W. | 2. $P = 616$ W. |
| 3. $P = 994$ W. | 4. $P = 500$ W. |



Slika 2.68 Shema električnog kruga uz test-zadatak 16

Rješenje

Prostoperiodične vremenske promjene napona u i struje i izvora mogu se korištenjem simboličkog pristupa predstaviti u slijedećem obliku:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j80^\circ} = \frac{141}{\sqrt{2}} \cdot e^{j80^\circ} = 100 \cdot e^{j80^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j20^\circ} = \frac{14,1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j20^\circ} = 10 \cdot e^{j20^\circ} \text{ A}.$$

Efektivna vrijednost i početna faza napona \underline{U} su:

$$U = 100 \text{ V} \quad \text{i} \quad \varphi_U = 80^\circ.$$

Efektivna vrijednost i početna faza struje \underline{I} su:

$$I = 10 \text{ A} \quad \text{i} \quad \varphi_I = 20^\circ.$$

Iz posljednjih relacija može se zaključiti da između fazora napona \underline{U} i struje \underline{I} postoji fazni pomak:

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 60^\circ,$$

pri čemu fazor napona prednjači fazoru struje za ugao φ .

Radna snaga koju izvor daje u krug može se izračunati po izrazu:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 100 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 500 \text{ W} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

17. U električnom krugu prikazanom na slici 2.68 vremenske promjena napona i struje opisane su slijedećim izrazima:
 $u = 28,2 \sin(628t + 80^\circ) \text{ V}$, $i = 2,82 \sin(628t + 50^\circ) \text{ A}$. Reaktivna snaga Q koju izvor daje u krug iznosi:

1. $Q = -40 \text{ VAr}$.
2. $Q = -79,5 \text{ VAr}$.
3. $Q = -68 \text{ VAr}$.
4. $Q = -20 \text{ VAr}$.

Rješenje

Prostoperiodične vremenske promjene napona u i struje i izvora mogu se korištenjem simboličkog pristupa predstaviti u slijedećem obliku:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j80^\circ} = \frac{28,2}{\sqrt{2}} \cdot e^{j80^\circ} = 20 \cdot e^{j80^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j20^\circ} = \frac{2,82}{\sqrt{2}} \cdot e^{j50^\circ} = 2 \cdot e^{j50^\circ} \text{ A}.$$

Efektivna vrijednost i početna faza napona \underline{U} su:

$$U = 20 \text{ V} \quad \text{i} \quad \varphi_U = 80^\circ.$$

Efektivna vrijednost i početna faza struje \underline{I} su:

$$I = 2 \text{ A} \quad \text{i} \quad \varphi_I = 50^\circ.$$

Iz posljednjih relacija može se zaključiti da između fazora napona \underline{U} i struje \underline{I} postoji fazni pomak:

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 30^\circ,$$

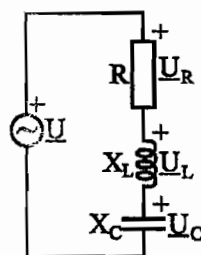
pri čemu fazor napona prednjači fazoru struje za ugao φ .

Reaktivna snaga koju izvor daje u krug može se izračunati po izrazu:

$$Q = -U \cdot I \cdot \sin \varphi = -20 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = -20 \text{ VAr} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

18. U električnom krugu prikazanom na slici 2.69 poznate su efektivne vrijednosti padova napona na pojedinim elementima kruga: $U_R = 30 \text{ V}$; $U_L = 60 \text{ V}$ i $U_C = 20 \text{ V}$. Efektivna vrijednost napona izvora U iznosi:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $U = 90 \text{ V}$. | 2. $U = 100 \text{ V}$. |
| 3. $U = 80 \text{ V}$. | 4. $U = 50 \text{ V}$. |

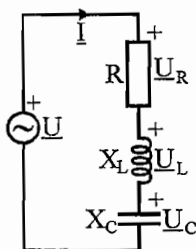


Slika 2.69 Shema električnog kruga uz test-zadatak 18

Rješenje

Pretpostavit će se smjer struje kao na slici 2.69.1 i usvojiti da je fazor struje \underline{I} referentni:

$$\underline{I} = I \cdot e^{j0^\circ}.$$



Slika 2.69.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerom struje

S obzirom da su polariteti padova napona i smjer struje u krugu međusobno usaglašeni, padovi napona na trošilima u kompleksnom obliku definirani su izrazima:

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot \underline{R} = \underline{I} \cdot \underline{R} \cdot e^{j0^\circ} = U_R \cdot e^{j0^\circ} = 30 \text{ V};$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot j\underline{X}_L = \underline{I} \cdot \underline{X}_L \cdot e^{j90^\circ} = U_L \cdot e^{j90^\circ} = 60 \cdot e^{j90^\circ} = j60 \text{ V};$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot (-j\underline{X}_C) = \underline{I} \cdot \underline{X}_C \cdot e^{-j90^\circ} = U_C \cdot e^{-j90^\circ} = 20 \cdot e^{-j90^\circ} = -j20 \text{ V}.$$

Naponska jednadžba napisana primjenom II Kirchhoffovog zakona za razmatrani električni krug je:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = U_R + j(U_L - U_C).$$

Nakon uvrštavanja izraza za \underline{U}_R , \underline{U}_L i \underline{U}_C u posljednju relaciju dobiva se:

$$\underline{U} = (30 + j40) \text{ V}.$$

Efektivna vrijednost U napona izvora je:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ V} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

19. Za električni krug prikazan na slici 2.69 poznati su slijedeći podaci:

$$f = 50 \text{ Hz}; U_R = 50 \text{ V}; U_L = 100 \text{ V} \text{ i } U_C = 60 \text{ V}.$$

Kako se mijenjaju efektivne vrijednosti padova napona ako se frekvencija poveća na $f' = 100 \text{ Hz}$, a struja ostane nepromijenjena u odnosu na slučaj napajanja naponom frekvencije f ? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $U'_R = 25 \text{ V}; U'_L = 200 \text{ V}; U'_C = 30 \text{ V}.$

2. $U'_R = 50 \text{ V}; U'_L = 200 \text{ V}; U'_C = 30 \text{ V}.$

3. $U'_R = 50 \text{ V}; U'_L = 50 \text{ V}; U'_C = 30 \text{ V}.$

4. $U'_R = 50 \text{ V}; U'_L = 200 \text{ V}; U'_C = 60 \text{ V}.$

Rješenje

Efektivne vrijednosti padova napona u slučaju napajanja električnog kruga naponom frekvencije $f = 50 \text{ Hz}$ su:

$$U_R = I \cdot R = 50 \text{ V};$$

$$U_L = I \cdot X_L = I \cdot \omega L = I \cdot 2\pi f L = 100 \text{ V};$$

$$U_C = I \cdot X_C = I \cdot \frac{1}{\omega C} = I \cdot \frac{1}{2\pi f C} = 60 \text{ V}.$$

Efektivne vrijednosti padova napona u slučaju napajanja električnog kruga naponom frekvencije $f' = 100 \text{ Hz}$ se, uz uzimanje u obzir uvjeta da se struja u krugu nije promijenila, mogu odrediti po relacijama:

$$U'_R = I \cdot R = 50 \text{ V};$$

$$U'_L = I \cdot X'_L = I \cdot \omega' L = I \cdot 2\pi f' L;$$

$$U'_C = I \cdot X'_C = I \cdot \frac{1}{\omega' C} = I \cdot \frac{1}{2\pi f' C}.$$

Iz izraza za napone U_R i U'_R može se zaključiti da pad napona na radnom otporu R ne ovisi o frekvenciji \Rightarrow odgovor 1. nije tačan.

Nakon dijeljenja relacija za napone U'_L i U_L i sređivanja dobiva se:

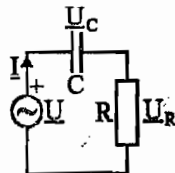
$$U'_L = U_L \cdot \frac{f'}{f} = 100 \cdot \frac{100}{50} = 200 \text{ V} \Rightarrow \text{odgovor 3. nije tačan.}$$

Nakon dijeljenja relacija za napone U'_C i U_C i sređivanja dobiva se:

$$U'_C = U_C \cdot \frac{f}{f'} = 60 \cdot \frac{50}{100} = 30 \text{ V} \Rightarrow \textcircled{2}.$$

20. U električnom krugu prikazanom na slici 2.70 dolazi do povećanja rastojanja između elektroda pločastog vazdušnog kondenzatora. Kako se mijenjaju efektivne vrijednosti struje i napona u ovom slučaju u odnosu na vrijednosti koje su imale prije povećanja? (Zaokružiti tačan odgovor).

- a. Struja I će se povećati. b. Napon U_C će se smanjiti.
c. Napon U_R će se povećati. d. Napon U_R će se smanjiti.



Slika 2.70 Shema električnog kruga uz test-zadatak 20

Rješenje

Električna kapacitivnost vazdušnog pločastog kondenzatora prije povećanja rastojanja između elektroda može se odrediti po izrazu:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d},$$

gdje je ϵ_0 dielektrična konstanta vakuuma (vazduha), S površina elektroda, a d rastojanje između elektroda.

Nakon povećanja rastojanja između elektroda na d' , električna kapacitivnost ovog kondenzatora je:

$$C' = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d'}.$$

S obzirom da vrijedi $d' > d$, za kapacitivnosti kondenzatora dobiva se:

$$C' < C.$$

Reaktanse kondenzatora s električnim kapacitivnostima C i C' su:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{i} \quad X'_C = \frac{1}{\omega C'}.$$

S obzirom da vrijedi $C' < C$, za reaktanse kondenzatora dobiva se:

$$X'_C > X_C.$$

Moduli impedansi električnog kruga kod reaktansi X_C i X'_C su:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad \text{i} \quad Z' = \sqrt{R^2 + X_C'^2}.$$

S obzirom da vrijedi $X'_C > X_C$, za impedanse se dobiva:

$$Z' > Z.$$

Efektivne vrijednosti struja kod impedansi krugova Z i Z' su:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \quad \text{i} \quad I' = \frac{U}{Z'} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C'^2}}.$$

S obzirom da je $Z' > Z$, za struje vrijedi slijedeći odnos:

$$I' < I,$$

odnosno struja u krugu će se smanjiti pri povećanju rastojanja \Rightarrow odgovor 1. nije tačan.

Padovi napona na kondenzatoru u razmatranim slučajevima su:

$$U_C = I \cdot X_C = \frac{U \cdot X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_C}\right)^2 + 1}};$$
$$U'_C = I' \cdot X'_C = \frac{U \cdot X'_C}{\sqrt{R^2 + X_C'^2}} = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{R}{X'_C}\right)^2 + 1}}.$$

S obzirom da je $X'_C > X_C$, za padove napona na kondenzatoru vrijedi slijedeći odnos:

$$U'_C > U_C,$$

odnosno pad napona na kondenzatoru će se povećati pri povećanju rastojanja \Rightarrow odgovor 2. nije tačan.

Padovi napona na radnoj otpornosti u razmatranim slučajevima su:

$$U_R = I \cdot R = \frac{U \cdot R}{Z} \quad \text{i} \quad U'_R = I' \cdot R = \frac{U \cdot R}{Z'}.$$

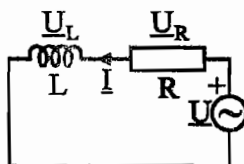
S obzirom da je $Z' > Z$, za padove napona na radnoj otpornosti vrijedi slijedeći odnos:

$$U'_R < U_R,$$

odnosno pad napona na radnom otporu će se smanjiti pri povećanju rastojanja \Rightarrow ④.

21. U električnom krugu prikazanom na slici 2.71 dolazi do uvlačenja feromagnetne jezgre u svitak. Kako se mijenjaju efektivne vrijednosti struje i napona u ovom slučaju u odnosu na vrijednosti koje su imale prije uvlačenja jezgre? (Zaokružiti tačan odgovor).

- a. Struja I neće se promijeniti. b. Struja I će se povećati.
c. Napon U_R će se povećati. d. Napon U_L će se povećati.



Slika 2.71 Shema električnog kruga uz test-zadatak 21

Rješenje

Uvlačenje feromagnetne jezgre u svitak za posljedicu ima povećanje induktivnosti svitka. Dakle, ako se s L označi induktivnost svitka prije uvlačenja jezgre, a s L' označi se induktivnost svitka nakon uvlačenja feromagnetne jezgre, vrijedi:

$$L' > L.$$

Reaktanse svitka prije i nakon uvlačenja jezgre su:

$$X_L = \omega L \quad \text{i} \quad X'_L = \omega L',$$

a odnos između ovih reaktansi je:

$$X'_L > X_L.$$

Moduli impedansi električnog kruga kod reaktansi X_L i X'_L su:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad \text{i} \quad Z' = \sqrt{R^2 + X_L'^2}.$$

S obzirom da vrijedi $X'_L > X_L$, za impedanse se dobiva:

$$Z' > Z.$$

Efektivne vrijednosti struja kod impedansi krugova Z i Z' su:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad \text{i} \quad I' = \frac{U}{Z'} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L'^2}}.$$

S obzirom da je $Z' > Z$, za struje vrijedi slijedeći odnos:

$$I' < I,$$

odnosno struja u krugu će se smanjiti pri uvlačenju feromagnetne jezgre u svitak \Rightarrow odgovori 1. i 2. nisu tačni.

Padovi napona na radnoj otpornosti kod impedansi krugova Z i Z' su:

$$U_R = I \cdot R = \frac{U \cdot R}{Z} \quad \text{i} \quad U'_R = I' \cdot R = \frac{U \cdot R}{Z'}.$$

S obzirom da je $Z' > Z$, za padove napona na radnoj otpornosti vrijedi slijedeći odnos:

$$U'_R < U_R,$$

odnosno pad napona na radnom otporu će se smanjiti pri uvlačenju jezgre \Rightarrow odgovor 3. nije tačan.

Padovi napona na svitku (zavojnici) u razmatranim slučajevima su:

$$U_L = I \cdot X_L = \frac{U \cdot X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_L}\right)^2 + 1}};$$

$$U'_L = I' \cdot X'_L = \frac{U \cdot X'_L}{\sqrt{R^2 + X_L'^2}} = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{R}{X'_L}\right)^2 + 1}}.$$

S obzirom da je $X'_L > X_L$, za padove napona na zavojnici vrijedi slijedeći odnos:

$$U'_L > U_L,$$

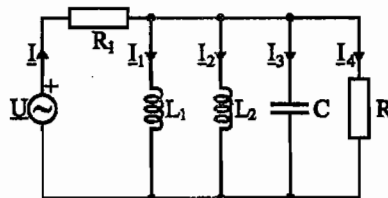
odnosno pad napona na zavojnici će se povećati pri uvlačenju jezgre \Rightarrow ④.

22. U električnom krugu prikazanom na slici 2.72 poznato je:

$$I_1 = 8 \text{ A}; I_2 = 6 \text{ A}; I_3 = 10 \text{ A}; I_4 = 5 \text{ A}.$$

Odrediti efektivnu vrijednost ukupne struje I . (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $I = 3 \text{ A}$. 2. $I = 29 \text{ A}$. 3. $I = \sqrt{41} \text{ A}$. 4. $I = \sqrt{89} \text{ A}$.

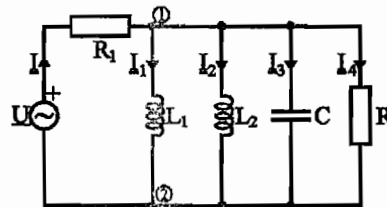


Slika 2.72 Shema električnog kruga uz test-zadatak 22

Rješenje

Pretpostavit će se da je fazor napona između čvorova ① i ② \underline{U}_{12} referentni (slika 2.72.1):

$$\underline{U}_{12} = U_{12} \cdot e^{j0^\circ}.$$



Slika 2.72.1 Shema električnog kruga s naznačenim čvorovima

S obzirom na vrstu trošila u pojedinim granama kruga, struje grana u kompleksnom obliku definirane su izrazima:

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{-j90^\circ} = 8 \cdot e^{-j90^\circ} = -j8 \text{ A} \quad (\text{kasni u odnosu na napon } \underline{U}_{12} \text{ za } 90^\circ);$$

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{-j90^\circ} = 6 \cdot e^{-j90^\circ} = -j6 \text{ A} \quad (\text{kasni u odnosu na napon } \underline{U}_{12} \text{ za } 90^\circ);$$

$$\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j90^\circ} = 10 \cdot e^{j90^\circ} = j10 \text{ A} \quad (\text{prednjači u odnosu na napon } \underline{U}_{12} \text{ za } 90^\circ);$$

$$\underline{I}_4 = I_4 \cdot e^{j0^\circ} = 5 \cdot e^{j0^\circ} = 5 \text{ A} \quad (\text{isti fazni stav kao napon } \underline{U}_{12}).$$

Ukupna struja \underline{I} može se odrediti na osnovu I Kirchhoffovog zakona napisanog za čvor ①:

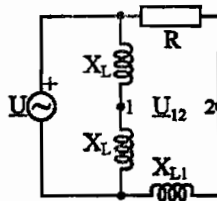
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 5 + j10 - j8 - j6 = (5 - j4) \text{ A}.$$

Efektivna vrijednost struje \underline{I} može se odrediti po relaciji:

$$I = \sqrt{[\text{Re}\{\underline{I}\}]^2 + [\text{Im}\{\underline{I}\}]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \text{ A} \Rightarrow \textcircled{3}.$$

23. U električnom krugu prikazanom na slici 2.73 dolazi do uvlačenja feromagnetne jezgre u svitak označen s \mathbf{X}_{L1} . Da li će se i kako promijeniti efektivna vrijednost i fazni stav napona U_{12} (u odnosu na napon U) u ovom slučaju u odnosu na vrijednosti koje su imale prije uvlačenja jezgre? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. Efektivna vrijednost napona U_{12} se povećava, a fazni stav se ne mijenja.
2. Efektivna vrijednost napona U_{12} se smanjuje, a fazni stav se mijenja.
3. Efektivna vrijednost napona U_{12} i fazni stav se ne mijenjaju.
4. Efektivna vrijednost napona U_{12} se ne mijenja, a fazni stav se mijenja.

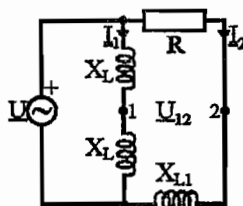


Slika 2.73 Shema električnog kruga uz test-zadatak 23

Rješenje

Pretpostavit će se smjerovi struja kao na slici 2.73.1 i usvojiti da je fazor napona izvora \underline{U} referentni:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ}.$$



Slika 2.73.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Impedansa grane 1 ne mijenja se pri uvlačenju feromagnetne jezgre u svitak označen s X_{L1} . S obzirom da je napon izvora konstantan, neće se mijenjati ni struja I_1 koja teče kroz ovu granu:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{j2X_L} = \text{const.}$$

Struja u grani 2 je:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{R} + jX_{L1}} = \frac{\underline{U} \cdot (\underline{R} - jX_{L1})}{\underline{R}^2 + X_{L1}^2}.$$

Napon između tačaka 1 i 2 može se odrediti po izrazu:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_2 \cdot \underline{R} - jX_L \cdot \underline{I}_1 = U \left[\frac{\underline{R}(\underline{R} - jX_{L1})}{\underline{R}^2 + X_{L1}^2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{U}{2} \left[\frac{(\underline{R}^2 - X_{L1}^2) - j2RX_{L1}}{\underline{R}^2 + X_{L1}^2} \right]$$

Efektivna vrijednost napona U_{12} određuje se po relaciji:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \sqrt{[R_e\{\underline{U}_{12}\}]^2 + [I_m\{\underline{U}_{12}\}]^2} = \\ &= \frac{U}{2} \frac{1}{\underline{R}^2 + X_{L1}^2} \sqrt{(\underline{R}^2 - X_{L1}^2)^2 + (2RX_{L1})^2} = \frac{U}{2}. \end{aligned}$$

Posljednji izraz pokazuje da efektivna vrijednost napona U_{12} ne ovisi o reaktansi svitka $X_{L1} \Rightarrow$ odgovori 1. i 2. nisu tačni.

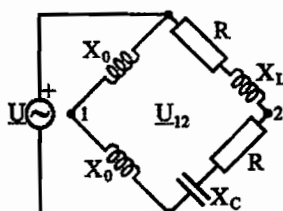
Fazni stav napona \underline{U}_{12} određuje se po relaciji:

$$\varphi_{12} = \arctg \frac{I_m \{ \underline{U}_{12} \}}{R_e \{ \underline{U}_{12} \}} = \arctg \frac{2RX_{L1}}{X_{L1}^2 - R^2}.$$

Posljednji izraz pokazuje da fazni stav napona \underline{U}_{12} ovisi o reaktansi svitka X_{L1} . Uvlačenje feromagnetne jezgre u svitak za posljedicu ima povećanje induktivnosti svitka. To znači da uvlačenje feromagnetne jezgre dovodi do promjene reaktanse svitka, odnosno dovodi do promjene faznog stava $\varphi_{12} \Rightarrow$ ④.

24. U električnom krugu prikazanom na slici 2.74 poznati su slijedeći parametri: U , $R = X_L = X_C$. Odrediti efektivnu vrijednost napona U_{12} . (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $U_{12} = U$. 2. $U_{12} = \frac{U}{2}$. 3. $U_{12} = 0$. 4. $U_{12} = 2 \cdot U$.

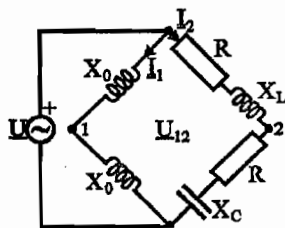


Slika 2.74 Shema električnog kruga uz test-zadatak 24

Rješenje:

Usvojit će se oznake i pretpostaviti smjerovi struja kao na slici 2.74.1. Također, pretpostavit će se da je fazor napona izvora \underline{U} referentni:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ} = U.$$



Slika 2.74.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Struja kroz granu sa serijskom vezom reaktansi X_0 je:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{j2X_0}.$$

Struja kroz granu sa serijskom vezom otpornosti R i reaktansi X_L i X_C je:

$$\underline{I}_2 = \frac{U}{2R + j(X_L - X_C)} = \frac{U}{2R}.$$

Izraz za napon \underline{U}_{12} u kompleksnom obliku je:

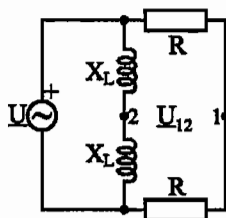
$$\underline{U}_{12} = -\underline{I}_1 \cdot jX_0 + \underline{I}_2 \cdot (R + jX_L) = -\frac{U}{2} + \frac{U}{2} \cdot (1 + j) = j\frac{U}{2}.$$

Efektivna vrijednost napona U_{12} je:

$$U_{12} = \frac{U}{2} \Rightarrow \textcircled{2}.$$

25. U električnom krugu prikazanom na slici 2.75 poznata je efektivna vrijednost napona izvora U . Odrediti efektivnu vrijednost napona U_{12} . (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $U_{12} = U$. 2. $U_{12} = \frac{U}{2}$. 3. $U_{12} = \frac{U}{4}$. 4. $U_{12} = 0$.

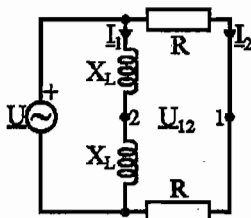


Slika 2.75 Shema električnog kruga uz test-zadatak 25

Rješenje

Usvojit će se oznake i pretpostaviti smjerovi struja kao na slici 2.75.1. Također, pretpostavit će se da je fazor napona izvora \underline{U} referentni:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ} = U.$$



Slika 2.75.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Struja kroz granu sa serijskom vezom reaktansi X_L je:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{j2X_L}.$$

Struja kroz granu sa serijskom vezom otpornosti R je:

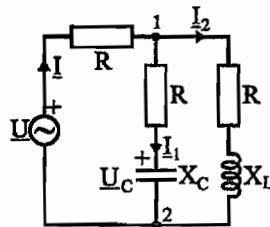
$$\underline{I}_2 = \frac{U}{2R}.$$

Napon \underline{U}_{12} u kompleksnom obliku je:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot jX_L - \underline{I}_2 \cdot R = \frac{U}{2} - \frac{U}{2} = 0 \Rightarrow \textcircled{4}.$$

26. U električnom krugu prikazanom na slici 2.76 poznati su slijedeći parametri: U , $R = X_L = X_C$. Koji od ponuđenih odgovora nije tačan? (Zaokružiti odgovor).

$$1. \ I = \frac{U}{2R}. \quad 2. \ U_{12} = \frac{U}{\sqrt{2}}. \quad 3. \ I_2 = \frac{U}{2\sqrt{2}R}. \quad 4. \ U_C = \frac{U}{2\sqrt{2}}.$$



Slika 2.76 Shema električnog kruga uz test-zadatak 26

Rješenje

Ukupna impedansa prikazanog električnog kruga, uz korištenje datog uvjeta: $R = X_L = X_C$, u kompleksnom obliku je:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + \frac{(R - jX_C) \cdot (R + jX_L)}{R - jX_C + R + jX_L} = R + \frac{(R - jR) \cdot (R + jR)}{2R} = \\ &= R + \frac{R^2 \cdot (1 - j) \cdot (1 + j)}{2R} = 2R. \end{aligned}$$

Efektivna vrijednost struje izvora je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{2R} \Rightarrow \text{odgovor 1. je tačan.}$$

Efektivna vrijednost napona između tačaka 1 i 2 može se odrediti po relaciji:

$$U_{12} = U - I \cdot R = \frac{U}{2} \Rightarrow \textcircled{2}.$$

Struja \underline{I}_2 određuje se po izrazu:

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{12}}{R + jX_L} = \frac{U_{12}}{R \cdot (1 + j)} = \frac{U_{12}}{2R} \cdot (1 - j).$$

Efektivna vrijednost ove struje je:

$$I_2 = \sqrt{[R_e\{\underline{I}_2\}]^2 + [I_m\{\underline{I}_2\}]^2} = \frac{U_{12}\sqrt{2}}{2R} = \frac{U}{2\sqrt{2}R} \Rightarrow \text{odgovor 3. je tačan.}$$

Struja \underline{I}_1 određuje se po izrazu:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{12}}{R - jX_C} = \frac{U_{12}}{R \cdot (1 - j)} = \frac{U_{12}}{2R} \cdot (1 + j).$$

Efektivna vrijednost ove struje je:

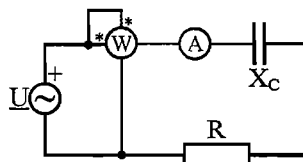
$$I_1 = \frac{U_{12}\sqrt{2}}{2R} = \frac{U}{2\sqrt{2}R}.$$

Efektivna vrijednost pada napona na kondenzatoru je:

$$U_C = I_1 \cdot X_C = \frac{U}{2\sqrt{2}R} \cdot X_C = \frac{U}{2\sqrt{2}R} \cdot R = \frac{U}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \text{odgovor 4. je tačan.}$$

27. U električnom krugu prikazanom na slici 2.77 odrediti reaktansu kondenzatora X_C ako je poznato: $U = 200$ V; $P_W = 640$ W; $I_A = 4$ A. Mjerni instrumenti mogu se smatrati idealnim. (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $X_C = 30 \Omega$. 2. $X_C = 50 \Omega$. 3. $X_C = 40 \Omega$. 4. $X_C = 10 \Omega$.



Slika 2.77 Shema električnog kruga uz test-zadatak 27

Rješenje

Aktivna snaga koju mjeri vatmetar je:

$$P_W = U \cdot I_A \cdot \cos \varphi = I_A^2 \cdot R$$

gdje je φ fazni pomak između napona i struje kruga.

Iz posljednje relacije dobiva se:

$$R = \frac{P_W}{I_A^2} = \frac{640}{4^2} = 40 \Omega.$$

Modul impedanse kruga je:

$$Z = \frac{U}{I_A} = \frac{200}{4} = 50 \Omega.$$

Za modul impedanse Z vrijedi i slijedeća relacija:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

odakle se dobiva:

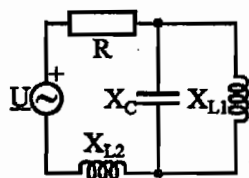
$$X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \Omega \Rightarrow \textcircled{1}.$$

28. U električnom krugu prikazanom na slici 2.78 poznato je:

$$X_C = 10 \Omega; X_{L1} = 20 \Omega; R = 15 \Omega.$$

Odrediti induktivnu reaktansu X_{L2} pri kojoj u strujnom krugu nastupa naponska rezonancija. (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $X_{L2} = 10 \Omega$; 2. $X_{L2} = 20 \Omega$; 3. $X_{L2} = 15 \Omega$; 4. $X_{L2} = 25 \Omega$.



Slika 2.78 Shema električnog kruga uz test-zadatak 28

Rješenje

Ukupna impedansa prikazanog električnog kruga je:

$$\underline{Z} = R + jX_{L2} + \frac{jX_{L1} \cdot (-jX_C)}{j(X_{L1} - X_C)} = R + j \left[X_{L2} - \frac{X_{L1} \cdot X_C}{X_{L1} - X_C} \right].$$

Naponska rezonancija nastaje ako je imaginarni dio ukupne impedanse električnog kruga jednak nuli:

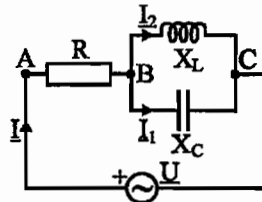
$$X = X_{L2} - \frac{X_{L1} \cdot X_C}{X_{L1} - X_C} = 0.$$

Iz posljednje relacije dobiva se:

$$X_{L2} = \frac{X_{L1} \cdot X_C}{X_{L1} - X_C} = \frac{20 \cdot 10}{20 - 10} = 20 \Omega \Rightarrow \textcircled{2}.$$

29. U električnom krugu prikazanom na slici 2.79 nastupila je strujna rezonancija. Poznato je: $U = 380 \text{ V}$; $X_C = 38 \Omega$; $R = 100 \Omega$. Koje od ponuđenih rješenja je tačno?

1. $I_1 = 10 \text{ A}$. 2. $U_{BC} = 100 \text{ V}$. 3. $U_{AB} = 380 \text{ V}$. 4. $I = 3,8 \text{ A}$.



Slika 2.79 Shema električnog kruga uz test-zadatak 29

Rješenje

S obzirom da je u električnom krugu nastupila strujna (paralelna) rezonancija, imaginarni dio izraza za admitansu kruga mora biti jednak nuli. U razmatranom slučaju imaginarni dio izraza za admitansu će biti suma admitansi grana paralelno vezanih između čvorova B i C.

Admitansa grane s reaktansom X_L je:

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{jX_L}.$$

Admitansa grane s reaktansom X_C je:

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{-jX_C} = j\frac{1}{X_C}.$$

Admitansa dijela električnog kruga između čvorova B i C je:

$$\underline{Y}_{BC} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) = 0.$$

Impedansa dijela električnog kruga između čvorova B i C je:

$$\underline{Z}_{BC} = \frac{1}{\underline{Y}_{BC}} \rightarrow \infty,$$

odnosno električni krug je u prekidu i vrijedi:

$$\underline{I} = \frac{U}{R + \underline{Z}_{BC}} = 0 \Rightarrow \text{odgovor 4. nije tačan.}$$

S obzirom da kroz otpornik R ne teče struja, za pad napona na ovom otporniku vrijedi:

$$U_R = U_{AB} = I \cdot R = 0 \Rightarrow \text{odgovor 3. nije tačan.}$$

Za napon između čvorova B i C vrijedi relacija:

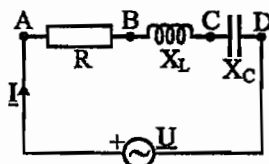
$$\underline{U}_{BC} = \underline{U} - \underline{U}_{AB} = \underline{U} \Rightarrow U_{BC} = U = 380 \text{ V} \Rightarrow \text{odgovor 2. nije tačan.}$$

Efektivna vrijednost struje kroz kondenzator je:

$$I_1 = \frac{U_{BC}}{X_C} = \frac{380}{38} = 10 \text{ A} \Rightarrow \text{ⓐ.}$$

30. U električnom krugu prikazanom na slici 2.80 nastupila je naponska rezonancija. Poznato je: $U = 220 \text{ V}$; $X_L = 200 \Omega$; $R = 22 \Omega$. Koje od ponuđenih rješenja je tačno?

1. $I = 1,1 \text{ A}$. 2. $U_{AB} = 0 \text{ V}$. 3. $U_{BD} = 220 \text{ V}$. 4. $U_{AC} = 2012,1 \text{ V}$.



Slika 2.80 Shema električnog kruga uz test-zadatak 30

Rješenje

S obzirom da je u električnom krugu nastupila naponska (serijska) rezonancija, imaginarni dio izraza za impedansu kruga mora biti jednak nuli.

