

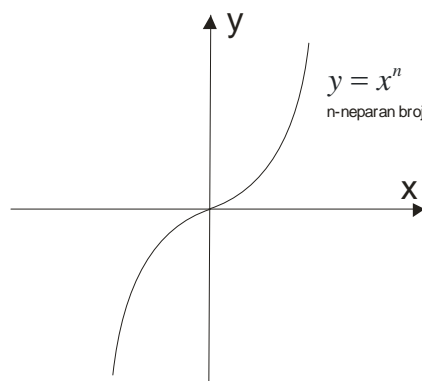
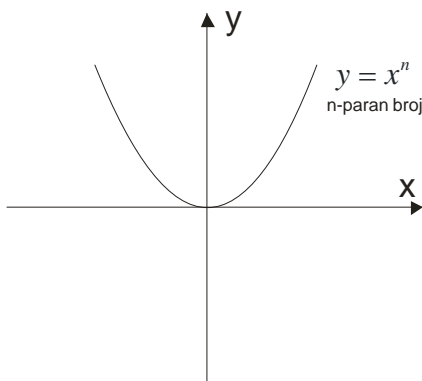
ELEMENTARNE FUNKCIJE – GRAFICI

Osnovne elementarne funkcije su :

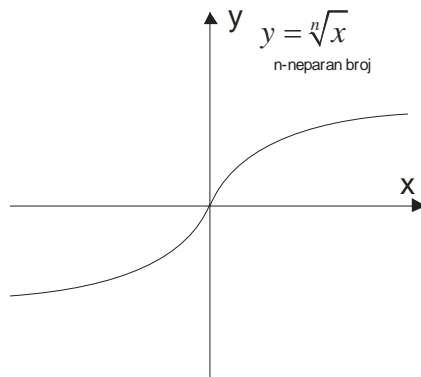
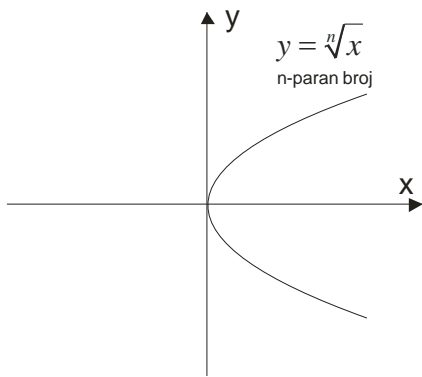
- Konstantne funkcije
- Stepene funkcije
- Eksponencijalne funkcije
- Logaritamske funkcije
- Trigonometrijske funkcije
- Inverzne trigonometrijske funkcije
- Hiperboličke funkcije

Elementarnim funkcijama se nazivaju funkcije koje se mogu zadati pomoću osnovnih elementarnih funkcija i konstanti , pomoću konačno mnogo operacija sabiranja , oduzimanja, množenja, deljenja i kompozicija osnovnih elementarnih funkcija.

Napomena: Ovo nije stroga definicija elementarnih funkcija. Vi tu definiciju naučite kako vam je kaže vaš profesor, mi smo tu da samo malo pojasnimo stvari i podsetimo vas kako izgledaju grafici...



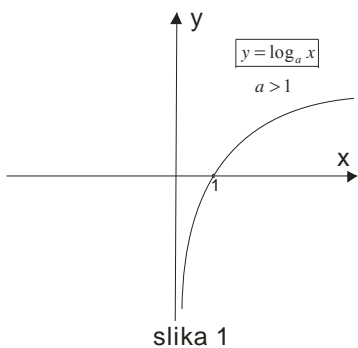
Ovo su grafici stepenih funkcija gde je **izložilac prirodni broj** . Svi grafici izgledaju ovako, sem što se u zavisnosti od izložioca sužavaju ili šire... (pogledajte fajl kvadratna funkcija iz druge godine).



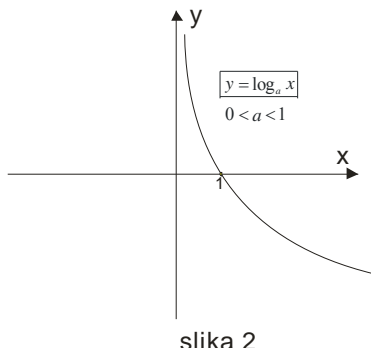
Ovo su grafici stepenih funkcija gde je **izložilac racionalan broj**.