Impedansa električnog kruga je:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C),$$

a s obzirom da za imaginarni dio vrijedi:

$$X_L - X_C = 0,$$

impedansa kruga je radnog karaktera:

$$Z = R.$$

Efektivna vrijednost struje je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{22} = 10 \text{ A} \Rightarrow \text{odgovor 1. nije tačan.}$$

Efektivna vrijednost pada napona na otporniku R može se odrediti po izrazu:

$$U_R = U_{AB} = I \cdot R = 10 \cdot 22 = 220 \text{ V} \Rightarrow \text{odgovor 2. nije tačan.}$$

Efektivna vrijednost pada napona između čvorova B i D može se odrediti po izrazu:

$$U_{BD} = I \cdot Z_{BD},$$

gdje je Z_{BD} modul impedanse između razmatranih čvorova za koji vrijedi:

$$Z_{BD} = X_L - X_C = 0.$$

Konačno se za napon U_{BD} dobiva:

$$U_{BD} = I \cdot Z_{BD} = 10 \cdot 0 = 0 \text{ V} \Rightarrow \text{odgovor 3. nije tačan.}$$

Efektivna vrijednost pada napona između čvorova A i C određuje se po relaciji:

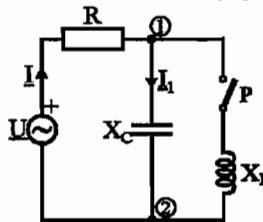
$$U_{AC} = I \cdot Z_{AC},$$

gdje je sa Z_{AC} označen modul impedanse između razmatranih čvorova. Nakon uvrštavanja brojčanih vrijednosti dobiva se:

$$U_{AC} = I \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2} = 10 \cdot \sqrt{22^2 + 200^2} = 2012,1 \text{ V} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

31. U električnom krugu prikazanom na slici 2.81 prekidač P je otvoren, a vrijedi $X_L = X_C$. Kako se mijenjaju efektivne vrijednosti struja I i I_1 nakon zatvaranja prekidača? (Zaokružiti tačan odgovor).

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. I se povećava. | 2. I se ne mijenja. |
| 3. I_1 se povećava. | 4. I_1 se smanjuje. |



Slika 2.81 Shema električnog kruga uz test-zadatak 31

Rješenje

Prije zatvaranja prekidača P za efektivne vrijednosti struja I i I_1 vrijedila je relacija:

$$I = I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}.$$

Nakon zatvaranja prekidača **P**, u električnom krugu nastaje paralelna (strujna) rezonancija jer radi uvjeta $X_L = X_C$ za paralelnu vezu kondenzatora reaktanse X_C i zavojnice reaktanse X_L vrijedi:

$$\underline{Y}_{LC} = \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = j \frac{X_L - X_C}{X_L \cdot X_C} = 0.$$

Impedansa ove paralelne veze je:

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{1}{\underline{Y}_{LC}} \rightarrow \infty,$$

odnosno električni krug je u prekidu.

To znači da za ukupnu struju vrijedi:

$$I' = 0.$$

S obzirom da je:

$$I' < I,$$

može se zaključiti da se efektivna vrijednost ukupne struje smanjila u odnosu na vrijednost koju je imala prije zatvaranja prekidača \Rightarrow odgovori 1. i 2. nisu tačni.

S obzirom da kroz otpornik **R** ne teče struja, za pad napona na ovom otporniku vrijedi:

$$U_R = 0,$$

pa je napon između čvorova ① i ② jednak naponu izvora:

$$U_{12} = U.$$

Efektivna vrijednost struje kroz kondenzator nakon zatvaranja prekidača je:

$$I'_1 = \frac{U_{12}}{X_C} = \frac{U}{X_C}.$$

Pri tome je zadovoljeno:

$$\frac{U}{X_C} > \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

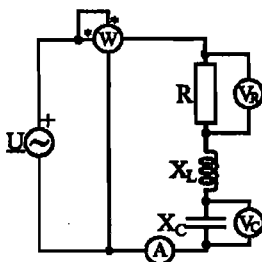
odnosno:

$$I'_1 > I_1,$$

što znači da se struja kroz kondenzator povećala nakon zatvaranja prekidača \Rightarrow ③.

32. U električnom krugu prikazanom na slici 2.82 vlada rezonancija. Efektivna vrijednost napona izvora i frekvencija su konstantni. Kako se mijenja pokazivanje idealnih mjernih instrumenata pri povećanju otpora R ? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. Snaga koju mjeri vatmetar se smanjuje.
2. Struja koju mjeri ampermetar se povećava.
3. Napon koji mjeri voltmetar V_R se povećava.
4. Napon koji mjeri voltmetar V_C ostaje nepromijenjen.



Slika 2.82 Shema električnog kruga uz test-zadatak 32

Rješenje

S obzirom na serijsku vezu kondenzatora i zavojnice u električnom krugu može nastupiti samo naponska (serijska) rezonancija. U ovom slučaju imaginarni dio izraza za impedansu kruga jednak je nuli ($X_L = X_C$):

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R.$$

Struja koju mjeri ampermetar je:

$$I_A = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}.$$

Posljednji izraz pokazuje da se, pri konstantnom naponu napajanja U , struja I_A smanjuje kod povećanja otpornosti $R \Rightarrow$ odgovor 2. nije tačan. Pad napona na otporniku R koji mjeri voltmetar V_R je:

$$U_R = I_A \cdot R = U.$$

Može se zaključiti da napon koji mjeri voltmetar V_R ne ovisi o otpornosti $R \Rightarrow$ odgovor 3. nije tačan.

Pad napona na reaktansi X_C koji mjeri voltmetar V_C je:

$$U_C = I_A \cdot X_C = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{2\pi f C}.$$

Može se zaključiti da se, pri konstantnoj efektivnoj vrijednosti U i frekvenciji f napona napajanja, napon koji mjeri voltmetar V_C smanjuje pri povećanju otpornosti $R \Rightarrow$ odgovor 4. nije tačan.

Snaga koju mjeri vatmetar je:

$$P_w = I_A^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}.$$

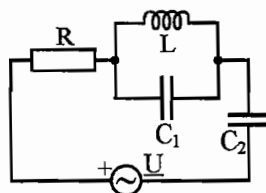
Dakle, s povećanjem otpornosti R smanjuje se snaga koju mjeri vatmetar $\Rightarrow \text{D}$.

33. U električnom krugu prikazanom na slici 2.83 poznato je:

$$L = 0,04 \text{ H}; C_1 = 1 \text{ } \mu\text{F}; C_2 = 0,76 \text{ } \mu\text{F}; R = 100 \text{ } \Omega.$$

Odrediti frekvenciju f_U napona izvora kod koje bi u krugu nastupila naponska rezonancija i frekvenciju napona izvora f_I kod koje bi u krugu nastupila strujna rezonancija. (Zaokružiti tačan odgovor).

1. $f_U \approx 600 \text{ Hz}; f_I \approx 800 \text{ Hz}.$
2. $f_U \approx 800 \text{ Hz}; f_I \approx 300 \text{ Hz}.$
3. $f_U \approx 300 \text{ Hz}; f_I \approx 1200 \text{ Hz}.$
4. $f_U \approx 1200 \text{ Hz}; f_I \approx 600 \text{ Hz}.$



Slika 2.83 Shema električnog kruga uz test-zadatak 33

Rješenje

Uvjet nastanka naponske (serijske) rezonancije je da imaginarni dio izraza za impedansu kruga bude jednak nuli. Impedansa prikazanog električnog kruga u kompleksnom obliku je:

$$\underline{Z} = R - jX_{C2} + \frac{jX_L \cdot (-jX_{C1})}{j(X_L - X_{C1})} = R + j \left[-X_{C2} - \frac{X_L \cdot X_{C1}}{X_L - X_{C1}} \right] = R + jX.$$

Reaktanse zavojnice i kondenzatora u izrazu za impedansu \underline{Z} definirane su relacijama:

$$X_L = \omega_U L, \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega_U C_1}, \quad X_{C2} = \frac{1}{\omega_U C_2},$$

gdje je ω_U kružna učestanost napona napajanja pri kojoj u strujnom krugu nastupa naponska rezonancija.

S obzirom da mora biti zadovoljeno $X = 0$, iz izraza za \underline{Z} se dobiva:

$$X_{C2} + \frac{X_L \cdot X_{C1}}{X_L - X_{C1}} = 0.$$

Nakon uvrštavanja izraza za reaktanse zavojnice i kondenzatora u posljednju relaciju i sređivanja dobiva se:

$$\omega_U = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{0,04 \cdot 1,76 \cdot 10^{-6}}} = 3768,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Frekvencija napona napajanja je:

$$f_U = \frac{\omega_U}{2\pi} = \frac{3768,9}{2\pi} = 599,8 \text{ Hz} \approx 600 \text{ Hz} \Rightarrow \text{D}.$$

Uvjet nastanka strujne (paralelne) rezonancije je da imaginarni dio izraza za admitansu kruga bude jednak nuli. Admitansa grane sa serijskom vezom radnog otpora R i kondenzatora C_2 je:

$$\underline{Y}_{RC} = \frac{1}{R - jX_{C2}}.$$

Admitansa paralelne veze kondenzatora C_1 i zavojnice L je:

$$\underline{Y}_{LC} = \underline{Y}_{C1} + \underline{Y}_L = j \left(\frac{1}{X_{C1}} - \frac{1}{X_L} \right) = j \frac{X_L - X_{C1}}{X_L \cdot X_{C1}}.$$

Reaktanse zavojnice i kondenzatora u izrazu za admitanse \underline{Y}_{RC} i \underline{Y}_{LC} definirane su relacijama:

$$X_L = \omega_1 L, \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C_1}, \quad X_{C2} = \frac{1}{\omega_1 C_2},$$

gdje je ω_1 kružna učestanost napona napajanja pri kojoj u strujnom krugu nastupa strujna rezonancija.

Ukupna admitansa kruga je:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{Y}_{RC} \cdot \underline{Y}_{LC}}{\underline{Y}_{RC} + \underline{Y}_{LC}} = G + jB.$$

Nakon sređivanja posljednjeg izraza i uvrštavanja uvjeta $B = 0$ dobiva se:

$$(X_L - X_{C1}) \cdot (X_L X_{C1} + X_L X_{C2} - X_{C1} X_{C2}) = 0.$$

Kad se u posljednji izraz uvrste relacije za X_L , X_{C1} i X_{C2} može se pokazati da je jedno od mogućih rješenja ove jednačbe:

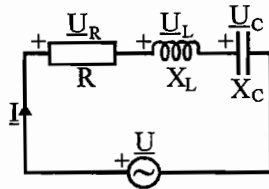
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_1}} = \frac{1}{\sqrt{0,04 \cdot 10^{-6}}} = 5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

odnosno:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{5000}{2\pi} = 795,8 \text{ Hz} \approx 800 \text{ Hz} \Rightarrow \text{D}.$$

34. U električnom krugu prikazanom na slici 2.84 vlada rezonancija. Koja od relacija nije tačna? (Zaokružiti odgovor).

1. $\cos\varphi = 1$. 2. $U_C = U_L$. 3. $U_R > U$. 4. $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.



Slika 2.84 Shema električnog kruga uz test-zadatak 34

Rješenje

S obzirom na serijsku vezu kondenzatora i zavojnice u električnom krugu može nastupiti samo naponska (serijska) rezonancija. U ovom slučaju reaktanse zavojnice i kondenzatora međusobno su jednake:

$$X_L = X_C,$$

odnosno:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

S obzirom da je:

$$\omega = 2\pi f,$$

dobiva se:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \text{odgovor 4. je tačan.}$$

Ukupna impedansa kruga u kompleksnom obliku je:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R.$$

Dakle, ukupna impedansa kruga je čisto aktivna, što znači da napon \underline{U} i struja \underline{I} imaju isti fazni stav (odnosno, da je fazni pomak φ između ovih fazora zadovoljava relaciju: $\varphi = 0$) pa je $\cos\varphi = 1 \Rightarrow$ odgovor 1. je tačan.

Efektivne vrijednosti padova napona na zavojnici i kondenzatoru su:

$$U_L = I \cdot X_L,$$

$$U_C = I \cdot X_C,$$

pa se, s obzirom na $X_L = X_C$, dobiva:

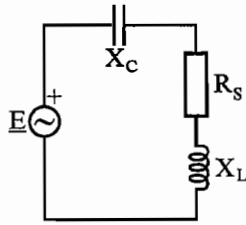
$$U_L = U_C \Rightarrow \text{odgovor 2. je tačan.}$$

Efektivna vrijednost pada napona na radnom otporu je:

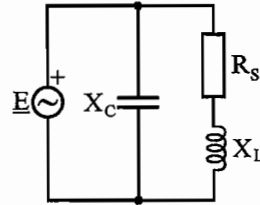
$$U_R = I \cdot R = \frac{U}{Z} \cdot R = \frac{U}{R} \cdot R = U \Rightarrow \textcircled{3}.$$

35. U električnim krugovima prikazanim na slikama 2.85.1 i 2.85.2 povećava se otpornost R_S . Kako se mijenjaju rezonantne frekvencije pri ovom povećanju? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. Rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.1 se ne mijenja, a rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.2 se smanjuje.
2. Rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.1 se smanjuje, a rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.2 se ne mijenja.
3. Rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.1 se povećava, a rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.2 se ne mijenja.
4. Rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.1 se ne mijenja, a rezonantna frekvencija u krugu sa slike 2.85.2 se povećava.



Slika 2.85.1 Shema električnog kruga 1 uz test-zadatak 35



Slika 2.85.2 Shema električnog kruga 2 uz test-zadatak 35

Rješenje

U električnom krugu prikazanom na slici 2.85.1 može nastupiti samo naponska (serijska) rezonancija. U ovom slučaju reaktivni dio ukupne impedanse kruga jednak je nuli, odnosno reaktanse zavojnice i kondenzatora međusobno su jednake:

$$X_L = X_C,$$

a rezonantna frekvencija je, kao i u test-zadatku 34, data izrazom:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Posljednji izraz pokazuje da rezonantna frekvencija u električnom krugu prikazanom na slici 2.85.1 ne ovisi o otpornosti $R_S \Rightarrow$ odgovori 2. i 3. nisu tačni.

U električnom krugu prikazanom na slici 2.85.2 može nastupiti samo strujna (paralelna) rezonancija. U ovom slučaju reaktivni dio ukupne admitanse kruga jednak je nuli.

Admitansa grane sa serijskom vezom zavojnice i radnog otpora je:

$$\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R_S + jX_L}.$$

Admitansa grane s kondenzatorom je:

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{-jX_C}.$$

Ukupna admitansa kruga je:

$$\begin{aligned} \underline{Y} = \underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_C &= \frac{1}{R_S + jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \\ &= \frac{R_S}{R_S^2 + X_L^2} + j \frac{R_S^2 + X_L^2 - X_C X_L}{X_C \cdot (R_S^2 + X_L^2)} = G + jB. \end{aligned}$$

Uvjet nastanka rezonancije je:

$$B = \frac{R_S^2 + X_L^2 - X_C X_L}{X_C \cdot (R_S^2 + X_L^2)} = 0.$$

Ako se u posljednju jednadžbu uvrste izrazi za reaktanse kondenzatora i zavojnice, te relacija za ugaonu frekvenciju:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X_L = \omega L, \quad \omega = 2\pi f,$$

nakon sređivanja se dobiva izraz za rezonantnu frekvenciju električnog kruga prikazanog na slici 2.85.2:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_S^2}{L^2}}.$$

Posljednji izraz pokazuje da se rezonantna frekvencija u električnom krugu prikazanom na slici 2.85.2 smanjuje s povećanjem otpornosti $R_S \Rightarrow \textcircled{1}$.

- 1) **Abiue peccate, non solum faciem.**
Operi i grijeha, a ne samo lice.
- 2) **Absens, carens.**
Tko je odsutan, ne dobiva ništa.
- 3) **Amantium ira amoris integratio est.**
Svađa zaljubljenih je obnavljanje ljubavi.
- 4) **Auribus frequentius quam lingua utere.**
Češće upotrebljavaj uši nego jezik.
- 5) **Aut amat aut odit mulier, nihil est tertium.**
Žena ili ljubi ili mrzi, trećeg nema.
- 6) **Avarus nisi cum moritur, nil recti facit.**
Škrtac ne čini nikad ništa dobro, osim kada umire.
- 7) **Beatus non est, qui habet, quae cupit, sed qui non cupit, quae non habet.**
Sretan nije onaj koji ima ono što želi, nego onaj koji ne želi ono što nema.
- 8) **Cave ab homine unius libri.**
Čuvaj se čovjeka koji je pročitao samo jednu knjigu.
- 9) **Coniugium sine prole est quasi dies sine sole.**
Brak bez djece je kao dan bez sunca.
- 10) **Cum ames, non sapias, aut cum sapias, non ames.**
Nisi pametan kada si zaljubljen, ili ako si pametan ne trebaš se zaljubiti.
- 11) **De iuvene tempus facit senem, de stulto nemo sapientem.**
Od mladića vrijeme načini starca, a od budale nitko mudraca.
- 12) **Ebrietas voluntaria insania est.**
Pijanstvo je dobrovoljna ludost.

Si disceres, scires
Kad bi učio, znao bi

Labora, quasi centum annos victurus sis
Radi kao da ćeš živjeti sto godina

GLAVA 3

U ovoj glavi su obrađene osnovne karakteristike elementarnih trofaznih potrošača električne energije. Analizirani su slučajevi izvedbe takvih potrošača putem spoja u zvijezdu i putem spoja u trogao. Također su naglašene posebnosti spoja potrošača, koji se u odnosu na napojnu električnu mrežu ponašaju kao nesimetrični potrošači električne energije.

Rasprostranjenost asinhronog motora i njegov opšti tehnički značaj, motivirali su autore da određeni prostor unutar rukopisa namjene i obrtnom magnetnom polju.

3. Višefazni sistemi prostoperiodičnih struja i napona

Tokom analize jednofaznih, linearnih električnih krugova prostoperiodičnih struja i napona, po pravilu se susreću generatori električne energije, koji raspolažu s dvije priključne stezaljke, između kojih postoji potencijalna razlika, određene amplitude i određene frekvencije.

Na električnim shemama takvih krugova, jedan od tih krajeva ima uz to i oznaku +, kojom se potencira da se u razmatranom trenutku, upravo taj kraj nalazi na većem potencijalu od onog drugog kraja.

Električne struje, uspostavljene po osnovu djelovanja takvih izvora električne energije, raspolažu s istom frekvencijom kao i spomenuta potencijalna razlika, a njihovi fazni stavovi određivani su na osnovu faznog stava te potencijalne razlike i električnih karakteristika potrošača, kroz koje se usmjeravaju te struje.

Električni generatori s opisanim karakteristikama nazivaju se jednofaznim električnim generatorima, odnosno jednofaznim električnim izvorima.

U elektroenergetici, odnosno u dijelu elektrotehnike unutar kojeg se razmatra proizvodnja, prenos, distribucija i neposredna upotreba električne snage, koja premašuje nivoe reda kVA, trofazni električni generatori su mnogo zastupljeniji od jednofaznih električnih generatora. Trofazni električni generatori proizvode tri elektromotorne sile, iste maksimalne amplitude i iste frekvencije, ali različite početne faze.

U tom smislu, **trofaznom generatoru simetričnog sistema sinusoidalnih napona direktnog redoslijeda faza**, pridružuje se slijedeći sistem faznih napona:

$$\begin{aligned}u_1 &= U_m \sin(\omega t + \theta_u); \\u_2 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{2\pi}{3}\right); \\u_3 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{4\pi}{3}\right).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ukoliko fazni napon u_2 fazno prednjači u odnosu na fazni napon u_1 , a fazni napon u_3 fazno prednjači u odnosu na fazni napon u_2 , tada se govori o generatoru simetričnog sistema sinusoidalnih napona

inverznog redoslijeda faza. Pod opisanim okolnostima sistemu sinusoidalnih napona inverznog redoslijeda faza pridružuje se sistem napona:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_m \sin(\omega t + \theta_u); \\ u_2 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u + \frac{2\pi}{3}\right); \\ u_3 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u + \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

S obzirom da se pomenute elektromotorne sile generišu između krajeva namotaja zavojnica, koje su prožete vremenski promjenljivim magnetnim fluksom, kod trofaznih električnih generatora u najopštijem slučaju se susreće šest priključnih stezaljki, putem kojih se ovakvi generatori mogu povezivati s drugim dijelovima električnog kruga.

Svaki od tih namotaja formalno može da predstavlja poseban električni krug, kojem se dodjeljuje termin **faza trofaznog električnog kruga**.

Termin **simetrični**, pridružuje se trofaznom sistemu prostoperiodičnih napona, ukoliko su maksimalne amplitude faznih napona za sve faze identične i ako je relativni fazni pomak između susjednih faza, po svom apsolutnom iznosu uvijek isti. Kod trofaznih simetričnih sistema, taj relativni fazni pomak između susjednih faza iznosi $2\pi/3$ radijana.

Ukoliko je narušen bilo koji od ova dva uslova, tada se razmatrani sistem tretira kao nesimetričan trofazni sistem.

U skladu s prethodnim definicijama, dvofazni sistem električnih napona, čiji su naponi definisani relacijama:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_m \sin(\omega t + \theta_u); \\ u_2 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

nije simetričan sistem faznih napona.

Analognim rasuđivanjem, m-faznom generatoru simetričnog sistema sinusoidalnih napona direktnog redoslijeda faza, odgovara slijedeći sistem faznih napona:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_m \sin(\omega t + \theta_u); \\ u_2 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{2\pi}{m}\right); \end{aligned}$$

$$u_3 = U_m \sin \left(\omega t + \theta_u - 2 \cdot \frac{2\pi}{m} \right);$$

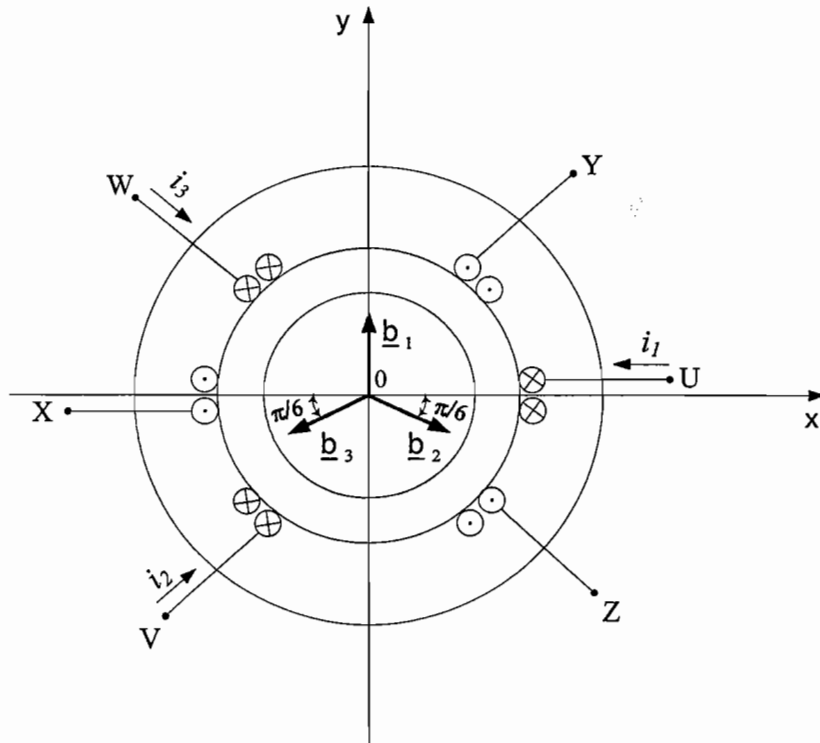
$$u_m = U_m \sin \left[\omega t + \theta_u - (m-1) \cdot \frac{2\pi}{m} \right]. \quad (3.3)$$

U tehničkoj praksi, trofazni sistemi simetričnih napona najčešće se ostvaruju pomoću trofaznih sinhronih generatora, kod kojih se ti naponi induciraju u vlastitim faznim namotajima generatora, postavljenim na stator takvog generatora. Da bi rotor s p pari polova, koji se vrti mehaničkom ugaonom brzinom $\omega_r = \omega/p$, mogao djelovanjem vlastitog magnetnog polja inducirati, u faznim namotajima generatora koji se nalaze na statoru, električne napone, koji čine trofazni sistem simetričnih napona, neophodno je da ti fazni namotaji budu i prostorno raspoređeni tako da je između njih i u prostornom smislu prisutan pomak od $2\pi/3$ radijana.

Na *Slici 3.1* grafički je prikazan prostorni raspored faznih namotaja u trofaznom sinhronom generatoru.

S obzirom da se svaki takav fazni napon generira u posebnom namotaju, za nametanje takvog napona nekom potrošaču, trebala bi se imati po dva provodnika, jedan od generatora do potrošača i drugi od potrošača do generatora.

Realizacija trofaznog napajanja sa šest provodnika donosi ne samo prostorne probleme (u elektrotehnici je raspoloživi prostor za smještanje određenog električnog sistema, uvijek poseban problem), nego i povećane troškove pri formiranju takvog napajanja, s obzirom da svaki provodnik ima i svoju cijenu koštanja. Elektrotehnička praksa je pokazala da eventualna prednost ovakvog tehničkog koncepta, iskazana u međusobnoj galvanskoj nezavisnosti pojedinih faza, nije dostatna da bi se amortizovali njegovi, prethodno opisani nedostaci. Zato se u praktičnim, industrijskim aplikacijama, široko i koriste tehnička rješenja u kojima se jedan spojni provodnik koristi za više od jedne faze.

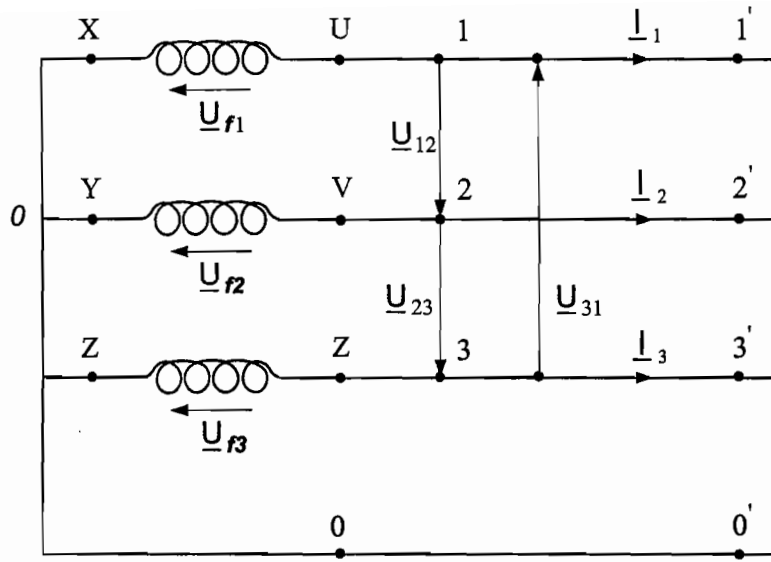


Slika 3.1 Grafički prikaz prostornog rasporeda faznih namotaja u trofaznom sinhronom generatoru

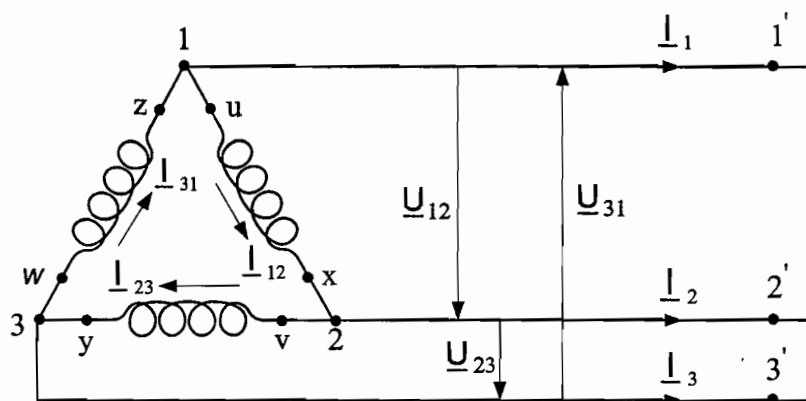
Fazni namotaji trofaznog (ali i m-faznog) električnog generatora mogu se, dakle, međusobno i spojiti, i to ne samo u cilju smanjenja broja priključnih stezaljki, preko kojih se električna energija dovodi do potrošača, nego i ostvarenja još nekih drugih dodatnih tehničkih pogodnosti, do kojih se dolazi po osnovu takvog spajanja. U tom kontekstu, ako se fazni namotaji trofaznog električnog generatora međusobno povežu kao na **Slici 3.2**, tada se kaže da su oni međusobno u spoju zvijezda.

Pri spajanju trofaznog električnog generatora (čiji su namotaji u međusobnom spoju zvijezda) s odgovarajućim potrošačima električne energije, zahtjevani transport električne energije, prema **Slici 3.2**, moguće je efikasno ostvariti s tri ili s četiri spojna provodnika.

Ukoliko se fazni namotaji trofaznog sistema napona međusobno spoje kao na **Slici 3.3**, tada se može konstatovati da su fazni namotaji trofaznog sistema napona vezani u spoj trougao.



Slika 3.2 Fazni namotaji generatora trofaznog sistema napona u spoju zvijezda



Slika 3.3 Fazni namotaji generatora trofaznog sistema napona u spoju trougao

Pri spajanju trofaznog električnog generatora (čiji su namotaji u međusobnom spoju trougao) s odgovarajućim potrošačima električne energije, zahtjevani transport električne energije, prema *Slici 3.3*, moguće je efikasno realizirati s tri spojna provodnika.

3.1 Vezivanje trofaznih generatora za potrošače električne energije

Kao što je već ranije konstatovano, fazni namotaji trofaznog generatora mogu međusobno biti vezani u spoju zvijezda (unutar ovakvog načina vezivanja, opet postoje dvije varijante: spoj zvijezda s nultim provodnikom i spoj zvijezda bez nultog provodnika), ili u spoju trokut.

Potrošači električne energije, koji se električnom energijom opskrbljuju iz trofaznih izvora električne energije, mogu imati dvije ili više od dvije pristupne tačke za njihovo povezivanje u napojnu električnu mrežu, pa se u kontekstu toga mogu vezivati za dva ili više spojnih provodnika trofazne napojne električne mreže.

Trofazni potrošači električne energije najčešće se dijele u dvije osnovne grupe: grupu trofaznih simetričnih potrošača i grupu trofaznih nesimetričnih potrošača.

Potrošači koji imaju vlastite impedanse u svim fazama međusobno jednake i po svom iznosu i po svojoj prirodi, nazivaju se **simetričnim trofaznim potrošačima** (za ovakve potrošače ravnopravno se koristi i termin **trofazni uravnoteženi potrošači**).

Slično tome, **nesimetričan trofazni potrošač** (za ovakvu grupu potrošača koristi se i termin **trofazni neuravnoteženi potrošač**) je onaj kod kojeg je narušen bilo koji od dva uslova, koji su prethodno pomenuti u okviru definicije simetričnosti potrošača.

3.1.1 Uravnoteženi trofazni električni krugovi

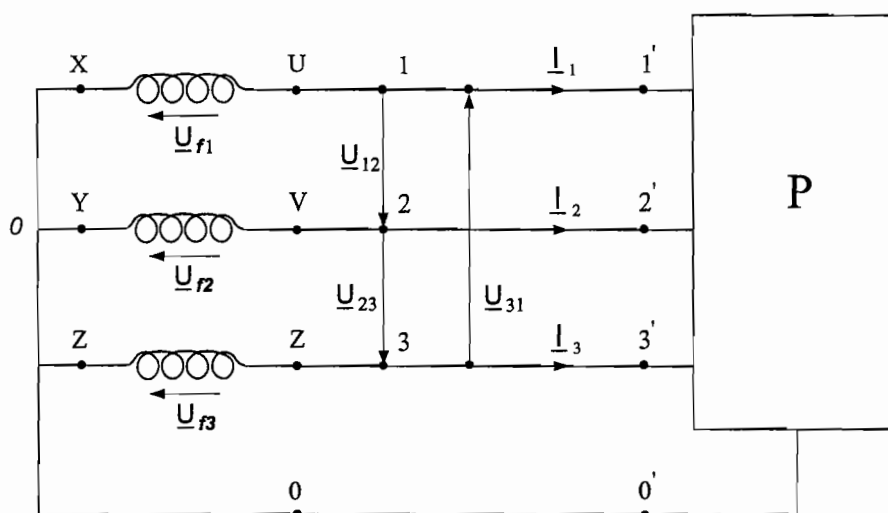
Ukoliko je trofazni generator, simetričnih sinusoidalnih napona direktnog redoslijeda faza, shematski prikazan na *Slici 3.4*, opterećen simetričnim trofaznim potrošačem, tada su električni potencijali tačaka 0 i $0'$ na istom iznosu (ove tačke se u elektrotehničkoj terminologiji nazivaju zvjezdište generatora i zvjezdište potrošača). U ovim okolnostima, kroz provodnik, koji povezuje te tačke (ovakav spojni provodnik se naziva nulti vod), nema električne struje.

Električne struje \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , koje teku kroz spojne provodnike, što povezuju trofazni generator i trofazni potrošač, u opisanim okolnostima, formiraju simetričan sistem trofaznih struja direktnog redoslijeda. Ove struje se u elektrotehničkoj terminologiji nazivaju **linijskim strujama razmatranog trofaznog sistema**. Lako se pokazuje da za takve linijske struje važi relacija:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0. \quad (3.4)$$

Ako priključeni simetrični trofazni potrošač ima takvu strukturu da je u spoju zvijezda, tada su navedene linijske struje \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 istovremeno i električne struje koje prolaze kroz odgovarajuće faze potrošača. Struje koje prolaze kroz odgovarajuće faze potrošača nazivaju se **faznim električnim strujama razmatranog trofaznog sistema**.

Generalno važi, da su pri bilo kakvoj konfiguraciji trofaznog potrošača u spoju zvijezda (dakle, bez obzira da li je potrošač simetričan ili nesimetričan), linijske i fazne struje međusobno jednake.



Slika 3.4 Trofazni generator, simetričnih sinusoidalnih napona direktnog redoslijeda faza, u spoju zvijezda, opterećen simetričnim trofaznim potrošačem

Električni naponi, koji postoje između pojedinih faza generatora, nazivaju se **međufaznim ili linijskim električnim naponima**. Ti naponi \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} , formiraju također simetričan sistem linijskih napona direktnog redoslijeda, pa i za njih važi relacija:

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \quad (3.5)$$

Pored ovih električnih napona, sa strane generatora definišu se i **fazni naponi** \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} , \underline{U}_{30} . To su naponi koji postoje između pojedinih faza trofaznog generatora (faze 1, ili faze 2, ili faze 3) i zajedničkog zvjezdišta generatorskih namotaja 0. Fazni naponi \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} i \underline{U}_{30} formiraju također simetričan sistem napona direktnog redoslijeda.

Nije teško zaključiti, da ukoliko postoji nulti vod u električnoj shemi sa *Slike 3.4*, tada trofazni simetrični potrošač na raspolaganju ima dvije vrste električnih napona: linijski električni naponi i fazni električni naponi.

Za razliku od električnih struja, električni naponi, koji postoje između pojedinih faza generatora (dakle, linijski električni naponi), ni po amplitudi, ni po faznom stavu, nisu podudarni s odgovarajućim faznim naponima. S obzirom da su linijski električni naponi definisani relacijama:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}, \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}, \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10},\end{aligned}\tag{3.6}$$

može se pokazati i to da linijski napon (naprimjer, napon \underline{U}_{12}), fazno prednjači u odnosu na odgovarajući fazni napon (napon \underline{U}_{10}) za $\pi/6$ radijana, te da linijski naponi imaju za $\sqrt{3}$ puta veću maksimalnu vrijednost amplitude u odnosu na maksimalnu vrijednost amplitude faznog napona.

Ako priključeni simetrični trofazni potrošač ima takvu strukturu da je u spoju trougao, tada su navedene linijske struje \underline{I}_1 , \underline{I}_2 i \underline{I}_3 istovremeno i **linijske električne struje potrošača**.

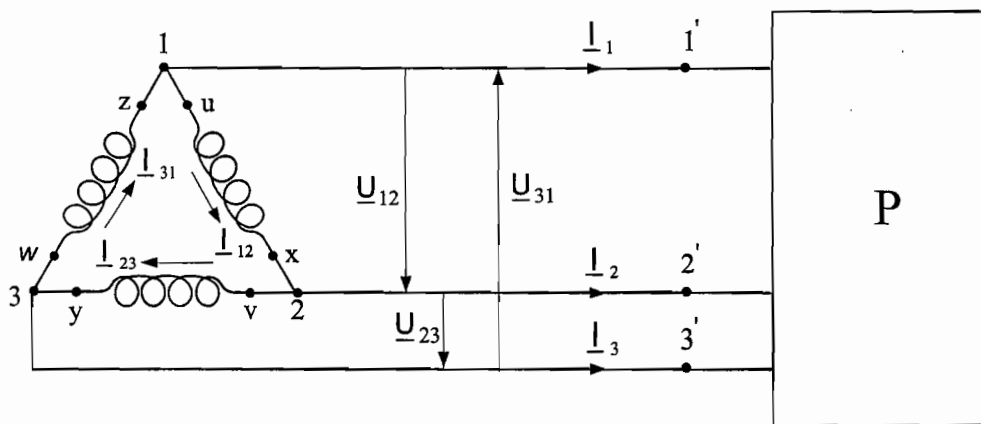
Struje koje prolaze kroz odgovarajuće faze potrošača nazivaju se **faznim električnim strujama** razmatranog trofaznog potrošača.

U opisanim okolnostima, može se pokazati da linijska struja potrošača (naprimjer, struja \underline{I}_1) fazno prednjači u odnosu na odgovarajuću faznu struju potrošača (struja \underline{I}_{12}) za $\pi/6$ radijana, ali i da linijske struje imaju za $\sqrt{3}$ puta veću vrijednost maksimalne amplitude u odnosu na maksimalnu amplitudu fazne struje.

Pri spoju potrošača u trougao, za razliku od električnih struja, električni naponi, koji postoje između pojedinih faza potrošača (dakle, linijski

električni naponi), i po amplitudi, i po faznom stavu, su podudarni s odgovarajućim faznim naponima tog potrošača.

Na *Slici 3.5* shematski je prikazan trofazni generator, simetričnih sinusoidalnih napona direktnog redoslijeda faza, čiji su namotaji međusobno spojeni u spoj trougao, u uslovima kada je opterećen simetričnim trofaznim potrošačem. Treba uočiti da simetrični trofazni potrošač u ovom slučaju ima na raspolaganju samo jednu vrstu napona, jer su u opisanim uslovima odgovarajući linijski i fazni naponi međusobno isti.



Slika 3.5 Trofazni generator, simetričnih sinusoidalnih napona direktnog redoslijeda faza, čiji su namotaji spojeni u spoj trougao, u uslovima kada je opterećen simetričnim trofaznim potrošačem

Moguće je pokazati, da u slučaju trofaznih simetričnih potrošača (bilo da su oni spojeni u trougao, bilo da su spojeni u zvijezdu), trenutna vrijednost električne snage $p(t)$, preuzete iz trofaznog generatora simetričnog sistema napona direktnog redoslijeda, ima konstantnu vrijednost u svakom trenutku vremena t , odnosno da važi relacija:

$$p(t) = p_{10}(t) + p_{20}(t) + p_{30}(t) = 3U_{10}I_1 \cos \varphi . \quad (3.7)$$

Ovo je vrlo značajna osobina trofaznog sistema napajanja, koja omogućuje, između ostalog, da se na osovini trofaznog asinhronog motora ostvaruje konstantan zakretni moment (kod jednofaznih električnih motora zakretni moment pulsira, jer trenutna vrijednost angažovane električne snage ovisi o vremenu).

Pri izvođenju relacije (3.7), uz uzimanje u obzir da na analizirani trofazni potrošač djeluje sistem trofaznih simetričnih sinusoidalnih napona direktnog redoslijeda faza:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_m \sin(\omega t + \theta_u), \\ u_2 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{2\pi}{3}\right), \\ u_3 &= U_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{4\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

te uz uvažavanje odnosa maksimalne amplitude električnog napona U_m i odgovarajuće efektivne vrijednosti tog napona U_{10} (važi odnos: $U_m = \sqrt{2} \cdot U_{10}$), pretpostavljeno je i da su karakteristike priključenog simetričnog trofaznog potrošača upravo takve da su kroz razmatrani potrošač uspostavljene fazne električne struje i_1 , i_2 i i_3 :

$$\begin{aligned} i_1 &= I_m \sin(\omega t + \theta_u - \varphi); \\ i_2 &= I_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right); \\ i_3 &= I_m \sin\left(\omega t + \theta_u - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right). \end{aligned}$$

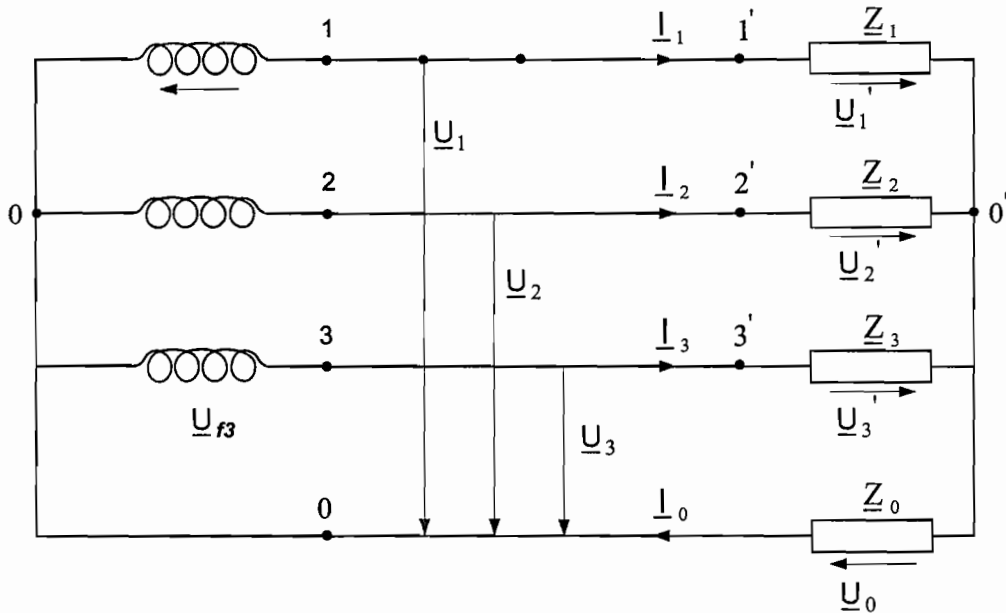
U gornjim relacijama, argument φ iskazuje karakteristike, odnosno prirodu tog potrošača, a odnos između maksimalne amplitude električne struje I_m i odgovarajuće efektivne vrijednosti te struje I_1 iskazan je relacijom: $I_m = \sqrt{2} \cdot I_1$.

3.1.2 Neuravnoteženi trofazni električni krugovi

U slučajevima kada se trofazni potrošači električne energije ponašaju kao simetrična trofazna opterećenja, dovoljno je odrediti samo jednu faznu ili linijsku struju, nakon čega se, zbog simetričnosti problema, vrlo brzo mogu rekonstruisati i ostale fazne ili linijske struje.

U prethodno opisanim uslovima, slična zakonomjernost važi i za električne napone. Međutim, ukoliko je trofazni potrošač električne energije takav da se ponaša kao nesimetričan potrošač električne energije, određivanje faznih i linijskih struja (isto tako i faznih i linijskih napona) je znatno složenije.

Na *Slici 3.6* prikazan je spoj trofaznog generatora, simetričnog sistema prostoperiodičnih napona direktnog redoslijeda faza, čiji su namotaji spojeni tako da formiraju spoj u zvijezdu, i trofaznog nesimetričnog potrošača, čije impedanse također formiraju spoj u zvijezdu.



Slika 3.6 Spoj trofaznog generatora, simetričnog sistema prostoperiodičnih napona direktnog redoslijeda faza, čiji su namotaji spojeni u spoj zvijezda, i trofaznog nesimetričnog potrošača, čije impedanse također formiraju spoj u zvijezdu

S obzirom da razmatrani trofazni generator sistema prostoperiodičnih napona generiše simetričan sistem napona direktnog redoslijeda faza, pod uticajem nesimetričnog trofaznog potrošača, uspostavlja se sistem prostoperiodičnih struja \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , \underline{I}_0 , koje ne čine simetričan sistem.

U skladu s I Kirchhoffovim zakonom, primjenjenim bilo na čvor 0 ili na čvor 0', važi slijedeća relacija:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_0 = 0. \quad (3.8)$$

U uslovima uspostavljanja električne struje $\underline{I}_0 \neq 0$ i primjene Ohmova zakona, električni napon između zvjezdišta trofaznog potrošača 0' i zvjezdišta trofaznog generatora 0, definisan je relacijom:

$$\underline{U}_{(0'-0)} = \underline{I}_0 \underline{Z}_0. \quad (3.9)$$

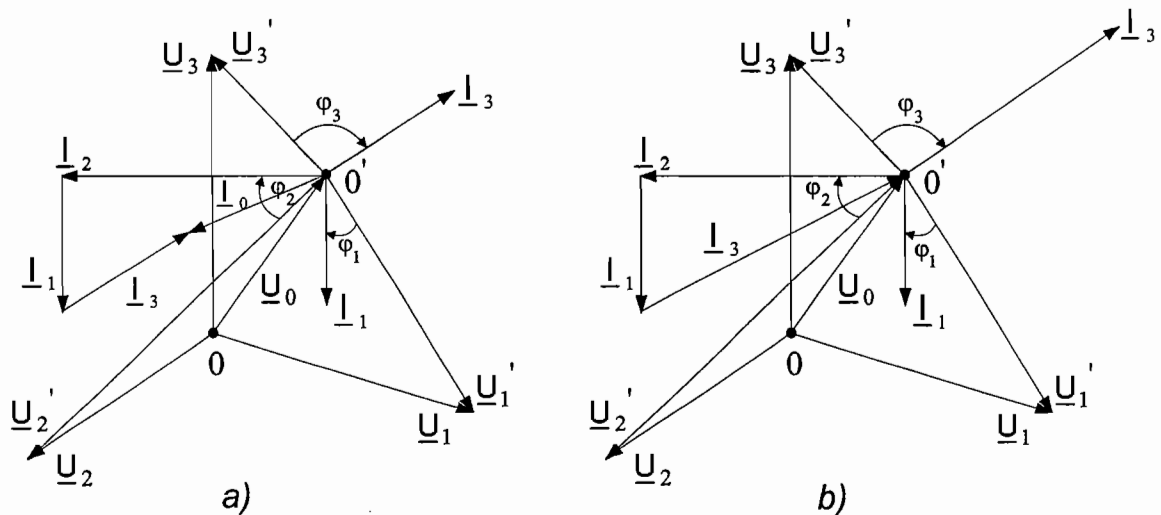
U opisanim uvjetima, fazni električni naponi $\underline{U}_{(1'-0')}$, $\underline{U}_{(2'-0')}$ i $\underline{U}_{(3'-0')}$, prema II Kirchhoffovom zakonu, definisani su slijedećim relacijama:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{(1'-0')} &= \underline{U}_{10} - \underline{U}_{(0'-0)} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1; \\ \underline{U}_{(2'-0')} &= \underline{U}_{20} - \underline{U}_{(0'-0)} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2; \\ \underline{U}_{(3'-0')} &= \underline{U}_{30} - \underline{U}_{(0'-0)} = \underline{I}_3 \underline{Z}_3.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Na osnovu relacija (3.8), (3.9) i (3.10), moguće je izračunati električni napon $\underline{U}_{(0'-0)}$ između dva zvjezdišta u razmatranom sistemu:

$$\underline{U}_{(0'-0)} = \frac{\frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_0}}.\quad (3.11)$$

Na *Slici 3.7* prikazani su fazorski dijagrami električnih struja i napona za električni krug, shematski prikazan na *Slici 3.6*, i to u slučaju kada postoji nulti vod (slika a), te u slučaju kada nulti vod ne postoji (slika b).



Slika 3.7 Fazorski dijagrami električnih struja i napona za električni krug, shematski prikazan na slici 4.6 kada:
a) postoji nulti-vod; b) nulti vod ne postoji.

Fazorski dijagrami sa **Slike 3.7** omogućavaju uočavanje nekih efekata uvođenja nultog voda u razmatrani trofazni sistem. Naime, u prisustvu nultog voda napon između zvjezdišta se smanjuje, čime se odmah snižava i nivo nesimetrije faznih napona na potrošaču.

S obzirom da je u uslovima kada nultog voda nema njegova impedansa maksimalna (tada je $Z_0 = \infty$), opravdano je zapitati se i šta se dešava pri daljem smanjenju vrijednosti te impedanse.

U graničnom, teoretskom, slučaju, kada bi se ostvarila vrijednost $Z_0 = 0$, napon između zvjezdišta $U_{(0'-0)}$ bi bio sveden na nulti iznos, odnosno nastupilo bi prinudno simetriranje faznih napona na trofaznom potrošaču.

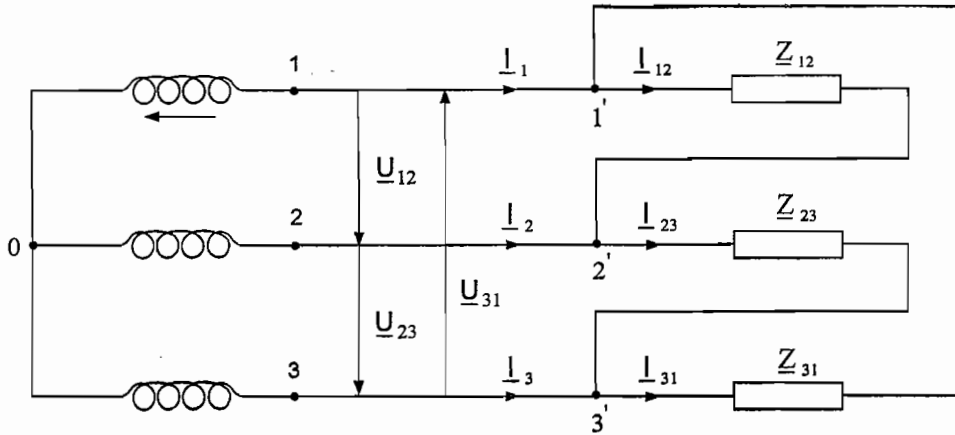
Međutim, i u navedenim uslovima fazne i linijske struje ostaju nesimetrične, što omogućava izvođenje zaključka da se tada duž pojedinih spojnih provodnika prenose različiti iznosi električne energije.

Uvođenje nultog voda, pored ublažavanja posljedica nesimetričnosti potrošača, omogućava i uspostavljanje stabilnijih vrijednosti faznih napona potrošača, što je vrlo važno za jednofazne potrošače, koji u takvim okolnostima trpe manje promjene napona napajanja.

Nulti vod ima i veliki značaj pri zaštiti električnih krugova. Tehnički propisi nalažu, da ako nema posebnog zaštitnog provodnika, uzemljeni nulti provodnik ima i zaštitnu funkciju.

Razmatrani spoj s neutralnim provodnikom vrlo često se susreće u niskonaponskim distributivnim, urbanim i industrijskim električnim mrežama, pri čemu se viši linijski napon koristi uglavnom za trofazne potrošače – kojim je svojstvena veća vrijednost instalisane električne snage, dok se niži (fazni) naponi uglavnom koriste za napajanje monofaznih potrošača (rasvjeta, multimedijalni uređaji i slično).

Kao što je već ranije rečeno, trofazni potrošač može biti formiran i tako da mu pripadajuće impedanse čine spoj u trougao. Na **Slici 3.8** shematski je prikazan mogući spoj trofaznog generatora, simetričnog sistema prostoperiodičnih napona, direktnog redoslijeda faza, čiji su namotaji spojeni tako da formiraju spoj u zvijezdu i trofaznog nesimetričnog potrošača, čije impedanse formiraju spoj u trougao.



Slika 3.8 Spoj trofaznog generatora, simetričnog sistema prostoperiodičnih napona, direktnog redoslijeda faza, čiji su namotaji spojeni u zvijezdu i trofaznog nesimetričnog potrošača u spoju u trougao

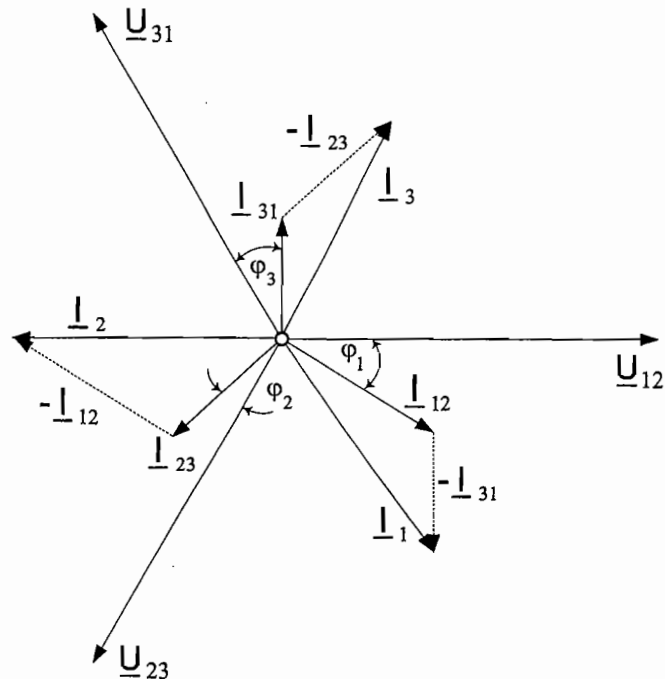
U skladu s električnom shemom prikazanom na **Slici 3.8** i I Kirchhoffovim zakonom, važe relacije:

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0; \\
 \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \\
 \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \\
 \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Zbog nesimetričnosti impedansi \underline{Z}_{12} , \underline{Z}_{23} , \underline{Z}_{31} i očuvane simetričnosti linijskih napona \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} trofaznog generatora (koji su ujedno i linijski i fazni naponi analiziranog trofaznog potrošača sa **Slike 3.8**), fazne struje razmatranog trofaznog potrošača formiraju nesimetričan trofazni sistem faznih struja i definisane su relacijama:

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{12} &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \\
 \underline{I}_{23} &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}; \\
 \underline{I}_{31} &= \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Na **Slici 3.9** prikazan je fazorski dijagram električnih struja i napona za trofazni električni krug, shematski prikazan na **Slici 3.8**.



Slika 3.9 Fazorski dijagrami električnih struja i napona za električni krug shematski prikazan na **Slici 3.8**

Sagledavanjem uspostavljenih odnosa između karakterističnih veličina na električnoj shemi sa **Slike 3.8**, može se zaključiti da u slučaju ovakve prirode neuravnoteženog trofaznog potrošača električne energije, raspored električnih struja kojima se opterećuju trofazni generator i trofazni potrošač je suštinski različit u odnosu na slučaj opterećivanja istog trofaznog generatora simetričnim trofaznim potrošačem, koji je izveden spojem pripadajućih impedansi u spoj trougao.

Odgovarajućom transfiguracijom impedansi međusobno povezanih u spoj trougao, u ekvivalentni spoj impedansi međusobno povezanih u spoj zvijezda, moguće je i analizu trofaznog električnog kruga sa **Slike 3.8** provesti na analogan način kao što je provedena analiza trofaznog električnog kruga sa **Slike 3.6**.

3.2 Obrtno magnetno polje

Tokom proučavanja magnetnih pojava, u okolini provodnika kroz koje se usmjeravaju stalne jednosmjerne struje, konstatovano je da se u tom prostoru uspostavlja stacionarno magnetno polje, čije prisustvo se, između ostalog, manifestuje i kroz mehaničko djelovanje silom na okolne provodnike u kojima također mora biti uspostavljena električna struja (ovo mehaničko djelovanje silom iskazuje se i na permanentne magnete, kada se nađu dovoljno blizu takvih provodnika sa strujom).

Uspostavi li se prostoperiodična struja kroz provodnik, također se uspostavlja magnetno polje u njegovoj okolini, ali je ono sada promjenljivo s vremenom, dakle nije više stacionarnog karaktera. U takvim okolnostima i uspostavljeni magnetni fluks je funkcija vremena, pa je samim tim i magnetna indukcija također funkcija vremena.

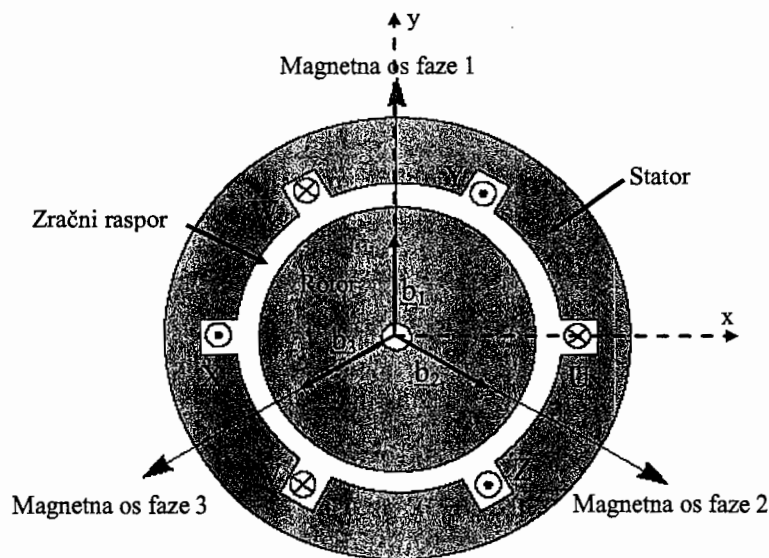
S obzirom da se magnetnoj indukciji pridružuje i vektorski karakter, očigledno da taj vektor u različitim trenucima vremena mijenja ne samo svoju amplitudu, nego i svoj smjer.

U nastavku ovog odjeljka, pokazat će se da se pogodnim prostornim rasporedom provodnika i uz usmjeravanje kroz te provodnike adekvatnog sistema prostoperiodičnih električnih struja, može postići da vektor magnetne indukcije u takvom sistemu tokom vremena ne mijenja svoju maksimalnu amplitudu, ali mijenja smjer djelovanja.

Glavne zasluge za otkriće ovakve mogućnosti pripadaju naučniku Nikoli Tesli, koji je osmislio principe uspostavljanja obrtnog magnetnog polja.

Na *Slici 3.10* prikazan je poprečni presjek elementarne trofazne električne mašine koja se sastoji od statora i rotora. Pokretni dio električne mašine (rotor) na *Slici 3.10* prikazan je pojednostavljeno, bez utora i namota. Prostor između rotora i statora naziva se zračni raspor. Stator je nepokretni dio električne mašine, a u utorima izrađenim na statoru postavlja se trofazni namotaj. Početak i kraj namotaja faze 1 označeni su slovima U i X, početak i kraj namotaja faze 2 označeni su s V i Y, a početak i kraj namotaja faze 3 označeni su s W i Z. Sva tri namotaja imaju isti broj zavoja i postavljeni su na željeznu jezgru tako da između njihovih osa postoji prostorni pomak od $2\pi/3$ radijana. Kroz namotaje na statoru protječu tri prostoperiodične električne struje i_1 , i_2 i i_3 , koje imaju iste maksimalne amplitude I_m i međusobno su fazno pomaknute za $2\pi/3$ radijana:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= I_m \sin \omega t ; \\
 i_2 &= I_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) ; \\
 i_3 &= I_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) .
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$



Slika 3.10 Poprečni presjek elementarne trofazne električne mašine

Uslijed protjecanja struja i_1 , i_2 i i_3 , duž magnetnih osa djeluju pulzirajuća magnetna polja, čije su maksimalne amplitude magnetne indukcije B_m srazmjerne maksimalnim amplitudama električnih struja I_m i imaju iste fazne stavove kao i odgovarajuće električne struje:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= B_m \sin \omega t ; \\
 b_2 &= B_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) ; \\
 b_3 &= B_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) .
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Komponente magnetne indukcije rezultantnog polja na x i y osi, u bilo kojem trenutku t , mogu se odrediti po izrazima:

$$B_x(t) = b_{1x} + b_{2x} + b_{3x};$$

$$B_y(t) = b_{1y} + b_{2y} + b_{3y}.$$

S dijagrama prikazanog na *Slici 3.10* vidi se da vrijedi:

$$B_x(t) = B_m \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \cdot \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t;$$

$$B_y(t) = B_m \sin \omega t - B_m \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t$$

Maksimalna amplituda magnetne indukcije resultantnog magnetnog polja je:

$$B(t) = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m.$$

Posljednja relacija pokazuje da maksimalna amplituda magnetne indukcije resultantnog magnetnog polja ne ovisi o vremenu, odnosno da ima konstantnu vrijednost, koja je 1,5 puta veća od maksimalne amplitude magnetne indukcije jedne faze B_m .

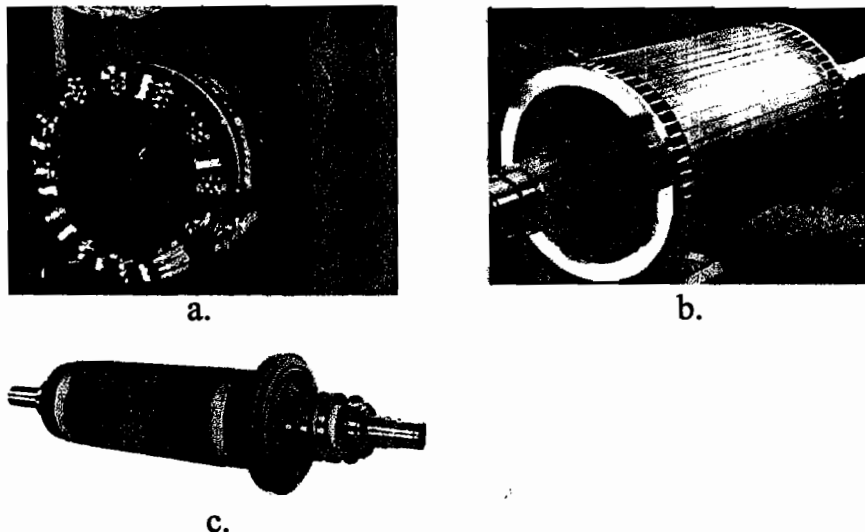
Može se pokazati da se položaj vektora koji predstavlja maksimalnu amplitudu magnetne indukcije resultantnog magnetnog polja $B(t)$ mijenja u vremenu. Ovaj vektor vrti se ugaonom brzinom koja je jednaka kružnoj frekvenciji ω koja određuje brzinu promjene struja i_1 , i_2 i i_3 . Dakle, vektor $B(t)$ rotira tako da se njegova pozicija poklapa s pozicijama magnetnih osi faznih namotaja tačno u onom trenutku u kojem struja koja teče kroz odgovarajući namotaj ima maksimalnu vrijednost. U slučaju prikazanom na *Slici 3.10*, smjer vrtnje vektora $B(t)$, odnosno smjer vrtnje trofaznog obrtnog magnetnog polja, jednak je smjeru vrtnje kazaljke na satu. Smjer vrtnje trofaznog obrtnog magnetnog polja može se promijeniti ako se zamijene bilo koje dvije struje dovedene namotajima. Naprimjer, smjer vrtnje trofaznog obrtnog magnetnog polja može se promijeniti ako se namotaju faze 3 dovede struja i_2 , a namotaju faze 2 dovede struja i_3 .

Postojanje trofaznog obrtnog magnetnog polja osnova je rada trofaznih asinhronih motora. Trofazni asinhroni motori omogućuju pretvorbu električne u mehaničku energiju i najčešće su korištena vrsta električnih motora.

Osnovni dijelovi ovog motora su stator i rotor. Stator je izrađen od željeznih limova, a u usječene utore postavljen je trofazni namotaj spojen u zvijezdu ili trokut. Ovaj namotaj sastoji se od tri međusobno jednaka fazna namotaja, što znači da trofazni asinhroni motor predstavlja simetričan trofazni potrošač. Rotor trofaznog asinhronog motora može se izvesti na dva načina, ovisno o tome kako su vodiči postavljeni u utore usječene na rotoru:

- kavezni;
- klizno-kolutni (trofazni namotaj na rotoru).

Fotografije osnovnih dijelova trofaznog asinhronog motora prikazane se na *Slici 3.11*.



*Slika 3.11 Osnovni dijelovi trofaznog asinhronog motora
a. stator; b. kavezni rotor; c. klizno-kolutni rotor*

Fazni namotaji na statoru postavljeni su na isti način kao kod elementarne trofazne električne mašine prikazane na *Slici 3.10*, odnosno tako da su međusobno prostorno pomjereni za $2\pi/3$ radijana. Kroz ove namotaje protiču prostoperiodične struje opisane relacijama (3.14), uslijed čega dolazi do stvaranja trofaznog obrtnog magnetnog polja. Djelovanje obrtnog magnetnog polja uzrokuje da u vodičima na rotoru dolazi do induciranja napona, odnosno proticanja struja, što dovodi do pojave sile na vodiče i kretanja rotora. Smjer vrtnje rotora isti je kao i smjer vrtnje trofaznog obrtnog magnetnog polja. Međutim, brzina vrtnje rotora uvijek je manja od brzine vrtnje trofaznog obrtnog magnetnog polja. Ako bi ove brzine bile iste, ne bi postojalo relativno

kretanje obrtnog magnetnog polja u odnosu na vodiče rotora, pa se u vodičima rotora ne bi inducirao napon. Upravo radi različitih brzina vrtnje obrtnog magnetnog polja i rotora, ova vrsta motora je i dobila ime asinhroni (neistovremen). Radi opisanog principa rada često se koristi i naziv indukcioni.

ZANIMLJIVOSTI

1) Porijeklo korupcije u Evropi

Korupcija je u Evropi poprimila sistemski karakter u XVIII vijeku. Pruski kralj Fridrih II je masovno podmićivao ministre na dvoru austrougarske carice Marije Terezije. Da bi se od takvih napada kako tako zaštitila i ona je sama počela podmićivati svoje ministre.

2) Razlika između državnika i političara

Narodi, koje vode političari sporo rješavaju svoje sistemske probleme, pošto političari razmišljaju kratkoročno, odnosno samo do slijedećih izbora. Državnici kada vode narode razmišljaju mnogo dugoročnije, odnosno šta će biti sa slijedećom generacijom.

Kratkoročno se može podilaziti narodu, ali najnepopularnije mjere često su dugoročno najefikasnije (njemački političar 2010).

3) Izjava jednog intelektualca

Tokom posjete državama nastalim nakon raspada Jugoslavije, ljevičarski intelektualac Tariq Ali (živi i radi u Londonu), na pitanje novinara da li se namjerava susresti s aktuelnim političarima na ovim prostorima, odgovorio je: „Ako budem želio razgovarati o kriminalu onda ću razgovarati direktno s kriminalcima. Poželim li pak sklopiti neki posao, namjeravam se direktno obratiti poslovnim ljudima. Dakle ja nemam namjeru koristiti političare kao svodnike za posao ili za kriminal“.

4) Četiri stoljeća od prve knjige u BiH na narodnom jeziku

Fra Matija Divković je 1611. napisao prvu knjigu na narodnom jeziku u Bosni i Hercegovini čiji je naslov „Nauk krstjanski“. Knjiga je izdata u Sarajevu.

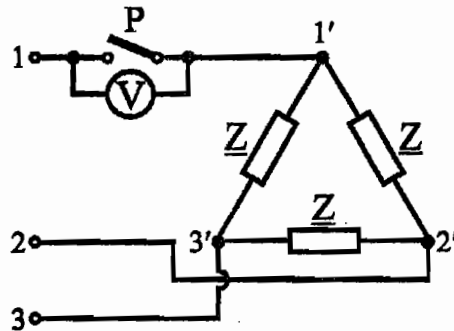
5) Predrag Matvejević

Gori od nas činili su ono što su učinili, bolji od nas učinit će ono što mi nismo.

Zadaci za samostalan rad uz glavu 3

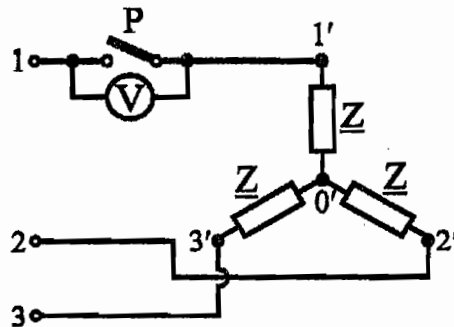
Primjer 3.1

- a. Tri jednake impedanse $\underline{Z}_{1'2'} = \underline{Z}_{2'3'} = \underline{Z}_{3'1'} = \underline{Z}$ spojene su u trokut i priključene na trofazni simetričan izvor napona direktnog redosljeda faza (slika 3.30.1). Linijski napon mreže je $U_L = 380\text{ V}$. Odrediti pokazivanje idealnog voltmetra U_V pri otvorenom prekidaču **P**.



Slika 3.30.1 Shema električnog kruga uz primjer 3.1.a

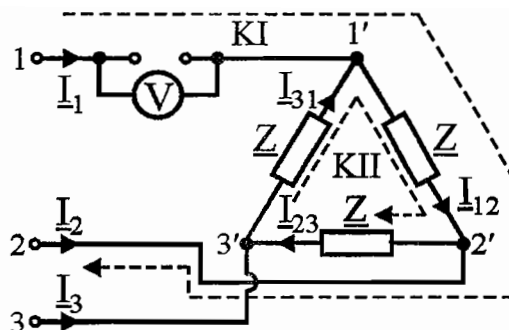
- b. Tri jednake impedanse $\underline{Z}_{1'0'} = \underline{Z}_{2'0'} = \underline{Z}_{3'0'} = \underline{Z}$ spojene su u zvijezdu i priključene na trofazni simetričan izvor napona direktnog redosljeda faza (slika 3.30.2). Linijski napon mreže je $U_L = 380\text{ V}$. Odrediti pokazivanje idealnog voltmetra U_V pri otvorenom prekidaču **P**.



Slika 3.30.2 Shema električnog kruga uz primjer 3.1.b

Rješenje

- a. Shema električnog kruga kod otvorenog prekidača **P** s naznačenim smjerovima faznih i linijskih struja prikazana je na slici 3.30.3.



Slika 3.30.3 Shema električnog kruga kod otvorenog prekidača P

S obzirom da je izvor simetričan, sva tri linijska napona imaju istu efektivnu vrijednost:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L = 380 \text{ V}.$$

Voltmetar je idealan, što znači da ima beskonačno veliku unutrašnju otpornost ($R_V \rightarrow \infty$). Radi toga u linijskom vodiču 1 koji je u prekidu ne teče struja, odnosno vrijedi:

$$I_1 = 0 \text{ A}.$$

Za tačku (čvor) označen s 1' može se postaviti relacija po I Kirchhoffovom zakonu:

$$I_1 + I_{31} = I_{12} \quad \Rightarrow \quad I_{31} = I_{12}.$$

Između čvorova 2 i 2', odnosno između čvorova 3 i 3' nema padova napona. To znači da su čvorovi 2 i 2' na istom potencijalu, isto kao i čvorovi 3 i 3'. Zato vrijedi slijedeća relacija:

$$U_{23} = U_{2'3'}.$$

Za konturu označenu s KII može se postaviti relacija po II Kirchhoffovom zakonu:

$$U_{3'2'} = I_{31} \cdot Z + I_{12} \cdot Z = 2 \cdot I_{12} \cdot Z,$$

pri čemu vrijedi:

$$U_{3'2'} = -U_{2'3'}.$$

Iz prethodne tri relacije se dobiva:

$$I_{12} = \frac{U_{3'2'}}{2 \cdot Z} = -\frac{U_{2'3'}}{2 \cdot Z} = -\frac{U_{23}}{2 \cdot Z}.$$

Voltmetar mjeri efektivnu vrijednost napona između tačaka 1 i 1', što znači da se mora odrediti fazor napona $\underline{U}_{11'}$. Za konturu KI naznačenu na slici 3.30.3 može se postaviti relacija po II Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{11'} + \underline{U}_{1'2'} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_{11'} = \underline{U}_{12} - \underline{U}_{1'2'}$$

Napon između čvorova 1' i 2' je:

$$\underline{U}_{1'2'} = \underline{I}_{12} \cdot \underline{Z} = -\frac{\underline{U}_{23}}{2},$$

pa se dobiva:

$$\underline{U}_{11'} = \underline{U}_{12} + \frac{\underline{U}_{23}}{2}.$$

Kod spoja trošila u trokut pogodno je definirati naponski sistem izvora napajanja preko linijskih napona. S obzirom na zadati direktni redoslijed faza, vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{12} = U_L \cdot e^{j0^\circ} = 380 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{23} = U_L \cdot e^{-j120^\circ} = (-190 - j190\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{31} = U_L \cdot e^{+j120^\circ} = U_L \cdot e^{-j240^\circ} = (-190 + j190\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Nakon uvrštavanja izraza za napone \underline{U}_{12} i \underline{U}_{23} u relaciju za napon $\underline{U}_{11'}$ dobiva se:

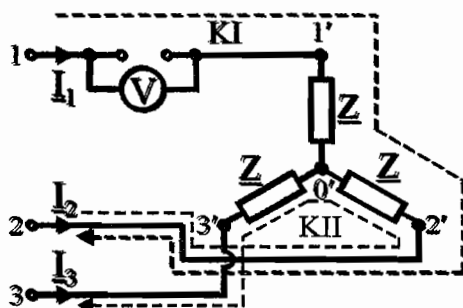
$$\underline{U}_{11'} = (285 - j95\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Kako je već rečeno, voltmetar mjeri efektivnu vrijednost napona $\underline{U}_{11'}$:

$$U_V = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{11'} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{11'} \}]^2} = 329,1 \text{ V}.$$

b.

Shema električnog kruga kod otvorenog prekidača **P** s naznačenim smjerovima faznih (linijskih) struja prikazana je na slici 3.30.4.



Slika 3.30.4 Shema električnog kruga kod otvorenog prekidača **P**

Kao i u prethodnom dijelu zadatka vrijedi:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{23} = \underline{U}_{31} = \underline{U}_L = 380 \text{ V};$$

$$\underline{R}_V \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = 0 \text{ A}.$$

Za čvor označen s $0'$ može se postaviti relacija po I Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_3.$$

Za fazne napone na trošilu vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z} = 0;$$

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} = -\underline{I}_3 \cdot \underline{Z};$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z} = -\underline{U}_{2'0'}.$$

Kao i u dijelu zadatka a., mora se odrediti fazor napona $\underline{U}_{11'}$. Za konturu označenu s KI na slici 3.30.4 vrijedi slijedeća relacija napisana primjenom II Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{11'} + \underline{U}_{1'0'} + \underline{U}_{0'2'} = \underline{U}_{11'} - \underline{U}_{2'0'} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_{11'} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{2'0'}.$$

Za konturu označenu s KII vrijedi:

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'0'} + \underline{U}_{0'3'} = \underline{U}_{2'0'} - \underline{U}_{3'0'} = 2\underline{U}_{2'0'},$$

odakle se dobiva:

$$\underline{U}_{2'0'} = \frac{\underline{U}_{23}}{2}.$$

Nakon uvrštavanja posljednjeg izraza u relaciju za napon $\underline{U}_{11'}$, dobiva se:

$$\underline{U}_{11'} = \underline{U}_{12} + \frac{\underline{U}_{23}}{2}.$$

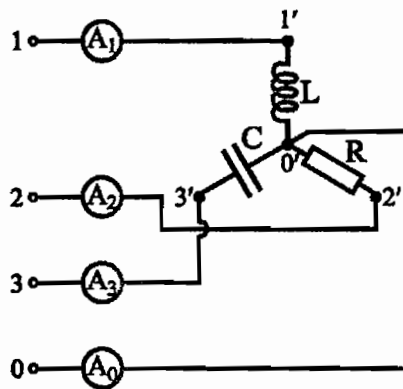
Kod spoja trošila u zvijezdu bez nul-vodiča, pogodno je definirati naponski sistem izvora napajanja preko linijskih napona. S obzirom na zadati direktni redoslijed faza, vrijede iste relacije kao u dijelu zadatka a.

Izraz za napon $\underline{U}_{11'}$ također je isti kao u dijelu zadatka a., pa će voltmetar imati isto pokazivanje:

$$U_V = 329,1 \text{ V}.$$

Primjer 3.2

Trofazno trošilo spojeno je u zvijezdu i priključeno na trofaznu simetričnu mrežu napona direktnog redoslijeda faza (slika 3.31). Pokazivanja sva tri idealna ampermetra priključena u linijskim vodičima međusobno su jednaka i iznose $I_A = 2$ A. Odrediti pokazivanje idealnog ampermetra I_0 priključenog u nultom vodiču ako se impedansa ovog vodiča može zanemariti.

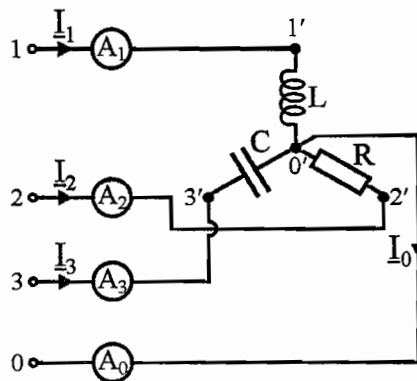


Slika 3.31 Shema električnog kruga uz primjer 3.2

Rješenje

Pretpostavit će se smjerovi struja kao na slici 3.31.1.

Trofazno trošilo je simetrično ako su impedanse u sve tri faze međusobno potpuno jednake, tj. ako su istog karaktera i imaju isti modul. Impedanse u fazama trošila prikazanog na slici 3.31.1 nisu istog karaktera, što znači da je ovo trošilo nesimetrično.



Slika 3.31.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Trošilo je spojeno u zvijezdu i ima nul-vodič. S obzirom da se impedansa nul-vodiča može zanemariti i da su ampermetri idealni

(njihova unutrašnja otpornost jednaka je nuli $R_A = 0$), protjecanje struje \underline{I}_0 neće izazvati padove napona, pa se tačke 0 i 0' nalaze na istom potencijalu.

Može se također zaključiti da se i tačke 1 i 1' nalaze na međusobno istom potencijalu, a isto vrijedi i za tačke 2 i 2', odnosno 3 i 3'.

Mreža na koju je priključeno trošilo je simetrična, što znači da sva tri linijska napona imaju istu efektivnu vrijednost. Isto tako i sva tri fazna napona imaju međusobno iste efektivne vrijednosti:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{20} = \underline{U}_{30} = \underline{U}_F.$$

Kod spoja trošila u zvijezdu s nul-vodičem pogodno je definirati naponski sistem izvora napajanja preko faznih napona. S obzirom na zadati direktni redoslijed faza, vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_F \cdot e^{j0^\circ} = \underline{U}_F;$$

$$\underline{U}_{20} = \underline{U}_F \cdot e^{-j120^\circ};$$

$$\underline{U}_{30} = \underline{U}_F \cdot e^{+j120^\circ} = \underline{U}_F \cdot e^{-j240^\circ}.$$

Vrijede relacije:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'}; \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'}; \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'}.$$

Ampermetri mjere efektivne vrijednosti faznih (linijskih) struja:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_A.$$

Fazori ovih struja se mogu izračunati po izrazima:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{j\mathbf{X}_L} = -j \frac{\underline{U}_F}{\mathbf{X}_L} = -j\underline{I}_1 = -j\underline{I}_A = -j2 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\mathbf{R}} = \frac{\underline{U}_F}{\mathbf{R}} \cdot e^{-j120^\circ} = \underline{I}_2 \cdot e^{-j120^\circ} = \underline{I}_A \cdot e^{-j120^\circ} = 2 \cdot e^{-j120^\circ} = (-1 - j\sqrt{3}) \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{-j\mathbf{X}_C} = \frac{\underline{U}_F}{\mathbf{X}_C} \cdot e^{j90^\circ} e^{j120^\circ} = \underline{I}_3 \cdot e^{j210^\circ} = \underline{I}_A \cdot e^{j210^\circ} = 2 \cdot e^{j210^\circ} = (-\sqrt{3} - j) \text{ A}$$

Za čvor 0' vrijedi relacija po I Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (-2,732 - j4,732) \text{ A}.$$

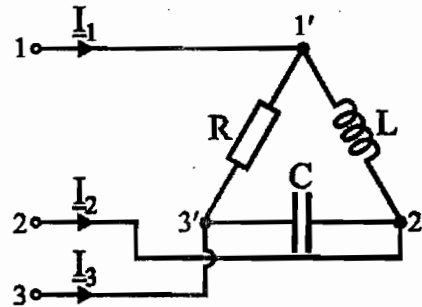
Ampermetar A_0 mjeri efektivnu vrijednost struje \underline{I}_0 :

$$\underline{I}_0 = \sqrt{[\mathbf{R}_e \{ \underline{I}_0 \}]^2 + [\mathbf{I}_m \{ \underline{I}_0 \}]^2} = 5,464 \text{ A}.$$

Primjer 3.3

Trofazno trošilo spojeno je u trokut i priključeno na trofaznu simetričnu mrežu napona direktnog redoslijeda faza (slika 3.32). Sve tri fazne struje imaju međusobno jednake efektivne vrijednosti koje iznose $I_F = 2 \text{ A}$.

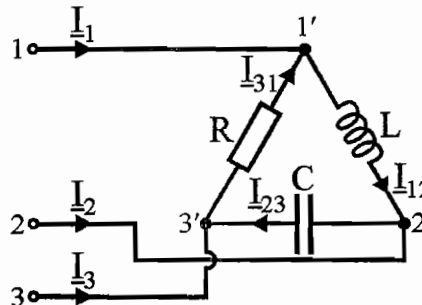
Odrediti efektivne vrijednosti linijskih struja I_1 , I_2 i I_3 .



Slika 3.32 Shema električnog kruga uz primjer 3.3

Rješenje

Shema električnog kruga s naznačenim smjerovima faznih i linijskih struja prikazana je na slici 3.32.1.



Slika 3.32.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Trošilo je nesimetrično jer impedanse u fazama nemaju isti karakter. S obzirom da je izvor simetričan, sva tri linijska napona imaju istu efektivnu vrijednost:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L = 380 \text{ V}.$$

Naponski sistem izvora napajanja direktnog redoslijeda faza definira se preko linijskih napona:

$$\underline{U}_{12} = U_{12} \cdot e^{j0^\circ} = U_L \cdot e^{j0^\circ} = U_L;$$

$$\underline{U}_{23} = U_{23} \cdot e^{-j120^\circ} = U_L \cdot e^{-j120^\circ};$$

$$\underline{U}_{31} = U_{31} \cdot e^{-j240^\circ} = U_L \cdot e^{-j240^\circ}.$$

Ako se zanemare impedanse linijskih vodiča, vrijedi:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1'2'}; \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'3'}; \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{3'1'}$$

Fazne struje imaju međusobno jednake efektivne vrijednosti:

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_{23} = \underline{I}_{31} = \underline{I}_F$$

Fazori ovih struja se mogu izračunati po izrazima:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{1'2'}}{j\mathbf{X}_L} = -j \frac{\underline{U}_L}{\mathbf{X}_L} = -j \underline{I}_{12} = -j2 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{2'3'}}{-j\mathbf{X}_C} = \frac{\underline{U}_L}{\mathbf{X}_C} \cdot e^{j90^\circ} e^{-j120^\circ} = \underline{I}_{23} \cdot e^{-j30^\circ} = 2 \cdot e^{-j30^\circ} = (\sqrt{3} - j) \text{ A};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{3'1'}}{\mathbf{R}} = \frac{\underline{U}_L}{\mathbf{R}} \cdot e^{-j240^\circ} = \underline{I}_{23} \cdot e^{-j240^\circ} = 2 \cdot e^{-j240^\circ} = (-1 + j\sqrt{3}) \text{ A}.$$

Za čvor 1' vrijedi relacija napisana po I Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_1 + \underline{I}_{31} \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = (1 + j3,732) \text{ A},$$

odakle se dobiva efektivna vrijednost struje \underline{I}_1 :

$$I_1 = \sqrt{1 + 3,732^2} = 3,864 \text{ A}.$$

Za čvorove 2' i 3' vrijede relacije:

$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{12} \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = (\sqrt{3} + j) \text{ A} \Rightarrow I_2 = \sqrt{3+1} = 2 \text{ A};$$

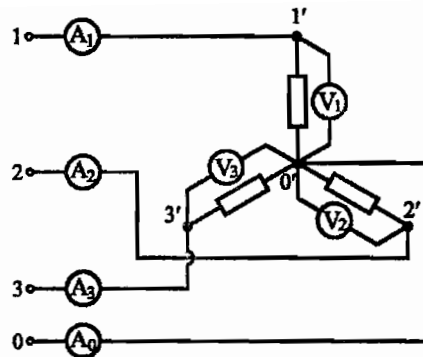
$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_3 + \underline{I}_{23} \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 2,732(-1 + j) \text{ A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 = 2,732 \cdot \sqrt{1+1} = 3,864 \text{ A}.$$

Primjer 3.4

Tri skupine od po deset žarulja međusobno su spojene u zvijezdu i priključene na trofaznu simetričnu mrežu napona direktnog redoslijeda faza (slika 3.33). Fazni napon mreže je $U_F = 100 \text{ V}$, a snaga jedne žarulje je 100 W . Impedansa nultog vodiča može se zanemariti.

- Odrediti pokazivanja idealnih mjernih instrumenata ako su žarulje u fazi 2 pregorile (dakle, nastao je prekid faze 2).
- Odrediti pokazivanja idealnih mjernih instrumenata ako su samo žarulje u fazi 1 ostale uključene (dakle, istovremeno su pregorile žarulje u fazama 2 i 3, tj. faze 2 i 3 su prekinute).



Slika 3.33 Shema električnog kruga uz primjer 3.4

Rješenje

Prvo će se analizirati slučaj kad nema pregaranja žarulja. Žarulja predstavlja aktivno trošilo, odnosno može se predstaviti kao radna otpornost. Ovo trošilo iz mreže na koju je priključeno preuzima samo aktivnu snagu, odnosno radi s faktorom snage $\cos\varphi = 1$. U svakoj fazi postoji $N = 10$ paralelno spojenih žarulja, a svaka od njih ima snagu $P_{\dot{z}} = 100$ W, što znači da je trošilo simetrično. Snage trošila u sve tri faze međusobno su jednake:

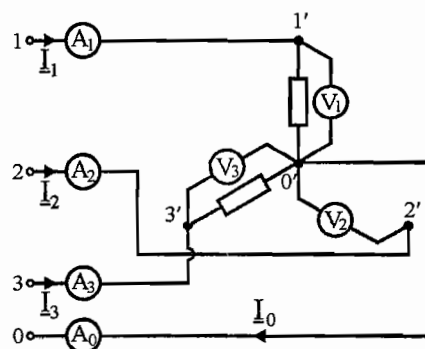
$$P_1 = P_2 = P_3 = P = N \cdot P_{\dot{z}} = 1000 \text{ W}.$$

Mreža na koju je spojeno trošilo je simetrična, pa vrijedi:

$$U_{10} = U_{20} = U_{30} = U_F.$$

a.

Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazi 2 prikazana je na slici 3.33.1. Analizirani slučaj predstavlja nesimetrično trofazno trošilo u spoju zvijezda s nul-vodičem.



Slika 3.33.1 Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazi 2

Voltmetri su idealni ($R_V \rightarrow \infty$) tako da kroz njih ne teče struja. Ampermetri su također idealni ($R_A = 0$), što znači da nema padova napona na njima.

S obzirom da je faza 2 u prekidu, vrijedi:

$$\underline{I}_2 = 0 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_{A2} = 0 \text{ A} .$$

Tačke 0 i 0' su međusobno kratkospojene, odnosno nalaze se na istom potencijalu.

Fazni naponi na trošilu jednaki su faznim naponima na izvoru radi postojanja nul-vodiča:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'} \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'} \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'} ,$$

odnosno:

$$U_{V1} = U_{1'0'} = U_{10} = 100 \text{ V} ;$$

$$U_{V2} = U_{2'0'} = U_{20} = 100 \text{ V} ;$$

$$U_{V3} = U_{3'0'} = U_{30} = 100 \text{ V} .$$

Za struje faza 1 i 3 vrijedi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{A1} = \frac{\underline{P}_1}{\underline{U}_{1'0'}} = \frac{\underline{P}_1}{\underline{U}_{10}} = \frac{\underline{P}_1}{U_F} = 10 \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{A3} = \frac{\underline{P}_3}{\underline{U}_{3'0'}} = \frac{\underline{P}_3}{\underline{U}_{30}} = \frac{\underline{P}_3}{U_F} = 10 \text{ A} .$$

Struja u nultom vodiču je:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 .$$

Posljednja relacija pokazuje da je za određivanje ove struje neophodno odrediti fazore struja \underline{I}_1 i \underline{I}_3 .

Kod spoja trošila u zvijezdu s nul-vodičem direktni naponski sistem izvora napajanja definira se preko faznih napona:

$$\underline{U}_{10} = U_F \cdot e^{j0^\circ} = 100 \text{ V} ;$$

$$\underline{U}_{20} = U_F \cdot e^{-j120^\circ} = 100 \cdot e^{-j120^\circ} = -50 \cdot (1 + j\sqrt{3}) \text{ V} ;$$

$$\underline{U}_{30} = U_F \cdot e^{j120^\circ} = 100 \cdot e^{j120^\circ} = 50 \cdot (-1 + j\sqrt{3}) \text{ V} .$$

S obzirom da su trošila u svakoj fazi radne otpornosti, fazori struja \underline{I}_1 i \underline{I}_3 moraju imati isti fazni stav kao fazori napona \underline{U}_{10} i \underline{U}_{30} :

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j0^\circ} = 10 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j120^\circ} = 10 \cdot e^{j120^\circ} = 5 \cdot (-1 + j\sqrt{3}) \text{ A}.$$

Za fazor struje \underline{I}_0 dobiva se:

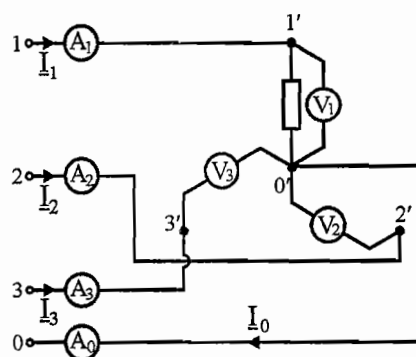
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = 5 \cdot (1 + j\sqrt{3}) \text{ A}.$$

Efektivna vrijednost struje \underline{I}_0 koju mjeri ampermetar A_0 je:

$$I_0 = I_{A0} = 5 \cdot \sqrt{1+3} = 10 \text{ A}.$$

b.

Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazama 2 i 3 prikazana je na slici 3.33.2.



Slika 3.33.2 Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazama 2 i 3

S obzirom da su faze 2 i 3 u prekidu, vrijedi:

$$I_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow I_{A2} = 0 \text{ A};$$

$$I_3 = 0 \text{ A} \Rightarrow I_{A3} = 0 \text{ A}.$$

Tačke 0 i 0' su međusobno kratkospojene, odnosno nalaze se na istom potencijalu.

Fazni naponi na trošilu jednaki su faznim naponima na izvoru radi postojanja nul-vodiča:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'} \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'} \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'},$$

odnosno:

$$U_{V1} = U_{1'0'} = U_{10} = 100 \text{ V};$$

$$U_{V2} = U_{2'0'} = U_{20} = 100 \text{ V};$$

$$U_{V3} = U_{3'0'} = U_{30} = 100 \text{ V}.$$

Za struju faze 1 vrijedi:

$$I_1 = I_{A1} = \frac{P_1}{U_{1'0'}} = \frac{P_1}{U_{10}} = \frac{P_1}{U_F} = 10 \text{ A}.$$

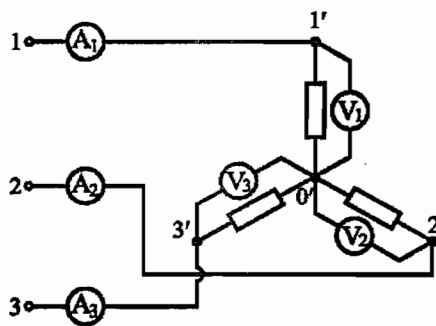
Struja u nultom vodiču je:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 \Rightarrow I_0 = I_{A0} = I_1 = 10 \text{ A}.$$

Primjer 3.5

Tri skupine od po deset žarulja međusobno su spojene u zvijezdu i priključene na trofaznu simetričnu mrežu napona direktnog redosljeda faza (slika 3.34). Linijski napon mreže je $U_L = 173 \text{ V}$, a snaga jedne žarulje je 100 W .

- Odrediti pokazivanja idealnih mjernih instrumenata ako su žarulje u fazi 1 pregorile (dakle, nastao je prekid faze 1).
- Odrediti pokazivanja idealnih mjernih instrumenata ako su žarulje u fazi 1 prespojene kratkospojnikom (dakle, nastao je kratki spoj faze 1).



Slika 3.34 Shema električnog kruga uz primjer 3.5

Rješenje

Prvo će se analizirati slučaj kad nema pregaranja. Žarulja predstavlja aktivno trošilo, odnosno može se predstaviti kao radna otpornost. Ovo trošilo iz mreže na koju je priključeno preuzima samo aktivnu snagu, odnosno radi s faktorom snage $\cos\varphi = 1$. U svakoj fazi postoji $N = 10$ paralelno spojenih žarulja, a svaka od njih ima snagu $P_{\check{z}} = 100 \text{ W}$, što znači da je trošilo simetrično. Snage trošila u sve tri faze međusobno su jednake:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P = N \cdot P_{\check{z}} = 1000 \text{ W}.$$

Mreža na koju je spojeno trošilo je simetrična, pa vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L.$$

Fazni naponi na trošilu su:

$$U_{1'0'} = U_{2'0'} = U_{3'0'} = U_F = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V} .$$

Fazne (linijske) struje trošila su:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_F = \frac{P}{U_F} = 10 \text{ A} .$$

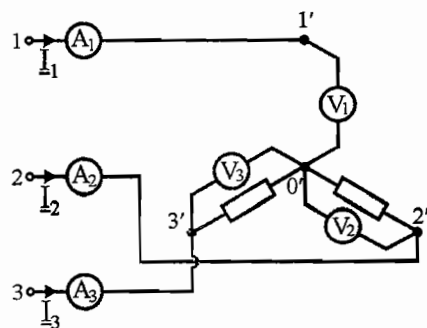
Otpornosti faza trošila su:

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{U_F}{I_F} = 10 \Omega .$$

a.

Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazi 1 prikazana je na slici 3.34.1. Analizirani slučaj predstavlja nesimetrično trofazno trošilo u spoju zvijezda bez nul-vodiča.

Voltmetri su idealni ($R_V \rightarrow \infty$) tako da kroz njih ne teče struja. Ampermetri su također idealni ($R_A = 0$), što znači da nema padova napona na njima.



Slika 3.34.1 Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazi 1

S obzirom da je faza 1 u prekidu, vrijedi:

$$I_1 = 0 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_{A1} = 0 \text{ A} .$$

Nepostojanje nul-vodiča za posljedicu ima promjenu napona na trošilu koji više nisu jednaki naponima na izvoru. Međutim, naponi izvora se ne mijenjaju ako je do poremećaja došlo na trošilu. Dakle, za napone mreže i dalje vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L .$$

Kod spoja trošila u zvijezdu bez nul-vodiča naponski sistem izvora napajanja direktnog redosljeda faza definira se preko linijskih napona:

$$\underline{U}_{12} = U_L \cdot e^{j0^\circ} = 173 \text{ V};$$

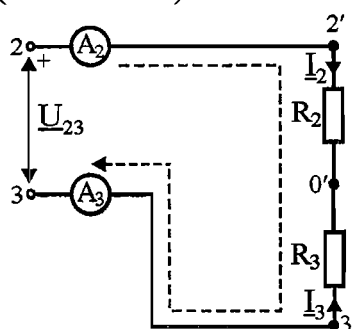
$$\underline{U}_{23} = U_L \cdot e^{-j120^\circ} = 173 \cdot e^{-j120^\circ} = (-86,5 - j86,5\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{31} = U_L \cdot e^{j120^\circ} = 173 \cdot e^{j120^\circ} = (-86,5 + j86,5\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Za čvor $0'$ vrijedi:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 = -\underline{I}_3.$$

Za određivanje struja \underline{I}_2 i \underline{I}_3 može se analizirati krug prikazati u jednostavnijem obliku (slika 3.34.2).



Slika 3.34.2 Shema električnog kruga za određivanje struja u fazama 2 i 3

Za konturu naznačenu na slici 3.34.2 vrijedi:

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'0'} - \underline{U}_{3'0'}.$$

Fazni naponi na trošilu su:

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{R}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{R}$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{R}_3 = -\underline{I}_2 \cdot \underline{R},$$

pa se konačno dobiva:

$$\underline{U}_{23} = 2 \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{R};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{2 \cdot \underline{R}} = 8,65 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_{A2} = 8,65 \text{ A};$$

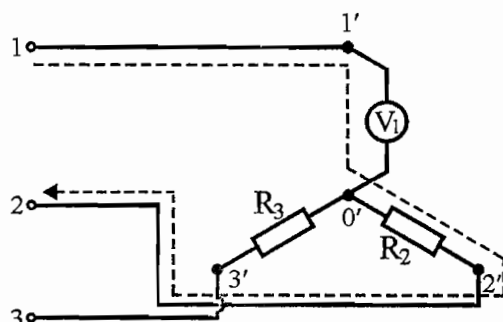
$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_2 = 8,65 \cdot e^{j60^\circ} \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_{A3} = 8,65 \text{ A}.$$

Za fazne napone $\underline{U}_{2'0'}$ i $\underline{U}_{3'0'}$ se dobiva:

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{R} = 86,5 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{V2} = 86,5 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{R} = 86,5 \cdot e^{j60^\circ} \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{V3} = 86,5 \text{ V}.$$

Voltmetar V_1 mjeri pad napona između tačaka $1'$ i $0'$. Za određivanje ovog napona koristi se shema prikazana na slici 3.34.3.



Slika 3.34.3 Shema električnog kruga za određivanje napona $U_{1'0'}$

Za konturu označenu na slici može se napisati slijedeća jednačba primjenom II Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{U}_{12} - \underline{U}_{1'0'} + \underline{U}_{2'0'} = 0,$$

odakle se dobiva:

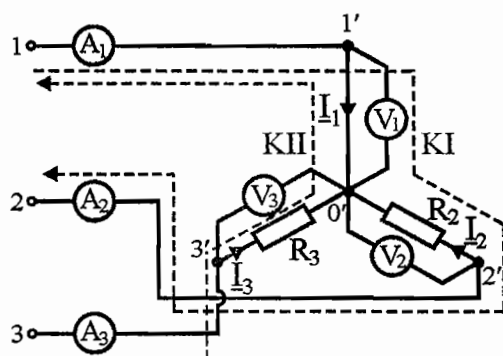
$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{2'0'} = (129,75 - j74,91) \text{ V}.$$

Pokazivanje voltmetra V_1 je:

$$U_{V1} = U_{1'0'} = \sqrt{129,75^2 + 74,91^2} = 149,8 \text{ V}.$$

b.

Shema električnog kruga nakon kratkog spoja žarulja u fazi 1 prikazana je na slici 3.34.4. Naponi mreže definiraju se na isti način kao u dijelu zadatka a.



Slika 3.34.4 Shema električnog kruga nakon kratkog spoja u fazi 1

Tačke 1' i 0' su krakospojene, odnosno nalaze se na istom potencijalu (razlika potencijala ovih tačaka jednaka je nuli). Zato vrijedi:

$$\underline{U}_{1'0'} = 0 \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{V1} = 0 \text{ V}.$$

Za konturu KI naznačenu na slici 3.34.4 vrijedi:

$$\underline{U}_{12} - \underline{U}_{1'0'} + \underline{U}_{2'0'} = 0,$$

odnosno:

$$\underline{U}_{2'0'} = -\underline{U}_{12} = -173 = 173 \cdot e^{j180^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{V2} = \underline{U}_{2'0'} = 173 \text{ V}.$$

Za konturu KII naznačenu na slici 3.34.4 vrijedi:

$$\underline{U}_{31} - \underline{U}_{3'0'} + \underline{U}_{1'0'} = 0,$$

odnosno:

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{31} = 173 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{U}_{3'0'} = 173 \text{ V}.$$

Struje faza koje nisu u kratkom spoju su:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{R}} = -17,3 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_{A2} = 17,3 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{R}} = 17,3 \cdot e^{j120^\circ} \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_{A3} = 17,3 \text{ A}.$$

Za čvor 0' vrijedi:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = -\underline{I}_2 - \underline{I}_3 = (26 - j15) \text{ A}.$$

Pokazivanje ampermetra A_1 je:

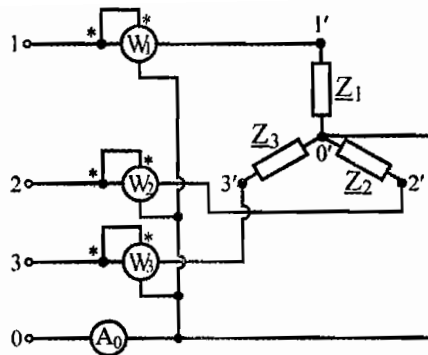
$$\underline{I}_{A1} = \underline{I}_1 = \sqrt{26^2 + 15^2} = 30 \text{ A}.$$

Primjer 3.6

Za trofaznu električnu mrežu s naponima direktnog redoslijeda prikazanu na slici 3.35 poznato je:

$$\underline{U}_L = 173 \text{ V}; \underline{Z}_1 = (3 + j4) \Omega; \underline{Z}_2 = (6 + j8) \Omega; \underline{Z}_3 = (12 + j16) \Omega.$$

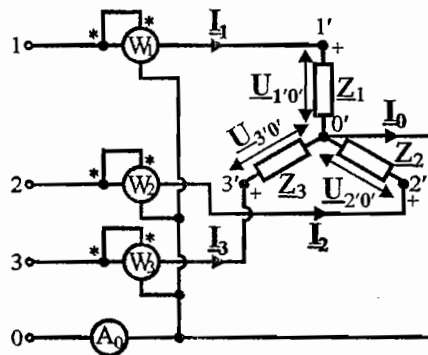
Odrediti pokazivanje svih mjernih instrumenata. Pretpostaviti da su mjerni instrumenti idealni i da je impedansa nultog vodiča zanemarivo mala.



Slika 3.35 Shema električnog kruga uz primjer 3.6

Rješenje

Usvojit će se oznake, smjerovi i polariteti struja i napona kao na slici 3.35.1.



Slika 3.35.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i polaritetima napona

U ovom zadatku razmatra se slučaj nesimetričnog (neuravnoteženog) trofaznog potrošača u spoju zvijezda s nultim vodičem (vodič koji spaja tačke 0 i 0') zanemarive impedanse. U ovom slučaju fazni naponi na izvoru i potrošaču su međusobno jednaki. Isto vrijedi i za linijske napone. Dakle, može se pisati:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'}, \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'}, \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'};$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1'2'}, \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'3'}, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{3'1'}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, efektivna vrijednost linijskog (međufaznog) napona je:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U = 173 \text{ V}.$$

Efektivne vrijednosti faznih napona (naponi između faza i nultog vodiča) računaju se po relaciji:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'} = \frac{U}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V} .$$

Prema uvjetu datom u zadatku, fazni naponi izvora u mreži su direktnog redoslijeda. U ovom slučaju vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{10} = U_{10} \cdot e^{j0^\circ} = U_{10} = 100 \text{ V} ;$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{-j120^\circ} = 100 \cdot e^{-j120^\circ} = (-50 - j50\sqrt{3}) \text{ V} ;$$

$$\underline{U}_{30} = U_{30} \cdot e^{-j240^\circ} = 100 \cdot e^{-j240^\circ} = (-50 + j50\sqrt{3}) \text{ V} .$$

Struje u fazama potrošača mogu se odrediti po relacijama (vidi sliku 3.35.1):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{100}{3 + j4} = 12 - j16 = 20 \cdot e^{-j53,13^\circ} \text{ A} ;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{100 \cdot e^{-j120^\circ}}{6 + j8} = -9,93 - j1,2 = 10 \cdot e^{-j173,13^\circ} \text{ A} ;$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{100 \cdot e^{-j240^\circ}}{12 + j16} = 1,96 + j4,6 = 5 \cdot e^{-j293,13^\circ} \text{ A} .$$

Fazor struje nultog vodiča \underline{I}_0 računa se po relaciji koja se dobiva primjenom I Kirchhoffovog zakona na čvor $0'$:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (4,03 - j12,6) \text{ A} .$$

Ampermetar A_0 mjeri efektivnu vrijednost struje I_0 :

$$I_{A0} = I_0 = \sqrt{[R_e \{I_0\}]^2 + [I_m \{I_0\}]^2} = \sqrt{4,03^2 + 12,6^2} = 13,23 \text{ A} .$$

Aktivna snaga koju mjeri vatmetar W_1 može se odrediti po izrazu:

$$P_{W1} = U_{1'0'} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 .$$

U posljednjoj relaciji s φ_1 je označen ugao između fazora napona \underline{U}_{10} i struje \underline{I}_1 . Napon je dat relacijom $\underline{U}_{10} = 100 \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$, a struja $\underline{I}_1 = 20 \cdot e^{-j53,13^\circ} \text{ A}$. Iz ove dvije relacije može se zaključiti da struja \underline{I}_1 zaostaje za naponom \underline{U}_{10} za ugao $\varphi_1 = 53,13^\circ$, pa vrijedi:

$$P_{W1} = 100 \cdot 20 \cdot \cos 53,13^\circ = 1200 \text{ W} .$$

Aktivna snaga koju mjeri vatmetar W_2 može se odrediti po izrazu:

$$P_{W2} = U_{2'0'} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 .$$

U relaciji za snagu P_{W2} s φ_2 je označen ugao između fazora napona \underline{U}_{20} i struje \underline{I}_2 . Napon je dat relacijom $\underline{U}_{20} = 100 \cdot e^{-j120^\circ}$ V, a struja $\underline{I}_2 = 10 \cdot e^{-j173,13^\circ}$ A. Iz ove dvije relacije može se zaključiti da struja \underline{I}_2 zaostaje za naponom \underline{U}_{20} za ugao $\varphi_2 = 53,13^\circ$, pa vrijedi:

$$P_{W2} = 100 \cdot 10 \cdot \cos 53,13^\circ = 600 \text{ W} .$$

Analognim postupkom dobiva se aktivna snaga koju mjeri vatmetar W_3 :

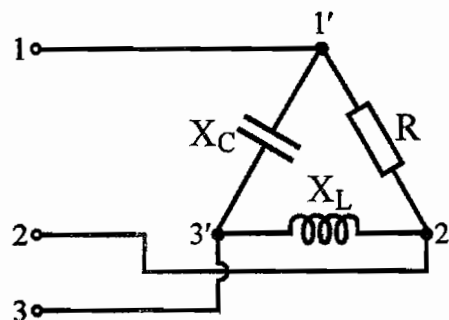
$$P_{W3} = U_{3'0'} \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 = U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 = 100 \cdot 5 \cdot \cos 53,13^\circ = 300 \text{ W} .$$

Primjer 3.7

Trofazni potrošač vezan je u spoj trokut i priključen na trofazni simetričan izvor napajanja s inverznim redoslijedom faznih napona (slika 3.36). Efektivna vrijednost faznog napona izvora je $U_F = 120\sqrt{3}$ V, a za potrošač su poznati slijedeći podaci: $R = X_L = X_C = 100 \Omega$.

Odrediti:

- fazore faznih i linijskih struja;
- prividnu snagu trofaznog potrošača.

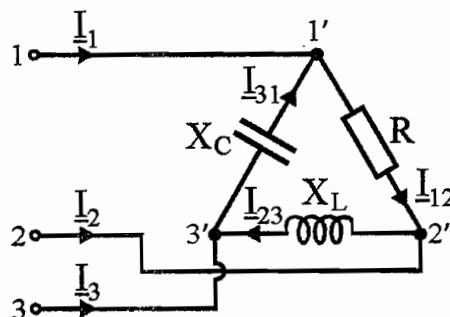


Slika 3.36 Shema električnog kruga uz primjer 3.7

Rješenje

a.

Usvojiti će se oznake i smjerovi struja kao na slici 3.36.1.



Slika 3.36.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

U ovom zadatku razmatra se slučaj nesimetričnog (neuravnoteženog) trofaznog potrošača u spoju trokut. Potrošač je nesimetričan jer impedanse u fazama imaju različite argumente (različit karakter impedansi) iako imaju iste module (iste vrijednosti).

Izvor napajanja spojen je u zvijezdu i s obzirom da je simetričan, vrijedi:

$$U_{10} = U_{20} = U_{30} = 120\sqrt{3} \text{ V}.$$

Fazni naponi izvora su inverznog redoslijeda:

$$\underline{U}_{10} = U_{10} \cdot e^{j0^\circ} = U_{10} = 120\sqrt{3} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{-j240^\circ} = U_{20} \cdot e^{j120^\circ} = (-60\sqrt{3} + j180) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{30} = U_{30} \cdot e^{-j120^\circ} = (-60\sqrt{3} - j180) \text{ V}.$$

Kod spoja trofaznog potrošača u trokut nije moguće definirati napone između faznih vodiča i nultog vodiča jer potrošač nema neutralnu tačku. Zato se moraju definirati linijski (međufazni) naponi. S obzirom da je izvor simetričan i da nema padova napona između izvora i potrošača (zanemarena impedansa prijenosne linije), za linijske napone vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1'2'} \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'3'} \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{3'1'}.$$

Linijski naponi računaju se na osnovu faznih po slijedećim relacijama:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} = 180\sqrt{3} - j180 = 360 \cdot e^{-j30^\circ} = 120\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j30^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} = j360 = 360 \cdot e^{j90^\circ} = 120\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j90^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} = -180\sqrt{3} - j180 = 360 \cdot e^{-j150^\circ} = 120\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j150^\circ} \text{ V}.$$

Relacije za napone \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} i \underline{U}_{31} pokazuju da su linijski naponi za 1,73 puta veći od faznih napona i da kod inverznog redoslijeda fazno zaostaju u odnosu na odgovarajuće fazne napone za 30° .

Fazori faznih struja potrošača računaju se po izrazima:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{1'2'}}{\underline{Z}_{1'2'}} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{R}} = 3,12 - j1,8 = 3,6 \cdot e^{-j30^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{2'3'}}{\underline{Z}_{2'3'}} = \frac{\underline{U}_{23}}{j\underline{X}_L} = 3,6 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{3'1'}}{\underline{Z}_{3'1'}} = \frac{\underline{U}_{31}}{-j\underline{X}_C} = 1,8 - j3,12 = 3,6 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ A}.$$

Relacije za proračun fazora linijskih struja određuju se primjenom I Kirchhoffovog zakona na čvorove 1', 2' i 3'.

$$\text{Čvor } 1': \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 1,32 + j1,32 = 1,86 \cdot e^{j45^\circ} \text{ A};$$

$$\text{Čvor } 2': \quad \underline{I}_2 + \underline{I}_{12} = \underline{I}_{23} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 0,48 + j1,8 = 1,86 \cdot e^{j75^\circ} \text{ A};$$

$$\text{Čvor } 3': \quad \underline{I}_3 + \underline{I}_{23} = \underline{I}_{31} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = -1,8 - j3,12 = 3,6 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ A}.$$

b.

Ukupna prividna snaga trofaznog potrošača računa se po izrazu:

$$\underline{S} = \underline{U}_{1'2'} \cdot \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{2'3'} \cdot \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{3'1'} \cdot \underline{I}_{31}^*.$$

U posljednjem izrazu su s \underline{I}_{12}^* , \underline{I}_{23}^* i \underline{I}_{31}^* označene konjugirano-kompleksne vrijednosti faznih struja \underline{I}_{12} , \underline{I}_{23} i \underline{I}_{31} .

Nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti u posljednji izraz, dobiva se:

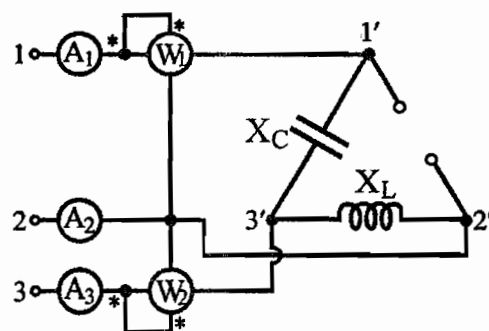
$$\underline{S} = 360e^{-j30^\circ} \cdot 3,6e^{j30^\circ} + 360e^{j90^\circ} \cdot 3,6 + 360e^{-j150^\circ} \cdot 3,6e^{j60^\circ} = 1296 \text{ VA}.$$

Primjer 3.8

Trofazni potrošač prikazan na slici 3.37 priključen je na simetričan trofazni izvor napajanja direktnog redoslijeda linijskih napona.

Efektivna vrijednost linijskog napona izvora napajanja je $U_L = 220 \text{ V}$, a za potrošač su poznati slijedeći podaci: $Z_{12} = \infty$; $X_L = X_C = 10 \Omega$.

Odrediti pokazivanja svih mjernih instrumenata. Pretpostaviti da su svi mjerni instrumenti idealni.



Slika 3.37 Shema električnog kruga uz primjer 3.8

Rješenje

U ovom zadatku razmatra se slučaj nesimetričnog (neuravnoteženog) trofaznog potrošača u spoju trokut s jednom fazom u prekidu. Bez

obzira na nesimetriju potrošača i prekid faze, naponi izvora napajanja se ne mijenjaju. S obzirom da nema padova napona između izvora i potrošača, linijski naponi na izvoru jednaki su linijskim naponima na potrošaču:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1'2'}; \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'3'}; \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{3'1'}$$

Izvor napajanja je simetričan, pa vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L = 220 \text{ V}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, linijski naponi izvora u mreži su direktnog redoslijeda, pa vrijedi:

$$\underline{U}_{12} = U_{12} \cdot e^{j0^\circ} = U_{12} = 220 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{23} = U_{23} \cdot e^{-j120^\circ} = 220 \cdot e^{-j120^\circ} = (-110 - j110\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{31} = U_{31} \cdot e^{-j240^\circ} = 220 \cdot e^{-j240^\circ} = (-110 + j110\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Proračun fazora faznih struja:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{1'2'}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = 0 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{2'3'}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{\underline{U}_{23}}{j\mathbf{X}_L} = \frac{220 \cdot e^{-j120^\circ}}{10 \cdot e^{j90^\circ}} = 22 \cdot e^{-j210^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{3'1'}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{\underline{U}_{31}}{-j\mathbf{X}_C} = \frac{220 \cdot e^{-j240^\circ}}{10 \cdot e^{-j90^\circ}} = 22 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ A}.$$

Proračun fazora linijskih struja:

$$\text{Čvor 1': } \underline{I}_1 + \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} \Rightarrow \underline{I}_1 = -\underline{I}_{31} = 19,05 + j11 = 22 \cdot e^{j30^\circ} \text{ A};$$

$$\text{Čvor 2': } \underline{I}_2 + \underline{I}_{12} = \underline{I}_{23} \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} = -19,05 + j11 = 22 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ A};$$

$$\text{Čvor 3': } \underline{I}_3 + \underline{I}_{23} = \underline{I}_{31} \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = -j22 = 22 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ A}.$$

Ampermetri mjere efektivne vrijednosti linijskih struja. Proračun pokazivanja ampermetara:

$$I_{A1} = I_1 = \sqrt{[\mathbf{R}_e\{\underline{I}_1\}]^2 + [\mathbf{I}_m\{\underline{I}_1\}]^2} = 22 \text{ A};$$

$$I_{A2} = I_2 = \sqrt{[\mathbf{R}_e\{\underline{I}_2\}]^2 + [\mathbf{I}_m\{\underline{I}_2\}]^2} = 22 \text{ A};$$

$$I_{A3} = I_3 = \sqrt{[\mathbf{R}_e\{\underline{I}_3\}]^2 + [\mathbf{I}_m\{\underline{I}_3\}]^2} = 22 \text{ A}.$$

Naponska grana vatmetra \mathbf{W}_1 priključena je na linijski napon \underline{U}_{12} , a kroz strujnu granu teče struja \underline{I}_1 . Aktivna snaga koju mjeri vatmetar \mathbf{W}_1 je:

$$P_{W1} = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos \angle(\underline{U}_{12}, \underline{I}_1).$$

Ranije je dobiveno:

$$\underline{U}_{12} = U_{12} \cdot e^{j\varphi_{U12}} = 220 \cdot e^{j0^\circ} = 220 \text{ V} \Rightarrow U_{12} = 220 \text{ V}; \quad \varphi_{U12} = 0^\circ.$$

$$\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\varphi_{I1}} = 22 \cdot e^{j30^\circ} \text{ A} \Rightarrow I_1 = 22 \text{ A}; \quad \varphi_{I1} = 30^\circ.$$

Iz faznih stavova fazora \underline{U}_{12} i \underline{I}_1 ($\varphi_{U12} = 0^\circ$ i $\varphi_{I1} = 30^\circ$) vidi se da je fazni pomak između ovih fazora 30° , tj. vrijedi:

$$\angle(\underline{U}_{12}, \underline{I}_1) = 30^\circ;$$

$$P_{W1} = U_{12} \cdot I_1 \cdot \cos \angle(\underline{U}_{12}, \underline{I}_1) = 220 \cdot 22 \cdot \cos 30^\circ = 4191,6 \text{ W}.$$

Naponska grana vatmetra \mathbf{W}_2 priključena je na linijski napon \underline{U}_{32} , a kroz strujnu granu teče struja \underline{I}_3 . Aktivna snaga koju mjeri vatmetar \mathbf{W}_2 je:

$$P_{W2} = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos \angle(\underline{U}_{32}, \underline{I}_3).$$

Ranije je dobiveno:

$$\underline{U}_{23} = U_{23} \cdot e^{j\varphi_{U23}} = 220 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V} \Rightarrow U_{23} = 220 \text{ V}; \quad \varphi_{U23} = -120^\circ.$$

$$\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j\varphi_{I3}} = 22 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ A} \Rightarrow I_3 = 22 \text{ A}; \quad \varphi_{I3} = -90^\circ.$$

Za fazor napona \underline{U}_{32} vrijedi:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{32} &= -\underline{U}_{23} = -U_{23} \cdot e^{j\varphi_{U23}} = e^{j180^\circ} \cdot U_{23} \cdot e^{j\varphi_{U23}} = \\ &= U_{23} \cdot e^{j(180^\circ + \varphi_{U23})} = 220 \cdot e^{j(180^\circ - 120^\circ)} = 220 \cdot e^{j60^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

Iz faznih stavova fazora \underline{U}_{32} i \underline{I}_3 ($\varphi_{U32} = 60^\circ$ i $\varphi_{I3} = -90^\circ$) vidi se da je fazni pomak između ovih fazora 150° , tj. vrijedi:

$$\angle(\underline{U}_{32}, \underline{I}_3) = 150^\circ;$$

$$P_{W2} = U_{32} \cdot I_3 \cdot \cos \angle(\underline{U}_{32}, \underline{I}_3) = 220 \cdot 22 \cdot \cos 150^\circ = -4191,6 \text{ W}.$$

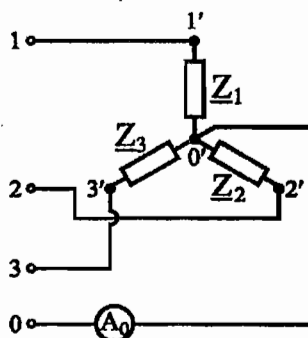
Primjer 3.9

Na trofazni simetrični generator prostoperiodičnih napona direktnog redosljeda, u kojem je $\underline{U}_{10} = j110 \text{ V}$, priključeno je trošilo slijedećih karakteristika:

$$\underline{Z}_1 = 10 \Omega; \quad \underline{Z}_2 = j10 \Omega; \quad \underline{Z}_3 = -j10 \Omega.$$

Ovo trošilo formira spoj u zvijezdu. Iznos impedanse nul-vodiča koji spaja zvjezdište trošila sa zvjezdištem generatora zanemariv je u odnosu na ostale impedanse. Opisana shema spoja prikazana je na slici 3.38.

- Odrediti fazore struja kroz pojedine impedanse trošila i fazor struje nul-vodiča.
- Ako se impedansa Z_1 zamijeni promjenljivim otpornikom R' , pri čemu je $R' \in (0, 10) \Omega$, odrediti pri kojoj vrijednosti R' idealni ampermetar A_0 ne registrira protok struje (struja kroz nul-vodič jednaka je nuli).



Slika 3.38 Shema električnog kruga uz primjer 3.9

Rješenje

a.

Razmatrano trošilo je nesimetrično jer impedanse pojedinih faza nisu međusobno jednake po argumentu iako su iste po modulu. Sistem napona je simetričan, pa vrijedi:

$$U_{10} = U_{20} = U_{30} = 110 \text{ V}.$$

S obzirom na direktni redoslijed napona i na izraz za fazor napona \underline{U}_{10} , vrijede slijedeće relacije:

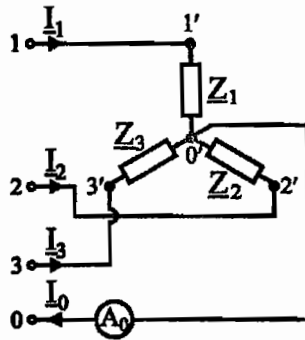
$$\underline{U}_{10} = j110 = 110 \cdot e^{j90^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{j(90^\circ - 120^\circ)} = U_{20} \cdot e^{-j30^\circ} = 110 \cdot e^{-j30^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{30} = U_{30} \cdot e^{j(90^\circ - 240^\circ)} = U_{30} \cdot e^{-j150^\circ} = 110 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ V}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, impedansa nul-vodiča zanemarivo je mala, pa se točke 0 i 0' nalaze na istom potencijalu. Ako je impedansa prijenosne linije između generatora i trošila zanemarena, fazni naponi na trošilu jednaki su faznim naponima na izvoru:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'}; \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'}; \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'}.$$



Slika 3.38.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Ako se pretpostave smjerovi i oznake struja kao na slici 3.38.1, fazori struja \underline{I}_1 , \underline{I}_2 i \underline{I}_3 određuju se po relacijama:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{\underline{Z}_1} = j11 \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{Z}_2} = 11 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{Z}_3} = 11 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ A},$$

dok se fazor struje u nul-vodiču računa iz relacije postavljene po I Kirchhoffovom zakonu za čvor 0':

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -j8,053 \text{ A}.$$

b.

Treba voditi računa da se tačke 0 i 0' i dalje nalaze na istom potencijalu, pa su fazni naponi na trošilu jednaki faznim naponima generatora i isti su kao u prethodnom dijelu zadatka:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'}; \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'}; \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'}.$$

Naponi i impedanse faza 2 i 3 trošila nisu se mijenjale u odnosu na dio zadatka a. To znači da se neće promijeniti ni struje ovih faza. Ako se s \underline{I}'_2 i \underline{I}'_3 označe fazori struja ovih faza nakon zamjene impedanse \underline{Z}_1 , mora vrijediti:

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}_2 \quad \text{i} \quad \underline{I}'_3 = \underline{I}_3.$$

Prema uvjetu datom u ovom dijelu zadatka, struja kroz nul-vodič mora biti jednaka nuli. Dakle, mora vrijediti:

$$\underline{I}'_0 = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = 0 \text{ A},$$

gdje je s \underline{I}'_1 označena struja faze 1 nakon zamjene impedanse \underline{Z}_1 s otpornikom R' .

Iz posljednje relacije dobiva se:

$$\underline{I}'_1 = -\underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 19,05 \cdot e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

Otpornost otpornika R' računa se po izrazu:

$$R' = \frac{U_{1'0'}}{\underline{I}'_1} = 5,77 \Omega.$$

Primjer 3.10

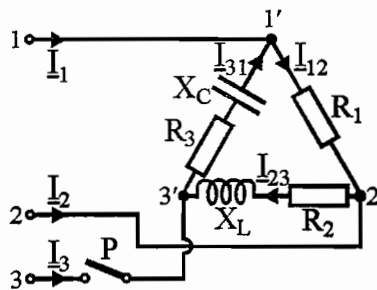
Na trofaznu električnu mrežu simetrične raspodjele napona direktnog redosljeda faza priključen je trofazni potrošač kao na slici 3.39.

Efektivne vrijednosti napona su $U_L = 380 \text{ V}$, a referentni je fazor napona \underline{U}_{12} ($\underline{U}_{12} = U_L \cdot e^{j0^\circ}$).

Otpornosti pojedinih elemenata potrošača su: $R_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 5 \Omega$; $R_3 = 8 \Omega$; $X_L = 6 \Omega$; $X_C = 4 \Omega$.

Ako je prekidač P u fazi 3 otvoren, odrediti aktivnu snagu potrošača.

Kolika je razlika u vrijednostima aktivne snage potrošača ΔP u slučaju kad je prekidač P zatvoren u odnosu na slučaj kad je prekidač otvoren?



Slika 3.39 Shema električnog kruga uz primjer 3.10

Rješenje

Prema uvjetu datom u tekstu zadatka, referentni je fazor napona \underline{U}_{12} , pa su u ovom slučaju fazori napona trofaznog simetričnog sistema direktnog redosljeda definirani na slijedeći način:

$$\underline{U}_{12} = U_{12} \cdot e^{j0^\circ},$$

$$\underline{U}_{23} = U_{23} \cdot e^{-j120^\circ},$$

$$\underline{U}_{31} = U_{31} \cdot e^{-j240^\circ} = U_{31} \cdot e^{j120^\circ},$$

pri čemu vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L = 380 \text{ V}.$$

Fazne struje potrošača prije otvaranja prekidača mogu se odrediti na slijedeći način:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{R}_1} = \frac{380}{3} = 126,67 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{380 \cdot e^{-j120^\circ}}{5 + j6} = 48,66 \cdot e^{-j170,2^\circ} = (-47,95 - j8,28) \text{ A};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{380 \cdot e^{j120^\circ}}{8 - j4} = 42,51 \cdot e^{j146,56^\circ} = (-35,47 + j23,43) \text{ A}.$$

Prividna snaga u ovom slučaju je:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{12} \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_{31}^* = \\ &= 380 \cdot 126,67 + 380 \cdot e^{-j120^\circ} \cdot 48,66 \cdot e^{j170,2^\circ} + 380 \cdot e^{j120^\circ} \cdot 42,51 \cdot e^{-j146,56^\circ} = \\ &= (74419,7 + j6963,3) \text{ VA}. \end{aligned}$$

Iz posljednjeg izraza može se zaključiti da aktivna snaga potrošača za slučaj prije otvaranja prekidača iznosi:

$$P = 74419,7 \text{ W} \approx 74,42 \text{ kW}.$$

Nove vrijednosti veličina, koje se proračunavaju nakon otvaranja prekidača, bit će označene oznakom prim.

Nakon otvaranja prekidača linijska struja \underline{I}'_3 jednaka je nuli:

$$\underline{I}'_3 = 0 \text{ A}.$$

Za čvor 3' vrijedi relacija napisana primjenom I Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{I}'_{31} = \underline{I}'_3 + \underline{I}'_{23} \Rightarrow \underline{I}'_{31} = \underline{I}'_{23}.$$

Fazor napona \underline{U}_{12} nije se promijenio nakon otvaranja prekidača. Novi fazori faznih struja su:

$$\underline{I}'_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{R}_1} = \underline{I}_{12} = \frac{380}{3} = 126,67 \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}'_{23} = \underline{I}'_{31} &= \frac{\underline{U}_{21}}{\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \frac{-\underline{U}_{12}}{\underline{R}_2 + \underline{R}_3 + j\underline{X}_L - j\underline{X}_C} = \frac{-380}{13 + j2} = \frac{380 \cdot e^{-j180^\circ}}{13,15 \cdot e^{j8,75^\circ}} = \\ &= 28,8 \cdot e^{-j188,75^\circ} = (-28,465 + j4,381) \text{ A}. \end{aligned}$$

Prividna snaga u ovom slučaju je:

$$\begin{aligned} \underline{S}' &= \underline{U}_{12} \underline{I}'_{12} + \underline{U}_{21} \underline{I}'_{23} = 380 \cdot 126,67 + (-380) \cdot (-28,465 - j4,381) = \\ &= (58951,3 + j1664,78) \text{ VA}. \end{aligned}$$

Aktivna snaga potrošača nakon otvaranja prekidača je:

$$P' = 58951,3 \text{ W} \approx 58,95 \text{ kW}.$$

Aktivna snaga potrošača prije otvaranja prekidača P veća je od aktivne snage potrošača nakon otvaranja prekidača P' za:

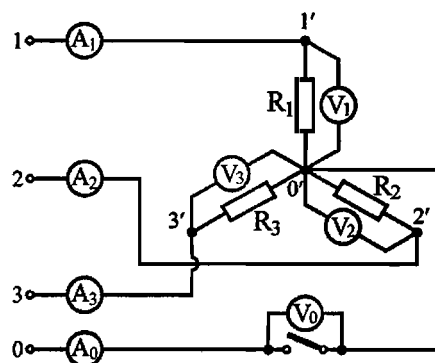
$$\Delta P = P - P' = 74,42 - 58,95 = 15,47 \text{ kW}.$$

Primjer 3.11

Trofazni potrošač priključen je na simetričnu trofaznu mrežu direktnog redoslijeda faza, linijskog napona $U_L = 173 \text{ V}$ (slika 3.40). Za potrošač vrijedi: $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10 \Omega$. Odrediti pokazivanja svih mjernih instrumenata u slijedećim slučajevima:

- normalan režim rada pri uključenoj sklopki u nultom vodu;
- havarijski režim rada: prekid faze 3 pri uključenoj sklopki u nultom vodu;
- havarijski režim rada: prekid faze 3 pri isključenoj sklopki u nultom vodu;
- havarijski režim rada: prekid faza 2 i 3 pri uključenoj sklopki u nultom vodu;
- havarijski režim rada: prekid faza 2 i 3 pri isključenoj sklopki u nultom vodu;
- havarijski režim rada: kratki spoj u fazi 1 pri isključenoj sklopki u nultom vodu.

Pretpostaviti da su svi mjerni instrumenti idealni. Impedansa nultog vodiča može se zanemariti. Referentni je fazor napona \underline{U}_{10} .

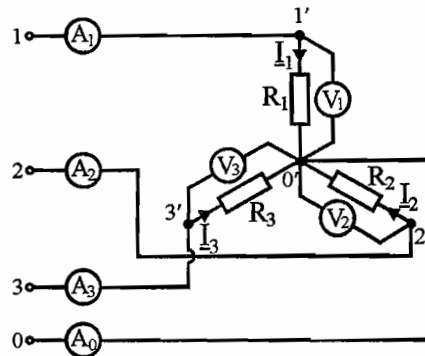


Slika 3.40 Shema električnog kruga uz primjer 3.11

Rješenje

a.

U ovom dijelu zadatka razmatra se slučaj simetričnog (uravnoteženog) trofaznog potrošača u spoju zvijezda s nul-vodičem. Shema spoja prikazana je na slici 3.40.1.



Slika 3.40.1 Shema električnog kruga uz primjer 3.11.a

S obzirom da je potrošač simetričan, vrijedi:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{A0} = 0 \text{ A}.$$

S obzirom da su tačke 0 i 0' međusobno kratkospojene, vrijedi:

$$\underline{U}_{0'0} = 0 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad U_{V0} = 0 \text{ V}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, mreža je simetrična, pa linijski naponi imaju međusobno jednake vrijednosti:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L = 173 \text{ V}.$$

Ako se padovi napona na prijenosnoj liniji između izvora i potrošača mogu zanemariti, vrijedi:

$$U_{1'2'} = U_{12} = 173 \text{ V}; \quad U_{2'3'} = U_{23} = 173 \text{ V}; \quad U_{3'1'} = U_{31} = 173 \text{ V}.$$

U ovom slučaju su efektivne vrijednosti faznih napona na potrošaču za $\sqrt{3}$ puta manje od efektivnih vrijednosti linijskih napona:

$$U_{1'0'} = U_{10} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}; \quad U_{2'0'} = U_{20} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V};$$

$$U_{3'0'} = U_{30} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}.$$

Voltmetri V_1 , V_2 i V_3 priključeni su između faznih vodiča i zvjezdista potrošača i mjere efektivne vrijednosti faznih napona:

$$U_{V1} = U_{1'0'} = 100 \text{ V}; \quad U_{V2} = U_{2'0'} = 100 \text{ V}; \quad U_{V3} = U_{3'0'} = 100 \text{ V}.$$

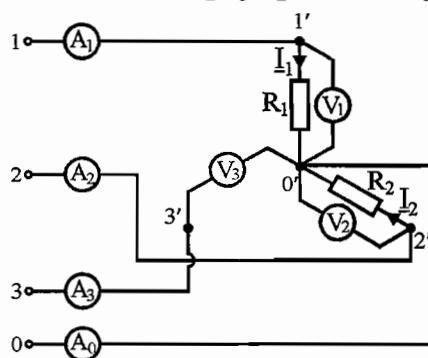
Efektivne vrijednosti faznih (linijskih) struja koje mjere ampermetri A_1 , A_2 i A_3 mogu se izračunati po relacijama:

$$I_1 = I_{A1} = \frac{U_{1'0'}}{R_1} = 10 \text{ A}; \quad I_2 = I_{A2} = \frac{U_{2'0'}}{R_2} = 10 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{A3} = \frac{U_{3'0'}}{R_3} = 10 \text{ A}.$$

b.

U ovom dijelu zadatka razmatra se slučaj simetričnog trofaznog potrošača u spoju zvijezda s jednom fazom u prekidu (nesimetrični potrošač) i s nul-vodičem. Shema spoja prikazana je na slici 3.40.2.



Slika 3.40.2 Shema električnog kruga uz primjer 3.11.b

S obzirom da je faza 3 u prekidu, vrijedi:

$$I_3 = 0 \text{ A} \Rightarrow I_{A3} = 0 \text{ A}.$$

S obzirom da su tačke 0 i 0' međusobno kratkospojene, vrijedi:

$$U_{0'0} = 0 \text{ V} \Rightarrow U_{v0} = 0 \text{ V}.$$

Fazni naponi na potrošaču jednaki su faznim naponima u mreži:

$$U_{v1} = U_{1'0'} = U_{10} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}; \quad U_{v2} = U_{2'0'} = U_{20} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V};$$

$$U_{v3} = U_{3'0'} = U_{30} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}.$$

Za struje faza 1 i 2 vrijedi:

$$I_1 = I_{A1} = \frac{U_{1'0'}}{R_1} = 10 \text{ A}; \quad I_2 = I_{A2} = \frac{U_{2'0'}}{R_2} = 10 \text{ A}.$$

Struja u nultom vodiču je:

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

Posljednja relacija pokazuje da je za određivanje pokazivanja ampermetra A_0 neophodno odrediti fazore struja \underline{I}_1 i \underline{I}_2 .

S obzirom da je zadata mreža sa sistemom napona direktnog redoslijeda faza i da je fazor napona \underline{U}_{10} referentni, vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{10} = U_{10} \cdot e^{j0^\circ} = U_{10} = 100 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{-j120^\circ} = 100 \cdot e^{-j120^\circ} = -50 \cdot (1 + j\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{30} = U_{30} \cdot e^{j120^\circ} = 100 \cdot e^{j120^\circ} = 50 \cdot (-1 + j\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Fazori struja \underline{I}_1 i \underline{I}_2 su:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{1'0'}}{R_1} = \frac{U_{10}}{R_1} = 10 \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = \frac{U_{2'0'}}{R_2} = \frac{U_{20}}{R_2} = 10 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ A}.$$

Fazor struje \underline{I}_0 je:

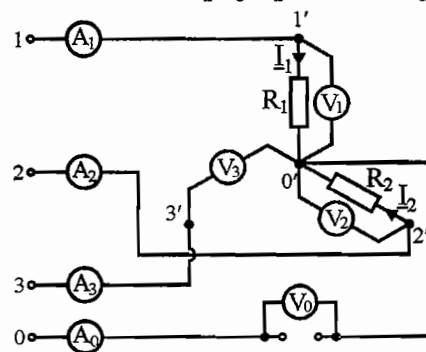
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (5 - j8,66) \text{ A}.$$

Ampermetar A_0 mjeri efektivnu vrijednost struje I_0 :

$$I_{A0} = I_0 = \sqrt{[R_e \{I_0\}]^2 + [I_m \{I_0\}]^2} = \sqrt{5^2 + 8,66^2} = 10 \text{ A}.$$

c.

U ovom dijelu zadatka razmatra se slučaj simetričnog trofaznog potrošača u spoju zvijezda s jednom fazom u prekidu (nesimetrični potrošač) i bez nul-vodiča. Shema spoja prikazana je na slici 3.40.3.



Slika 3.40.3 Shema električnog kruga uz primjer 3.11.c

S obzirom da je faza 3 u prekidu, vrijedi:

$$I_3 = 0 \text{ A} \Rightarrow I_{A3} = 0 \text{ A}.$$

S obzirom da je nulti vod u prekidu, vrijedi:

$$I_0 = 0 \text{ A} \Rightarrow I_{A0} = 0 \text{ A}.$$

Nakon prekida nultog vodiča tačke 0' i 0 više nisu međusobno kratkospojene.

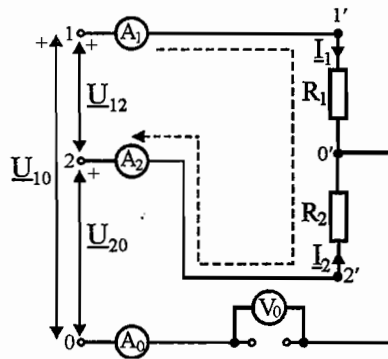
Uslijed toga dolazi do promjene napona na potrošaču koji više nisu jednaki naponima u mreži.

Međutim, naponi mreže se ne mijenjaju ako je do poremećaja došlo na potrošaču. Dakle, za napone u mreži i dalje vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L = 173 \text{ V};$$

$$U_{10} = U_{20} = U_{30} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}.$$

Za određivanje struja \underline{I}_1 i \underline{I}_2 može se analizirani krug prikazati u jednostavnijem obliku kao na slici 3.40.4.



Slika 3.40.4 Shema električnog kruga s konturom za određivanje struja \underline{I}_1 i \underline{I}_2

Fazor linijskog napona \underline{U}_{12} može se izračunati preko faznih napona korištenjem relacije:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20},$$

gdje su fazori faznih napona \underline{U}_{10} i \underline{U}_{20} definirani izrazima:

$$\underline{U}_{10} = U_{10} \cdot e^{j0^\circ} = U_{10} = 100 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{-j120^\circ} = 100 \cdot e^{-j120^\circ} = -50 \cdot (1 + j\sqrt{3}) \text{ V}.$$

S obzirom na $\underline{I}_0 = 0 \text{ A}$, jednažba napisana korištenjem I Kirchhoffovog zakona za čvor 0' glasi:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = -\underline{I}_2.$$

Za konturu naznačenu na slici 3.40.4 vrijedi relacija:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R}_1 - \underline{I}_2 \cdot \underline{R}_2,$$

iz koje se, uz korištenje $\underline{R}_1 = \underline{R}_2 = \underline{R}$ i $\underline{I}_2 = -\underline{I}_1$, dobiva:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}}{2\underline{R}} = 2,5 \cdot (3 + j\sqrt{3}) \text{ A},$$

odnosno:

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 = -2,5 \cdot (3 + j\sqrt{3}) \text{ A}.$$

Pokazivanja ampermetara A_1 i A_2 :

$$I_{A1} = I_1 = \sqrt{[\underline{R}_e\{\underline{I}_1\}]^2 + [\underline{I}_m\{\underline{I}_1\}]^2} = \sqrt{7,5^2 + 4,33^2} = 8,66 \text{ A};$$

$$I_{A2} = I_2 = \sqrt{[\underline{R}_e\{\underline{I}_2\}]^2 + [\underline{I}_m\{\underline{I}_2\}]^2} = \sqrt{(-7,5)^2 + (-4,33)^2} = 8,66 \text{ A}.$$

Proračun napona $\underline{U}_{1'0'}$ i $\underline{U}_{2'0'}$ na potrošaču i pokazivanja voltmetara V_1 i V_2 :

$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R}_1 = 25 \cdot (3 + j\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$U_{V1} = U_{1'0'} = \sqrt{[\underline{R}_e\{\underline{U}_{1'0'}\}]^2 + [\underline{I}_m\{\underline{U}_{1'0'}\}]^2} = 86,6 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{R}_2 = -25 \cdot (3 + j\sqrt{3}) \text{ V};$$

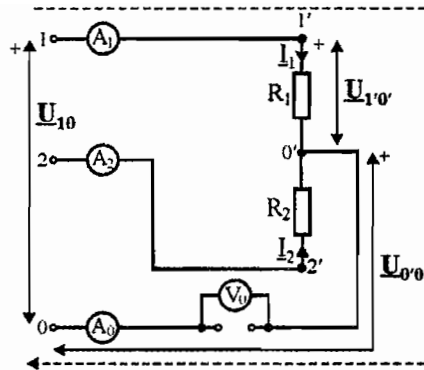
$$U_{V2} = U_{2'0'} = \sqrt{[\underline{R}_e\{\underline{U}_{2'0'}\}]^2 + [\underline{I}_m\{\underline{U}_{2'0'}\}]^2} = 86,6 \text{ V}.$$

Za proračun napona $\underline{U}_{0'0}$ i pokazivanja voltmetra V_0 postavlja se jednadžba po II Kirchhoffovom zakonu za konturu prikazanu na slici 3.40.5:

$$\underline{U}_{10} - \underline{U}_{1'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0,$$

odakle se dobiva:

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{1'0'} = 25 \cdot (1 - j\sqrt{3}) \text{ V}.$$



Slika 3.40.5 Shema električnog kruga s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{0'0}$

Pokazivanje voltmetra V_0 je:

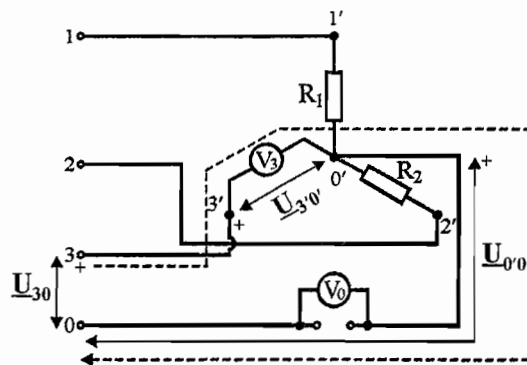
$$U_{V_0} = U_{0'0} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{0'0} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{0'0} \}]^2} = 50 \text{ V}.$$

Za proračun napona $\underline{U}_{3'0'}$ i pokazivanja voltmetra V_3 postavlja se jednačba po II Kirchhoffovom zakonu za konturu prikazanu na slici 3.40.6:

$$\underline{U}_{30} - \underline{U}_{3'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0,$$

odakle se dobiva:

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0} = 75 \cdot (-1 + j\sqrt{3}) \text{ V}.$$



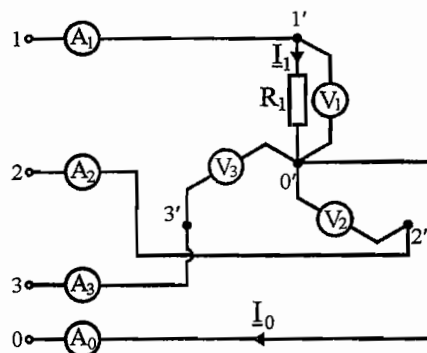
Slika 3.40.6 Shema električnog kruga s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{3'0'}$

Pokazivanje voltmetra V_3 je:

$$U_{V_3} = U_{3'0'} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{3'0'} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{3'0'} \}]^2} = 150 \text{ V}.$$

d.

U ovom dijelu zadatka razmatra se slučaj simetričnog trofaznog potrošača u spoju zvijezda s prekidom dvije faze (nesimetrični potrošač) i s nul-vodičem. Shema spoja prikazana je na slici 3.40.7.



Slika 3.40.7 Shema električnog kruga uz primjer 3.11.d

S obzirom da su faze 2 i 3 u prekidu, vrijedi:

$$\underline{I}_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_{A2} = 0 \text{ A} \quad \text{i} \quad \underline{I}_3 = 0 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_{A3} = 0 \text{ A}.$$

Tačke 0 i 0' međusobno su kratkospojene, pa vrijedi:

$$\underline{U}_{0'0} = 0 \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{V0} = 0 \text{ V}.$$

Efektivne vrijednosti faznih napona na potrošaču jednake su efektivnim vrijednostima faznih napona u mreži, pa se pokazivanja voltmetara V_1 , V_2 i V_3 mogu odrediti po relacijama:

$$\underline{U}_{V1} = \underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{10} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}; \quad \underline{U}_{V2} = \underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{20} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{30} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}.$$

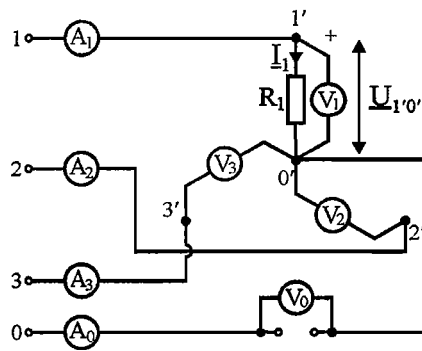
Sa sheme prikazane na slici 3.40.7 vidi se da za struje vrijedi:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{R_1} = \frac{\underline{U}_{10}}{R_1} = 10 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{R_1} = 10 \text{ A}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_0 = \underline{I}_{A0} = \underline{I}_1 = 10 \text{ A}.$$

e.

U ovom dijelu zadatka razmatra se slučaj simetričnog trofaznog potrošača u spoju zvijezda s prekidom dvije faze (nesimetrični potrošač) i bez nul-vodiča. Shema spoja prikazana je na slici 3.40.8.



Slika 3.40.8 Shema električnog kruga uz primjer 3.11.e

S obzirom da su faze 2 i 3 u prekidu te da nema nultog voda, vrijedi:

$$\underline{I}_2 = 0 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_{A2} = 0 \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = 0 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_{A3} = 0 \text{ A};$$

$$\underline{I}_0 = 0 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_{A0} = 0 \text{ A}.$$

Kao i u dijelu zadatka c., dolazi do promjene napona na potrošaču koji više nisu jednaki naponima u mreži, ali se naponi mreže ne mijenjaju:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{23} = \underline{U}_{31} = \underline{U}_L = 173 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{20} = \underline{U}_{30} = \frac{\underline{U}_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}.$$

Sa sheme prikazane na slici 3.40.8 se vidi da strujni krug nije zatvoren, pa radi toga vrijedi:

$$\underline{I}_1 = 0 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_{A1} = 0 \text{ A}.$$

Vrijedi i relacija:

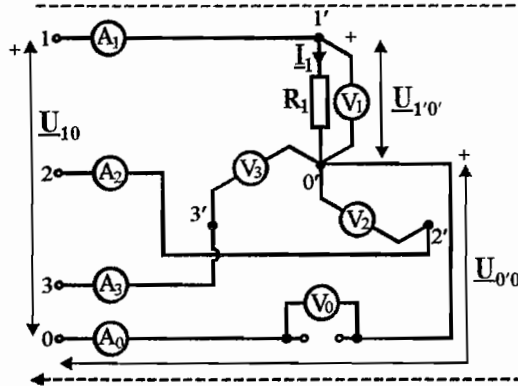
$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R}_1 = 0 \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{V1} = 0 \text{ V}.$$

Za proračun napona $\underline{U}_{0'0}$ i pokazivanja voltmetra \underline{U}_{V0} postavlja se jednačba po II Kirchhoffovom zakonu za konturu prikazanu na slici 3.40.9:

$$\underline{U}_{10} - \underline{U}_{1'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0,$$

odakle se dobiva:

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{10} = 100 \text{ V}.$$



Slika 3.40.9 Shema električnog kruga s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{0'0}$

Pokazivanje voltmetra V_0 je:

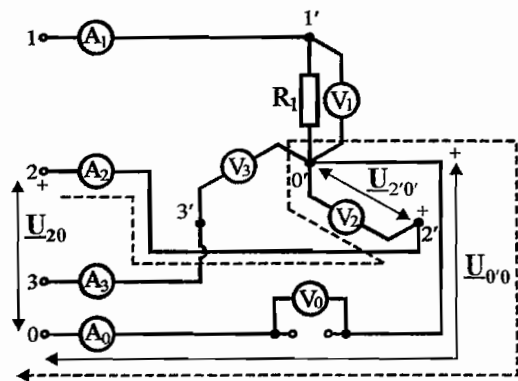
$$U_{V_0} = U_{0'0} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{0'0} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{0'0} \}]^2} = 100 \text{ V}.$$

Za proračun napona $\underline{U}_{2'0'}$ i pokazivanja voltmetra V_2 postavlja se jednačba po II Kirchhoffovom zakonu za konturu prikazanu na slici 3.40.10:

$$\underline{U}_{20} - \underline{U}_{2'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0,$$

odakle se dobiva:

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{0'0} = (-150 - j50\sqrt{3}) \text{ V}.$$



Slika 3.40.10 Shema električnog kruga s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{2'0'}$

Pokazivanje voltmetra V_2 je:

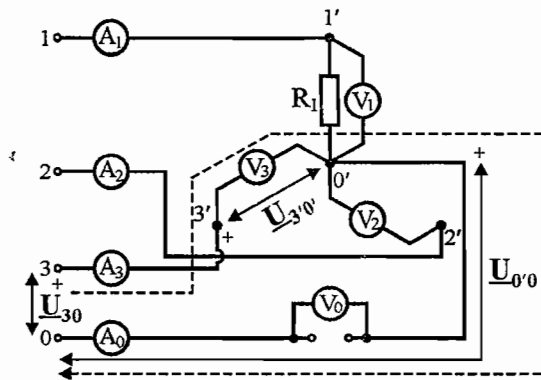
$$U_{V_2} = U_{2'0'} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{2'0'} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{2'0'} \}]^2} = 173 \text{ V}.$$

Za proračun napona $\underline{U}_{3'0'}$ i pokazivanja voltmetra U_{V_3} postavlja se jednačba po II Kirchhoffovom zakonu za konturu prikazanu na slici 3.40.11:

$$\underline{U}_{30} - \underline{U}_{3'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0,$$

odakle se dobiva:

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0} = (-150 + j50\sqrt{3}) \text{ V}.$$



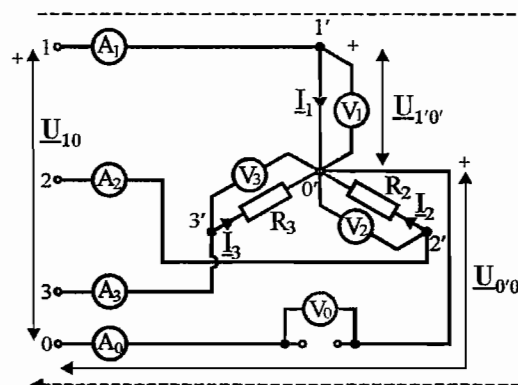
Slika 3.40.11 Shema električnog kruga s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{3'0'}$

Pokazivanje voltmetra V_3 je:

$$U_{V_3} = U_{3'0'} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{3'0'} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{3'0'} \}]^2} = 173 \text{ V}.$$

f.

U ovom dijelu zadatka razmatra se slučaj simetričnog trofaznog potrošača u spoju zvijezda s kratkim spojem u jednoj fazi (nesimetrični potrošač) i bez nul-vodiča. Shema spoja prikazana je na slici 3.40.12.



Slika 3.40.12 Shema električnog kruga uz primjer 3.11.f s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{0'0}$

S obzirom da je nulti vod u prekidu, vrijedi:

$$\underline{I}_0 = 0 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_{A0} = 0 \text{ A}.$$

Sa sheme prikazane na slici 3.40.12 vidi se da su tačke 1' i 0' međusobno kratkospojene i radi toga vrijedi:

$$\underline{U}_{1'0'} = 0 \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{V1} = 0 \text{ V}.$$

Za proračun napona $\underline{U}_{0'0}$ i pokazivanja voltmetra V_0 postavlja se jednačba po II Kirchhoffovom zakonu za konturu prikazanu na slici 3.40.12:

$$\underline{U}_{10} - \underline{U}_{1'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0.$$

Iz posljednje jednačbe dobiva se:

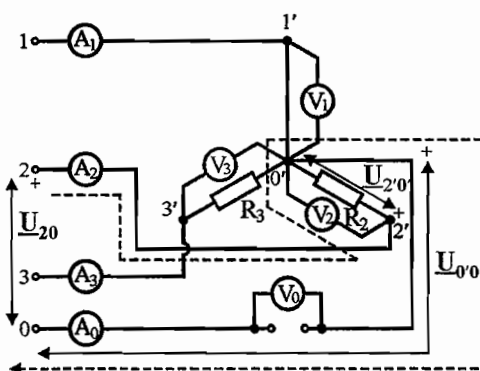
$$\underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{10} = 100 \text{ V},$$

a pokazivanje voltmetra je:

$$U_{V0} = U_{0'0} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{0'0} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{0'0} \}]^2} = 100 \text{ V}.$$

Za proračun napona $\underline{U}_{2'0'}$ i pokazivanja voltmetra V_2 postavlja se jednačba po II Kirchhoffovom zakonu za konturu prikazanu na slici 3.40.13:

$$\underline{U}_{20} - \underline{U}_{2'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0.$$



Slika 3.40.13 Shema električnog kruga s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{2'0'}$

Iz posljednje jednačbe dobiva se:

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{0'0} = (-150 - j50\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Pokazivanje voltmetra V_2 je:

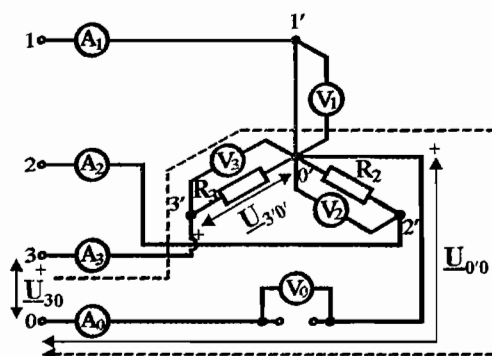
$$U_{V2} = U_{2'0'} = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{2'0'} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{2'0'} \}]^2} = 173 \text{ V}.$$

Proračun napona $\underline{U}_{3'0'}$ i pokazivanja voltmetra V_3 realizira se na sličan način kao i proračuni za prethodna dva slučaja. Kontura za postavljanje jednačbe po II Kirchhoffovom zakonu prikazana je na slici 3.40.14. Vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{30} - \underline{U}_{3'0'} - \underline{U}_{0'0} = 0;$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0} = (-150 + j50\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$U_{V3} = U_{3'0'} = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{U}_{3'0'}\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{U}_{3'0'}\}]^2} = 173 \text{ V}.$$



Slika 3.40.14 Shema električnog kruga s konturom za određivanje napona $\underline{U}_{3'0'}$

Sa sheme prikazane na slici 3.40.12 vidi se da vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{R}_2} = (-15 - j5\sqrt{3}) \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{R}_3} = (-15 + j5\sqrt{3}) \text{ A}.$$

Pokazivanja ampermetara A_2 i A_3 su:

$$\mathbf{I}_{A2} = \mathbf{I}_2 = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{I}_2\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{I}_2\}]^2} = 17,3 \text{ A};$$

$$\mathbf{I}_{A3} = \mathbf{I}_3 = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{I}_3\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{I}_3\}]^2} = 17,3 \text{ A}.$$

Za proračun struje \underline{I}_1 koristi se relacija napisana po I Kirchhoffovom zakonu za čvor $0'$:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = -(\underline{I}_2 + \underline{I}_3) = 30 \text{ A}.$$

Pokazivanje ampermetra A_1 je:

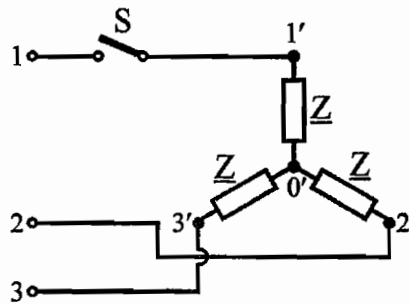
$$\mathbf{I}_{A1} = \mathbf{I}_1 = \sqrt{[\operatorname{Re}\{\underline{I}_1\}]^2 + [\operatorname{Im}\{\underline{I}_1\}]^2} = 30 \text{ A}.$$

Primjer 3.12

Na trofazni generator u spoju zvijezda sa simetričnom raspodjelom faznih napona direktnog redoslijeda faza priključen je simetričan trofazni potrošač u spoju zvijezda (slika 3.41).

Poznato je: $U_L = 380 \text{ V}$; $\underline{Z} = (5 + j 5) \Omega$.

- Odrediti fazore struja i faznih napona na potrošaču ako u fazi 1 nastupi prekid (isključena sklopka S).
- Odrediti fazore struja i faznih napona na potrošaču ako u fazi 1 nastupi kratki spoj.



Slika 3.41 Shema električnog kruga uz primjer 3.12

Rješenje

a.

Kod simetričnog trofaznog generatora u spoju zvijezda efektivne vrijednosti faznih napona su za $\sqrt{3}$ puta manje od efektivnih vrijednosti linijskih napona. Fazni naponi direktnog redoslijeda definirani su relacijama:

$$\underline{U}_{10} = U_{10} \cdot e^{j0^\circ} = 220 \text{ V} ;$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{-j120^\circ} = 220 \cdot e^{-j120^\circ} = (-110 - j190,5) \text{ V} ;$$

$$\underline{U}_{30} = U_{30} \cdot e^{-j240^\circ} = 220 \cdot e^{-j240^\circ} = (-110 + j190,5) \text{ V} .$$

Naponi generatora neće se promijeniti pri prekidu faze potrošača. Za linijske napone vrijede relacije:

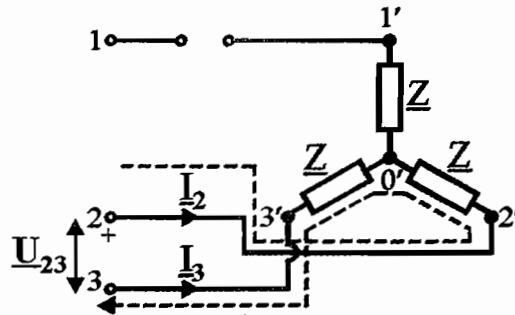
$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} ; \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} ; \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} .$$

Nakon otvaranja sklopke S u fazi 1 vrijedi:

$$\underline{I}_1 = 0 \text{ A} .$$

S obzirom da nema nul-vodiča, za električni krug prikazan na slici 3.41.1 vrijedi relacija:

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_3 .$$



Slika 3.41.1 Shema električnog kruga s označenom konturom i pretpostavljenim smjerovima struja

Za konturu označenu na slici 3.41.1 može se napisati jednadžba prema II Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} - \underline{I}_3 \cdot \underline{Z} = 2 \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}.$$

Iz prethodne relacije se dobiva:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20} - \underline{U}_{30}}{2\underline{Z}} = \frac{(-110 - j190,5) - (-110 + j190,5)}{10 + j10} = 19\sqrt{2} \cdot e^{-j135^\circ} \text{ A}.$$

Za struju \$\underline{I}_3\$ vrijedi:

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_2 = 19\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ A}.$$

Naponi na potrošaču su:

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z} = 19\sqrt{2} \cdot e^{-j135^\circ} \cdot 5\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} = 190 \cdot e^{-j90^\circ} = -j190 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z} = 19\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \cdot 5\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} = 190 \cdot e^{j90^\circ} = j190 \text{ V}.$$

b.

U slučaju kratkog spoja u fazi 1 postupak rješavanja identičan je kao u primjeru 3.11.f. Uzimajući u obzir da se naponi generatora ne mijenjaju, nakon rješavanja se dobiva:

$$\underline{U}_{1'0'} = 0 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{0'0} = 220 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{0'0} = -110 - j190,5 - 220 = -330 - j190,5 = 380 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0} = -110 + j190,5 - 220 = -330 + j190,5 = 380 \cdot e^{j150^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{Z}} = \frac{380 \cdot e^{-j150^\circ}}{5\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} = 38\sqrt{2} \cdot e^{-j195^\circ} \text{ A};$$

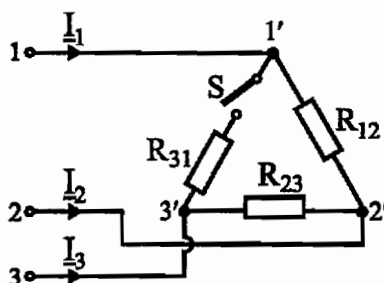
$$\underline{I}_3 = \frac{U_{3'0'}}{\underline{Z}} = \frac{380 \cdot e^{j150^\circ}}{5\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} = 38\sqrt{2} \cdot e^{j105^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_1 = -(\underline{I}_2 + \underline{I}_3) = 65,8 - j65,8 = 93,05 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}.$$

Test-zadaci

1. Simetrični trofazni potrošač ($R_{12} = R_{23} = R_{31} = R$) priključen je na simetričnu trofaznu mrežu. Shema električnog kruga prikazana je na slici 3.42. Kako će se promijeniti efektivne vrijednosti linijskih struja nakon što se otvori prekidač S u odnosu na vrijednosti koje su imale prije otvaranja prekidača? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. I_1 će se smanjiti, I_2 ostati ista, a I_3 će se povećati.
2. I_1 će se smanjiti, I_2 povećati, a I_3 ostati ista.
3. I_1 i I_3 će se smanjiti, a I_2 ostati ista.
4. I_1 će se povećati, I_2 smanjiti, a I_3 ostati ista.



Slika 3.42 Shema električnog kruga uz test-zadatak 1

Rješenje

S obzirom na simetriju mreže i potrošača, prije otvaranja prekidača za linijske i fazne struje vrijedi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_L; \quad \underline{I}_{12} = \underline{I}_{23} = \underline{I}_{31} = \underline{I}_F; \quad \underline{I}_L = \underline{I}_F \sqrt{3}.$$

Nakon otvaranja prekidača naponi na fazama potrošača neće se promijeniti, a za struju faze u kojoj je prekidač otvoren vrijedi:

$$\underline{I}'_{31} = 0.$$

(Oznaka prim koristi se za označavanje faznih i linijskih struja nakon otvaranja prekidača). S obzirom da se naponi na potrošaču nisu promijenili i da su impedanse preostale dvije faze iste kao i prije otvaranja prekidača, fazori faznih struja \underline{I}'_{12} i \underline{I}'_{23} neće se promijeniti, tj. isti su kao prije otvaranja prekidača:

$$\underline{I}'_{12} = \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}'_{23} = \underline{I}_{23}.$$

Za čvor 2' vrijedi sljedeća relacija:

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}'_{23} - \underline{I}'_{12} = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_2.$$

Posljednja relacija pokazuje da se ova linijska struja neće promijeniti nakon otvaranja prekidača \Rightarrow odgovori 2. i 4. nisu tačni.

Istovremeno, za fazore linijskih struja \underline{I}'_1 i \underline{I}'_3 vrijedi:

$$\underline{I}'_1 = \underline{I}'_{12} - \underline{I}'_{31} = \underline{I}_{12} = \underline{I}_{12};$$

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_{31} - \underline{I}'_{23} = -\underline{I}_{23} = -\underline{I}_{23}.$$

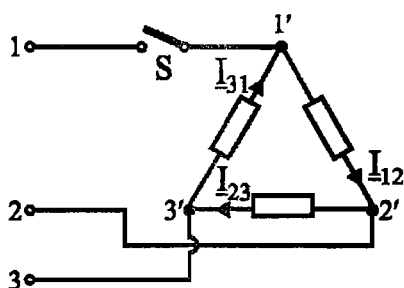
Iz prethodne dvije relacije dobiva se da se efektivne vrijednosti linijskih struja I'_1 i I'_3 mogu odrediti po izrazima:

$$I'_1 = I_{12} = I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}; \quad I'_3 = I_{23} = I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}.$$

Posljednja dva izraza pokazuju da su vrijednosti linijskih struja I'_1 i I'_3 za $\sqrt{3}$ puta manje od vrijednosti koje su imale prije otvaranja prekidača, tj. da se ove struje nakon otvaranja prekidača smanjuju \Rightarrow ③.

2. Simetrični trofazni potrošač ($Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z$) priključen je na simetrični trofazni generator. Shema električnog kruga prikazana je na slici 3.43. Kako će se promijeniti efektivne vrijednosti faznih struja nakon što se otvori prekidač S u odnosu na vrijednosti koje su imale prije otvaranja prekidača? (Zaokružiti tačan odgovor).

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. I_{12} će se povećati. | 2. I_{23} će se smanjiti. |
| 3. I_{12} će ostati ista. | 4. I_{31} će se smanjiti. |



Slika 3.43 Shema električnog kruga uz test-zadatak 2

Rješenje

Naponi na generatoru jednaki su naponima na potrošaču. S obzirom na simetriju generatora i potrošača, prije otvaranja prekidača za napone te linijske i fazne struje vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L;$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_L; \quad I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_F = \frac{U_L}{Z}; \quad I_L = I_F \sqrt{3}.$$

Nakon otvaranja prekidača u fazi 1 napon između čvorova 2' i 3' neće se promijeniti u odnosu na vrijednost koju je imao dok je prekidač bio zatvoren (U_{23}). S obzirom da je impedansa trošila priključena između čvorova 2' i 3' ista kao i prije otvaranja prekidača, struja ove faze neće se promijeniti:

$$I'_{23} = \frac{U_{23}}{Z} = \frac{U_L}{Z} = I_{23} \Rightarrow \text{odgovor 2. nije tačan.}$$

(Oznaka prim koristi se za označavanje faznih i linijskih struja nakon otvaranja prekidača).

Nakon otvaranja prekidača vrijedi:

$$I'_1 = 0,$$

odnosno:

$$I'_{12} - I'_{31} = 0 \Rightarrow I'_{12} = I'_{31}.$$

Efektivne vrijednosti faznih struja I'_{12} i I'_{31} su:

$$I'_{12} = I'_{31} = \frac{U_{23}}{2Z} = \frac{U_L}{2Z} < I_F.$$

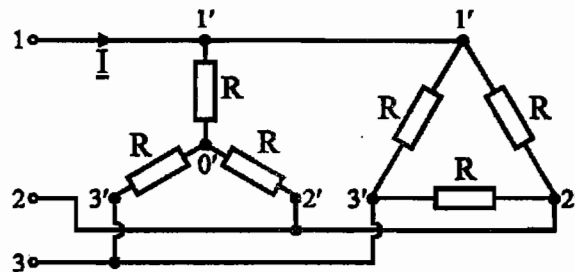
Posljednja relacija pokazuje da je efektivna vrijednost struje I'_{12} nakon otvaranja prekidača manja od vrijednosti koju je ova struja imala dok je prekidač bio zatvoren \Rightarrow odgovori 1. i 3. nisu tačni.

Također, vidi se da je efektivna vrijednost struje I'_{31} manja nego što je bila prije otvaranja prekidača \Rightarrow ④.

3. Na slici 3.44 prikazana su dva uravnotežena trofazna trošila priključena na trofazni simetričan izvor napona direktnog redoslijeda faza. Poznati su slijedeći podaci: linijski napon izvora U_L , otpornost R i $\underline{U}_{12} = U_L \cdot e^{j0^\circ}$. Odrediti efektivnu vrijednost linijske struje I . (Zaokružiti tačan odgovor).

$$1. \ I = 2 \frac{U_L}{R\sqrt{3}} \quad . \quad 2. \ I = \frac{U_L}{2R\sqrt{3}} \quad .$$

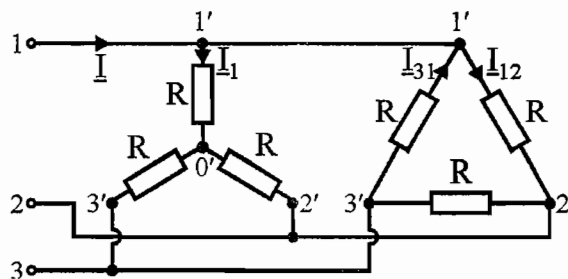
$$3. \ I = 4 \frac{U_L}{R\sqrt{3}} \quad . \quad 4. \ I = \frac{U_L}{R} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad .$$



Slika 3.44 Shema električnog kruga uz test-zadatak 3

Rješenje

Pretpostavit će se smjerovi i oznake struja kao na slici 3.44.1.



Slika 3.44.1 Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Za čvor 1' vrijedi slijedeća relacija napisana primjenom I Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \quad .$$

Fazori faznih struja mogu se odrediti po izrazima:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{R}; \quad \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{R}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{R} \quad .$$

Prema uvjetu datom u zadatku, fazor linijskog napona \underline{U}_{12} odabran je kao referentni ($\underline{U}_{12} = U_L \cdot e^{j0^\circ}$). S obzirom da je izvor simetričan i da ima direktni sistem redoslijeda faza, za napon \underline{U}_{31} vrijedi:

$$\underline{U}_{31} = U_L \cdot e^{-j240^\circ} \quad .$$

U simetričnom sistemu fazor napona $\underline{U}_{1'0'}$ fazno zaostaje u odnosu na odgovarajući fazor linijskog napona \underline{U}_{12} za 30° i ima efektivnu vrijednost manju za $\sqrt{3}$ puta. Dakle, za ovaj napon vrijedi:

$$\underline{U}_{1'0'} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}.$$

Nakon uvrštavanja izraza za napone u relaciju za fazor struje \underline{I} dobiva se:

$$\underline{I} = \frac{U_L}{R\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} + \frac{U_L}{R} e^{j0^\circ} - \frac{U_L}{R} e^{-j240^\circ} = \frac{2U_L}{R} \left[1 - j\frac{\sqrt{3}}{3} \right].$$

Efektivna vrijednost struje I je:

$$I = \frac{2U_L}{R} \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{4U_L}{R\sqrt{3}} \Rightarrow \textcircled{3}.$$

4. Otpornici $R_1 = R_2 = R_3 = R$ spojeni su u trokut i priključeni na trofazni simetričan izvor napona direktnog redoslijeda faza. Kako će se promijeniti efektivne vrijednosti linijskih struja ako se isti otpornici spoje u zvijezdu i priključe na isti izvor napona? (Zaokružiti tačan odgovor).

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| 1. Ostat će nepromijenjene. | 2. Smanjit će se za $\sqrt{3}$ puta. |
| 3. Smanjit će se za 3 puta. | 4. Povećat će se za 3 puta. |

Rješenje

U ovom zadatku analiziraju se slučajevi simetričnog trofaznog potrošača koji je prvo spojen u trokut a zatim u zvijezdu.

S obzirom da su potrošač i izvor napona simetrični, kod spoja u trokut sve tri fazne struje imaju međusobno jednake efektivne vrijednosti:

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_{FA}.$$

Isto vrijedi i za linijske struje:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_{LA}.$$

Linijski naponi također imaju međusobno jednake efektivne vrijednosti:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L.$$

Efektivna vrijednost linijske struje kod spoja u trokut veća je od efektivne vrijednosti fazne struje za $\sqrt{3}$ puta i može se odrediti po izrazu:

$$I_{LA} = I_{FA} \sqrt{3} = \sqrt{3} \frac{U_L}{R}.$$

Kod spoja u zvijezdu efektivne vrijednosti svih linijskih i faznih struja međusobno su jednake ($I_{LY} = I_{FY}$), dok linijski napon na potrošaču U_L ima

efektivnu vrijednost za $\sqrt{3}$ puta veću od efektivne vrijednosti faznog napona na potrošaču U_F . Efektivna vrijednost linijske struje kod spoja u zvijezdu je:

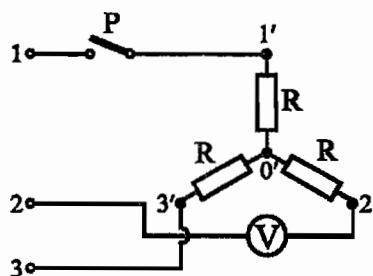
$$I_{LY} = I_{FY} = \frac{U_F}{R} = \frac{U_L}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \frac{U_L}{R} = \frac{I_{L\Delta}}{3}.$$

Posljednja relacija pokazuje da se kod spoja potrošača u zvijezdu, efektivna vrijednost linijske struje smanjuje za 3 puta u odnosu na efektivnu vrijednost linijske struje kod spoja istog potrošača u trokut \Rightarrow ③.

5. Trofazno trošilo prikazano na slici 3.45 priključeno je na trofazni simetričan izvor napona direktnog redoslijeda faza. Pri otvorenom prekidaču **P** idealni voltmetar priključen kao na slici pokazuje $U_V = 380$ V. Pokazivanje voltmetra U_V nakon zatvaranja prekidača **P** je:

1. $U_V = 220$ V. 2. $U_V = 0$ V. 3. $U_V = 190\sqrt{3}$ V. d. $U_V = 380$ V.

(Zaokružiti tačan odgovor).



Slika 3.45 Shema električnog kruga uz test-zadatak 5

Rješenje

Kad je prekidač **P** otvoren vrijedi:

$$\underline{I}'_1 = 0.$$

(Oznaka prim koristi se za označavanje struja i napona u slučaju kad je prekidač **P** otvoren).

Prema uvjetu datom u zadatku, voltmetar je idealan. To znači da ima beskonačno veliki unutrašnji otpor, što za posljedicu ima da se i faza 2 ponaša kao da je u prekidu. Radi toga vrijedi:

$$\underline{I}'_2 = 0.$$

Za čvor $0'$ vrijedi relacija napisana primjenom I Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}'_3 = 0.$$

Jasno je da u ovom slučaju strujni krug nije zatvoren, pa radi toga nema protjecanja struje ni u fazi 3.

Za konturu označenu na slici 3.45.1 vrijedi relacija napisana primjenom II Kirchhoffovog zakona:

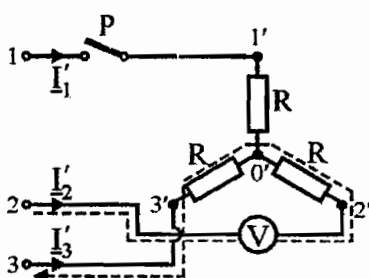
$$\underline{U}_{23} - \underline{U}'_{22'} - \underline{U}'_{2'0'} + \underline{U}'_{3'0'} = 0.$$

Fazni naponi na potrošaču su:

$$\underline{U}'_{2'0'} = \underline{I}'_2 \cdot \mathbf{R} = 0; \quad \underline{U}'_{3'0'} = \underline{I}'_3 \cdot \mathbf{R} = 0.$$

Iz prethodnih relacija dobiva se:

$$\underline{U}'_{22'} = \underline{U}_{23}.$$



Slika 3.45.1 Shema električnog kruga s naznačenim smjerom konture

Voltmetar mjeri efektivnu vrijednost napona $\underline{U}'_{22'}$. Ova vrijednost jednaka je efektivnoj vrijednosti linijskog napona \underline{U}_{23} , a s obzirom da je izvor simetričan, iste su i efektivne vrijednosti preostala dva linijska napona ($\underline{U}_{12} = \underline{U}_{23} = \underline{U}_{31} = \underline{U}_L$):

$$\underline{U}_L = \underline{U}'_V = 380 \text{ V}.$$

Kad se prekidač zatvori i dalje vrijedi:

$$\underline{I}_2 = 0; \quad \underline{U}'_{2'0'} = 0.$$

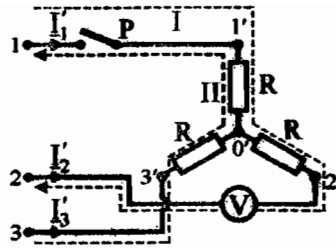
Iz relacije:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = -\underline{I}_3.$$

Za konture I i II označene na slici 3.45.2 vrijede relacije:

$$\text{I: } \underline{U}_{12} - \underline{U}'_{1'0'} + \underline{U}'_{2'0'} - \underline{U}'_{22'} = 0 \Rightarrow \underline{U}'_{22'} = \underline{U}_{12} - \underline{U}'_{1'0'} = \underline{U}_{12} - \underline{I}_1 \mathbf{R}.$$

$$\text{II: } \underline{U}_{31} - \underline{U}'_{3'0'} + \underline{U}'_{1'0'} = 0 \Rightarrow \underline{U}_{31} = \underline{I}_3 \mathbf{R} - \underline{I}_1 \mathbf{R} = -2\underline{I}_1 \mathbf{R} \Rightarrow \underline{I}_1 = -\frac{\underline{U}_{31}}{2\mathbf{R}}.$$



Slika 3.45.2 Shema električnog kruga s naznačenim smjerovima kontura

Ako se pretpostavi da je fazor napona \underline{U}_{12} referentni, vrijedi:

$$\underline{U}_{12} = U_L \cdot e^{j0^\circ}; \quad \underline{U}_{31} = U_L \cdot e^{-j240^\circ}.$$

Iz prethodnih relacija dobiva se:

$$\underline{I}_1 = -\frac{\underline{U}_{31}}{2R} = -\frac{U_L \cdot e^{-j240^\circ}}{2R} = \frac{U_L}{2R} e^{-j60^\circ};$$

$$\underline{U}_{2'2} = \underline{U}_{12} - \underline{I}_1 \cdot R = U_L - \frac{U_L}{2} e^{-j60^\circ} = \frac{U_L \sqrt{3}}{4} [\sqrt{3} + j].$$

Voltmetar mjeri efektivnu vrijednost napona $\underline{U}_{2'2}$, odnosno:

$$U_V = \sqrt{[R_e \{ \underline{U}_{2'2} \}]^2 + [I_m \{ \underline{U}_{2'2} \}]^2} = \frac{U_L \sqrt{3}}{2} = 190\sqrt{3} \text{ V} \Rightarrow \textcircled{3}.$$

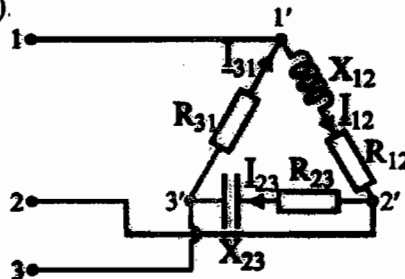
6. Trofazno trošilo prikazano na slici 3.46 priključeno je na trofazni simetričan izvor napona direktnog redosljeda faza. Pri tome vrijedi:

$$\underline{I}_{12} = I_{12} \cdot e^{j0^\circ}. \text{ Ako vrijede slijedeće relacije: } \varphi_{12} = \arctg \frac{X_{12}}{R_{12}} \text{ i}$$

$$\varphi_{23} = \arctg \frac{X_{23}}{R_{23}}, \text{ tačan izraz je:}$$

1. $\underline{I}_{31} = I_{31} \cdot e^{j120^\circ}$.
2. $\underline{I}_{23} = I_{23} \cdot e^{-j(120^\circ + \varphi_{23} - \varphi_{12})}$.
3. $\underline{I}_{31} = I_{31} \cdot e^{j(120^\circ + \varphi_{12})}$.
4. $\underline{I}_{23} = I_{23} \cdot e^{-j(120^\circ + \varphi_{23})}$.

(Zaokružiti odgovor).



Slika 3.46 Shema električnog kruga uz test-zadatak 6

Rješenje

U ovom zadatku referentni je fazor fazne struje \underline{I}_{12} . Ova struja protiče kroz radno-induktivnu impedansu koja je predstavljena serijskom vezom radne otpornosti \mathbf{R}_{12} i induktivne reaktanse \mathbf{X}_{12} . Fazor napona na krajevima ove impedanse (\underline{U}_{12}) mora fazno prednjačiti za ugao φ_{12} u odnosu na fazor struje koja teče kroz tu impedansu. To se može pokazati na slijedeći način:

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_{12} \underline{Z}_{12} = I_{12} (\mathbf{R}_{12} + j\mathbf{X}_{12}) = I_{12} \sqrt{\mathbf{R}_{12}^2 + \mathbf{X}_{12}^2} e^{j\varphi_{12}} = I_{12} Z_{12} e^{j\varphi_{12}} = U_{12} e^{j\varphi_{12}}$$

S obzirom da je izvor simetričan i da ima direktni redoslijed faza, vrijede i slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{23} = U_{23} \cdot e^{j(\varphi_{12} - 120^\circ)};$$

$$\underline{U}_{31} = U_{31} \cdot e^{j(\varphi_{12} - 240^\circ)} = U_{31} \cdot e^{j(\varphi_{12} + 120^\circ)};$$

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L.$$

Fazor struje \underline{I}_{23} je:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{23} &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{U_L e^{j(\varphi_{12} - 120^\circ)}}{\mathbf{R}_{23} - j\mathbf{X}_{23}} = \frac{U_L e^{j(\varphi_{12} - 120^\circ)}}{\sqrt{\mathbf{R}_{23}^2 + \mathbf{X}_{23}^2} e^{-j\varphi_{23}}} = \\ &= I_{23} e^{j(\varphi_{12} - 120^\circ + \varphi_{23})} = I_{23} e^{-j(120^\circ - \varphi_{23} - \varphi_{12})}, \end{aligned}$$

gdje je:

$$I_{23} = \frac{U_L}{\sqrt{\mathbf{R}_{23}^2 + \mathbf{X}_{23}^2}}.$$

Posljednji izrazi pokazuju da odgovori 2. i 4. nisu tačni.

Fazor struje \underline{I}_{31} je:

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{U_L e^{j(\varphi_{12} + 120^\circ)}}{\mathbf{R}_{31}} = I_{31} e^{j(120^\circ + \varphi_{12})}$$

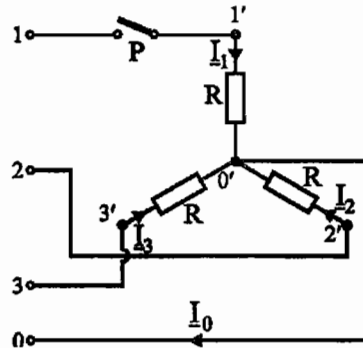
gdje je:

$$I_{31} = \frac{U_L}{\mathbf{R}_{31}}.$$

Posljednji izrazi pokazuju da je tačan odgovor ③.

7. Trofazno trošilo prikazano na slici 3.47 priključeno je na trofazni simetričan izvor napona direktnog redoslijeda faza. Impedansa nultog vodiča može se zanemariti. Kako se mijenjaju struje nakon što se otvori prekidač P u odnosu na vrijednosti koje su imale prije otvaranja prekidača? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. I_2 će se smanjiti.
2. I_3 će se povećati.
3. I_3 će ostati ista.
4. I_0 će ostati ista.



Slika 3.47 Shema električnog kruga uz test-zadatak 7

Rješenje

S obzirom da su potrošač i izvor napona simetrični, efektivne vrijednosti struja prije otvaranja prekidača **P** međusobno su jednake, a kroz nul-vodič nema protjecanja struje:

$$I_1' = I_2' = I_3' = \frac{U_F}{R}; \quad I_0' = 0.$$

(Oznaka prim koristi se za označavanje struja i napona u slučaju kad je prekidač **P** zatvoren). U posljednjim relacijama s U_F je označena efektivna vrijednost faznog napona na potrošaču za koju vrijedi:

$$U_{1'0'}' = U_{2'0'}' = U_{3'0'}' = U_F.$$

Nakon otvaranja prekidača u fazi 1 vrijedi:

$$I_1 = 0.$$

Zvjezdista potrošača (tačka $0'$) i izvora napona (tačka 0) međusobno su kratkospojena nul-vodičem i nalaze se na istom potencijalu. To znači da nakon otvaranja prekidača neće doći do promjene efektivne vrijednosti faznih napona $U_{2'0'}$ i $U_{3'0'}$ na potrošaču u odnosu na vrijednosti koje su imali dok je prekidač bio zatvoren:

$$U_{2'0'} = U_{3'0'} = U_F.$$

Efektivne vrijednosti struja I_2 i I_3 nakon otvaranja prekidača su:

$$I_2 = I_3 = \frac{U_F}{R},$$

odnosno i ove dvije struje imaju iste efektivne vrijednosti kao i prije otvaranja prekidača \Rightarrow ③.

Nakon otvaranja prekidača vrijedi:

$$I_0 = I_2 + I_3.$$

S obzirom na direktni redoslijed faza može se pisati:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{R} = \frac{\underline{U}_F}{R} e^{-j120^\circ};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{R} = \frac{\underline{U}_F}{R} e^{-j240^\circ}.$$

Iz posljednje tri relacije dobiva se:

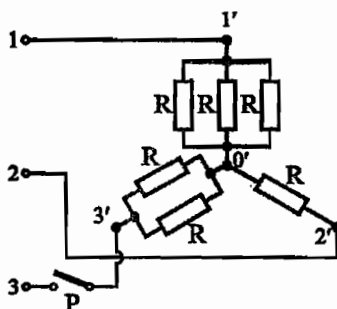
$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_F}{R} [e^{-j120^\circ} + e^{-j240^\circ}] = -\frac{\underline{U}_F}{R}.$$

Posljednja relacija pokazuje da se struja kroz nul-vodič povećala nakon otvaranja prekidača \Rightarrow odgovor 4. nije tačan.

8. Trofazno trošilo prikazano na slici 3.48 priključeno je na trofazni simetričan izvor napona direktnog redoslijeda faza za koji je poznata efektivna vrijednost linijskog napona $U_L = 380$ V. Efektivne vrijednosti napona $U_{1'0'}$ i $U_{2'0'}$ nakon otvaranja prekidača P su:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. $U_{1'0'} = U_{2'0'} = 190$ V. | 2. $U_{1'0'} = 285$ V; $U_{2'0'} = 95$ V. |
| 3. $U_{1'0'} = U_{2'0'} = 220$ V. | 4. $U_{1'0'} = 95$ V; $U_{2'0'} = 285$ V. |

(Zaokružiti tačan odgovor).



Slika 3.48 Shema električnog kruga uz test-zadatak 8

Rješenje

Ukupne otpornosti potrošača u fazama 1, 2 i 3 su:

$$R_1 = \frac{R}{3}; \quad R_2 = R; \quad R_3 = \frac{R}{2}.$$

Nakon otvaranja prekidača vrijedi:

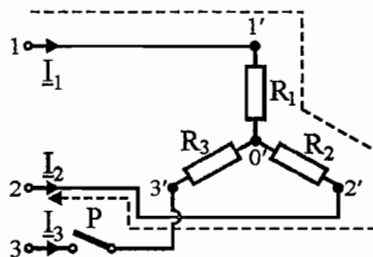
$$\underline{I}_3 = 0; \quad \underline{U}_{3'0'} = \underline{I}_3 \cdot R_3 = 0.$$

Iz relacije:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = -\underline{I}_2.$$

Za konturu označenu na slici 3.48.1 postavlja se jednačba po II Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{U}_{12} - \underline{U}_{1'0'} + \underline{U}_{2'0'} = 0.$$



Slika 3.48.1 Shema električnog kruga s naznačenim smjerom konture

Fazori faznih napona na potrošaču su:

$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R}_1; \quad \underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{R}_2.$$

Iz prethodnih relacija dobiva se:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1'0'} - \underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{R}_1 - \underline{I}_2 \cdot \underline{R}_2 = \underline{I}_1 \cdot (\underline{R}_1 + \underline{R}_2).$$

Efektivne vrijednosti struja I_1 i I_2 su:

$$I_1 = I_2 = \frac{U_{12}}{R_1 + R_2} = \frac{3U_L}{4R}.$$

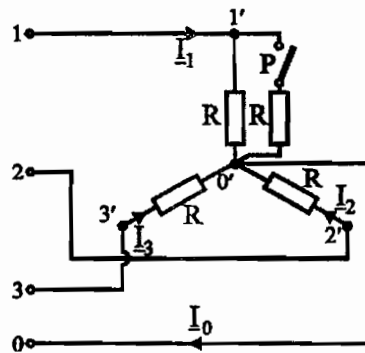
Efektivne vrijednosti faznih napona $U_{1'0'}$ i $U_{2'0'}$ su:

$$U_{1'0'} = I_1 \cdot R_1 = \frac{3U_L}{4R} \cdot \frac{R}{3} = \frac{U_L}{4} = 95 \text{ V};$$

$$U_{2'0'} = I_2 \cdot R_2 = \frac{3U_L}{4R} \cdot R = \frac{3U_L}{4} = 285 \text{ V} \Rightarrow \textcircled{4}.$$

9. Trofazno trošilo prikazano na slici 3.49 priključeno je na trofazni simetričan izvor napona direktnog redoslijeda faza. Impedansa nultog vodiča može se zanemariti. Kako se mijenjaju efektivne vrijednosti struja nakon što se zatvori prekidač P u odnosu na vrijednosti koje su imale prije zatvaranja prekidača? (Zaokružiti tačan odgovor).

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. I_1 će se smanjiti. | 2. I_2 će se povećati. |
| 3. I_3 će se smanjiti. | 4. I_0 će se povećati. |



Slika 3.49 Shema električnog kruga uz test-zadatak 9

Rješenje

S obzirom da su potrošač i izvor napona simetrični, efektivne vrijednosti struja prije zatvaranja prekidača **P** međusobno su jednake, a kroz nul-vodič nema protjecanja struje:

$$I'_1 = I'_2 = I'_3 = \frac{U_F}{R}; \quad I'_0 = 0.$$

(Oznaka prim koristi se za označavanje struja i napona prije zatvaranja prekidača). U posljednjim relacijama s U_F je označena efektivna vrijednost faznog napona na potrošaču. Fazni naponi na potrošaču jednaki su faznim naponima na izvoru i za ove napone vrijedi:

$$U'_{1'0'} = U'_{2'0'} = U'_{3'0'} = U_F.$$

Nakon zatvaranja prekidača u fazi 1 ukupna otpornost te faze je:

$$R_1 = \frac{R}{2}.$$

Fazni naponi na potrošaču se ne mijenjaju nakon zatvaranja prekidača. Efektivna vrijednost struje I_1 u ovom slučaju je:

$$I_1 = \frac{U_F}{R_1} = \frac{2U_F}{R} \Rightarrow \text{odgovor 1. nije tačan.}$$

Efektivne vrijednosti struja I_2 i I_3 nakon zatvaranja prekidača iste su kao i prije toga:

$$I_2 = I_3 = \frac{U_F}{R} \Rightarrow \text{odgovori 2. i 3. nisu tačni.}$$

Nakon otvaranja prekidača vrijedi:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3.$$

S obzirom na direktni redoslijed faza može se pisati:

$$\underline{I}_1 = \frac{U_{1'0'}}{R} = \frac{2U_F}{R};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{2'0'}}{R} = \frac{U_F}{R} e^{-j120^\circ};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{U_{3'0'}}{R} = \frac{U_F}{R} e^{-j240^\circ}.$$

Iz posljednje tri relacije dobiva se:

$$\underline{I}_0 = \frac{U_F}{R} [2 + e^{-j120^\circ} + e^{-j240^\circ}] = \frac{U_F}{R}.$$

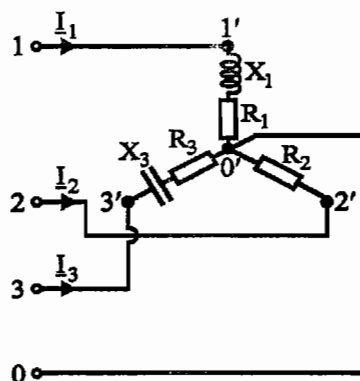
Posljednja relacija pokazuje da se struja kroz nul-vodič povećala nakon zatvaranja prekidača \Rightarrow ④.

10. Trofazno trošilo prikazano na slici 3.50 priključeno je na trofazni simetričan izvor napona direktnog redoslijeda faza. Pri tome vrijedi:

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j0^\circ}. \text{ Ako vrijede slijedeće relacije: } \varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1} \text{ i}$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{X_3}{R_3}, \text{ zaokružiti tačan izraz.}$$

- | | |
|---|--|
| 1. $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{-j120^\circ}.$ | 2. $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j(120^\circ - \varphi_1)}.$ |
| 3. $\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{-j120^\circ}.$ | 4. $\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j(120^\circ + \varphi_3)}.$ |



Slika 3.50 Shema električnog kruga uz test-zadatak 10

Rješenje

U ovom zadatku referentni je fazor struje \underline{I}_2 . Ova struja protiče kroz radnu otpornost \underline{R}_2 . Fazor napona na krajevima ove otpornosti ($\underline{U}_{2'0'}$) mora imati isti fazni stav kao i fazor struje koja teče kroz tu otpornost. To se može zapisati na slijedeći način:

$$\underline{U}_{2'0'} = U_{2'0'} \cdot e^{j0^\circ}.$$

S obzirom da nema padova napona između izvora i potrošača te da su zvjezdista kratkospojena, odgovarajući naponi na izvoru i potrošaču međusobno su jednaki:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'}; \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'}; \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'}.$$

Izvor napona je simetričan i ima direktni redosljed faza. Iste karakteristike imaju i naponi na potrošaču:

$$\underline{U}_{1'0'} = U_{1'0'} \cdot e^{j120^\circ};$$

$$\underline{U}_{3'0'} = U_{3'0'} \cdot e^{-j120^\circ};$$

$$U_{1'0'} = U_{2'0'} = U_{3'0'} = U_F.$$

Fazor struje \underline{I}_3 je:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{Z}_3} = \frac{U_F \cdot e^{-j120^\circ}}{\underline{R}_3 - j\underline{X}_3} = \frac{U_F \cdot e^{-j120^\circ}}{\sqrt{\underline{R}_3^2 + \underline{X}_3^2} \cdot e^{-j\varphi_3}} = I_3 \cdot e^{j(-120^\circ + \varphi_3)},$$

gdje je:

$$I_3 = \frac{U_F}{\sqrt{\underline{R}_3^2 + \underline{X}_3^2}}.$$

Posljednji izrazi pokazuju da odgovori 3. i 4. nisu tačni.

Fazor struje \underline{I}_1 je:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{\underline{Z}_1} = \frac{U_F \cdot e^{j120^\circ}}{\underline{R}_1 + j\underline{X}_1} = \frac{U_F \cdot e^{j120^\circ}}{\sqrt{\underline{R}_1^2 + \underline{X}_1^2} \cdot e^{j\varphi_1}} = I_1 \cdot e^{j(120^\circ - \varphi_1)},$$

gdje je:

$$I_1 = \frac{U_F}{\sqrt{\underline{R}_1^2 + \underline{X}_1^2}}.$$

Posljednji izrazi pokazuju da je tačan odgovor ②.

11. U trofaznom četvorovodnom sistemu na trofazni simetričan generator priključen je trofazni nesimetričan potrošač. Što se dešava ako dođe do prekida nultog vodiča zanemarive impedanse? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. Ako je potrošač spojen u trokut, na svim fazama potrošača doći će do povišenja napona.
2. Ako je potrošač spojen u zvijezdu, na svim fazama potrošača doći će do povišenja napona.
3. Ako je potrošač spojen u zvijezdu, napon na fazama potrošača neće se promijeniti.
4. Ako je potrošač spojen u zvijezdu, na nekim fazama potrošača doći će do povišenja napona, a na drugim do sniženja.

Rješenje

Tačan je odgovor ④.

12. U trofaznom trovodnom sistemu na trofazni simetričan generator priključen je trofazni simetričan potrošač. Što se dešava ako se u ovaj sistem uvede nulti vodič zanemarive impedanse? (Zaokružiti tačan odgovor).

1. Ako je potrošač spojen u trokut, na svim fazama potrošača doći će do povišenja napona.
2. Ako je potrošač spojen u zvijezdu, na svim fazama potrošača doći će do sniženja napona.
3. Ako je potrošač spojen u zvijezdu, napon na fazama potrošača neće se promijeniti.
4. Ako je potrošač spojen u zvijezdu, na nekim fazama potrošača doći će do povišenja napona, a na drugim do sniženja.

Rješenje

Tačan je odgovor ③.

Primjeri testova za provjeru znanja studenata iz predmeta Električni krugovi 1

- varijanta A

Zadatak broj 1

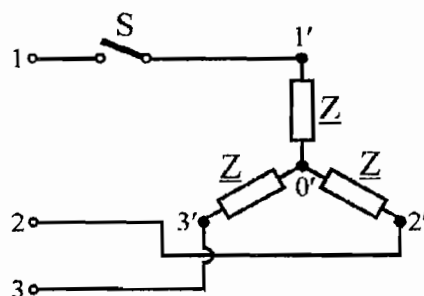
- 1.1) Izvesti relaciju za određivanje ekvivalentne kapacitivnosti n LVN kondenzatora C_i koje su međusobno povezani u seriju i napajani iz idealnog naponskog izvora sinusoidalnog napona.
- 1.2) Definirati amplitudu i argument admitanse za serijski spoj R, L, C elemenata izložen djelovanju idealiziranog sinusoidalnog naponskog izvora.
- 1.3) U električnom krugu prostoperiodičnih struja i napona, definisati pojmove srednje i efektivne električne struje.
- 1.4) Nacrtati pojednostavljenu električnu shemu za električni krug u kojem može nastupiti strujna rezonansa.
- 1.5) Napiši relacije, koje daju karakteristike faznih i linijskih struja i napona trofaznog nesimetričnog potrošača u spoju zvijezda, spojenog na trofazni generator simetričnog sistema sinusoidalnih napona direktnog redosljeda.

Zadatak broj 2.1

Na trofaznu električnu mrežu simetrične raspodjele napona direktnog redosljeda faza priključen je simetričan trofazni potrošač impedanse $\underline{Z} = (5 + j5) \Omega$, u spoju zvijezda. Poznato je: $U_l = 380 \text{ V}$.

Odrediti fazore struja i faznih napona na potrošaču ako u fazi 1

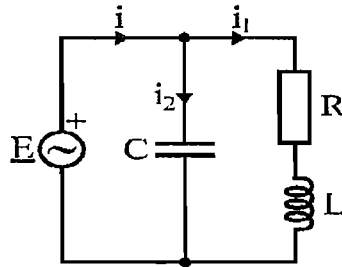
- a) nastupi prekid (isključena sklopka S).
- b) nastupi kratki spoj.



Slika 2.1

Zadatak broj 2.2

Električni krug prikazan na slici 2.2 nalazi se u režimu rezonancije. Odrediti kapacitet C , trenutne vrijednosti struja $i_1(t)$ i $i_2(t)$ kao i snagu u električnom krugu. Poznato je: $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(10^4 t + 30^\circ)$ A, $R = 1 \Omega$, $X_L = 1 (\Omega)$,

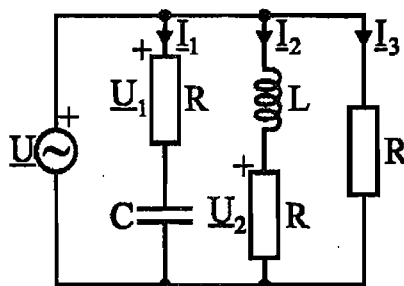


Slika 2.2

Zadatak broj 3

3.1) Za električni krug prikazan na slici 3.1 poznato je: $\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ}$. Koja od navedenih relacija je tačna?

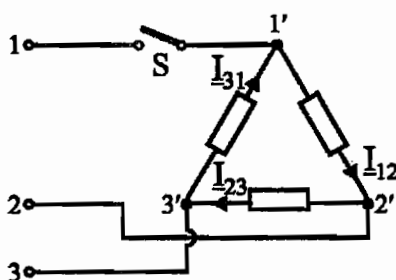
- $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\varphi_1}$. ($\varphi_1 = -\arctg(X_C / R)$)
- $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\varphi_2}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)
- $\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{-j\varphi_2}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)
- $\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\varphi_2}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)
- $\underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{j\varphi_1}$. ($\varphi_1 = -\arctg(X_C / R)$)



Slika 3.1

3.2) Kako će se promijeniti efektivne vrijednosti faznih struja u električnom krugu prikazanom na slici 3.2 nakon što se otvori prekidač S u odnosu na vrijednosti koje su imale prije otvaranja prekidača?

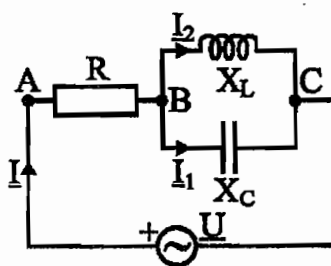
- a. I_{23} će se povećati.
- b. I_{23} će ostati ista.
- c. I_{12} će se povećati.
- d. I_{12} će ostati ista.
- e. I_{31} će se povećati.



Slika 3.2

3.3) U električnom krugu prikazanom na slici 3.3 nastupila je strujna rezonansa. Poznato je: $U = 380(\text{V})$, $X_C = 38(\Omega)$, $R = 100(\Omega)$. Koje od ponuđenih rješenja je tačno?

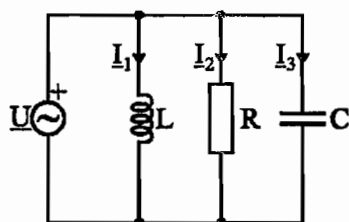
- a. $I_2 = 0(\text{A})$.
- b. $U_{BC} = 100(\text{V})$.
- c. $U_{AB} = 380(\text{V})$.
- d. $I = 3.8(\text{A})$.
- e. $I_1 = 10(\text{A})$.



Slika 3.3

3.4) U električnom krugu prikazanom na slici 3.4 poznato je: $U = 100(\text{V})$, $I_1 = 9(\text{A})$, $I_2 = 10(\text{A})$, $I_3 = 4(\text{A})$. Ukupna prividna snaga je:

- a. $S = 500\sqrt{5}(\text{VA})$.
- b. $S = 2300(\text{VA})$.
- c. $S = 1500(\text{VA})$.
- d. $S = 500(\text{VA})$.
- e. $S = 1403.6(\text{VA})$.



Slika 3.4

3.5) Koji od izraza za sinusoidalno promjenljivi napon je tačan?

- a. $U_{sr} < U$. b. $f = 2 \cdot \pi \cdot \omega$. c. $U = \frac{2 \cdot U_m}{\pi}$.
- d. $U = U_m \cdot \sqrt{2}$. e. $f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$.

– varijanta B

Zadatak broj 1

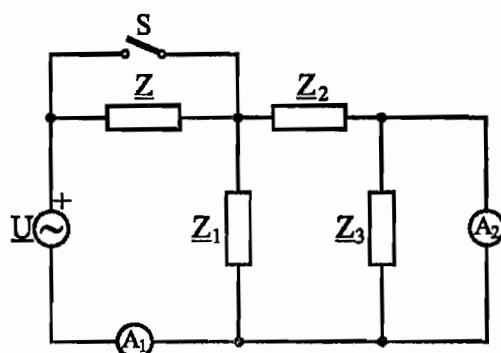
- 1.1) Skicirati grafički prikaz toka električne struje pri uključenju idealizirane, linearne, vremenski nepromjenljive električne zavojnice, koja nije sadržavala prethodno akumuliranu energiju, na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona.
- 1.2) Napisati jednačinu dinamičke ravnoteže za serijski spoj R, L, C elemenata izložen djelovanju idealiziranog sinusoidalnog naponskog izvora.
- 1.3) U električnom krugu prostoperiodičnih struja i napona, definisati pojam aktivne električne snage.
- 1.4) Nacrtati pojednostavljenu električnu shemu za električni krug u kojem može nastupiti strujna rezonansa.
- 1.5) Napiši relacije, koje daju karakteristike faznih i linijskih struja i napona trofaznog simetričnog potrošača u spoju trougao, spojenog na trofazni generator simetričnog sistema sinusoidalnih napona direktnog redosljeda.

Zadatak broj 2.1

U električnom krugu prostoperiodičnih struja i napona, čija je električna shema prikazana na slici 2.1, pri zatvorenom prekidaču S idealni ampermetri A_1 i A_2 imaju slijedeća pokazivanja: $I_{A_1} = 11$ A, $I_{A_2} = 1$ A.

Za prikazani električni krug, poznati su slijedeći podaci: $\underline{U} = 10$ V; $\underline{Z} = j10$ Ω ; sva preostala trošila u krugu su idealne linearne stacionarne induktivnosti.

Odrediti pokazivanja ampermetara A_1 i A_2 kada se otvori prekidač S.

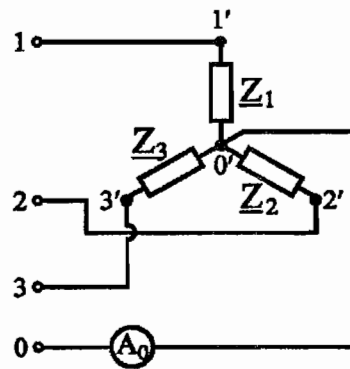


Slika 2.1

Zadatak broj 2.2

Na trofazni simetrični sistem prostoperiodičnih napona direktnog redosljeda, u kojem je $\underline{U}_{10} = j110$ V, priključeno je trošilo slijedećih karakteristika: $\underline{Z}_1 = 10$ Ω ; $\underline{Z}_2 = j10$ Ω ; $\underline{Z}_3 = -j10$ Ω . Ovo trošilo formira spoj u zvijezdu. Iznos impedanse nul-vodiča, koji spaja zvjezdište trošila sa zvjezdištem generatora, zanemariv je u odnosu na ostale impedanse. Opisana shema spoja prikazana je na slici 2.2.

- Odrediti struje kroz pojedine impedanse trošila i struju u nul-vodiču.
- Ako se impedansa \underline{Z}_1 zamijeni promjenljivim otpornikom R' , pri čemu je $R' \in (0, 10)$ Ω , odrediti pri kojoj vrijednosti R' idealni ampermetar A_0 ne registrira protok struje (struja kroz nul-vodič jednaka je nuli).

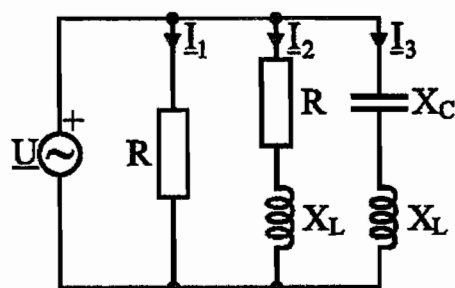


Slika 2.2

Zadatak broj 3

3.1) Za električni krug prikazan na slici 3.1 poznato je: $X_L > X_C$, $\underline{I}_3 = I_3 \cdot e^{j0^\circ}$. Koja od navedenih relacija je tačna?

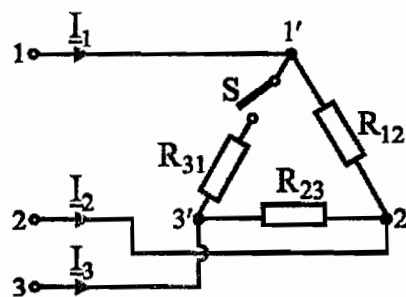
- $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{-j90^\circ}$.
- $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\varphi_1}$. ($\varphi_1 \neq 90^\circ$)
- $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j0^\circ}$.
- $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j(90^\circ + \varphi_2)}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)
- $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j(90^\circ - \varphi_2)}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)



Slika 3.1

3.2) Kako će se promijeniti efektivne vrijednosti linijskih struja u električnom krugu prikazanom na slici 3.2, nakon što se otvori prekidač S, u odnosu na vrijednosti koje su imale prije otvaranja prekidača?

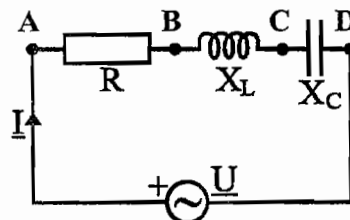
- I_1, I_2, I_3 će se smanjiti.
- I_1 će se smanjiti, I_2 povećati, a I_3 ostati ista.
- I_1 i I_3 će se smanjiti, a I_2 ostati ista.
- I_1 će se povećati, I_2 smanjiti, a I_3 ostati ista.
- I_1 će se smanjiti, a I_2 i I_3 povećati.



Slika 3.2

3.3) U električnom krugu, prikazanom na slici 3.3, nastupila je naponska rezonansa. Poznato je: $U = 220 \text{ V}$, $X_L = 200 \Omega$, $R = 22 \Omega$. Koje od ponuđenih rješenja je tačno?

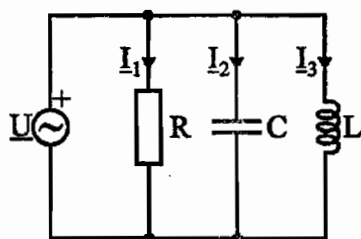
- $I = 1.1 \text{ A}$.
- $U_{AB} = 0 \text{ V}$.
- $U_{BC} = 2200 \text{ V}$.
- $U_{AC} = 2012.1 \text{ V}$.
- $U_{BD} = 220 \text{ V}$.



Slika 3.3

3.4) U električnom krugu prikazanom na slici 3.4 poznato je: $U = 100 \text{ V}$, $I_1 = 6 \text{ A}$, $I_2 = 10 \text{ A}$, $I_3 = 4 \text{ A}$. Ukupna prividna snaga je:

- $S = 2000 \text{ VA}$.
- $S = 600\sqrt{2} \text{ VA}$.
- $S = 1200 \text{ VA}$.
- $S = 0 \text{ VA}$.
- $S = 1232.9 \text{ VA}$.



Slika 3.4

3.5) Koji od izraza za sinusoidalno promjenljivi napon nije tačan?

- $f = \frac{1}{T}$.
- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$.
- $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.
- $U_{sr} > U$.
- $U_{sr} \neq 0$.

– varijanta C

Zadatak broj 1

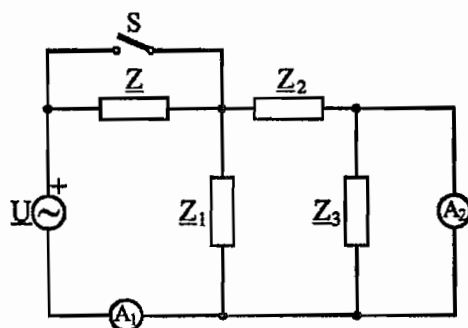
- 1.1) Skicirati grafički prikaz uspostavljanja električnog napona između elektroda idealiziranog, linearnog, vremenski nepromjenljivog kondenzatora, koji nije sadržavao prethodno akumuliranu energiju, pri njegovom uključanju na naponski izvor stalnog jednosmjernog napona.
- 1.2) Definirati amplitudu i argumant impedanse za serijski spoj R, L, C elemenata izložen djelovanju idealiziranog sinusoidalnog naponskog izvora.
- 1.3) U električnom krugu prostoperiodičnih struja i napona, definisati pojam induktivne reaktivne električne snage.

- 1.4) Nacrtati pojednostavljenu električnu shemu za električni krug u kojem može nastupiti naponska rezonansa.
- 1.5) Napiši relacije, koje daju karakteristike faznih i linijskih struja i napona trofaznog simetričnog potrošača u spoju zvijezda, spojenog na trofazni generator simetričnog sistema sinusoidalnih napona direktnog redosljeda.

Zadatak broj 2.1

U električnom krugu prostoperiodičnih struja i napona, čija je električna shema prikazana na slici 2.1, pri zatvorenom prekidaču S idealni ampermetri A_1 i A_2 imaju slijedeća pokazivanja: $I_{A1} = 11$ A, $I_{A2} = 1$ A.

Za prikazani električni krug poznati su slijedeći podaci: $\underline{U} = 10$ V; $\underline{Z} = -j10 \Omega$; sva preostala trošila u krugu su idealni linearni stacionarni kondenzatori. Odrediti pokazivanja ampermetara A_1 i A_2 kada se otvori prekidač S.

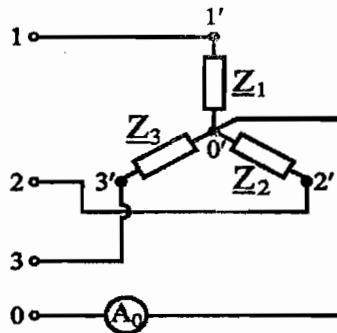


Slika 2.1

Zadatak broj 2.2

Na trofazni simetrični sistem prostoperiodičnih napona direktnog redosljeda, u kojem je $\underline{U}_{10} = -j110$ V, priključeno je trošilo slijedećih karakteristika: $\underline{Z}_1 = 10 \Omega$; $\underline{Z}_2 = j10 \Omega$; $\underline{Z}_3 = -j10 \Omega$. Ovo trošilo formira spoj u zvijezdu. Iznos impedanse nul-vodiča koji spaja zvjezdište trošila sa zvjezdištem generatora zanemariv je u odnosu na ostale impedanse. Opisana shema spoja prikazana je na slici 2.2.

- a. Odrediti struje kroz pojedine impedanse trošila i struju u nul-vodiču.
- b. Ako se impedansa Z_1 zamijeni promjenljivim otpornikom R' , pri čemu je $R' \in (0, 10) \Omega$, odrediti pri kojoj vrijednosti R' idealni ampermetar A_0 ne registrira protok struje (struja kroz nul-vodič jednaka je nuli).

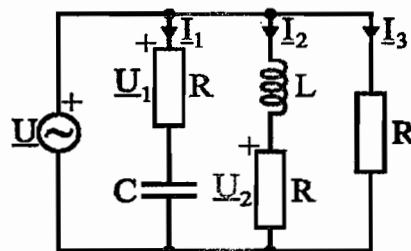


Slika 2.2

Zadatak broj 3

3.1) Za električni krug prikazan na slici 3.1 poznato je: $\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ}$.
Koja od navedenih relacija je tačna?

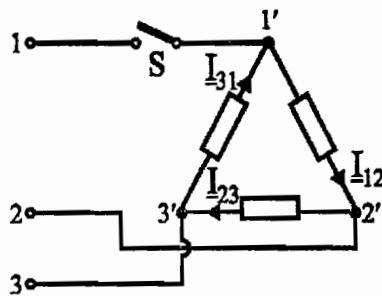
- a. $\underline{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\varphi_1}$. ($\varphi_1 = -\arctg(X_C / R)$)
- b. $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\varphi_2}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)
- c. $\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{-j\varphi_2}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)
- d. $\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\varphi_2}$. ($\varphi_2 = \arctg(X_L / R)$)
- e. $\underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{j\varphi_1}$. ($\varphi_1 = -\arctg(X_C / R)$)



Slika 3.1

3.2) Kako će se promijeniti efektivne vrijednosti faznih struja u električnom krugu prikazanom na slici 3.2 nakon što se otvori prekidač S u odnosu na vrijednosti koje su imale prije otvaranja prekidača?

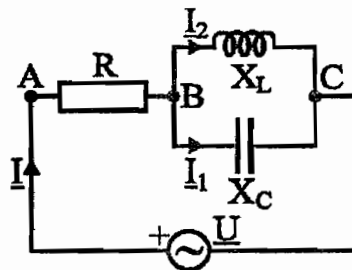
- a. I_{23} će se povećati. d. I_{12} će ostati ista.
 b. I_{23} će ostati ista. e. I_{31} će se povećati.
 c. I_{12} će se povećati.



Slika 3.2

3.3) U električnom krugu prikazanom na slici 3.3 nastupila je strujna rezonansa. Poznato je: $U = 380 \text{ V}$, $X_C = 38 \Omega$, $R = 100 \Omega$. Koje od ponuđenih rješenja je tačno?

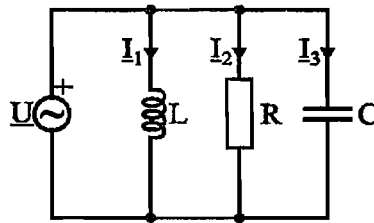
- a. $I_2 = 0 \text{ A}$.
 b. $U_{BC} = 100 \text{ V}$.
 c. $U_{AB} = 380 \text{ V}$.
 d. $I = 3.8 \text{ A}$.
 e. $I_1 = 10 \text{ A}$.



Slika 3.3

3.4) U električnom krugu prikazanom na slici 3.4 poznato je: $U = 100 \text{ V}$, $I_1 = 9 \text{ A}$, $I_2 = 10 \text{ A}$, $I_3 = 4 \text{ A}$. Ukupna prividna snaga je:

- a. $S = 500\sqrt{5} \text{ VA}$.
- b. $S = 2300 \text{ VA}$.
- c. $S = 1500 \text{ VA}$.
- d. $S = 500 \text{ VA}$.
- e. $S = 1403.6 \text{ VA}$.



Slika 3.4

3.5) Koji od izraza za sinusoidalno promjenljivi napon je tačan?

- a. $U_{sr} < U$.
- b. $f = 2 \cdot \pi \cdot \omega$.
- c. $U = \frac{2 \cdot U_m}{\pi}$.
- d. $U = U_m \cdot \sqrt{2}$.
- e. $f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$.

LITERATURA

1. Balanis C.A., Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley&Sons, New York, 1989.
2. Bartkowiak R.L., Electric Circuit Analysis, John Wiley&Sons, Canada, 1985.
3. Behlilović N., Osnove elektrotehnike, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, 2008.
4. Besonov A.L., Teoretičeskie osnovi elektrotehniki, Visšaja škola, Moskva, 1973.
5. Bosanac T., Teoretska elektrotehnika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
6. Edminister J.A., Theory and Problems of Electric Circuits, McGraw-Hill, Singapore, 1997.
7. Evans C. W., Engineering Mathematics, Van Nostrand Reinhold, London, 1989.
8. Flanagan W.M., Handbook of Transformer Design&Applications, McGraw-Hill, New York, 1992.
9. Hayat H.W., Kemmerly E. J., Engineering Circuit Analysis, McGraw-Hill, New York, 1986.
10. Haznadar Z., Štih Ž., Elektromagnetizam 1 i 2, Mikroštampa, Tuzla, 1998.
11. Horvat R., Teorija električnih kola, Građevinska knjiga, Beograd, 1959.
12. Hot E., Muharemović A., Teorija elektromagnetnih polja, ETF Sarajevo, Sarajevo, 2002.
13. Hot E., Osnovi elektrotehnike 1 i 2, Svjetlost, Sarajevo, 1989.
14. Inan U.S., Inan A. S., Engineering Electromagnetics, Addison-Wesley, Manlo Park-California, 1999.
15. Karabdić V., Teorija električnih kola, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1972.
16. Lončar J., Osnovi elektrotehnike 1 i 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1956 i 1958.
17. Maning L.A., Electrical Circuits, McGraw-Hill, New York, 1996.
18. Mazzoldi P., Nigro M., Voci C., Elementi di Fisica-Electromagnetismo, Edi SES, Napoli, 2006.
19. Milatović B., Osnovi elektrotehnike 1 i 2, Svjetlost, Sarajevo, 1990.
20. Milojković S., Teorija električnih kola, Svjetlost, Sarajevo, 1989.

21. Nejman L.R., Kalantarov P.L., Teoretski osnovi elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1951.
22. Nejman L.R., Demirčjan S.K., Teoretičeskie osnovi elektrotehniki, čast 1-2, Energoizdat, Leningrad, 1981.
23. Nejman R.L., Kalantarov L.P., Teoretičeskie osnovi elektrotehniki čast 1-2-3, Gosenergoizdat, Moskva, 1959.
24. Pinter V., Osnovi elektrotehnike 1 i 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970 i 1975.
25. Popović B., Elektromagnetika, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.
26. Popović B., Osnovi elektrotehnike 1-2-3, Građevinska knjiga, Beograd,
27. Purcell M. E., Electricity and Magnetism, McGraw-Hill, Massachusetts, 1965.
28. Ranojević M., Osnovi elektrotehnike, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
29. Surutka J., Osnovi elektrotehnike, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
30. Surutka J., Elektromagnetika, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.
31. Šehović E., Tkalić M., Felja I., Osnovi elektrotehnike zbirka primjera, Školska knjiga, Zagreb, 1980.
32. Tam I.E., Osnovi teorii električestva, Nauka, Moskva, 1966.
33. Tatur T. A., Osnovi teorii električeskih cepej, Visšaja škola, Moskva, 1980.
34. Tatur T. A., Osnovi teorii elektromagnetnih polej, Visšaja škola, Moskva, 1989.
35. Ulaby F. T., Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley&Sons, New York, 1989.

ZAŠTO SE ENERGIJA MORA ŠTEDJETI

Potreba za energijom je svakim danom sve veća

Prema IEA (International Energy Agency), Kina je 2000. godine trošila dva puta manje energije nego USA. Deset godina nakon ovakvog stanja, Kina je uspjela preteći USA u potrošnji energije. Tokom 2010. u Kini je ostvaren utrošak od $2\,256 \times 10^6$ tona nafte – jasno u smislu nafte, kao energetskog ekvivalenta za svu utrošenu energiju (energetski ekvivalent u nafti, obuhvata utrošak energenata poput nafte, plina, uglja, nuklearne energije, te svih obnovljivih izvora energije (vjetar, sunce, voda,...)).

Uz prethodni podatak, odmah se iniciraju i nova pitanja poput: nivoa efikasnosti iskorištenja utrošene energije, nivoa utroška energije po stanovniku....

Energiju štede i oni koji su energetski najbogatiji

Da o sličnim pitanjima razmišljaju čak i u sredinama koje u svjetskim okvirima raspolažu vrlo značajnim energetskim potencijalima, potvrđuje izjava šeika Maktouma III bin Rashid Al Maktoum ((1943 -2006), Emir od Dubaia od 1990-2006) „ Moj djed je imao devu, moj otac je imao devu, ja imam Mercedes, moj sin ima Land Rower, a i njegov sin će vjerovatno imati Land Rower. Ali ako ne budemo racionalni s korištenjem energije, moj praunuk bi mogao opet završiti na devi“.

U tom smislu, prirodno je da se u energetski manje bogatim sredinama, problematika štednje energije sve češće nalazi u fokusu projekcija privrednog razvoja.

O energetskom sektoru u BiH

Energetski sektor u BiH ima značajan razvojni potencijal. BiH jedina u regiji Jugoistočne Evrope ima pozitivan bilans izvoza električne energije. Također, procjenjuje se da BiH ima najveće potencijale i za proizvodnju energije iz obnovljivih izvora (vjetar, solarna energija, energija iz biomase, te geotermalna energija) na Balkanu, koji su ujedno i 30% veći od EU prosjeka. Pored toga, BiH ima i više od šest milijardi tona rezervi uglja, lignita i treseta. BiH uvozi naftu i plin. Mada postoje određeni kapaciteti za preradu nafte u BiH, ona je skoro u potpunosti ovisna o Srbiji, Hrvatskoj, Mađarskoj i Crnoj Gori. Plin se uvozi iz Rusije.

Energetski sektor u BiH smatra se najvećim dugoročnim razvojnim potencijalom BiH. BiH je bogata prirodnim vodenim resursima (jedina je neto izvoznik električne energije na zapadnom Balkanu. U 2009. godini, omjer izvoza i uvoza električne energije u BiH bio je $(+2.991)$ GWh¹, u poređenju sa Hrvatskom (-5.663) GWh¹, Crnom Gorom sa (-1.293) GWh¹, Srbijom sa (-1.316) GWh¹, Makedonijom sa (-1.539) GWh¹ i Albanijom sa (-13932) GWh¹.

Glavni izvori energije u BiH su hidro i termalne elektrane koje obezbjeđuju 62% od ukupne potrošnje primarne energije. Hidro potencijal u zemlji procjenjuje se na 8.000 MW² sa tehnički ostvarivim potencijalom od 6.800 MW i ekonomski ostvarivim potencijalom od 5.800 MW. Proizvodni kapacitet trenutno postojećih elektrana iznosi 2.100 MW, što je 53% od ukupne proizvedene energije. Sa godišnjim hidro energetske potencijalom od 99,256 GWh, BiH se nalazi na 8. mjestu u Evropi³. BiH ima i značajan potencijal u izvorima obnovljive energije (*zelena energija*) kao što su vjetar, solarna energija, biomasa i geotermalna energija. Ovo se naročito odnosi na energetske potencijal vjetra koji se procjenjuje na 600 MW, solarnu energiju sa procjenom od 67.2 PWh⁴, te biomase, uzimajući u obzir bogate šumske resurse³. Potencijal za razvoj sektora obnovljive energije u BiH ne završava se samo na navedenim pokazateljima. Ovaj sektor ima potencijal da obezbijedi osnovu za razvoj zemlje za buduće generacije, zbog dugoročnog strateškog razvoja u EU, zainteresiranosti inostranih investitora, pozitivnog uticaja na druge sektore kao što je npr. turizam, zaštita okoliša, poboljšanje poljoprivrede i energetske efikasnosti (naročito grijanja u domaćinstvima), prilika za zapošljavanje, uvezivanje novih tehnologija, inovativnih malih preduzeća i saradnje privatnog i javnog sektora.

Analizira strukture potrošnje energije prema vrsti energenta pokazuje da na ugalj (crni ugalj i lignit) otpada 45.3%, naftu 21%, ogrijevno drvo 20.5%, dok na ostale energente otpada 13.1% ukupne energetske potrošnje. Domaćinstva su najveći potrošači energije sa oko 52%, industrija i transport 20%, dok usluge i poljoprivreda pojedinačno troše 6% i 2%.

Glavni izvor energije za domaćinstva je ogrijevno drvo sa 57%, električna energija sa 18.7% i ugalj sa 10%. Električna energija kao energetske izvor u industriji prisutna je 42%, nafta 22%, ugalj 16% i prirodni gas 15%. Transportni sektor uglavnom koristi dizel gorivo sa 57.8% dok se benzin koristi 40.4%. U uslužnom sektoru na električnu energiju otpada 64% energetske potrošnje, a u poljoprivredi se najviše koristi dizel gorivo i to 88% .

Legenda

¹ Gigavat-sat

² Megavat

³ Svjetska banka (2008): Energetska studija za BiH, Ministarstvo vanjske trgovine i ekonomskih odnosa, Sarajevo, BiH

⁴ Petavat-sat

23 načina za uštedu energije po John Dysonu

Savjet broj 1 - Kontrolirajte potrošnju električne struje

Kada sam ostao sam sa svojim terijerom Spudom i imao sve potrošače isključene primjetio sam da iako je bio dan moja kuća troši 530W. Krenuo sam u potragu za vampirima koji isisavaju električnu energiju sa mojih priključnih stezaljki na distributivnu mrežu. Uz pomoć jednostavnog mjerača potrošnje električne energije, kojeg sam kupio za 35 eura, registrovao sam da moj računar u potpunom mirovanju troši 100 W, monitor 40 W, a pisac 2 W. Modem za pristup širokopojasnom internetu i bežična mreža trošili su 10 W. Mada u dnevnom boravku nije radio nijedan uređaj, TV u pripravnom stanju trošio je 24 W. Stari radio sat je u gostinjskoj sobi gdje niko nije prespavao zadnjih sedam dana konzumirao 24 W. Zamrzivač u prizemlju gutao je 86 W. Kada sam isključio sve uređaje, osim zamrzivača i modema, nedostajalo je opet 220 W. Ubrzo sam otkrio da grijач za ručnike u kupatilu troši 200 W.

U Danskoj, koja se u većini statistika pojavljuje kao vrlo organizovano društvo, analize su pokazale da 10% energije otpada na 'Fantomске potrošače'. Iza svakih vrata u Njemačkoj neprestano curi 45 W, što uzrokuje ispuštanje 14 milijuna tona ugljičnog dioksida u atmosferu. Kada se počnu kontrolisati uređaji u stanju 'mirovanja' tada shvatite da vaš aparat za kafu i u stanju mirovanja troši 4 W. Stereo uređaj u pripravnom stanju može potrošiti i do 18 W. Zvono na vratima i kada ga ne aktivirate preko svog transformatora troši 2 W.

Kako se može uštedjeti?

Savjet broj 2 - Kada uređaji ne rade, izvucite njihove mrežne kablove iz mrežne utičnice

Potrošnja električne energije u Evropi tokom posljednjih 15 godina je povećana za trećinu, a njena proizvodnja je istovremeno zabilježila pad (EU 2006 godine proizvela 9% manje energije nego deset godina ranije). Već se gotovo 55 % energije za potrebe EU uvozi, pri čemu trećina te energije dolazi iz Rusije.

'Potrebna nam je energetska revolucija', kaže Fatih Birol glavni ekonomist u Međunarodnoj agenciji za energiju. Ako energetska revolucija negdje treba početi, onda je to u vašim domovima. Na kućanstva otpada oko četvrtina evropske energetske potrošnje. Uz već navedene mogućnosti pobrojane u Savjetu broj 1, treba tokom hladnijih dana obući pulover.

Savjet broj 3-Ekološki savjet

Ne postoje deterđenti koji su neštetni za okoliš. Sredstva za izbjeljivanje i sredstva koja spriječavaju gubitak boje nisu biorazgradivi. Na tržištu sve bolji promet imaju 'nježniji proizvodi', što je optimistično jer natrijev perborat onečišćuje vodu, dok natrijev perkaborat nema takve štetne uticaje.

Savjet broj 4

Okrenite termostat na nižu temperaturu, hladnije prostorije su ugodnije i pomažu osobama da budu međusobno bliže.

Savjet broj 5

Prilagodite termostatske ventile radijatora, tako da temperatura u slabije korištenim prostorijama bude niža. Pokućstvo odmaknite od uređaja putem kojih se vrši zagrijavanje. Na svaki zid iza radijatora nalijepite aluminijske folije, kako bi se toplota reflektovala u prostoriju.

Savjet broj 6

Održavajte temperaturu tople vode na oko 60° C. Hladnija voda ugrožava zdravlje, a voda s većom temperaturom od te ustvari je nepotrebno rasipanje energije.

Savjet broj 7

Treba izolirati zidove i tavan kako bi u kući bilo ugodno. Neiskorištene dimnjake treba začepiti novinama, kako bi se smanjio gubitak toplote. Podove je korisno prekriti tepisima.

Savjet broj 8

Isključite osvjetljenje u prostorijama gdje niko ne boravi. Uz to upotreba štednih sijalica omogućava da se uštedi i do 80 % energije, koja bi se anagažovala tokom upotrebe konvencionalnih rasvjetnih tjela. Za uređaje koji troše određenu električnu energiju i u stanju mirovanja, treba izvući iz mrežne utičnice njihove priključne kablove.

Savjet broj 9

Treba provjeriti da li kod vrata i prozora ima ozbiljnijih gubljenja toplote. Ako se registruju takvi gubici, ekonomično je investirati određena sredstva u bolje zaptivanje vrata i prozora.

Savjet broj 10 - uštede energije tokom ljetnih mjeseci.

Svi oni koji tokom zime uz pomoć klime zagrijavaju prostorije do temperature od 22° C, a tokom ljeta te iste prostorije hlade na 18° C, teško mogu opravdati svoje ponašanje.

Savjet broj 11

Zasjenjivanje vanjskih zidova drvećem ili vinovom lozom smanjuje potrebu za radom klima uređaja. Svjetle boje vanjskih zidova odbijaju sunčevu svjetlost, pa imaju slične efekte.

Savjet broj 12

Kako bi kuća bila hladnija jela treba pripremati u mikrotalasnoj pećnici ili na roštilju.

Savjet broj 13

Tokom toplih dana donji bočni prozori na strani u smjeru vjetra i gornji bočni prozori na strani suprotnoj od smjera vjetra stvaraju efekat dimnjaka. Tako se iz unutrašnjosti kuće odvodi vrući zrak.

Savjet broj 14

U kuhu treba grijati samo količinu vode koja nam treba, dakle neracionalno je prepunjavati kuhu.

Savjet broj 15

Lonce i tave treba pokriti poklopcem, kako bi se ubrzalo kuhanje. Posebno je povoljno koristiti ekspres lonac.

Savjet broj 16

Pećnicu treba isključiti desetak minuta prije okončavanja pečenja jer se ona vrlo postupno hladi.

Savjet broj 17

Na stražnjoj strani hladnjaka treba češće očistiti od prašine rebra za odvođenje toplote.

Savjet broj 18

Dilema, da li je ekonomičnije popravljati ili zamjeniti hladnjak, treba biti razrješavana uz uvažavanje podatka da novi hladnjaci koriste i 70 % manje energije u odnosu na one koji su proizvedeni prije 2000. godine. Slično tome nove mašine za posuđe troše oko 25% manje vruće vode od starijih modela. Uglavnom se poštuje pravilo da ako je cijena popravka pola cijene novog uređaja, treba kupiti novi uređaj.

Savjet broj 19

Rublje treba prati samo kada je bubanj pun. Temperatura pranja perilice u mnogim slučajevima može biti i 30° C. Filter sušilice treba redovno čistiti od vlakna, jer onečišćen filter troši za 30% više energije.

Savjet broj 20

Tokom vožnje automobilom, najneekonomičnije su kratke vožnje, odnosno vožnje do tri kilometra. Korisno je izbjegavati nagla ubrzavanja i nagla kočenja vozila. Pritisak u pneumaticima treba redovno provjeravati. Automobili koji koriste plin smanjuju troškove vožnje i do 40%.

Savjet broj 21

Na radnom mjestu, svu elektroničku opremu treba isključiti na kraju radnog vremena. Pri tome, priključne kablove računara, treba izvući iz utičnica. Prenosni računar troši samo 15% energije stonog računara. Dokumente treba pohranjivati u elektroničkoj formi. Neonsku rasvjetu treba isključivati ukoliko napuštate prostoriju gdje je prisutno takvo osvjetljenje na duže od 5 minuta.

Savjet broj 22

Statistika pokazuje da dijete potroši oko 6500 pelena dok ne počne koristiti toalet. Razgradnja jednokratnih pelena je gotovo nemoguća, pa uz trošak za njihovu proizvodnju i trošak njihove kupovine ostaje i ekološki problem. Pelene od organskog pamuka ili bambusa su mnogo racionalniji izbor.

Savjet broj 23

Kuhanje na plin je energetske učinkovitije od kuhanja na električnu struju. Poklopac na posudama skraćuje interval kuhanja i do tri puta. Ekspres lonac troši od 40 do 70% manje energije za obavljanje istog kuhanja.