Trebamo zapamtiti da je $y = \sqrt[n]{x}$, kada je n **paran broj** definisana samo za $x \in [0, \infty)$ to jest $x \geq 0$, dok je funkcija

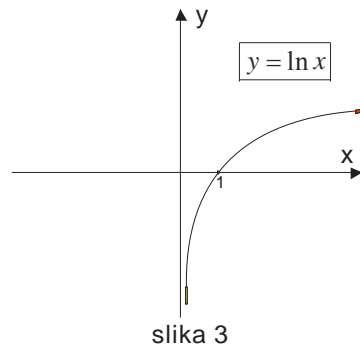
$y = \sqrt[n]{x}$ kada je n **neparan broj** definisana na celom skupu \mathbb{R} , to jest $x \in (-\infty, \infty)$



slika 1



slika 2



slika 3

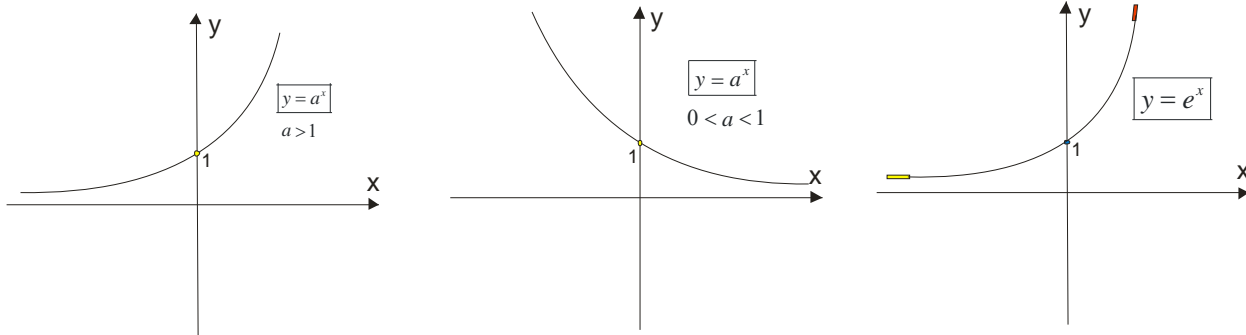
Podsetite se logaritamskih funkcija (fajl iz II godine).

Važno je zapamtiti da su one definisane za vrednosti x koje su veće od nule, to jest $x > 0$.

U graničnim vrednostima funkcija smo rekli da je $\ln 0 = -\infty$. Sa elementarnog grafika to sad možemo i uočiti

(**slika 3.**): kad se x približava 0 sa pozitivne strane funkcija teži beskonačnosti (minus): $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (žuta crta)

A rekli smo i da je $\ln \infty = \infty$. Sa grafika je i to jasno, kad x teži beskonačnosti i funkcija ide u beskonačno, što je na grafiku prikazano crvenom crtom.

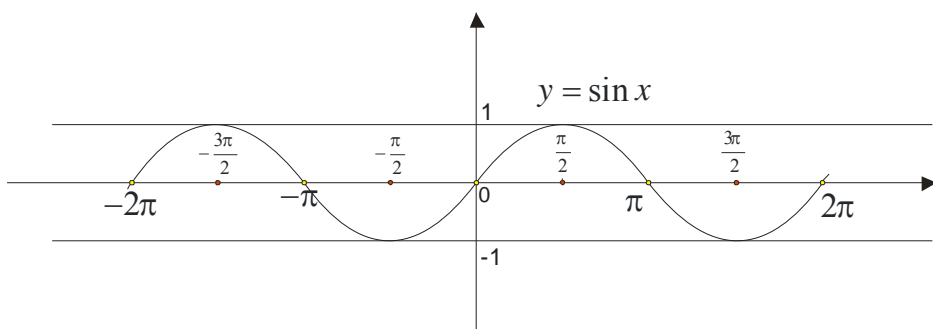


Eksponecijalne funkcije smo takodje obradili u II godini. Važno je da su one svuda definisane: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Kad smo objašnjavali limese, rekli smo da je $e^{-\infty} = 0$. Sada to možemo videti i na grafiku (žuta crta), kad x teži minus beskonačno, funkcija se približava nuli. Dalje smo rekli i da je $e^{\infty} = \infty$ (crvena crta).

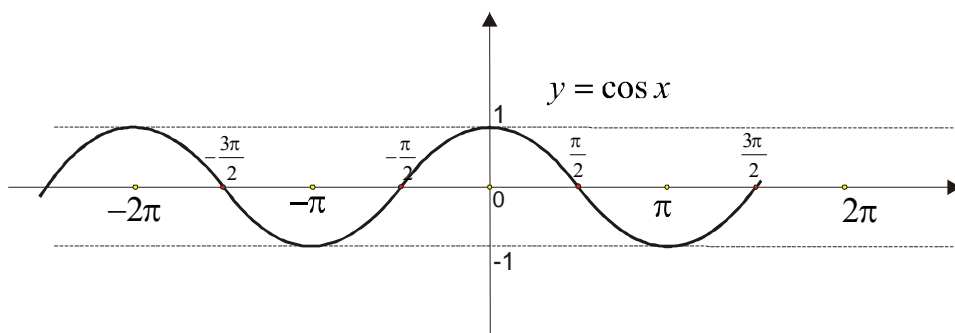
Trigonometrijske funkcije:

Sinusna funkcija $y = \sin x$ je osnovna trigonometrijska funkcija.

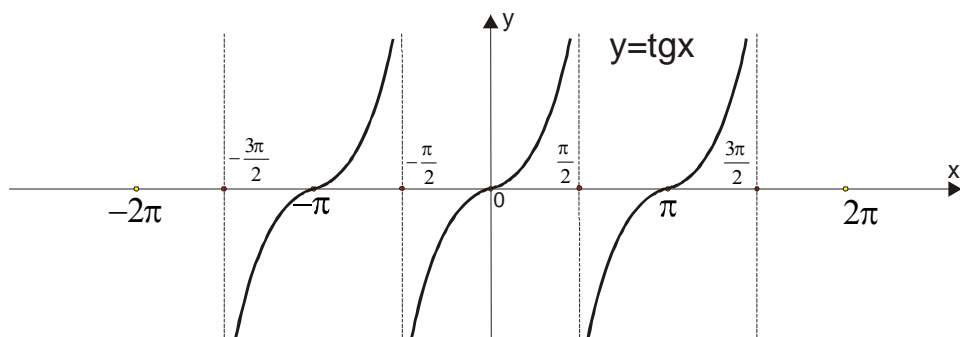


Ostale trigonometrijske funkcije definišemo sa :

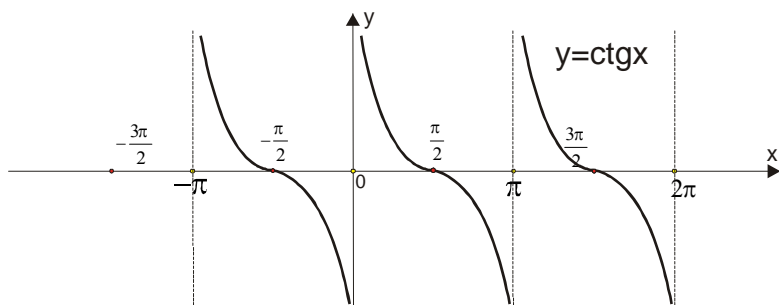
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



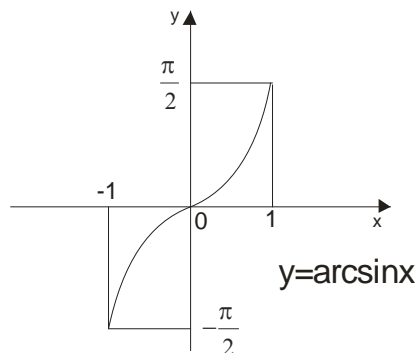
Inverzne trigonometrijske funkcije:

Ove funkcije se nazivaju **ciklometrijske** ili **arkus** funkcije.

i) Arkus sinus

Pazite: funkcija $y = \sin x$ nema inverznu funkciju, jer nije bijekcija!

Ali ako posmatramo njenu restrikciju na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i preslikavanje $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dobijamo arkus sinus funkciju:



Još zapamtite da važi:

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{za } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{za } x \in [-1, 1]$$

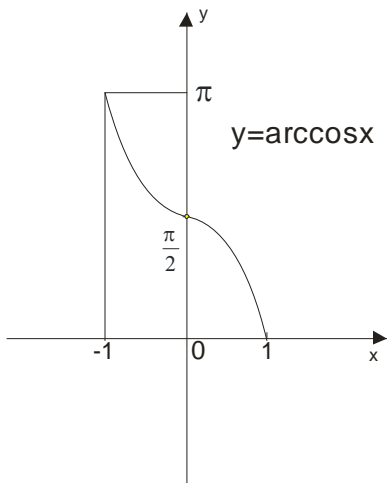
Funkcija je definisana za $x \in [-1, 1]$

Nula funkcije je u $x=0$

ii) Arkus kosinus

I ovde ćemo iz sličnog razloga posmatrati restrikciju funkcije $y = \cos x$ na intervalu $[0, \pi]$.

Posmatramo preslikavanje $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$



Važi:

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{za } x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{za } x \in [-1, 1]$$

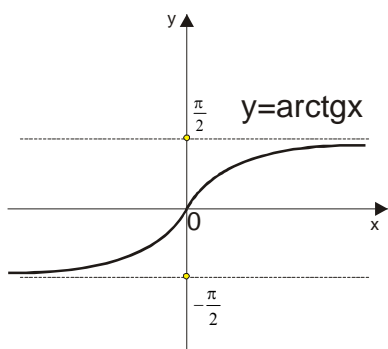
Funkcija je definisana za $x \in [-1, 1]$

Nula funkcije je u $x=1$

iii) Arkus tangens

Posmatrajući restrikciju funkcije $y = \operatorname{tg} x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i preslikavanje $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Dobijamo funkciju arkus tangens.



$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) = x \quad \text{za } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

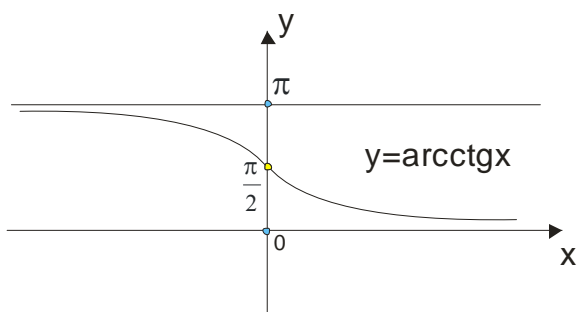
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x) = x \quad \text{za } x \in \mathbb{R}$$

Funkcija je definisana na celom skupu \mathbb{R} .

Nula funkcije je $x=0$.

iv) Arkus kotangens

$$k^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$$



$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x) = x \quad \text{za } x \in [0, \pi]$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x) = x \quad \text{za } x \in \mathbb{R}$$

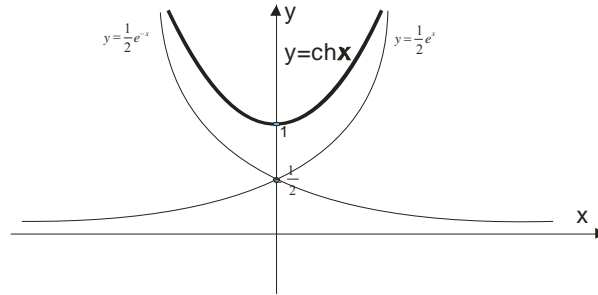
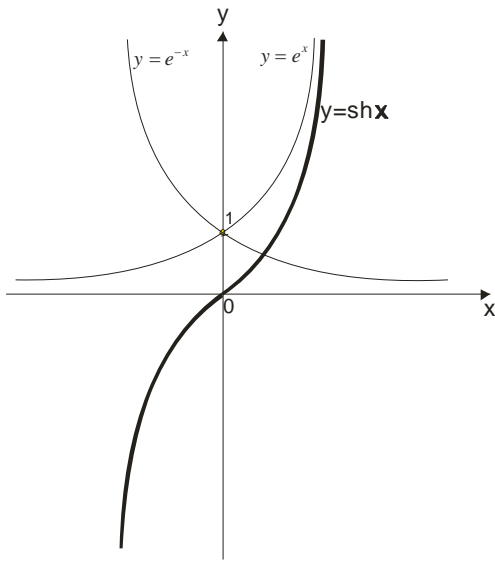
Funkcija je svuda definisana . Nema nule.

Hiperboličke funkcije

To su funkcije : hiperbolički sinus $\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, hiperbolički kosinus $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

hiperbolički tangens $\operatorname{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ i hiperbolički kotangens $\operatorname{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Grafici ovih funkcija se dobijaju iz grafika $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ odnosno pomoću $y = \frac{1}{2}e^x$ i $y = \frac{1}{2}e^{-x}$



Ovde važe identiteti (podseti se adicijonih formula iz II godine...)

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$sh(x + y) = shx \cdot chy + chx \cdot shy$$

$$ch(x + y) = chx \cdot chy + shx \cdot shy$$

$$sh2x = 2 \cdot shx \cdot chx$$

$$ch2x = ch^2 x + sh^2 x$$

hiperbolički tangens i hiperbolički kotangens imaju grafike:

