ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET UNIVERZITETA U SARAJEVU

HUSE FATKIĆ
BEHDŽET MESIHOVIĆ

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE I

(UVOD U VIŠU ANALIZU, DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN REALNIH FUNKCIJA JEDNE REALNE VARIJABILE)

U REDAKCIJI
V. PREDAVAČA VINKA DRAGIČEVIĆA, prof. math.

SARAJEVO, oktobra 1973.

HUSE H. FATKIĆ – BEHDŽET A. MESIHOVIĆ:
ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE I
SARAJEVO, 1973.

1. Redaktor: Vinko DRAGIČEVIĆ, prof. math.
2. Korektor: Huse H. FATKIĆ, prof. math.
3. Tehn. redaktor: Emir PROHIĆ
4. Tehnička obrada: Stjepan BZIK

Izdavač: ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

S A D R Ž A J

DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA JEDNE REALNE PROMJENLJIVE

Glava druga

IZVODI I DIFERENCIJALI FUNKCIJA REALNE PROMJENLJIVE

Glava treća

OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA I NJIHOVE PRIMJENE NA ISPITIVANJE FUNKCIJA

6

Glava četvrta

TAYLOROVA FORMULA I NEKE NJENE PRIMJENE

INTEGRALNI RAČUN FUNKCIJA REALNE PROMJENLJIVE

Glava peta

NEODREDJENI INTEGRAL

P R E D G O V O R

Ova knjiga (zbirka riješenih zadataka iz DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA FUNKCIJA REALNE PROMJENLJIVE) prilagodjena je novom programu nastave iz predmeta MATEMATIKA I za prvu godinu studija na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.

Prvo poglavlje: UVOD U VIŠU REALNU ANALIZU (MATEMATIČKU) napisao je (sastavio) Huse H. Fatkić (koristeći literaturu navedenu na kraju knjige, a posebno knjigu: Huse Fatkić, Uvod u algebru, analitičku geometriju i analizu, Sarajevo, 1972.).

Drugo poglavlje: IZVODI I DIFERENCIJALI FUNKCIJA REALNE PROMJENLJIVE prepisano je iz knjige: zbirka riješenih zadataka iz MATEMATIKE II, I dio, Sarajevo, 1973., od autora Huse H. Fatkića i Behdžeta A. Mesihovića (prepisana je većina zadataka iz prve glave, koju je napisao Behdžet A. Mesihović) s tim što je redaktor Vinko Dragičević uvrstio neke svoje riješene zadatke (označene sa *).

Treće poglavlje prepisano je iz knjige: Huse H. Fatkić - Behdžet A. Mesihović, zbirka riješenih zadataka iz MATEMATIKE II, I dio, Sarajevo, 1973. (prepisana je druga glava, koju je napisao Huse H. Fatkić, s tim što ju je u cjelini pregledao i ukazao na neke štamparske greške redaktor V. Dragičevć).

Četvrto i peto poglavlje prepisano je iz knjige: V. Dragičević-H. Fatkić - B. Mesihović, zbirka riješenih zadataka iz MATEMATIKE II, 2 dio, Sarajevo, 1973. (prepisana je treća i četvrta glava, koje je sastavio Behdžet A. Mesihović, s tim što je Huse H.Fatkić otklonio neke štamparske greške, izvršio korekciju i uvrstio zadatke označene sa +).

Prilikom izbora i izrade zadataka vodilo se računa da zbirka sadrži raznovrsne kvalitetne i instruktivne zadatke u kojima će se osnovni pojmovi iz tretirane oblasti što bolje ilustrovati, čvršće povezati, precizirati, učiniti pristupačnijim i prirodnijim, rasvijetliti njihov značaj i primjenu. Obzirom da je baš "matematički način razmišljanja" u mnogome doprinio burnom razvoju tehničkih nauka, to se nije mogla izbjeći neophodna strogost izvoda i produbljivanje, iako, jasno, studentu tehnike matematika nije cilj već sredstvo. Zato se nastojalo spojiti potrebna strogost izvoda koja je nužna kada se iznosi današnja viša analiza sa zornošću razlaganja tako da čitalac što lakše uoči osnovnu misao svakog tretiranog problema.

Po pravilu, data su detaljna rješenja za prvih nekoliko zadataka iz svake metodske jedinke (koja mogu da posluže kao uzor kako treba, na pismenom ispitu, izraditi zadatak). zatim su za naredne zadatke data rješenja u sažetom obliku i, konačno, dato je nekoliko zadataka samo sa uputstvima ili rezultatima. Zadatke sa rezultatima treba rješavati poslije izrade riješenih zadataka. Riješeni zadaci imaju višestruku korist: čitalac se može da upozna s jednim metodom rješavanja, daje se podsticaj za nalaženje drugog(originalnog) metoda (puta).

Zadatak je potpuno riješen ako je potkrijepljen teoretskim objašnjenjem, ako su ispitane sve mogućnosti, izvršene potrebne diskusije, skicirani neophodni grafici i provjereni dobiveni rezultati, pri čemu treba nastojati da se, ipak sa što manje riječi sve to iskaže (što se postiže korištenjem osnovnih logičkih operacija i osnovnih pojmova iz teorije skupova).

Svaka korisna primjedba biće nam od koristi za poboljšanje drugog izdanja.

Pri završetku rado se sjećam onih koji su mi pomagali pri izradjivanju ili uredjivanju rukopisa. Profesor matematike Vinko Dragičević, v.predavač ETF-a u Sarajevu, pored prethodno navedene uloge redaktora, svojim sugestijama i primjedbama uticao je da knjiga bude što usklađenija sa programom iz Matematike I. Profesor matematike Mr. Mihailo Galić, v.predavač ETF-a u Sarajevu, svojim stavovima o problemima nastave matematike na tehničkim fakultetima, uticao je na mene u tom smislu što sam, prilikom pisanja, više pažnje posvetio specifičnostima nastave matematike na tehn. fakultetima. Saradnici Katedre za matematiku ETF-a u Sarajevu: dipl.el.inž. Mehmed Kantardžić, dipl.fiz. Jasminka Jenčiragić, dipl.fiz. Biljana Gaković, dipl. mat. Milenko Pikula, dipl.el.inž. Fuad Mehmedović, dipl.el.inž. Adnan Kulenović, profesor matematike Rudolf Rajnpreht, dipl.el.inž. Kemo Sokolija, te studenti ETF-a (demonstratori) Vezuv Vugić i Enver Jamak, dali su mi niz sugestija, koje sam koristio prilikom korekcije i redigovanja rukopisa.

Ljubinka Bojić, u želji da ovo djelo što prije izidje, preuzela je na se s velikim marom i razumijevanjem lektiranje teksta, crtanje izvjesnih slika i pisanje, nekih odjeljaka, na stroju.
Osobito hvala zaslužuju takodje: Referent za izdavačku djelatnost ETF-a u Sarajevu Olga Salihović, tehnički urednik Emir Prohić i Stjepan Bzik te osoblje štamparije IRCE-ETF Sarajevo.

Napominjem da sam se prilikom pisanja, rukovodio iskustvom, stečenim: radeći kao profesor matematike na nekim srednjim školama u Sarajevu, kao vanjski saradnik Prirodnomatematičkog fakulteta u Sarajevu i izvodeći vježbe i predavanja iz Matematike I i II na Elektrotehničkom fakultetu u Sarajevu.

U Sarajevu, avgusta 1973.

Huse H. Fatkić

PREGLED OZNAKA (SIMBOLA)

1° Značenje nekih simbola

Simbol	Upotreba	Značenje
$\{\ldots\}$	$\{a,b,c,\ldots\}$	skup(kojeg čine elementi $a,b,c,\ldots$)
$\in$	$x \in S$	x je element od (skupa) S
$\notin$	$x \notin S$	x nije element od S
$\{:\}$ (ili $\{\mid\}$)	$\{x \in S: P(x)\}$	skup svih x iz S koji imaju svojstvo P
$\subseteq$	$A \subseteq S$	A je podskup od S
$\subset$	$A \subset S$	A je pravi podskup od S
$\emptyset$	$\emptyset$	prazan skup
$\cup$	$A \cup B$	unija skupova A i B
$\cap$	$A \cap B$	presjek skupova A i B
$\setminus$	$A \setminus B$	razlika (diferencija) skupova A i B
$\times$	$A \times B$	Dekartov proizvod skupova A i B
$(,)$	(x,y)	uredjen par elemenata x i y tačka sa koordinatama x i y
$\mid$	$a \mid b$	a je djeljivo sa b
$\nmid$	$a \nmid b$	a nije djeljivo sa b
$\circ$	$g \circ f$	kompozicija funkcija f, g (najprije primijeniti f pa onda g)
$\rightarrow$	$f: A \rightarrow B$	funkcija f sa A u B
$\mapsto$	$x \mapsto f(x)$	funkcija koja elementu x pridružuje $f(x)$
$\sim$	$a \sim b$	a ekvivalentno sa b
$\cong$	$A \cong$	skupovi A i B su ekvivalentni
$+, \circ, \circ', \square, \oplus, \otimes$		Oznake za binarne operacije

Simbol	Upotreba	Značenje
$\leqslant$	$a \leqslant b$	a manje ili jednako b
$<$	$a < b$	a je strogo manje od b
$\lvert\ \rvert$	$\lvert x \rvert$	apsolutna veličina realnog broja x
$[\ ]$	$[x]$	najveće cijelo od x, tj. ako je $x=n+r$, gdje je n-cio broj i $0 \leqslant r < 1$, tada je $[x]= n$.
$\Rightarrow$	$(A) \Rightarrow (B)$	znak implikacije. Ako je A onda je i B; iz A slijedi B; A je dovoljno za B; B je potrebno za A
$\Leftrightarrow$	$(A) \Leftrightarrow (B)$	(A) je ekvivalentno sa (B). Ako je (A) onda je i (B) i obratno, ako je (B) onda je i (A).
$\forall$	$(\forall a)\ (a \in S)$	univerzalni kvantifikator za svako a koje je u S.
$\exists$	$(\exists a)\ (a \in S)$	kvantifikator egzistencije. Postoji a u S.
$\wedge$	$x \wedge y$	x i y; simbol konjunkcije
$\vee$	$x \vee y$	x ili y ili oboje; simbol disjunkcije (u slabijem, inkluzivnom smislu)
$\veebar$	$x \veebar y$	x ili y (ne oboje); simbol disjunkcije (u jačem, ekskluzivnom smislu)
	p'	negacija suda p;
	Y', $f'(x)$	oznaka izvoda funkcije Y, f(x);
	A'	komplement skupa.

Simbol	Upotreba	Značenje
$\longrightarrow$		biunivoka korespondencija
$\int$	$\int f(x)dx$	neodredjeni integral funkcije $f(x)$
$\sum$	$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	suma (zbir) elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$
Π	$\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$	proizvod (produkt) $a_1 a_2 \ldots a_n$ elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
f	$f(E)$	skup vrijednosti funkcije f na E, tj. skup svih $f(a)$ za $a \in E$.
f^{-1}	$f^{-1}(E)$	skup svih a takvih da je $f(a) \in E$.
f^{-1}	$f^{-1}(Y)$	inverzna funkcija od f; element koji f prevodi u Y.
	$P_n(x)$	polinom stepena n sa promjenljivom x
$!$	$n!$	proizvod $1.2.3\ldots n$
$!!$	$(2n)!!$	proizvod $2.4.6\ldots 2n$
	$(2n+1)!!$	proizvod $3.5.7\ldots(2n+1)$

b) Slova sa stalnim značenjem

N	skup prirodnih brojeva $1, 2, \ldots$
Z	skup cijelih brojeva $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$
Q	skup racionalnih brojeva
R	skup realnih brojeva
Z_n	skup cijelih brojeva $0, 1, 1, \ldots, n-1$

$(a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0)_n$ prikaz broja $a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p$ u n-arnom brojevnom sistemu

c) Grčki alfabet

A α	alfa	I ι	iota	P	ϱ	ro
B β	beta	K $\varkappa$	kopa	Σ	σ	sigma
Γ γ	gama	Λ λ	lambda	T	τ	tau
Δ δ	delta	M μ	mi	Υ	υ	ipsilon
E ε	epsilon	N ν	ni	Φ	φ	fi
Z ζ	zeta	Ξ ξ	ksi	X	χ	hi
H η	eta	O o	omikron	Ψ	ψ	psi
Θ ϑ	teta	Π π	pi	Ω	ω	omega

UVOD U VIŠU (REALNU) ANALIZU

1. Realni brojevi
2. Pojam funkcije realne promjenljive
3. Brojni nizovi (sljedovi)
4. Granične vrijednosti funkcija
5. Neprekidnost funkcija

Glava prva

UVOD U VIŠU ANALIZU

§ 1.1. REALNI BROJEVI

1.1.1. Racionalni brojevi (prirodni brojevi, razlomci, negativni brojevi, nula, cijeli brojevi i operacije u skupovima tih brojeva)

1. Ako je n prirodan broj dokazati da i izrazi:

a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $\frac{n^3-n}{3}$ $(n \neq 1)$; c) $\frac{n(3n^2+2n-1)}{2}$

izražavaju prirodne brojeve.

Dokaz. a) Brojevi n i $(n+1)$ su dva sukcesivna prirodna broja pa jedan od njih mora biti djeljiv sa 2. Neka je, naprimjer, broj $(n+1)$ djeljiv sa 2 tj. neka je $n+1=2k$; gdje je k prirodan broj, tada $\frac{n(n+1)}{2}=n\cdot k$. Pošto je $n\cdot k$ prirodan broj (kao proizvod dva prirodna broja) to zaključujemo da je stvarno $\frac{n(n+1)}{2}$ prirodan broj.

b) Dati izraz se može napisati u obliku

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Brojevi $n-1$, n i $n+1$ su tri sukcesivna prirodna broja pa jedan od njih mora biti djeljiv sa 3, ako je $n \neq 1$. Neka je (naprimjer) $n-1=3k$ (gdje je k prirodan broj), tada

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{3} = k\cdot n(n+1),$$

tj. dati izraz predstavlja prirodan broj (kao proizvod prirodnih brojeva).

c) 1° Ako se u datom izrazu stavi da je $n = 2k$ (k prirodan broj, tj. n – paran broj) dobija se

$$\frac{2k\cdot[3(2k)^2+2\cdot 2k-1]}{2} = k(12k^2+4k-1).$$

Izraz $12k^2+4k-1$ izražava prirodan broj, jer je $12k^2+4k$ prirodan broj (stepen prirodnog broja je opet prirodan broj, suma prirodnog broja opet prirodan broj) veći od 1 (k je prirodan broj $\geqslant 1$), što znači da je za parno n dati izraz prirodan broj.

2° Za $n = 2k-1$, (k prirodan broj $\geqslant 1$), dati izraz postaje

$$\frac{(2k-1)\,[3\cdot(2k-1)^2+2(2k-1)-1]}{2} = \frac{(2k-1)(12k^2-8k)}{2} =$$

$$= 2k(2k-1)(3k-2).$$

Pošto je $k \geqslant 1$ slijedi da su brojevi $(2k-1)$ i $(3k-2)$ prirodni pa je, dakle, i za neparno n dati izraz prirodan broj.

2. Ako je n ma koji prirodan broj, onda je izraz

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

takođe prirodan broj. Dokazati.

3. Dati su brojevi q i r izrazima:

$$q = (m+p+s)^2; \quad r = (p+s-1)^2; \quad (m, p, s \in N).$$

Koliko se prirodnih brojeva nalazi između r i q?

Rješenje. Uzmimo proizvoljno dva prirodna broja: naprimjer, 6 i 10.

Između brojeva 6 i 10 nalaze se prirodni brojevi 7, 8 i 9, tj. između prirodnih brojeva 6 i 10 nalazi se $10-6-1=3$ prirodna broja. Analogno, između brojeva p i q (koji su prirodni!) nalazi se onoliko prirodnih brojeva koliko iznosi njihova razlika umanjena za 1, tj. nalazi se

$$p-q-1=\left[(m+p+s)^2-(p+s-1)^2\right]-1=m^2+2(p+s)(m+1)-2$$

prirodnih brojeva.

4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je:

$$6^n \equiv 1 \pmod 7 \text{ [1]}.$$

Rješenje. Koristeći relacije

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv b \pmod m \\ c &\equiv d \pmod m \end{aligned}\right\} \Rightarrow a\cdot c \equiv b\cdot d \pmod m \text{ [2]}$$

(također $a+c \equiv b+d \pmod m$) možemo pisati:

$$6^1 \equiv 6 \pmod 7,\quad 6^2 \equiv 1 \pmod 7,\quad 6^3 \equiv 6 \pmod 7,$$
$$6^4 \equiv 1 \pmod 7,\quad 6^5 \equiv 6 \pmod 7,\quad 6^6 \equiv 1 \pmod 7,$$

i općenito, $6^{2k} \equiv 1 \pmod 7$ za $k \in N$. Znači da su brojevi $2, 4, 6, 8, \dots, 2k, \dots$ za koje je $6^n - 1 \equiv 0 \pmod 7$. Ovo je i jedino rješenje jer se svaki prirodni broj n može napisati u obliku $n=2k$ ili $n=2k+1$, gdje je $k \in N$.

Međutim, za $n=2k$, imamo

$$6^n \equiv 6^{2k} \equiv (6^2)^k \equiv 1 \pmod 7, \text{ dok je za } n=2k+1$$
$$6^n \equiv 6^{2k+1} \equiv 6^{2k}\cdot 6 \equiv 6 \pmod 7.$$

---

[1] vidi [2]

[2] Ako su a i $m\,(\neq 0)$ cijeli brojevi, onda relacija $a \equiv b \pmod m$ kazuje da se m sadrži u a sa ostatkom b.

5. Dokazati da je razlika

$$n^5 - n$$

prirodnih brojeva n^5 i n djeljiva sa 10, tj. da brojevi n i n^5 imaju na mjestu jedinica istu cifru.

6. Neka su p i $(2^p - 1)$ prosti brojevi.
Dokazati da je broj oblika $2^{p-1}(2^p-1)$ prirodni broj n čiji prirodni djelioci, osim samoga n, imaju sumu n, [3].
Dokaz. Prema uslovu zadatka, broj $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ ima samo slijedeće prirodne djelioce $(\neq n)$: $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots 2^{p-2}, 1\cdot(2^p-1), 2\cdot(2^p-1), 3\cdot(2^p-1), \ldots, 2^{p-2}\cdot(2^p-1)$. Njihova suma je:

$$s = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{p-2}+2^{p-1}+1\cdot(2^p-1)+2\cdot(2^p-1)+$$
$$+2^2(2^p-1)+\cdots+2^{p-2}(2^p-1) = 2^{p-1}+2^p+2^{p+1}+\cdots+2^{2p-2} =$$
$$= 2^{p-1}(1+2+2^2+\cdots+2^{p-1}) = 2^{p-1}\cdot\frac{2^p-1}{2-1} = 2^{p-1}\cdot(2^p-1) = n,$$

tj. suma prirodnih djelilaca broja

$$n = 2^{p-1}(2^p-1),$$ osim samoga n, je jednaka, upravo, broju n.

Napomena. Može se dokazati i obratna tvrdnja za parne prirodne brojeve (neka čitalac pokuša to dokazati, tj. neka pokuša dokazati tvrdnju: Svaki paran prirodan broj n, čiji prirodni djelioci, osim samoga n, imaju sumu n, ima oblik $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$, gdje su p i (2^p-1) prosti brojevi.).

7. Odrediti sumu prirodnih djelilaca broja 220, osim broja 220. To isto učiniti za broj 284 i uočiti izvjesno svojstvo brojeva 220 i 284.
Rješenje. Prirodni djelioci broja 220 jesu 1, 2, 4, 5, 10, 20, 11, 22, 44, 55, 110 $(220 = 2\cdot 110 = 2\cdot 2\cdot 55 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 11)$;

njihova je suma jednaka 284. Djelioci broja 284 jesu 1, 2, 4, 71, 142, $(284 = 2 \cdot 2 \cdot 71)$; njihova je suma jednaka 220. Primjećujemo da su brojevi 220 i 284 dva broja od kojih je svaki jednak sumi prirodnih djelilaca drugog,[4].

8. Dokazati da je skup prirodnih brojeva beskonačan.

Dokaz. Uočimo ma kako velik prirodan broj n. Od tog uočenog broja n prelazimo na broj iza njega $n+1$ dodavanjem jedinice; istim postupkom prelazimo i od $n+1$ na $n+2$. Budući da nam se čini da se radi uvijek o istoj operaciji dodavanja jedinice koja se vrši uz iste uslove, ne vidimo razloga da se taj postupak obustavi i mi ga nastavljamo napredujući uvijek u istom smislu od prirodnog broja do prirodnog broja izgrađujući uvijek dalje niz tih brojeva. Radi neiscrpne nedovršenosti toga niza (slijeda) označujemo ga kao beskonačan (niz) i kažemo da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, izraz koji ne znači ništa drugo nego da iza svakoga prirodnog broja dolazi prirodan broj ili da ih (prirodnih brojeva) ima više od n, ma bio n kakogod velik prirodan broj.

---

[3] Prirodan broj n čiji prirodni djelioci, osim samoga n, imaju sumu n, naziva se savršen broj (na primjer, brojevi 6, 28, 496 su savršeni). U današnje vrijeme poznato je 20 parnih s. brojeva. Međutim, nije riješeno pitanje o tome da li je skup s. brojeva konačan ili beskonačan. Nepoznato je također da li postoje neparni savršeni brojevi (ako postoje, vjerovatno su veoma veliki). Najveći savršen broj, poznat do 1962 god., jeste $2^{4422} \cdot (2^{4423} - 1)$ i njegova savršenost ustanovljena je pomoću elektronskih računara.

[4] Takvi brojevi nazivaju se prijateljski (drugarski) brojevi. Do danas je nepoznato da li je skup prijateljskih brojeva konačan ili beskonačan.

9. Dokazati da je skup racionalnih brojeva gust, tj. da između svaka dva racionalna broja r_1 i r_2 ima uvijek bar jedan racionalan broj (što ima za posljedicu da između svaka dva racionalna broja leži beskonačno mnogo racionalnih brojeva).

Dokaz. Neka je na primjer, $r_1 < r_2$; $r_1, r_2 \in Q$. Tada je na primjer aritmetička sredina $\frac{r_1 + r_2}{2}$ broj sa traženim svojstvom, tj. $r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2$; ona je racionalan broj, jer je izvedena zbrajanjem i dijeljenjem racionalnih brojeva, a leži između r_1 i r_2, jer iz $r_1 < r_2$ po zakonu monotonije (iz $b > c \Rightarrow a + b > a + c$) da je $2r_1 < r_1 + r_2$, tj. $r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2}$, i slično da je $r_1 + r_2 < 2r_2$, dakle vrijedi uvijek :

$$r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2 .$$

Napomena. Skup samih cijelih brojeva vlada se protivno; između bilo koja dva cijela broja ima uvijek samo konačan broj cijelih brojeva, naprose između dva susjedna cijela broja nema nijednog elementa toga skupa. Skup cijelih brojeva nije gust, nego diskretan skup.

Premda je skup racionalnih brojeva gust, možemo ipak racionalne brojeve svrstati u niz, ako se ne obaziremo na njihov poredak, tj. skup racionalnih brojeva, uza svu svoju gustoću, pripada među izbrojive skupove, (pokušati pronaći neki niz koji sadrži sve racionalne brojeve!).

10. Dokazati da je skup p svih prostih brojeva beskonačan, [5].

Dokaz. Izvešću indirektan dokaz (reductio ad absurdum), dokaz koji se oslanja na logičke principe protuvrječnosti i isključenje trećeg.

Pretpostavimo da je skup p svih prostih brojeva konačan, tada možemo obrazovati proizvod svih prostih brojeva $2, 3, 5, \ldots, p$

[5] Ova tvrdnja poznata je kao Euklidova teorema.

pa postoji broj

$$k = (2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p) + 1.$$

Broj k je prost ili složen. On je očigledno veći od svakog od brojeva iz skupa $P = \{2, 3, 5, \ldots, p\}$, dakle različit od njih. Pa ako je on prost, to znači da izvan skupa P ima bar još jedan prost broj, suprotno pretpostavci da je P skup svih prostih brojeva. Broj k očigledno nije djeljiv ni sa jednim prostim brojem iz P (ostatak je uvijek 1); pa ako je on složen, onda je on djeljiv sa nekim drugim brojem izvan P. Dakle opet postoji bar jedan prost broj izvan skupa P, što je opet u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle stav – skup P svih prostih brojeva je konačan – neistinit je, prema tome istinita je tvrdnja zadatka.

11. Najmanji broj m uzajamno prost sa svakim od brojeva $1, 2, 3, \ldots, n$ jeste prost broj. Dokazati.

12. Ako su članovi aritmetičke progresije $a_1, a_2, \ldots a_n$ uzajamno prosti sa n; dokazati da n i d nisu uzajamno prosti (d je diferencija progresije o kojoj je riječ).

13. Dokazati da je broj $2222^{5555} + 5555^{2222}$ djeljiv sa 7.

14. Za cijele brojeve važe ovi stavovi:

a) Ako je zbir dva cijela broja paran broj, njihova razlika je paran broj.

b) Ako je zbir dva cijela broja neparan broj, njihova razlika je neparan broj.

c) Ako je zbir dva cijela broja neparan broj, njihov proizvod je paran broj.

d) Ako je proizvod tri cijela broja neparan broj, njihozbir je također neparan broj.

Dokazati:

Dokaz. Dokazi su jednostavni i slični; dokazaćemo tvrdnju pod d). Neka su a, b, c tri cijela broja takva da je

$a \cdot b \cdot c = 2m + 1$, gdje je m cio broj, tada su

a, b, c neparni brojevi, tj.

$$\left.\begin{aligned} a &= 2p + 1 \\ b &= 2q + 1 \\ c &= 2r + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a+b+c = 2(p+q+r)+3 =$$

$$= 2(p+q+r+1) + 1 \text{ (neparan broj).}$$

15. Dokazati da zbir kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva ne može biti potpun kvadrat.

Dokaz. Neka su ti brojevi $a-2$, $a-1$, $a+1$, $a+2$, tada je

$$A = (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 5(a^2+2)$$

Pošto $5 \mid A$, da bi A bio potpun kvadrat mora $5 \mid (a^2+2)$. Međutim, kvadrati svih cijelih brojeva završavaju sa 1, 4, 9, 6, 5 i 0 pa kvadrat cijelog broja a uvećan za dva ne daje broj koji završava sa 5. Prema tome A nije potpun kvadrat.

16. Dokazati da broj $a^2 - 8$ nije djeljiv sa 5 ako je a cio broj.

17. Pokazati da se razlomak

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}, \quad (n \in N)$$

ne može skratiti (brojilac i imenilac razlomka nemaju zajedničkih djelilaca različitih od 1).

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da se razlomak (dati) može skratiti. U tom slučaju bi morali postojati prirodni brojevi p, q i r takvi da je

$$21n+4=pq\,,\quad (p\neq 1,\ p\in N)$$
$$14n+3=pr\,,$$

odnosno, stavljajući da je $7n+1=s$,

$$3s+1=pq\,,\quad 2s+1=pr\,.$$

Odavde slijedi da je $s=p(q-r)$, tj.

$$r=\frac{2pq+1}{3p}\,.$$

Pošto $r\in N$ to bi izraz $(2pq+1)$ morao biti djeljiv i sa 3 i sa p, ali izraz $2pq+1=p\left(2q+\frac{1}{p}\right)$ nije djeljiv sa p za $p\neq 1$, $p\in N$, jer $2q+\frac{1}{p}$ nije, u tom slučaju, prirodan broj. Dobivena kontradikcija potvrđuje tačnost tvrdnje datog zadatka.

18. Neka je $r=\frac{m}{n}$ $(m\in Z,\ n\in N)$, pri čemu su m, n relativno prosti. Tada je r decimalan broj, ako i samo ako je $n=2^p\cdot 5^q$, gdje su $p, q\geq 0$ cijeli brojevi. Dokazati.

Dokaz. 1° Neka je dato r decimalan broj, tj. neka ima oblik $r=\frac{s}{10^k}$ $(k\in N,\ s\in Z)$. Tvrdimo da je $n=2^p\cdot 5^q$, gdje su $p, q\geq 0$ cijeli brojevi.

Stvarno, $\frac{m}{n}=\frac{s}{10^k}\left(=\frac{s}{2^k\cdot 5^k}\right)$ pa s može imati zajedničke djelioce sa nazivnikom 10^k samo brojeve oblika 2^t ili 5^u; $t, u\geq 0$ cijeli brojevi.

Označimo li $k-t=p$, $k-u=q$, $s=m'\cdot 2^t\cdot 5^u$ imamo (dijeleći brojnik sa nazivnikom):

$$\frac{m}{n}=\frac{m'}{2^p\cdot 5^q},$$

otkuda, zbog toga što su m i n relativno prosti, m' i $2^p\cdot 5^q$ relativno prosti, slijedi

$$n=2^p\cdot 5^q;\quad p,q\geqslant 0 \text{ cijeli brojevi.}$$

2° Obratno, neka n ima oblik $n=2^p\cdot 5^q$; $p,q\geqslant 0$ cijeli brojevi i neka je $r=\frac{m}{n}$ $(m\in Z,\ n\in N)$, pri čemu su m i n relativno prosti. Dokažimo da je r decimalan broj.

Stvarno,

$$r=\frac{m}{n}=\frac{m}{2^p\cdot 5^q}=\frac{m\cdot 2^q\cdot 5^p}{2^p\cdot 2^q\cdot 5^p\cdot 5^q}=\frac{m\cdot 2^q\cdot 5^p}{2^{p+q}\cdot 5^{p+q}}=$$

$$=\frac{s}{10^k}\quad (s\in Z,\ k\in N);$$

gdje smo sa k označili broj $p+q$ (ili $p+q+t$, $(t\in N)$ u slučaju da su $p=0$ i $q=0$), a sa s smo označili broj $m\cdot 2^q\cdot 5^p$ (ili $m\cdot 2^q\cdot 5^p\cdot 10^t$). Otuda slijedi da je r decimalan broj.

Napomena. Da li je $\frac{1}{3}$ decimalan broj i kako se racionalan broj pretvara u decimalan broj?

1.1.2. Iracionalni brojevi (zlatni rez i nesumjerljivost dužina, beskonačni neprekinuti razlomci, predočivanje realnih brojeva i operacije u skupu realnih brojeva)

19 Zadan je trougao sa katetama $\frac{1}{2}$ i 1 (pravougli trougao). Katetu dužine 1 podijeliti na dva dijela po zlatnoj podjeli (zlatnom rezu – presjeku).

Rješenje. Zlatna podjela [6] duži je podjela duži na dva dijela tako da je veći dio srednja geometrijska proporcionala (geometrijska sredina) između manjeg dijela i cijele duži, tj. u z. p. duži važi proporcija.

$$a : x = x : (a - x),$$

gdje je a cijela duž, x – veći od dva dijela na koje je duž podijeljena.

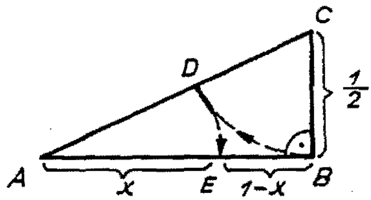
Ako se riješi jednačina $x^2 + ax - a^2 = 0$,

dobija se $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}62\,a$ (s tačnošću do $0{,}01\,a$).

U našem slučaju je $a = 1$, pa imamo

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Pošto je hipotenuza $c = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$, to se duž x konstruiše ovako: iz krajnje tačke C duži $BC = c = \frac{\sqrt{5}}{2}$ odsijeca se $CD = \frac{1}{2}$ na $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Sada će duž $AE = AD$ predstavljati traženu duž x.



20. Predstaviti u obliku neprekinutog (verižnog), [7] razlomka racionalan broj $\frac{35}{99}$, broj $\sqrt{2}$ i broj π.

---

6) z. podjela se često sreće, uporedo s drugim proporcijama, u tehnici (posebno arhitekturi) i umjetnosti.

7) Verižnim razlomkom se naziva izraz oblika

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{1}{a_n + \cdots}}},$$

gdje je a_0 bilo koji cio broj, $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ – prirodni brojevi, koji se nazivaju nepotpuni količnici v. r.

Rješenje. Najprije je

$$\frac{35}{99}=\frac{1}{\frac{99}{35}}=\frac{1}{2+\frac{29}{35}}\ ;\ \text{dalje je}\ \frac{29}{35}=\frac{1}{\frac{35}{29}}=\frac{1}{1+\frac{6}{29}},$$

$$\frac{6}{29}=\frac{1}{\frac{29}{6}}=\frac{1}{4+\frac{5}{6}},\quad \frac{5}{6}=\frac{1}{\frac{6}{5}}=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}\ ;\ \text{dakle je :}$$

$$\frac{35}{99}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}.$$

Približni razlomci broja $\frac{35}{99}$ su redom $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{6}{17}$ i svaki može služiti kao približna vrijednost razlomka $\frac{35}{99}$.

Ako broj (iracionalan) $\sqrt{2}$ predočimo verižnim razlomkom (beskonačnim) dobićemo

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\ddots}{\ddots\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

Ovaj razlomak je periodičan verižni razlomak (koji nastaju razlaganjem kvadratne iracionalnosti).

Ako broj $\pi=3,14159=3+\frac{14159}{100000}=3+\cfrac{1}{\frac{100000}{14159}}$ predočimo neprekinutim razlomkom, dobivamo:

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cdots}}}\ ;$$

približne su vrijednosti $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$; $3+\frac{15}{106}$ itd.

21. Dokazati da su brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[7]{8}$, $\sqrt[3]{2}$, $\log_3 8$ iracionalni.

Dokaz. Dokazi su slični (ako se koristi osnovna aritmetička teorema). Zato ćemo dokazati tvrdnju zadatka samo za brojeve $\sqrt{3}$ i $\log_3 8$.

1° Pretpostavimo suprotno tj. $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$; gdje su p i q relativno prosti prirodni brojevi.

Kvadriranjem, dobivamo

$$\frac{p^2}{q^2} = 3\text{, odnosno } p^2 = 3q^2.$$

Odavde se vidi da je p djeljivo sa 3 tj. da je $p = 3k$, $k \in N$. Na osnovu toga je $9k^2 = 3q^2$; tj. $q^2 = 3k^2$, pa zaključujemo da je i q djeljiv sa 3, što je nemoguće (brojevi p i q, po pretpostavci, su relativno prosti pa ne mogu biti oba djeljiva sa 3).

Dobivena kontradikcija potvrđuje da je stvarno $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

2° Pretpostavimo suprotno tj. $\log_3 8 = \frac{p}{q}$ gdje su p i q relativno prosti prirodni brojevi (jer $\log_3 8 > 0$, pa bi $\log_3 8$ mogao biti, eventualno samo pozitivan racionalan broj - razlomak u kojem su brojnik i imenilac prirodni brojevi). Prema definiciji logaritma broja, imamo

$$\left(3^{\frac{p}{q}} = 8\right) \Rightarrow \left(3^p = 8^q\right) \Rightarrow \left(3^p = 2^{3q}\right).$$

Dakle, dobili smo protivrječnost, jer je

$$3^p = \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{p} \neq \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{3q},$$

što znači da je stvarno $\log_3 8$ iracionalan broj.

22. Dokazati da je izraz

$$\sqrt[3]{5\cdot\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\cdot\sqrt{2}-7} \quad \text{racionalan broj,}$$

a izraz

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$ iracionalan broj.

Rješenje. 1° Ako izraz

$$A=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

kubiramo (digne na kub), imamo

$$A^3=(5\sqrt{2}+7)-3\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}+$$

3

$$+3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2-(5\sqrt{2}-7)=$$

$$=14-3\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\,(\underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}}_{A})=$$

$$=14-3\sqrt[3]{50-49}\cdot A=14-3A \quad \text{ili}$$

$$A^3+3A-14=0.$$

Grupisanjem članova dobiveni polinom se rastavlja na činioce u obliku

$$(A-2)(A^2+2A+7)=0 \quad /(\text{naime, } A^3+3A-14=$$
$$=A^3-8+3A-6=(A-2)(A^2+2A+4)+3(A-2)=$$
$$=(A-2)(A^2+2A+7)/.$$

gornja jednačina je zadovoljena za:

$$A-2=0$$
$$A^2+2A+7=0.$$

Iz prve jednačine izlazi da $A=2$, dok druga jednačina nema rješenja u skupu realnih brojeva (rješenja su kompleksna). Prema tome dati izraz je racionalan broj (jednak je broju 2, a 2 je racionalan broj).

Napomena. Do rješenja se moglo doći ako se potkorijene veličine izraza A transformišu na sljedeći način.

$$A=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=$$

$$=1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=2.$$

2° Dokažimo najprije tzv. Lagranževe identitete

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Ako izraz kvadriramo, dobivamo

$$a\pm\sqrt{b}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}}=$$

$$=a\pm\sqrt{b}$$

(naravno, uz pretpostavku da su potkorjeni izrazi nenegativni). Korištenjem L. identiteta, imamo

$$A=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}+$$

$$+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{\frac{3}{2}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{6}-3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}.$$

Dakle, izraz A je stvarno iracionalan broj.

23. Dokazati: 1° da je $3n^2+\sqrt{n}$ iracionalan broj, ako $n\in N$ nije kvadrat nekog cijelog broja, 2° da je $\dfrac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj ako je $a>0$, $b>0$ i $a^2+b^2=6ab$.

$\Downarrow$ $\downarrow$

$a=3b\pm 2b\sqrt{2}$ $=\dots=\pm\sqrt{2}$

24. Dokazati da je $\sqrt[m]{n}$ cijeli ili iracionalan broj ako je $m, n \in N$.

1.1.3. Euklidov algoritam i sistemi računanja (brojni sistemi – numeracija)

25. Odrediti najveći zajednički djelitelj brojeva 1981 i 378.
Rješenje. Izvršimo sukcesivna dijeljenja tj. primjenimo tzv. Euklidov algoritam za nalaženje najvećeg zajedničkog djelitelja (djelioca – činioca, mjere) cijelih brojeva, (a takođe i dva polinoma istog argumenta):

$$\begin{aligned} 1981 &= 378 \cdot 5 + 91, \\ 378 &= 91 \cdot 4 + 14, \\ 91 &= 14 \cdot 6 + 7, \\ 14 &= 7 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Posljednji različit od nule ostatak 7 je upravo najveći zajednički djelitelj brojeva 1981 i 378, tj. $D(1981, 378) = 7$.

26. Odrediti najveći zajednički djelitelj brojeva 121 i 35.
Rezultat. $D(121, 35) = 1$.

27. Dokazati da za svaki prirodni broj a postoje i jednoznačno su određeni pozitivni cijeli brojevi $p, a_0, a_1, \ldots, a_p$ takvi da je

$$(T) \begin{cases} a = a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p; \ 0 \leq a_i < n \ (\forall i = 0, 1, \ldots, p-1) \\ 1 \leq a_p < n. \end{cases}$$

Dokaz. Sa $\bar{N}$ označimo sve prirodne brojeve za koje vrijedi tvrdnja zadatka. Broj 1 ima oblik (T) za $p = 0$ i $a_0 = 1$ te je $1 \in \bar{N}$. Dokažimo da $a \in \bar{N} \Rightarrow (a+1) \in \bar{N}$.

Stvarno, neka broj a ima oblik (T), tada broj $(a+1)$ ima jedan od oblika

$$(1+a_0)+a_1n+\cdots+a_pn^p,\ (1+a_0<n);$$
$$(1+a_1)n+\cdots+a_pn^p,\ (1+a_0=n,\ 1+a_1<n);$$
$$(1+a_2)n^2+\cdots+a_pn^p,\ (1+a_0=1+a_1=n,\ 1+a_2<n);$$
$$\vdots$$
$$(1+a_p)n^p,\ (1+a_0=1+a_1=\cdots=1+a_{p-1}=n,\ 1+a_p<n);$$
$$n^{p+1},\ (1+a_0=\cdots=1+a_p=n).$$

Dokazali smo sljedeće: ako prirodni broj $a>1$ ima oblik (T) onda i broj $(a+1)$ ima oblik (T), a pošto 1 ima oblik (T) to, po principu matematičke indukcije, svaki prirodni broj ima bar jedan prikaz oblika (T), (tj. $\bar{N}=N$).

Dokažimo još jedinstvenost prikaza (T). Ako bi broj a imao neki drugi prikaz, recimo

$$a=b_0+b_1n+\cdots+b_q\cdot n^q;\ b_i\in\{0,1,\cdots(n-1)\},\ b_q\neq 0.$$

Tada bi, izjednačujući desnu stranu posljednje jednakosti sa desnom stranom jednakosti u (T), bilo

$$(a_0-b_0)\ i\ (b_0-a_0)\ \text{djeljivo sa } n.$$

Međutim, bar jedan od tih brojeva je pozitivan i manji od n, tj. $a_0=b_0$. Sada bi moralo biti

$$a_1+a_2n+\cdots+a_p\cdot n^p=b_1+\cdots+b_q\cdot n^q$$

odakle na isti način dobivamo $a_1=b_1$. Tim postupkom dobivamo $p=q$ i $a_i=b_i$ $(i=0,1,\cdots,p)$. Dakle, dokazali smo jedinstvenost prikaza (T) i time je tvrdnja zadatka dokazana.

Napomena. Umjesto (T) pišemo

$$a=(a_pa_{p-1}\cdots a_1a_0)_n.$$

Brojevi $a_0, \ldots, a_p$ zovu se cifre ili znamenke broja a i kaže se da je a napisan u n-cifarskom brojevnom sistemu; n se zove baza sistema. Sistem je dijadski (binarni) ako je $n=1+1=2$, decimalni ako je $n=9+1$. U decimalnom sistemu pišemo

$$a = a_p a_{p-1} \cdots a_1 a_0 .$$

Specijalno $n = 0 + 1 \cdot n$, $n^2 = 0 + 0 \cdot n + 1 \cdot n^2$ itd. pokazuje da je

$n = (10)_n$, $n^2 = (100)_n$ itd.

Broj 10 zove se deset, 100 sto itd. Sada je 403562 ime broja.

$$4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2 .$$

Na osnovu tvrdnje u ovom zadatku i činjenice $n^p > p$, $\forall p \in N$, možemo svaki prirodni broj a imenovati (numerisati) pomoću imena brojeva iz skupa $\{0, 1, 2, \cdots, (n-1)\}$. Mogućnost imenovanja svakog prirodnog (dakle i cijelog) broja spada među najpraktičnije i najvažnije pronalaske čovječanstva, to više, jer se i računske operacije mogu vršiti pomoću cifarskog zapisa u svakom cifarskom sistemu.

Neka je

$$a = a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p$$

$$b = b_0 + b_1 n + \cdots + b_q n^q, \quad p < q$$

tada je

$$a + b = d_0 + (c_0 + d_1) n + (c_1 + d_2) n^2 + \cdots +$$

$$+ (c_{p-1} + d_p) n^p + (c_p + b_{p+1}) n^{p+1} + b_{p+2} n^{p+2} + \cdots + b_q n^q ,$$

gdje je

$$a_i + b_i = c_i n + d_i \quad (i = 0, 1, \cdots, p)$$

$0 \leq d_i < n-1$, a c_i je nula ili 1.

Analogno se vidi da se proizvod ab svodi na množenje ostatka $a_i b_j$ što se može učiniti pomoću zbrajanja elemenata iz $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Radi toga se za dato n načine tablice za zbrajanje i množenje.

Evo takvih tablica za $n=8=7+1$:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	0	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Elektronski računari računaju u dijadskom (osnova $n=2$) i u oktalnom ($n=8$), a mi u dekadnom ($n=10$)[8]. Prema tome brojeve treba napisati u dijadskom sistemu, stroj s njima računa, daje rezultat. Taj rezultat pretvaramo u dekadski sistem i znamo o kojem se broju radi.

Do algoritma za prelaz iz dijadskog na decimalni i sa decimalnog na dijadski brojevni sistem možemo doći ovako: Dijeljenje polinoma $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $a_n \neq 0$ s polinomom prvog stepena $(x-2)$ svodi se na određivanje brojeva $b_0, b_1, \dots, \dots, b_n$ takvih da je $f(x)=b_0+(x-2)(b_1+b_2x+\cdots+b_nx^{n-1})$ $\forall x \in R$.

[8]. Istorijski prvi brojevni sistem je bio seksagezimalni sistem starih Vavilonaca, koji je nastao ($n=60$) 2000 godina prije naše ere. Tragovi ovog sistema sačuvali su se do danas. Čas se dijeli na 60 minuta, krug na 360 stepeni.

Odavde množenjem i uspoređivanjem dolazimo do ovog tzv. Hornerovog algoritma

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + 2b_n$$

$$\vdots$$

$$b_1 = a_1 + 2b_2$$

$$b_0 = a_0 + 2b_1 = a_0 + 2a_1 + \cdots + 2^n a_n$$

ili

$$b_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}, \quad b_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}, \ldots$$

Ako je $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_2$ dijadski prikaz prirodnog broja a $(a_i = 0 \text{ ili } 1)$, onda je b_0 dekadski prikaz toga istog broja a.

Napomenimo, da se svaki realan broj može na jedan i, sa određenim izuzetkom, jedini način predstaviti kao sistemski razlomak sa datom osnovom, tj. za $(\forall r \in R)$ $(k$ – osnova$)$

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k^i} + b \qquad a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\} \text{ za } \forall i, \ b \text{ cio broj.}$$

28. U decimalnom sistemu napisati broj $(101101)_2$.

Rješenje. Koristeći algoritam za prelaz sa dijadskog na decimalni prikaz broja, dobivamo: $(101101)_2 = 45$.

k	a_k	b_k
5	1	1
4	0	$0 + 2 \cdot 1 = 2$
3	1	$1 + 2 \cdot 2 = 5$
2	1	$1 + 2 \cdot 5 = 11$
1	0	$0 + 2 \cdot 11 = 22$
0	1	$1 + 2 \cdot 22 = 45$

29. U dijadskom sistemu napisati broj 173.

Rješenje. Iskoristićemo algoritam (naveden u napomeni uz zadatak 27.).

$$b_1=\frac{b_0-a_0}{2},\quad b_2=\frac{b_1-a_1}{2},\ldots,b_{k+1}=\frac{b_k-a_k}{2},\ldots$$

Nama je samo poznato $b_0=173$, ali broj a_0 je lako odrediti iz b_0, jer je $a_0=0$, ako je b_0 paran i $a_0=1$, ako je b_0 neparan. Općenito je $a_k=0$, ako je b_k paran i $a_k=1$, ako je b_k neparan. Algoritam se prekida kada dođemo do $b_{m+1}=0$, jer je tada $a_{m+1}=0$, pa i $b_{m+2}=0$ itd. Važno je uočiti da je tada $(a_m\, a_{m-1}\cdots a_0)_2$ dijadski zapis broja b_0; dakle a_m kojeg smo posljednjeg odredili dolazi na prvo mjesto u dijadskom zapisu. Prema tome imamo:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
b_k	173	86	43	21	10	5	2	1
a_k	1	0	1	1	0	1	0	1

Kako je $b_0=173$, to je $a_0=1$. Odavde je $b_1=\frac{173-1}{2}=86$ pa je $a_1=0$ (jer je b_1 paran) itd. Na kraju smo dobili

$$b_8=\frac{b_7-a_7}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$

pa se algoritam prekida i uzimajući zadnji redak (u gornjoj tabeli) s desna na lijevo dobivamo $173=(10101101)_2$.

30. Dat je broj $(3012)_4$ (u brojnom sistemu sa osnovom 4). Napisati ga u binarnom sistemu.

Rješenje. Najprije ćemo dati broj napisati u dekadnom sistemu $(n=10)$:

$$(3012)_4=3\cdot4^3+0\cdot4^2+1\cdot4^1+2\cdot4^0=198=(198)_{10}.$$

Sada ćemo broj 198 napisati u dijadskom (binarnom) sistemu.

$$198 = 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2^0 =$$
$$= (11000110)_2 .$$

31. Napisati broj 13 u dijadskom sistemu, a broj 4 u brojnom sistemu sa osnovom 5.

Rezultat. $13 = (13)_{10} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = (1101)_2$,

$$4 = (4)_{10} = 4\cdot 5^0 = (4)_5 .$$

32. Napisati broj 135 u brojnom sistemu sa osnovom 7. i broj 10101 u dijadskom sistemu prikazati u decimalnom sistemu.

Rezultat. $135 = 2\cdot 7^2 + 5\cdot 7^1 + 2\cdot 7^0 = (252)_7$,

$$(10101)_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 21 .$$

1.1.4. Dedekindov presjek, brojna prava (osa), segment, interval, poluinterval (polu segment), supremum i infimum skupa)

33. Za svaki rez (presjek) u skupu rac. br. $s=(A,B)\in\tilde{Q}$ i za svaki racionalan broj $r>0$ postoje racionalni brojevi $a\in A$ i $b\in B$ takvi da je $r=b-a$ i da a nije najveći element u A,[9]. Dokazati.

Dokaz. Formirajmo skup $\{mr : m\in Z\}$. On je neograničen i odozdo i odozgo pa ima elemenata i u A, i u B. Postoji, dakle, takav $m\in Z$ da je $mr\in A$ i $(m+1)\cdot r\in B$. Moguća su dva slučaja: 1° mr nije najveći element u A i tada stavljamo $a=mr$, $b=(m+1)r$; 2° mr je najveći element u A i tada stavljamo

$a=mr+x$, $b=(m+1)r+x$, gdje je $x\in Q$ tako da je $-r<x<0$. Time je tvrdnja dokazana, jer je u oba slučaja $r=b-a$ i a nije najveći element u A.

34. Dokazati da za svaki rez $s=(A,B)>0$ u skupu Q i za svaki racionalan broj $r>1$ postoje $a\in A$ i $b\in B$ takvi da je $r=\frac{b}{a}$ i da a nije najveći element u A.

Dokaz. Neka je $r=1+p$ $(p>0)$ (naravno da je p rac. broj).

---

9) $\tilde{Q}$ je skup svih rezova u skupu rac. br. Q. Rez s je uređen par (A,B) dvaju podskupova od Q a. i s. a. su ispunjeni uslovi:

1° $A,B\neq\emptyset$; 2° $A\cup B=Q$; 3° $A\cap B=\emptyset$; 4° $(a\in A, b\in B)\Rightarrow a<b$; 5° B nema najmanji element. A se zove donja a B gornja komponenta reza $s=(A,B)$. Dokazano je da je $\tilde{Q}=R$ (skup realnih brojeva) tj. uređeno polje u kojem svaki odozdo (odozgo) ograničeni skup ima infimum (supremum).

Odavde slijedi (na osnovu binomne formule) da je $r^n \geqslant 1+np$ $(n\in N)$ pa je skup $\{r^n;\ n\in N\}$ odozgo neograničen skup u Q. Međutim, nejednakost $\frac{1}{1+np} \leqslant r^{-n}$ pokazuje da nema pozitivnog broja $\varepsilon>0$, $\varepsilon\in Q$ takvog da je $\varepsilon<r^{-n}$ za sve $n\in N$. To znači da skup $\{r^m:\ m\in Z\}$ ima elemenata i u A i u B. Postoji dakle takvo $m\in Z$ da je $r^m\in A$ i $r^{m+1}\in B$. Ako je $r^m=\max A$ možemo uzeti da je $a=r^m\cdot x$, $b=r^{m+1}\cdot x$ gdje je $0<x\in Q$ takvo da je $\frac{1}{r}<x<1$.
Za $r^m\neq \max A$ možemo staviti $a=r^m$, $b=r^{m+1}$ pa će opet tvrdnja zadatka biti istinita.

35. Neka su

$$<6,7>;\ <7,10>;\ <6,7];\ [7,10>;\ [7,10];\ <7,10]$$

podskupovi skupa S. Uzimajući za S: a) N; b) Z; c) Q; d) R odrediti brojeve (realne) koji pripadaju ovim intervalima (navedenim podskupovima skupa S).

Rješenje. a) $S=N\Rightarrow$

$$<6,7>=\emptyset;\ <7,10>=\{8,9\};\ <6,7]=\{7\};$$

$$[7,10>=\{7,8,9\};\ [7,10]=\{7,8,9,10\};$$
$$<7,10]=\{8,9,10\}.$$

b) $S=Z\Rightarrow$

$<6,7>=\emptyset$; itd (isti brojevi kao za $S=N$).

c) $S=Q\Rightarrow$

$$<6,7>=\{x\in Q:\ 6<x<7\};$$
$$<7,10>=\{x\in Q:\ 7<x<10\};$$
$$<6,7]=\{x\in Q:\ 6<x\leqslant 7\};$$

$[7,10\rangle = \{x \in Q : 7 \leqslant x < 10\}$;
$[7,10] = \{x \in Q : 7 \leqslant x \leqslant 10\}$;
$\langle 7,10] = \{x \in Q : 7 < x \leqslant 10\}$.

d) $S = R \Rightarrow$

$\langle 6,7\rangle = \{x \in R : 6 < x < 7\}$ itd.

36. Dokazati da za svaka dva ograničena podskupa A i B skupa R vrijedi:

$$(B \leqslant A) \Rightarrow \{(\operatorname{Sup} B \leqslant \operatorname{Sup} A) \wedge (\operatorname{Inf} B \geqslant \operatorname{Inf} A)\}$$

Dokaz. $(b \in B) \Rightarrow (b \in A) \Rightarrow (b \leqslant \operatorname{Sup} A) \Rightarrow (\operatorname{Sup} B \leqslant \operatorname{Sup} A)$;

$(b \in B) \Rightarrow (b \in A) \Rightarrow (b \geqslant \operatorname{Inf} A) \Rightarrow (\operatorname{Inf} B \geqslant \operatorname{Inf} A)$.

37. Ispitati ograničenost skupa

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\right\}.$$

Rješenje. Pošto postoje brojevi $m = 0$ i $M = 1$ takvi da je $0 < x \leqslant 1$ za svako $x \in E$, to slijedi da je skup E ograničen. Donja međa je $m = 0$ i ne pripada skupu E; dok gornja $M = 1$ pripada skupu E ($\operatorname{Sup} E = \operatorname{Max} E = 1$, $\operatorname{Inf} E = 0$, dok $\operatorname{Min} E$ ne postoji).

38. Nađi $\operatorname{Inf} S$ i $\operatorname{Sup} S$, ako je

$$S = \left[\frac{1}{6}, 1\right)$$ i ispitati egzistenciju najmanjeg i najvećeg elementa u S.

Rješenje. $\inf S = \frac{1}{6} = \operatorname{Min} S$, $\sup S = 1$; na S ne postoji najveći realan broj (naravno, ni najveći racionalan broj), jer 1 nije iz S a između ma kojeg realnog (iracionalnog) broja i 1 postoji (racionalan) realan broj.

39. Neka je M neprazan podskup od skupa $L=(0,+\infty)$ i neka je interval E podskup skupa $L\setminus M$ takav da je $\inf E = a > 0$ i $\sup E = b < +\infty$. Dokazati da je gornja međa odnosa $b:a$ po svima E jednaka $+\infty$ ako je $\inf M > 0$ ili $\sup M < +\infty$.
Uputstvo. Iskoristiti činjenicu: $\inf L = 0$ i $\sup L = +\infty$.

1.1.5. Nejednakosti i apsolutna veličina

40. Dokazati da je $2^n > n^2$ za $n \geqslant 5$.
Dokaz. 1° $2^5 = (32) > 5^2 (=25)$, dakle za $n=5$. relacija važi.

2° Ako je $2^n > n^2$ za neki n, onda odatle slijedi (množenjem sa 2) $2^{n+1} > 2n^2$ (1).
Međutim, biće $2n^2 > (n+1)^2$ (2), tj. $n^2-2n-1>0$ za sve $n > 1+\sqrt{2}$ pa pogotovo za $n>5$. Iz (1) i (2) slijedi $2^{n+1} > (n+1)^2$. Dakle, uvijek kad relacija za neki prirodan broj $n>5$, ona važi i za slijedeći broj. Sa 1° i 2°, prema principu matematičke indukcije, dokaz je završen.

41. Dokazati relacije:

a) $(1+h)^n > 1+nh$, $(h>0,\ 1<n\in N)$
(Bernoullijeva nejednakost): [10]

[10] Važi takođe nejednakost $(1+a)^n \geqslant 1+na$, $(n\in N,\ a \geqslant -1)$ što se može dokazati pomoću matematičke indukcije.

b) $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ (Cauchi-Schwarzova nejednakost);

c) $(1-h)^n > 1-nh$, $(0<h<1)$, $1<n\in N$;

d) $(1+h)^n < \dfrac{1}{1-nh}$, $0<h<\dfrac{1}{n}$;

e) $na^{n-1} > \dfrac{a^n-b^n}{a-b} > nb^{n-1}$, $(a>b>0,\ n\in N)$.

Dokaz. a) Tačnost relacije pod a) vidi se odmah ako na lijevu stranu primjenimo binomnu formulu:

$$(1+h)^n = 1+nh+\binom{n}{2}h^2+\dots+h^n$$

što je s obzirom da je $h>0$, sigurno veće od $1+nh$. (za $h=0$ ili $n=1$ imamo mjesto znak $>$ znak $=$).

b) Izvršiti kvadriranje na lijevoj strani i množenje na desnoj, zatim prebacujući sve članove na jednu stranu dobijamo nejednakost $(bx-ay)^2 \geq 0$ koja važi za sve realne brojeve a, b, x, y. Idući od posljednje relacije unazad možemo dobiti relaciju koju je trebalo dokazati (iskoristili smo kao metod rasuđivanja-analizu).

c) Ostavlja se čitaocu da sam dokaže.

d) Iz tvrdnje pod c) slijedi tačnost nejednakosti

$$\frac{1}{1-nh} > (1-h)^{-n},\ (\text{uz uslov } 1-nh>0).$$

Međutim je $(1-h)^{-n} > (1+h)^n$, jer je $1>(1-h^2)^n$.

Prema tome slijedi i tačnost tvrdnje pod d).

e) Izraz u sredini je jednak

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}$$

odakle se neposredno vidi tačnost relacije s obzirom da je zbog $a>b$ svaki član manji od prvog, a veći od posljednjeg.

42. Dokazati tačnost nejednakosti :

1° $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ za $n>2$;

2° $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

3° $\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{4^4}\cdots\frac{1}{n^n} < 4\cdot\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}$;

4° $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1$;

5° $\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}$;

6° $\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

gdje je n prirodan broj.

Uputstvo. Za dokaz 2° iskoristiti metod matematičke indukcije. Za dokaz 3° iskoristiti osnovnu nejednakost

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\ ,\ (a_i\geqslant 0\ ;\ i=1,2,\ldots,n).$$

Za dokaz 5° iskoristiti relaciju:

$$(n!)^2=(1\cdot n)[2(n-1)]\cdots[k(n-k+1)]\cdots(n\cdot 1)$$

i nejednakost

$$k(n-k+1)\geqslant n \quad \text{za} \quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

43. Koji su od brojeva veći:

a) $300!$ ili 100^{300} ; b) $200!$ ili 100^{200} ?

Rezultat. a) $300! > 100^{300}$; b) $100^{200} > 200!$.

44. Dokazati nejednakosti:

a) $n(a-b)\cdot b^{n-1} \leqslant a^n - b^n \leqslant n(a-b)\cdot a^{n-1}$ ako je $a \geqslant b \geqslant 0$

(Bézout nejednakost);

b) $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \leqslant (x_1^p + x_2^p + \cdots x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q + y_2^q + \cdots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$,

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proizvoljni pozitivni brojevi, a p i q pozitivni racionalni brojevi takvi da je $p+q = p\cdot q$ (Hölderova nejednakost, koja za $p=q=2$ prelazi u nejednakost Cauchy – Bunjakovskog).

45. Pokazati da je

$$\frac{|a|+a}{2} = \begin{cases} 0, & (a \leqslant 0) \\ a, & (a \geqslant 0) \end{cases} \qquad \frac{|a|-a}{2} = \begin{cases} 0, & (a \geqslant 0) \\ -a, & (a \leqslant 0) \end{cases}$$

Rješenje. Imamo prema definiciji apsolutne vrijednosti (veličine),

$$\frac{|a|+a}{2} = \begin{cases} \frac{2a}{2}, & (a \geqslant 0) \\ \frac{-a+a}{2}, & (a \leqslant 0) \end{cases}$$

$$\frac{|a|-a}{2} = \begin{cases} \frac{a-a}{2}, & (a \geqslant 0) \\ \frac{-a-a}{2}, & (a \leqslant 0), \end{cases}$$

tj. vrijedi tvrdnja zadatka.

46. Dokazati relacije:

a) $$\frac{|a|+|b|}{1+|a+b|} \geqslant \frac{|a|+|b|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)};$$

b) $$\frac{a+b+|b-a|}{2} = \max(a,b);$$

c) $$a+b-|b-a| = 2\cdot\min(a,b).$$

Rješenje. a) Kako je (za $\forall a,b\in R$)

$$1+|a+b| \leqslant 1+|a|+|b| \leqslant 1+|a|+|b|+|ab|,$$

odnosno

$$\frac{1}{1+|a+b|} \geqslant \frac{1}{1+|a|+|b|+|ab|} \left(= \frac{1}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)}\right),$$

to, množenjem posljednje nejednakosti sa $(|a|+|b|)$, imamo

$$\frac{|a|+|b|}{1+|a+b|} \geqslant \frac{|a|+|b|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)}.$$

b) 1° Ako je $a<b$, onda je

$$\frac{a+b+|b-a|}{2} = \frac{a+b+b-a}{2} = b = \max(a,b).$$

2° Ako je $a\geqslant b$, onda je

$$\frac{a+b+|b-a|}{2} = \frac{a+b-|b-a|}{2} = a = \max(a,b).$$

Iz 1° i 2° slijedi tačnost tvrdnje pod b).

c) Dokazuje se slično pod b).

47. Riješiti slijedeće jednačine:

1° $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$;

2° $|x-2|+|x+1|=|2x+3|$;

3° $|(x+2)(x-1)|-|(x+1)(x-2)|=a$;

4° $|x^2+x-2|+|x^2-x-2|=2$;

5° $|x^2-2x|+|x^2-2|=1+|x|$.

Rješenje. 1° Data jednačina se transformiše u jednačine:

$$\begin{aligned}|2x+1|+|x+3|-|x+6| &= -2x+2=0, & (-\infty<x\leqslant-6)\\ &= -4x-10=0, & (-6\leqslant x\leqslant-3)\\ &= -2x-4=0, & (-3\leqslant x\leqslant-\tfrac{1}{2})\\ &= 2x-2=0, & (-\tfrac{1}{2}\leqslant x<+\infty).\end{aligned}$$

Njihova rješenja su:

$x=1\notin(-\infty,-6]$; $x=-\frac{5}{2}\notin[-6,-3]$; $x=-2\in[-3,-\frac{1}{2}]$;

$x=1\in[-\frac{1}{2},+\infty)$

pa je data jednačina zadovoljena za $x=-2$ i $x=1$.

2° Analogno, kao u prethodnom slučaju, imamo

$$|x-2|+|x+1|-|2x+3|=4\neq0,\quad(-\infty<x\leqslant-\tfrac{3}{2})$$

$$|x-2|+|x+1|-|2x+3|=-4x-2=0,\quad(-\tfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant-1)$$

$$|x-2|+|x+1|-|2x+3|=-2x=0,\quad(-1\leqslant x\leqslant2)$$

$$|X-2|+|X+1|-|2X+3| = -4 \neq 0\,, \quad (2 \leq X < +\infty).$$

Prva i zadnja relacija su različite od nule za odgovarajuće X, dok su rješenja ostalih dviju jednačina:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \notin \left[-\frac{3}{2}, -1\right] \quad i \quad x_2 = 0 \in [-1, 2].$$

Prema tome data jednačina ima rješenje : $X=0$.

3. $$|(X+2)(X-1)| - |(X+1)(X-2)| - a = 2X - a = 0\,, \quad (-\infty < X \leq -2)$$
$$= -2X^2+4-a = 0\,, \quad (-2 \leq X \leq -1)$$
$$= -2X - a = 0\,, \quad (-1 \leq X \leq 1)$$
$$= 2X^2 - 4 - a = 0\,, \quad (1 \leq X \leq 2)$$
$$= 2X - a\,, \quad (2 \leq X < +\infty).$$

Iz prve relacije slijedi da je $x = \frac{a}{2}$ rješenje date jednačine uz uslov da je $a \leq -4$.

Iz $$-2X^2+4-a=0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4-a}{2}}\,, \quad a \text{ iz}$$

$$-2X - a = 0 \Rightarrow X = -\frac{a}{2}\,, \quad \text{dok iz}$$

$$2x^2 - 4 - a = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{4+a}{2}}\,.$$

Međutim, $x_1 = \sqrt{\frac{4-a}{2}}$ i $x_3 = -\sqrt{\frac{4+a}{2}}$

nisu rješenja date jednačine (zašto?), a $x_2 = -\sqrt{\frac{4-a}{2}}$ je rješenje uz uslov $4-a \geq 0$ i $-2 \leq -\sqrt{\frac{4-a}{2}} \leq -1$, $x = -\frac{a}{2}$ je rješenje date jednačine uz uslov $-1 \leq -\frac{a}{2} \leq 1$,

$x = \sqrt{\frac{4+a}{2}}$ je rješenje (date jednačine) uz uslov $4+a \geq 0$ i $1 \leq \sqrt{\frac{4+a}{2}} \leq 2$ i konačno, $x = \frac{a}{2}$ je rješenje (date jednačine) uz uslov $\frac{a}{2} \geq 2$.

Zaključak. Data jednačina ima rješenja:

1) za $-\infty < a \leqslant -4$: $x = \frac{a}{2}$;

2) za $-4 \leqslant a \leqslant -2$: $x = -\sqrt{\frac{4-a}{2}}$;

3) za $-2 \leqslant a \leqslant 2$: $x = -\frac{a}{2}$ i $x = \sqrt{\frac{4+a}{2}}$;

4) za $2 \leqslant a \leqslant 4$: $x = \sqrt{\frac{4+a}{2}}$;

5) za $a \geqslant 4$: $x = \frac{a}{2}$.

4°

(1) $|x^2+x-2| + |x^2-x-2| - 2 = 0.$

Kako je

$$(x^2+x-2=0) \Rightarrow \left(x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2}\right) \Rightarrow (x_1=-2,\ x_2=1)$$

$$\Rightarrow x^2+x-2 = (x-1)(x+2) ;$$

$$(x^2-x-2=0) \Rightarrow \left(x_{1,2} = \frac{1\pm 3}{2}\right) \Rightarrow (x_1=-1,\ x_2=2)$$

$$\Rightarrow x^2-x-2 = (x+1)(x-2) ;$$

to korištenjem tabele:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1;1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

jednačina (1) se transformiše u jednačine:

$$|x^2+x-2|+|x^2-x-2|-2 = 2x^2-6=0\,, \quad (-\infty < x \leqslant -2)$$
$$=-2x-2=0\,, \quad (-2\leqslant x\leqslant -1)$$
$$=-2x^2+2=0\,, \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$
$$= 2x-2=0\,, \quad (1\leqslant x\leqslant 2)$$
$$= 2x^2-6=0\,, \quad (2\leqslant x<+\infty)$$

Njihova rješenja su, respektivno:

$$x=\pm\sqrt{3}\notin(-\infty,-2]\ ;\ x=-1\in[-2,-1]\ ;\ x=\pm 1\in[-1,1]\ ;$$
$$x=1\in[1,2]\ ;\quad x=\pm\sqrt{3}\notin[2,+\infty)$$

pa je data jednačina zadovoljena za $x=\pm 1$.

5° Vršeći analizu kao u 4° dobije se da

$$|x^2-2x|+|x^2-2|=1+|x|$$

ima rješenje: $x_1=1$ i $x_2=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$.

48. Odrediti skup rješenja sistema jednačina:

a) $|x+1|+|y-1|=5\,,\quad |x+1|=4y-4\,;$ b) $|x-1|+|y-5|=1\,,\quad y=5+|x-1|\,.$

Rješenje. a) Iz druge jednačine očigledno je

$y-1=\frac{1}{4}|x+1|\geqslant 0$. Zato imamo da je $|y-1|=y-1$ i sistem postaje

$$|x+1|+y-1=5$$
$$|x+1|=4y-4\,.$$

Eliminacijom $|x+1|$, dobiva se $4y-4+y-1=5$. Odavde $y=2$. Zamjenom $y=2$ u prvoj jednačini, izlazi $|x+1| = 4$. Ako je $x+1>0$, slijedi jednačina $x+1=4$ koja ima za rješenje $x=3$. Ako je $x+1<0$, slijedi jednačina $-x-1=4$, tj. $x=-5$. Prema tome, dati sistem ima skup rješenja:

$$\{(3,2);\ (-5,2)\}.$$

b) Rezultat. $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)\right\}$.

49. Riješiti nejednačine:

a) $\frac{x+3}{x-5}>0$; b) $\frac{3x+1}{1-2x}>0$; c) $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<1$;

d) $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2$; e) $|x|>x$; f) $|x-2|>|x+1|-3$;

g) $|3x+2|>4|x-1|$; h) $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right|>\frac{1}{x}$.

Rješenje. a) $\left(\frac{x+3}{x-5}>0\right) \Leftrightarrow (x+3)(x-5)>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{[(x>-3)\wedge(x>5)]\vee[(x<-3)\wedge(x<5)]\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \{(x>5)\vee(x<-3)\}$, tj. rješenje date nejednačine je:

$$x<-3;\ x>5.$$

b) Rezultat. $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$.

c) Nejednačina $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<1$ je ekvivalentna sa $-1<\frac{2x-1}{x+1}<1$ tj.

sa sistemom

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1}\ , \qquad \frac{2x-1}{x+1} \gtrless 1.$$

Prva nejednačina svodi se na nejednačinu $\frac{3x}{x+1} > 0$, za koju su oblast rješenja intervali $x<-1$ i $x>0$. Druga nejednačina svodi se na nejednačinu $\frac{x-2}{x+1} < 0$, za koju je interval $-1<x<2$ oblast rješenja.

Intervali $x>0$ i $-1<x<2$ imaju zajednički dio interval $0<x<2$ koji predstavlja rješenje date nejednačine.

d) Rješenja date nejednačine jesu rješenja nejednačine $\frac{2x-1}{x-1} > 2$ posebno i nejednačine $\frac{2x-1}{x-1} < -2$ posebno. Rješenja prve su $x>1$, a druge $\frac{3}{4}<x<1$. Unija oba intervala, $(1,+\infty) \cup (\frac{3}{4},1) = (\frac{3}{4},+\infty) \setminus \{1\}$, je oblast rješenja date nejednačine.

e) Rezultat. $x \in (-\infty, 0)$.

f) Rezultat. $x \in (-\infty, 2)$.

g) Rezultat. $x \in (\frac{2}{7}, 6)$.

h) Rezultat. $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, 0) \cup (1, +\infty)$.

50. Odrediti oblast rješenja nejednačina :

a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > \sqrt{3}$; b) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

c) $\frac{1}{\cos 2x} < \cos x$; d) $\sin^4 x + \cos^4 x > a$.

Rješenje. a) Data nejednačina ima smisla samo za $x>0$. Kvadriranjem se dobije $\sqrt{x(x+1)} > 1-x$. Ova nejednačina je zadovoljena uvijek kada $1-x<0$, tj. za svako $x>1$ (jer kvadratni korijen ne može biti negativan). Ako je $1-x\geqslant 0$, onda poslije kvadriranja zadnje nejednačine biće $3x>1$, tj. $x>\frac{1}{3}$. Prema tome data nejednačina ima oblast rješenja: $(\frac{1}{3}, +\infty)$.

b) Rezultat. $\left[1, \frac{25}{16}\right)$.

c) Nejednačina

$$\frac{1}{\cos 2x} < \cos x$$

ima smisla za $\cos 2x \neq 0$, tj. za $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$ i $x \neq \frac{3\pi}{4}+k\pi$, $(k=0, \pm 1, \dots)$.

$$\left(\frac{1}{\cos 2x} < \cos x\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{1-\cos x\cos 2x}{\cos 2x} < 0\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\cos 2x<0) \Longleftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi;\ k=0,\pm 1,\cdots\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+k\pi;\ k=0,\pm 1,\cdots\right),$$

jer je uvijek $1-\cos x\cos 2x \geqslant 0$, a $1-\cos x\cos 2x=0$ za $x=2k\pi$. Prema tome data nejednačina ima za rješenje skup

$$\left\{x\in R:\ \frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+k\pi;\ k=0,\pm 1,\dots\right\}.$$

d) $$(\sin^4 x+\cos^4 x > a) \Longleftrightarrow \left\{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x > a\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{1-2\sin^2 x\cos^2 x > a\right\} \Longleftrightarrow \left\{1-\frac{\sin^2 2x}{2} > a\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\sin^2 2x < 2(1-a)\right\}.$$

Pošto je uvijek $0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1$, to je data nejednačina zadovoljena

za svako realno x ukoliko je $2(1-a)>1$, tj. $a<\frac{1}{2}$. Takođe, odmah vidimo da nejednačina nema smisla za $a \geqslant 1$. Ostaje da se nađe rješenje date nejednačine za $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$.
Za takve a imamo:

$$\left\{\sin^2 2x < 2(1-a)\right\} \Leftrightarrow \left\{|\sin 2x| < \sqrt{2(1-a)}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{-\sqrt{2(1-a)} < \sin 2x < \sqrt{2(1-a)}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Big\{\left(k\pi < x < \frac{\alpha_0}{2} + k\pi\right) \vee \left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}\right] \vee$$

$$\vee \left[(2k+1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_0}{2}\right] \vee \left[(k+1)\pi - \frac{\alpha_0}{2} < x < (k+1)\pi\right];$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \; ; \quad \alpha_0 = \arcsin\sqrt{2(1-a)}\Big\}.$$

51. Odrediti parametar a tako da nejednačina

$$\left|\frac{x^2+(a+1)x+1}{x^2+x+1}\right| < 3$$

bude zadovoljena za sve vrijednosti nepoznate x.

Rezultat. $-2 < a < 4$.

52. Neka je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Nađi najveću moguću vrijednost proizvoda

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Rezultat. $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

53. Za koje vrijednosti (nepoznate x) jednačina

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| = \frac{x}{x+1}$$

predstavlja identitet?

Rješenje. Razlikovaćemo tri slučaja:

1°
$$\frac{x}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} x>0 \\ x+1>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x>0 \\ \left.\begin{matrix} x<0 \\ x+1<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x<-1 \text{ .} \end{cases}$$

2°
$$\frac{x}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ;}$$

3°
$$\frac{x}{x+1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} x<0 \\ x+1>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -1<x<0 \\ \left.\begin{matrix} x>0 \\ x+1<0 \end{matrix}\right\} \text{ nema presjeka.} \end{cases}$$

Dakle jednačina
$$\left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{x}{x+1}$$
ne predstavlja identitet samo za
$$-1 < x < 0 \text{ .}$$

54. Skratiti razlomak:
$$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} \text{ .}$$

Rješenje. $(x^2-x-2=0) \Rightarrow (x_1=-1$ i $x_2=2)$ pa je
$$x^2-x-2=(x+1)(x-2) \text{ .}$$
$$(x^2-3x-2=0) \Rightarrow (x_1=1, \quad x_2=2) \text{ .}$$

zato je:
$$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \text{ .}$$

Razlomak je definisan za $x \neq 1$ i $x \neq 2$, pa uz uslov $x \neq 2$, smijemo razlomak skratiti, tj.:

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{x-1}.$$

55. Riješiti jednačinu

$$\frac{\sqrt{a^2+x}+b}{\sqrt{a^2+x}-a}+\frac{a}{b}=0\,,\quad b\neq 0.$$

Rješenje. Definiciono područje

(1) $a^2+x\geqslant 0$

(2) $\sqrt{a^2+x}\neq a.$

Ostavićemo ovako da bi izbjegli nove uslove za parametar.

Dalje:

$$b\cdot(\sqrt{a^2+x}+b)+a\,(\sqrt{a^2+x}-a)=0\,,$$

$$(b+a)\sqrt{a^2+x}=a^2-b^2.$$

Otuda:

(3) $b+a\neq 0\implies$

$$\sqrt{a^2+x}=a-b.$$

zbog nenegativnosti lijeve strane mora biti:

(4) $a\geqslant b\,;$

$$a^2+x=a^2+b^2-2ab\implies$$

$$\implies x=b\,(b-2a).$$

Da bi to bilo rješenje mora zadovoljavati uslove (1) i (2), tj.

$$a^2+b^2-2ab\geqslant 0, \quad \text{odnosno}$$

$$(a-b)^2\geqslant 0\;;$$

$$\sqrt{a^2+b^2-2ab}\overset{?}{\neq} a.$$

zbog (4) $\implies a-b\neq a$ i $-b\neq 0$, a to je zbog uslova zadatka ispunjeno.

Dakle rezultat je:

$$x = b(b-2a), \quad a \geq b \quad i \quad a+b \neq 0.$$

Ako je $a+b=0$, imamo

$$(a+b)\sqrt{a^2+x} = (a-b)(a+b), \quad \text{pa je}$$

x proizvoljno ali mora zadovoljavati uslove iz definicionog područja.

56. Riješiti grafički nejednačinu:

$|x| + |y| < 1$ i analitički prikazati rješenje.

Rješenje.

$$1^\circ \quad \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ |x|+|y|<1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+|y|<1$$

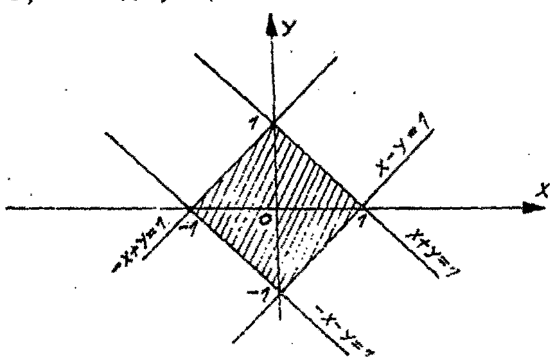
$1^\circ.1.$ $y \geq 0$ $\quad x+y<1$

$1^\circ.2.$ $y<0$ $\quad x-y<1.$

$$2^\circ \quad \left.\begin{array}{l} x<0 \\ |x|+|y|<1 \end{array}\right\} \Rightarrow -x+|y|<1$$

$2^\circ.1.$ $y \geq 0,$ $\quad -x+y<1$

$2^\circ.2.$ $y<0,$ $\quad -x-y<1.$



Šrafirana oblast (kvadrat) ne uključujući konturu kvadrata (jer nije $x+y \leq 1$), predstavlja rješenje nejednačine. Analitički rješenja izgledaju ovako:

$$\left.\begin{array}{c} -1 < x \leq 0 \\ -x-1 < y < x+1 \end{array}\right\} \quad i$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leq x < 1 \\ x-1 < y < 1-x \end{array}\right\}.$$

57. Riješiti nejednačinu

$$\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}} .$$

Rješenje. Definiciono područje:

$$x \neq 0, \quad 1-2^{x-1} \neq 0, \quad x-1 \neq 0, \quad x \neq 1$$
$$1 \neq 2^{x-1}.$$

Imamo:

$$\frac{1}{2^x-1} - \frac{1}{1-2^{x-1}} > 0$$

$$\frac{1-2^{x-1}-2^x+1}{(2^x-1)(1-2^{x-1})} > 0$$

$$\frac{2-2^x(2^{-1}+1)}{(2^x-1)(1-2^{x-1})} > 0$$

$$\frac{4-3\cdot 2^x}{(2^x-1)(2-2^x)} > 0 .$$

Stavimo $2^x = y$, pa ćemo dobiti:

$$\frac{4-3y}{(y-1)(2-y)} > 0 .$$

v	$(-\infty,1)$	$(1,\frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3},2)$	$(2,+\infty)$
$4-3v$	+	+	−	−
$v-1$	−	+	+	+
$2-v$	+	+	+	−
$f(v)$	−	+	−	+

$f(v)>0$ za:

$1<v<\frac{4}{3}$ i

$2<v<+\infty$.

Prema tome imamo

$$1<2^x<\frac{4}{3} \Leftrightarrow 0<x<\log_2\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<x<2-\log_2 3. \qquad (1)$$

$$2^x>2 \Leftrightarrow x>1 \qquad (2)$$

(1) i (2) predstavljaju rješenja.

58. Riješiti nejednačinu

$$\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}<\sqrt{2a+x}$$

Rješenje. Definiciono područje:

$$a+x>0 \Leftrightarrow x>-a$$
$$2a+x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant -2a$$

1° za $a>0$, $x>-a$, dok

2° za $a<0$, $x\geqslant -2a$.

Vrijednosti x-ova za koje je

$$a+x-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}<0,$$

a spadaju u definiciono područje, su rješenja pokzne nejednačine.

$$\sqrt{a+x} < \left|\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}\right|^2$$

$$a+x < \frac{a^2}{a+x}$$

$$(a+x)^2 < a^2$$

$$a^2 + 2ax + x^2 < a^2$$

$$x^2 + 2ax < 0$$

$$x(x+2a) < 0.$$

Razlikujemo više slučajeva:

1° $\quad a > 0$

a) $x < 0, \quad x + 2a > 0$

$$\frac{x < 0, \quad x > -2a}{-2a < x < 0.}$$

Rješenje: $-a < x < 0.$

b) $x > 0$

$$\frac{x + 2a < 0}{x > 0, \quad x < -2a}$$, pa nema rješenja,

2° $\quad a < 0$

a) $\left.\begin{matrix} x > 0 \\ x < -2a \end{matrix}\right\}$ nema rješenja

b) $\left.\begin{matrix} x < 0 \\ x > -2a \end{matrix}\right\}$ nema rješenja

Za $\sqrt{a+x} - \sqrt{\dfrac{a^2}{a+x}} \geq 0$ imamo:

$$x(x+2a)\geqslant 0.$$

$a>0,\quad x\geqslant 0$

$\underline{x+2a\geqslant 0}$

$(x\geqslant 0,\quad x\geqslant -2a)\Longrightarrow x\geqslant 0$

$$\left.\begin{array}{l} x\leqslant 0 \\ \underline{x+2a\leqslant 0} \end{array}\right\}\Rightarrow x\leqslant -2a.$$

$a<0,\quad x(x+2a)\geqslant 0$

$x\geqslant 0$

$\underline{x+2a\geqslant 0}$

$(x\geqslant 0,\ x\geqslant -2a,\ a<0)\Rightarrow x\geqslant -2a.$

$x\geqslant -2a$ (spada u definiciono područje).

$$\left.\begin{array}{l} x\leqslant 0 \\ x\leqslant -2a \end{array}\right\}\Rightarrow x\leqslant 0,$$ ali ovo ne spada u D.P.

$a<0$

Dakle, $a>0,\quad x\geqslant 0$

$a<0,\quad x\geqslant -2a.$

Dalje, kvadriranjem polazne nejednačine, dobivamo

$$a+x+\frac{a^2}{a+x}-2\sqrt{\frac{a^2}{a+x}\cdot(a+x)}\leqslant 2a+x$$

$$a-2|a|+\frac{a^2}{a+x}<2a\,/\cdot\,(a+x)$$

$$a^2+ax-2|a|(a+x)+a^2<2a^2+2ax$$

$$-ax-2|a|(a+x)<0\,/\cdot\,(-1)$$

$$ax+2|a|(a+x)>0.$$

za $a>0$, imamo:

$$ax+2a^2+2ax>0$$

odnosno

$$x > -\frac{2}{3}a, \text{ a to otpada.}$$

za $\quad a < 0$, imamo:

$$ax - 2a^2 - 2ax > 0, \text{ tj.}$$
$$x > -2a.$$

za $\quad a = 0$, dobivamo:

$$\sqrt{x} < \sqrt{x}, \text{ a to je nemoguće.}$$

Rezultat.

1° $\quad a > 0, \quad -a < x < 0$

2° $\quad a < 0, \quad x > -2a$

3° $\quad$ za $a = 0$ nemo rješenja.

59. Riješiti jednačinu

(1) $$\left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

Rješenje. Razlikovaćemo četiri slučaja:

1° Ako je $\quad \sqrt{x-1} \geqslant 2 \Rightarrow x-1 \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 5$

$$\sqrt{x-3} \geqslant 3 \Rightarrow x-1 \geqslant 9 \Rightarrow x \geqslant 10$$

Tada jednačina 1 postaje:

$$\sqrt{x-1} - 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 1$$

i njeno rješenje je $x = 10$.

2° Ako je $\quad \sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 5$

$$\sqrt{x-1} \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 10,$$

jednačina (1) postaje:

$$\sqrt{x-1} - 2 - \sqrt{x-1} + 3 = 1, \text{ i}$$

njeno rješenje je svako x za koje važi

$$5 \leqslant x \leqslant 10.$$

3°
$$\sqrt{x-1}-2 \leqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant 5$$
$$\sqrt{x-1}-3 \leqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant 10$$
$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1 \Longrightarrow x=5.$$

4°
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-2 \leqslant 0 \\ \sqrt{x-1}-3 \geqslant 0\end{array}\right\} = \text{protuprječno !}$$

Dakle rješenje glasi:

$$5 \leqslant x \leqslant 10.$$

60. Riješiti jednačinu:

(1)
$$|x+1|-|2x-3|=2.$$

Rješenje. Razlikujemo četiri slučaja.

1° za
$$\left.\begin{array}{l}x+1 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant -1 \\ 2x-3 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$$

jednačina (1) postaje:

$$x+1-2x+3=2 \Rightarrow x=2.$$

2° za
$$\left.\begin{array}{l}x+1 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant -1 \\ 2x-3 \leqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2},$$

jednačina (1) glasi:

$$x+1+2x-3=2 \Longrightarrow x=\frac{4}{3}.$$

3°
$$\left.\begin{array}{l}x+1 \leqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant -1 \\ 2x-3 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}\end{array}\right\} \text{ nema rješenja.}$$

4° $$\left.\begin{array}{l} x+1\leqslant 0 \Rightarrow x\leqslant -1 \\ 2x-3\leqslant 0 \Rightarrow x\leqslant \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x\leqslant -1$$

Sada (1) izgleda ovako:

$$-x-1+2x-3=2 \Rightarrow x=6,$$ ali to rješenje otpada jer mora biti $x\leqslant -1$.

61. Za koje vrijednosti x jednačina

$$\left|x-\frac{x^2}{x+1}\right| = x-\frac{x^2}{x+1}$$

predstavlja identitet.

Rješenje. Mora biti

$$\left(x-\frac{x^2}{x+1}\geqslant 0\right) \Leftrightarrow \frac{x^2+x-x^2}{x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}\geqslant 0.$$

$$\frac{x}{x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x\geqslant 0 \wedge x>-1) \Rightarrow x\geqslant 0 \\ (x\leqslant 0 \wedge x<-1) \Rightarrow x<-1. \end{cases}$$

Prema tome rješenje je:

$$x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty).$$

1.1.6. Greška aproksimacije, pravilo o zaokruživanju realnih brojeva i računanje s približnim vrijednostima

62. Uzimajući za približnu vrijednost broja π broj 3,14 (u jednom slučaju) i broj 3,142 u drugom slučaju, odrediti odgovarajuće apsolutne greške [11] i njihove gornje granice,[12].

Rješenje. 1° U slučaju $\pi \approx 3{,}14$, gornja granica apsolutne greške je, recimo, broj 0,002, jer je apsolutna greška

$$\Delta = 3{,}14159\ldots - 3{,}14 = 0{,}00159\ldots$$

manja od 0,002.

2° U slučaju $\pi \approx 3{,}142$, apsolutna greška je

$$\Delta = 3{,}141592\ldots - 3{,}142 = -0{,}00040\ldots$$

pa je gornja granica, recimo broj 0,0005, jer je apsolutna greška (po modulu) manja od 0,0005.

63. Navedite i obrazložite primjer mjerenja, na osnovu kojeg (primjera) se vidi da apsolutna greška ne može biti mjerilo za kvalitet mjerenja više različitih veličina i da je opravdano uvođenje pojma relativne greške i njene granice (gornje).

---

[11] Neki autori pod apsolutnom greškom približnog (nepotpunog) broja podrazumjevaju razliku između tačne i približne vrijednosti, dok drugi (autori) podrazumjevaju modul pomenute razlike.

[12] Takođe se mjesto pojma gornja granica (među) apsolutne greške (vrijednost za koju apsolutna greška ne prelazi po modulu) uvodi pojam granica apsolutne greške (najmanji broj od koga apsolutna greška nije veća).

Rješenje. Neka je (na primjer), pri mjerenju dužine x, dobijena približna vrijednost $a = 100,2$ m i utvrđena za gornju granicu apsolutne greške veličina $\Delta a = 0,1$ m ; a za dužinu y nađena približna vrijednost $b = 1502$ m i utvrđena gornja granica apsolutne greške $\Delta_b = 1$ m. Uvjerimo se da je bolje mjerenje veličine y, iako to u prvi mah ne izgleda (jer je gornja granica apsolutne greške 10 puta manja).

Stvarno, ako bi se veličina y mjerila na isti način kao veličina x onda bi se na svakih 100,2 m imala gornja granica apsolutne greške 0,1 m pa bi gornja granica apsolutne greške približne vrijednosti b bila veća od 1,4 m (jer se broj 100,2 sadrži u 1502 više od 14 puta). Dakle, mjerenje veličine y je bolje pa se apsolutna greška ne može uzeti za mjerilo kvaliteta mjerenja različitih veličina.

Ako upotrijebimo pojam relativne greške i njene gornje granice (koje su neimenovani brojevi za razliku od apsolutne greške i njene gornje granice – koje su imenovani brojevi), imaćemo:

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0,1\,m}{100,2\,m} = 0,0009\ldots$$

$$\delta_b = \frac{\Delta b}{b} = \frac{1\,m}{1502\,m} = 0,0006\ldots ,$$

tj. $\delta_b < \delta_a$, odnosno, bolje mjerenje ima manju relativnu grešku (manju gornju granicu relativne greške). Dakle relativna greška (njena gornja granica) je mjerilo kvaliteta mjerenja više različitih veličina.

64. Neka je pri prebrojavanju posjetilaca na nekom predavanju jedan brojač izbrojao 227, drugi 229, a treći 233 posjetilaca. Ako imamo podjednako ili otprilike podjednako povjerenje u sposobnost

prebrojavanja sva tri brojača, kako bi trebalo da izrazimo broj posjetilaca ?

Rješenje. Ako su brojači i najmanje sposobni za posao prebrojavanja, onda bismo mogli tvrditi da ih je bilo (posjetilaca) više od 220, a manje od 240, tj. mogli bismo tvrditi da je predavanju prisustvovalo 230 posjetilaca (ovdje gornja granica apsolutne greške iznosi 10 posjetilaca). Napomenimo da su prve dvije cifre broja 230 važeće (u ovom slučaju), a da nula na kraju nije važeća, jer u stvari niko i ne misli da to mora biti nula, pošto treća cifra može biti ma koja (brojevi između 220 i 240 mogu imati za treću ma koju cifru). Takođe primjetimo da gornja granica apsolutne greške predstavlja jednu deseticu pa su važeće sve one cifre koje pokazuju jedinice veće ili jednake od jedne desetice (tj. od jedinice koju predstavlja gornja granica).

65. Na primjeru ocijeniti značaj broja važećih cifara.

Rješenje. Posmatrajmo proizvoljan približan broj sa 5 važećih cifara, na primjer 325,64 i približan broj, na primjer 8,16 (sa tri važeće cifre). Pošto približan broj 325,64 ima manju gornju granicu relativne greške, nego približan broj 8,16, to zaključujemo da p. broj 325,64 (sa većim brojem važećih cifara) ima veću tačnost od broja 8,16 (sa manjim brojem važećih cifara).
Vidimo da je broj važećih cifara, slično gornjoj granici relativne greške, mjerilo tačnosti broja.

66. Kakva je razlika kad napišemo 6 ili 6,0 ?

Rješenje. Ako se radi o tačnim (potpunim) brojevima onda nema razlike. Međutim, ako se radi o približnim brojevima onda ima razlike; ako je $a \approx 6$, to znači da je gornja granica apsolutne greške 1, ali ako napišemo $a \approx 6{,}0$, time tvrdimo da je gornja granica apsolutne greške 0,1, tj. broj nula, u broju 6,0, pokazuje da je mjerenje izvršeno 10 puta tačnije. Prema tome, za približne brojeve veličine 6 i 6,0 nisu iste, jer iako pokazuju iste vrijednosti, one govore o različitoj tačnosti.

67. Vršeći zaokruživanje, na jedan decimal u zbiru

$$130{,}25 + 56{,}35 + 12{,}45 + 5{,}55 = 204{,}60,$$

obrazložiti opravdanje pravila: kada je prva i jedina cifra koja se odbacuje 5, jer iza nje nema cifara, popravka se vrši ili ne vrši, prema tome da li je posljednja cifra koja se zadržava neparna ili parna.

Rješenje. Ako bismo, u navedenom zbiru, pri zaokruživanju na jedan decimal ili uvijek popravljali posljednju cifru ili je uvijek ostavljali nepopravljenu, dobijali bismo ili sigurno veći ili sigurno manji broj, dok ćemo primjenjujući pravilo parne cifre (u zadatku navedeno) dobiti broj koji može biti i manji i veći i najzad tačno jednak zbiru, kao što je slučaj u ovom primjeru; naime

$$130{,}2 + 56{,}4 + 12{,}4 + 5{,}6 = 204{,}6.$$

Napomenimo da bismo isti rezultat dobili i kad bismo pri zaokruživanju išli uvijek na neparnu cifru, ali se smatra da je bolje zaokruživati tako da posljednja cifra bude parna (zbog mogućnosti dijeljenja sa 2).

68. Je li tačniji nepotpuni broj $a = 20{,}305\ldots$ ili $b = 0{,}305\ldots$?

Rješenje. Gornja granica apsolutne greške broja a je $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$, a broja b $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ (dakle jednake), pa su stepeni (stupnjevi) tačnosti tih brojeva respektivno:

$$a:\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\right)=2\cdot 20305=40610>b:\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\right)=$$
$$=2\cdot 305=610.$$

Prema tome, nepotpuni broj a ima veću tačnost od nepotpunog broja b.

69. Sabrati nepotpune brojeve $324,\dots;\ 2,3\dots;\ 1,09\dots$

a) unaprijed odredujući broj važećih (pouzdanih) cifara (odredivanje sume dostiživom tačnošću);

b) bez zaokruživanja sabiraka;

c) sabiranjem sa jednom rezervnom cifrom,[13].

Rješenje. a) Nadimo zbir onako kako se sabiraju potpuni (tačni) brojevi:

$$324+2,3+1,09=327,39.$$

Sračunajmo gornju granicu apsolutne greške zbira:

$$\Delta=\frac{1}{2}\cdot 10^{0}+\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}+\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}=0,5+0,05+0,005=0,555.$$

To znači da je $\Delta>\frac{1}{2}\cdot 10^{0}$; zato u zbiru dekadske jedinice $\leq 10^{0}$ nisu pouzdane. Dakle,

$$324,\dots+2,3\dots+1,09\dots=330\pm\frac{1}{2}\cdot 10^{1}.$$

b)
$$\begin{array}{r} 324 \\ 2,3 \\ +\quad 1,09 \\ \hline 327,39 \end{array}$$

zaokruglimo zbir do jedinica, jer se smatra da taj zbir ima gornju granicu apsolutne greške 0,5 (ostali sabirci 0,05 i 0,005 su mali

---

[13]) Ovaj postupak se jedino i primjenjuje u praksi kad je broj sabiraka mali (ispod 10). Ukoliko je broj sabiraka veliki (od 10 – 99) radi se sa dvije rezervne cifre. Isto se radi i kod oduzimanja.

i mogu se zanemariti): 327.

c) koristimo pravilo rezervne cifre : ako nekoliko datih približnih brojeva ima više decimalnih mjesta (pri sabiranju i oduzimanju) nego ostali približni brojevi, onda ih treba prethodno zaokrugliti, tako da imaju jednu decimalnu cifru više nego približan broj sa najmanje decimalnih mjesta.

Prema tome imamo

$$\begin{array}{r} 324 \\ 2{,}3 \\ +\quad 1{,}1 \\ \hline 327{,}4 \end{array}$$

Pošto je rezervna cifra odigrala svoju ulogu, vršimo ponovno zaokruživanje (odbacivanje rezervne cifre) i dobivamo definitivan rezultat:

$$327.$$

70. Odredite na dvije decimale zbir ovih brojeva:

a) $3,5445 + 6,252$; b) $3,6439 + 4,3916 + 0,00612$;

c) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$; d) $1\frac{7}{9} + 2\frac{4}{9} + 5\frac{2}{3}$.

Rješenje. a) Skratimo zadane brojeve na tri decimale i nadimo zbir tako skraćenih (zaokruženih) brojeva:

$$3,545 + 6,252 = 9,797.$$

Uzmemo li korekturu od posljednje cifre, imo konačan rezultat: 980.

b) Slično prethodnom razmatranju imamo:

$$3,644 + 4,392 + 0,006 = 8,042 \approx 8,04.$$

c) $\frac{2}{3} = 0,6666\ldots$; $\frac{3}{5} = 0,600$;

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \approx 0,667 + 0,600 = 1,267 \approx 1,27.$$

d) $$1\frac{7}{9} + 2.\frac{4}{9} + 5\,\frac{2}{3} = 1,7777\ldots + 2,4444\ldots + 5,6666\ldots =$$

$$\approx 1,778 + 2,444 + 5,667 = 9,889 \approx 9,89.$$

71. Promatrajte brojeve $a = 2,54\ldots$, $b = 0,2541$, $c = 25,041$ te njihovu sumu izračunati dostiživom tačnošću. Koji je od ta tri broja najtačniji ?

Rješenje. Brojevi b i c su tačni (potpuni) dok je broj a približan (zašto je broj $2,545464\ldots$ potpun - racionalan broj uz pretpostavku da se cifre dalje nastavljaju po određenom pravilu ?). Otuda je zbir pouzdan na dvije decimale (kao i broj a).
Tako imamo (pošto je zbir pouzdan na 2 decimale):

$$a + b + c = 2,54\ldots + 0,2541 + 25,041 \approx$$

$$\approx 2,54 + 0,254 + 25,041 =$$

$$= 27,835 \approx 27,84.$$

72. Nađite na tri decimale $67,24798 - 12,54374$.

Rješenje. Skraćivanjem na četiri decimale, imamo:

$$\begin{array}{r} 67,2480 \\ -\ 12,5437 \\ \hline 54,7043 \end{array} = 54,704.$$

73. Nađite maksimalan broj pouzdanih mjesta u razlici brojeva $a = 50,348 \pm \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ i $b = 10,2579 \pm \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$.

Rješenje. Diferencija

$$d = a - b \approx 40{,}0901.$$

Granica apsolutne greške razlike (diferencije) je

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}0011 = 0{,}00055.$$

To znači da je $\Delta > \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$; zato u diferenciji dekadske jedinice 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5} itd. nisu pouzdane (značajne-važeće). Dakle,

$$d = 40{,}09 \pm \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}.$$

74. Odrediti dostiživom tačnošću :

a) $2{,}54\ldots - 1{,}4\ldots$; b) $1{,}4\ldots - 2{,}54\ldots$;

c) $75{,}493\ldots - (34{,}49\ldots - 52{,}48\ldots)$;

d) $7245_{\circ} - 2471_{\circ}$,[14] ; e) $72450 - 24710$.

Rezultat. a) 1 ; b) −1 ; c) 94 ; d) $477_{\circ\circ}$; e) 47740.

75. Približne brojeve $24{,}723\ldots$ i $18{,}4276\ldots$ pomnožite uz dostiživu tačnost (podrazumijevajući da je granica apsolutne greške $0{,}5\cdot 10^{-n}$).

Rješenje. Granica apsolutne greške proizvoda je :

$$\Delta = 24{,}723\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4} + 18{,}4276\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3} = \ldots =$$

$$= 0{,}104\cdot 10^{-1}.$$

---

14) $7245_{\circ}$ i $2471_{\circ}$ su nepotpuni, jer ne znamo jedinice.

To znači da apsolutna greška proizvoda može biti veća od polovine dekadske jedinice 10^{-2} (jer bi inače moralo biti $\Delta \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$) po dekadska jedinica 10^{-2} i one nižeg reda nisu pouzdane. Pošto je $\Delta = 0,104 \cdot 10^{-1} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$ $(= 0,5 \cdot 10^{-1})$ to su 10^{-1} i one jedinice višeg reda pouzdane.

Zato zahtijevamo (u ovom slučaju) da se proizvod odredi na jednu decimalu, ali ćemo raditi i sa 10^{-2} (dvije decimale) radi korekture. Imamo ovo:

$$24,72 \cdot 18,43 = 455,5896 \approx 455,6.$$

76. Nađite na dvije decimale količnik $274,459 : 3,4795$ (potpunih brojeva).

Rješenje.

$$274,459 : 3,4795 = 2744590 : 34795 = 78,88.$$

30 89 40
30580 0
27440 0
30835

Šta to znači kad smo na ostatak 30580 pripisali 0? Zašto u količniku nije tražena jedna rezervna cifra i zatim vršeno zaokruživanje?

77. Podijeliti približan broj 2,16 približnim brojem 148, u kojima su sve cifre važeće (granica apsolutne greške kod prvog je 0,01 a kod drugog 1).

Rješenje. Pošto oba broja imaju po tri značajne cifre, to će i količnik imati 3 značajne cifre. Tok računa je slijedeći:

$$2,16 : 148 \approx 0,0145$$

680
880
140

$$\frac{1}{0,0146}.$$

78. Odredite dostiživom tačnošću količnik nepotpunih brojeva $a = 274,459\ldots$ $b = 3,4795\ldots$

Rješenje. Granica apsolutne greške količnika $\frac{a}{b}$ je:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\,\Delta_b + b\,\Delta_a}{b^2} = \frac{274,469\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-4} + 3,4759\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}}{3,4795^2} =$$

$$= \ldots = 0,0154628 : 12,107\ldots = 0,007\ldots$$

To znači da se traženi količnik može odrediti pouzdano upravo na dvije decimale (jer je $\Delta = 0,007\ldots < \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} = 0,005$), ali zbog korekture radimo na tri decimale. Imamo

$$274,459\ldots : 3,4795\ldots = \ldots \approx 78,88.$$

79. Sabrati tri približna broja: $7,24\ldots$; $18,008\ldots$; $25,1321\ldots$ i njihov zbir podijeliti približnim brojem $62,1$ (sve napisane cifre kod n. brojeva su važeće).

Rješenje.

$$\left.\begin{array}{lcl} 7,24\ldots & \approx & 7,24 \\ 18,008\ldots & \approx & 18,008 \\ \underline{25,1321} & \approx & \underline{25,132} \end{array}\right\} +$$

$$50,380 \approx 50,38.$$

Dakle rezultat sabiranja ima 4 značajne cifre (primijetiti da rezultat mora imati tačnost kao i broj 7,24), dok djelilac ima 3 važeće cifre pa mora i količnik imati 3 važeće cifre.

Račun teče ovako:

$$50,38 : 62,1 = 503,8 : 621 \approx 0,811.$$

$$\begin{array}{l} 700 \\ \;790 \\ \;\;169 \end{array}$$

80. Zaokružiti broj 9152486,33523 do: (desetohiljaditih) 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0} (jedinica), 10^{1}, 10^{2}, … 10^{6} (miliona)

i u svim slučajevima odrediti granicu apsolutne greške.

Rezultat. Do 10^{-4} : 9152486,3352 ; $\Delta = 0,00003 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

Do 10^{-3} : 9152486,335 ; $\Delta = 0,00023 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

Do 10^{-2} : 9152486,34 ; $\Delta = 0,00477 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

⋮

Do 10^{2} : $91525\bar{0}0$; $\Delta = 13,66477 < \frac{1}{2} \cdot 10^{2}$.

⋮

Do 10^{4} : $91\acute{5}0000$; $\Delta = 2486,33523 < \frac{1}{2} \cdot 10^{4}$.

⋮

Do 10^{6} : 9000000 ; $\Delta = 152486,33523 < \frac{1}{2} \cdot 10^{6}$.

81. Kod brojeva $\pi = 3,1415926 \ldots$ i $\frac{1}{7} = 0,1428571 \ldots$ zadržati toliko tačnih [15] cifara da bi relativna greška dobijenih brojeva bila manja od 0,0001 kod prvog, i manja od 0,5 % kod drugog broja. Provjeriti rezultate.

Rezultat. kod prvog 3, kod drugog 2.

82. Sa koliko decimala treba računati $\sqrt{6583}$ i $\sqrt{3}$ da greška ne bude veća od 0,05 % ?

Rezultat.: 1 decimal, 3 decimala.

83. Izračunati: a) $(6102,37 \pm 0,05) + (6109,27 \pm 0,05)$;

b) $a \cdot b$ ako je $3,141 < a < 3,142$; $0,0781 < b < 0,0784$;

c) $4\frac{1}{3} + \pi + 0,08673$ sa greškom od $\pm 0,005$;

d) $0,45016 + \frac{2}{3} + 10,2 + 3,24678$ sa tačnošću od 0,3 % ; brojevi $\frac{2}{3}$ i 10,2 su tačni;

[15] Tačne cifre približnog broja su sve njegove cifre ako njegova apsolutna greška nije veća od polovine jedinice posljednjeg mjesta desetnog razreda.

e) $\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + 2 + 5{,}30167$ sa relativnom greškom $\delta = \frac{1}{200}$;

f) $E = \frac{1}{4} \cdot \frac{L^3 \cdot p}{a^3 b s}$ (modul Junge) i granicu relativne greške

za E ako je : $p = 20\,kg$, $\delta_p = 0{,}001$; $a = 3\,mm$, $\delta_a = 0{,}01$; $b = 4\,mm$, $\delta_b = 0{,}001$; $L = 50\,cm$, $\delta_L = 0{,}01$; $s = 2{,}5\,cm$; $\delta_s = 0{,}01$.

Rezultat. a) Nema tačnih cifara ; b) G – najveća vrijednost od $x = a \cdot b$, g – najmanja vrijednost od $x = a \cdot b$.

	G	g
a	3,142	3,141
b	0,0784	0,0781
x=a·b	0,247	0,245

c) 7,50 ; d) 14,56 ; e) 6,5 ;

f) $\ln E = 3\ln L + \ln p - 3\ln a - \ln b - \ln s - \ln 4$;

$$\frac{\Delta E}{E} = 3\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta p}{p} + 3\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta s}{s} ;$$

$$\delta_E = 3\delta_L + \delta_p + 3\delta_a + \delta_b + \delta_s = 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}001 + 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}081;$$

$$E = (2{,}10 \pm 0{,}17) \cdot 10^6\ kg/cm^2.$$

84. Sa kolikom tačnošću treba mjeriti $h = 45$ i $r = 35$ u formuli $R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{r}$ da bi se R dobilo sa tačnošću od 0,8 %.

Rezultat. Veličina r mora se mjeriti sa tačnošću od 0,1 % a h sa tačnošću 0,7 %.

§ 1.2. POJAM FUNKCIJE REALNE PROMJENLJIVE

1.2.1. Veličine (promjenljive i konstante)

85. Neka se u nekoj zatvorenoj posudi vrši sabijanje idealnog plina (gasa) uz uslov da je temperatura konstantna za vrijeme pokusa. Koje su veličine konstantne, a koje promjenljive [16] u ovom slučaju.

Rješenje. Poznato je iz (fizike) da Boyle-Mariotteov zakon za idealne plinove veže zapreminu V plina zatvorenog u posudi i pritisak (tlak) p koji na taj plin djeluje formulom $p \cdot V = C$, gdje je C konstanta uz uslov da je temperatura konstantna za vrijeme pokusa.
Prema tome, vidimo da su, u pomenutoj formuli, pritisak i zapremina promjenljive veličine, a proizvod $p \cdot V$ pritiska i zapremine konstantna veličina (stalna - nepromjenljiva u granicama problema koji se razmatra).

86. Data je formula

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h$$

po kojoj se izračunava (određuje) zapremina kuglinog isječka.

---

16) Pod pojmom veličina ne podrazumjeva se samo broj već i elementi proizvoljne prirode nekog skupa. Za dati skup X uvodimo poseban simbol, slovo, na primjer x, koji označava proizvoljan element tog skupa i koji zovemo promjenljivom veličinom ili varijablom. Ako skup ima samo 1 element onda se ovaj simbol zove konstanta. Dakle, konstanta je specijalan slučaj promjenljive veličine.
Međutim, stari pojam promjenljive veličine (veličine koje uzima različite vrijednosti) ostaje i dalje pogodan za mnoge probleme inženjerstva, pa i u predavanju opšteg kursa matematike.

Koje su veličine, u ovoj formuli, stalne a koje – promjenljive?

Rješenje. Veličine r i h su promjenljive, jer se radius r mijenja od kugle do kugle, a h čak od isječka do isječka iste lopte (a pogotovo od kugle do kugle). Međutim, veličine $\frac{2}{3}$ i π predstavljaju stalne (konstante i to apsolutne konstante – veličine koje imaju isto značenje u svakom slučaju, u svakom razmatranom problemu u kojem se pojavljuju).

87. Data je jednačina

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1 \ ; \ a,b \in R. \qquad (1)$$

Šta jednačina (1) definiše u Dekartovom prav. koord. sistemu i šta su a i b u ovoj jednačini (kakve veličine predstavljaju)?

Rješenje. Jednačina (1) definiše skup svih kružnica jediničnog poluprečnika u ravni xOy.

Veličine a i b su parametri[17] kružnice u parametarskom skupu kružnica; za $a=1$, $b=3$ dobija se potpuno određen krug s centrom u tački $(1,3)$.

Ima li razlike između parametra i konstante (konstantne veličine, apsolutne konstante i relativne konstante)?

88. Neka je dat trougao ABC i neka se tjeme C (datog trougla) kreće po pravoj, koja je paralelna osnovici (strani datog trougla) AB. Navedite neke promjenljive veličine koje predstavljaju vrijednosti

---

17) Parametar je veličina koja figurira u formulama i izrazima čija je vrijednost konstantna u granicama zadatka koji se razmatra, ali u drugom zadatku (naravno ako se u njemu pojavljuje) mijenja svoju vrijednost.

elemenata posmatranog varijabilnog trougla [18] ABC' (C' je položaj tačke C u raznim momentima pri kretanju) i specificirajte koje su od veličina parametri, a koje apsolutne konstante.

Rezultat. Npr. površina trougla je parametar (zašto), zbir uglova trougla – apsolutna konstanta (180°), uglovi na osnovici AB – promjenljiva veličina, visina koja odgovara osnovici – konstanta (relativna), visina povučena iz tjemena na osnovici – promjenljiva veličina itd.

1.2.2. Definicija pojma funkcije realne promjenljive (načini prikazivanja funkcija, određivanje oblasti definisanosti i skupa vrijednosti, iznalaženje formula koje definišu funkciju ako su poznate vrijednosti f-e u zadanim tačkama, jednakosti dviju funkcija)

89. Navesti nekoliko (bar tri) primjera (iz svakodnevnog života) koji ilustruju pojam funkcije $f: E_x \to E_y$, nezavisne varijable (promjenljive) x i zavisne varijable (promjenljive – vrijednosti

---

[18] Razlikuju se pravolinijski (jednodimenzioni i dvodimenzioni) i krivolinijski trouglovi. Jednodimenzioni trougao (pravolinijski) sačinjavaju tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj i tri duži sa krajevima u tim tačkama, dok se pod dvodimenzionim (pravolinijskim) trouglom, često podrazumijeva jednodimenzioni trougao zajedno sa unutrašnjim tačkama. Modeli jednodimenzionog i dvodimenzionog trougla imaju razna težišta: kod prvog, težište je u presjeku bisektrisa, kod drugog u presjeku medijana, ako je trougao jednakostraničan težišta se poklapaju. Iz konteksta je obično jasno koji se trougao posmatra; npr., kada se govori o površini trougla, obično se podrazumijeva dvodimenzioni trougao.

funkcije f na x) $y = f(x)$, [19].

Rješenje. Primjer 1. Označimo sa E_x skup svih predmeta (namjenjenih za prodaju) u nekom izlogu (prodavnice), a sa E_y skup njihovih cijena (odgovarajućih cijena predmeta u posmatranom izlogu). Svakom predmetu $x \in E_x$ pridružen je po jedan element[20] iz E_y, njegova cijena. Tu se radi o funkciji f koja npr. artiklu $x \in E_x$ pridružuje njegovu cijenu $f(x)$.
Primjer 2. Neka je E_x skup studenata prve godine studija nekog fakulteta koji su prisutni na nekom predavanju i F skup svih stolica koje se nalaze u sali u kojoj se drži predavanje. Svakom studentu $x \in E_x$ pridružimo stolicu iz F na kojoj on sjedi (za vrijeme pomenutog predavanja). Dobivamo funkciju f sa E_x u F (nije na F, jer je, obično, uvijek veći broj stolica nego broj prisutnih studenata – slušalaca predavanja; kada bi broj stolica u sali bio jednak broju studenata onda bi funkcija f bila uzajamno-jednoznačno preslikavanje sa E_x na F, tj. skup vrijednosti funkcije f bi se poklapao sa kodomenom – odnosno, $f(E_x) = E_y = F$ –; kada bi broj studenata bio veći od broja stolica, onda bi se

19) U tradiciji je da se kaže funkcija $f(x)$, umjesto f, mada $f(x)$ znači vrijednost funkcije f na x (ili u tački x). Tako se npr., kaže funkcija $f(x) = 3x^2$, a u stvari pravilno je kazati: data je funkcija f, definisana sa $f(x) = 3x^2$. U ovoj knjizi svjesno su upotrebljavana ova „nekorektna" izražavanja, jer su ona kraća od korektnih. (Uostalom, to čine i gotovo svi savremeni matematičari koji se bave matematičkom analizom).

20) Ako svakoj vrijednosti argumenta (nezavisne varijable) $x \in E_x$, odgovara jedna ili nekolike vrijednosti zavisne varijable $y \in E_y$, tada $f: E_x \to E_y$ nazivamo višeznačnom funkcijom od x. U daljnjem ćemo pod riječju „funkcija" razumjevati samo jednoznačne funkcije, ako ne bude izričito drukčije rečeno.
Kad god imamo dva neprazna skupa E i F među kojima je uspostavljena veza takva da je svakom x iz E pridružen po 1 element y iz F, kažemo da je zadana funkcija f na E s vrijednostima u F (F – kodomena) ili da f djeluje sa E u F.

desilo da bi na nekim stolicama sjedilo više od jednog studenta – što se ponekad dešava da sjede po dvojica studenata na jednoj stolici – pa bi opet imali funkciju f, sa E_x na F uz uslov da se specificira propis f tako da se zna da, npr., $y \in F$ odgovara bar jedan – ili više, ali tačno određenih elemenata iz E_x – element $x \in E_x$).

Primjer 3. Svakom studentu pripada njegovo prezime. Označimo li sa E_x skup svih studenata nekog fakulteta, tada i prezimena tih studenata obrazuju potpuno određen skup kojeg ćemo označiti, npr. sa F. Između elemenata skupa E i elemenata skupa F postoji potpuno određen odnos, jer svakom elementu $x \in E_x$ pripada potpuno određen element y iz skupa F. Dobivamo funkciju $f: E_x \to F$.

Napomena: U prethodna tri primjera, funkcija je definisana riječima, a inače, funkcija se može zadati sa jednim ili više analitičkih izraza, tablicom, grafički itd. – glavno je da bude zadan zakon odnosa: $x \to y = f(x)$.

Tako je sa formulom

$$f(n) = 2n \ ; \ n \in N,$$

definirana (zadana) funkcija f sa N u N (nije na N).

90. Dokazati postojanje funkcija sa nepraznog skupa E u neprazni skup F.

Dokaz. Uzmimo npr., $c \in F$ i svakom $x \in E$ pridružimo to c. Na taj način dobivamo funkciju $f: E \to F$ definiranu sa formulom

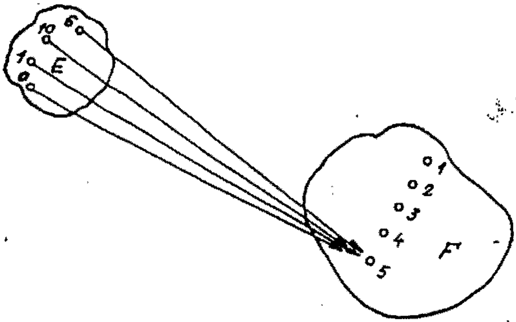
$$f(x) = c, \ \forall x \in E.$$

Ovakva funkcija naziva se konstantom.

(Napomenimo da funkcija f, definisana sa $f(x) = x$; $\forall x \in E$, predstavlja identitet ili identično preslikavanje sa E na E).

Uzmimo da je

$E = \{0, 1, 10, 6\}$, $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tada će na slici



biti prikazana konstanta f, koja je definirana prema slici [21], tj.

$$f(0)=f(1)=f(10)=f(6)=5.$$

Dakle, skup vrijednosti funkcije f je

$$E_y=f(E)=\{5\}\subset F \quad (F\text{ - kodomena, } E\text{ - domena}).$$

91. Neka je $f: E\to F$ proizvoljna funkcija. Za podskup $A\subseteq E$ stavimo $f(A)=\{f(x)\in F : x\in A\}$.

Dokazati relacije:

1° $(A\subseteq B)\Leftrightarrow(f(A)\subseteq f(B))$; $\quad 2^\circ$ $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

3° $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ (smatramo da je $f(\emptyset)=\emptyset$).

Primjerom dokaži da $f(A\cap B)$ može biti pravi dio od skupa $S=f(A)\cap f(B)$.

Rješenje. (dokazi) 1° ostavlja se dokaz za vježbu, kao i dokazi općenitije izjave u 2° i 3° (tj. za proizvoljne unije i presjeke skupova) koji su sasvim analogni sljedećem dokazu pod 2° i 3°.

$$2^\circ \quad [y\in f(A\cup B)]\Leftrightarrow[\exists x\in A\cup B : y=f(x)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\{[\exists x\in A : y=f(x)]\vee[\exists x\in B : y=f(x)]\}\Leftrightarrow\{[y\in f(A)]\vee[y\in f(B)]\}$$

$$\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B), \text{ tj. } f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

---

21) Prikaz funkcije f (na slici) je sugestivan; skupovi E i F skiciraju se pomoću točaka ravnine i onda od $x\in E$ povuče strelica prema elementu $y\in F$ u koji x prelazi pod djelovanjem funkcije f.

3° $\{y\in f(A\cap B)\}\Leftrightarrow\{\exists x\in A\cap B: y=f(x)\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\{[\exists x\in A: y=f(x)]\wedge[\exists x\in B: y=f(x)]\}\overset{?}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow\{y\in f(A)\wedge y\in f(B)\}\Rightarrow\{y\in f(A)\cap f(B)\}\Rightarrow$

$\{f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)\}$.

Općenito $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$ jer npr., ako su A i B disjunktni (isključivi) skupovi, tj. $A\cap B=\emptyset$, ne mora biti $f(A)\cap f(B)=\emptyset$.
Za ilustraciju uzmimo da je

$A=\{0,1,2,3,4,5\}$; $B=\{6,7,8,9,10\}$: funkcija $f:Z\to R$

definisana sa (više analitičkih izraza):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} \text{ za } x\in\{0,2,3\}\\ -1 \text{ za } x\in\{1,6\}\\ x^2-\sqrt{2} \text{ za } x\in Z\setminus\{0,1,2,3,6\}.\end{cases}$$

Očigledno je $A\cap B=\emptyset$ pa je i $f(A\cap B)=\emptyset$.
Međutim, $f(A)=\{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}=$

$$=\left\{\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 16-\sqrt{2}, 25-\sqrt{2}\right\}=\left\{-1, \frac{1}{2}, 16-\sqrt{2}, 25-\sqrt{2}\right\};$$

$$f(B)=\{-1, 49-\sqrt{2}, 64-\sqrt{2}, 81-\sqrt{2}, 100-\sqrt{2}\}$$

pa je

$$f(A)\cap f(B)=\{-1\}\neq\emptyset.$$

92. Navesti primjer funkcije definisane
a) induktivno;
b) formulom (sa R u R);
c) translacijom (sa R na R).

Rješenje. a) Neka je domena i kodomena skup N.
Definišimo funkciju $f: N \to N$ induktivno:

$$f(1)=1,\ f(2)=2\cdot f(1),\ f(3)=3\cdot f(2),\ \dots,\ f(n)=n\cdot f(n-1),\dots$$

Dakle, ako je $f(n)$ već definisano onda $f(n+1)$ definišemo sa $f(n+1)=(n+1)f(n)$. Zaključujemo da funkcija f broju n pridružuje broj $n!$ (en faktorijel $-\ n! \overset{def.}{=} 1\cdot 2\cdot 3 \dots n$), tj., $f(n)=n!;\ n\in N$.
Primijetimo da je slika

$$f(N) \neq N \text{ (tj. preslikavanje nije „na" } N),$$

jer je

$$f(N)=\{1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots\}=\{1, 2, 6, \dots, 1\cdot 2\dots n, \dots\}.$$

b) Neka je domena i kodomena skup R. Svakom x iz R pridružimo realan broj $x^2=x\cdot x$. Na taj način dobivamo funkciju $f: R \to R$ definisanu sa analitičkim izrazom (formulom):

$$f(x)=x^2,\ \forall x\in R.$$

Primijetimo da preslikavanje f nije sa R na R već sa R u R. Naime, slika $f(R)\neq R$, jer je

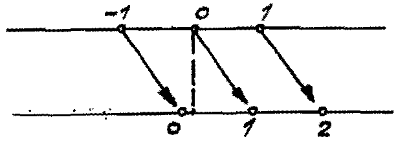
$$f(R)=\{y\in R: y=x^2;\ x\in R\}=\{y\in R: 0\le y<+\infty\}\neq R=(-\infty,+\infty).$$

To slijedi iz nama poznate činjenice da je kvadrat realnog broja (svakog) nenegativan broj i da za svako $b\geq 0$ postoji a iz R takvo da je $b=a^2$.

c) Neka je (opet) domena i kodomena skup R i neka je $a\neq 0$ realan broj (reakivna konstanta – parametar). Svakom broju $x\in R$ pridružimo broj $a+x$ ($\in R$, zašto mora biti $a+x\in R$?). Time smo definisali translaciju (udesno ako je $a>0$, ulijevo ako je $a<0$) skupa R za a. Tako za, npr., $a=1$ funkcija f, definisana sa

$$f(x)=a+x;\ \forall x\in R,$$

broj 0 šalje u 1, broj -1 u 0, broj 9 u 10 itd.
To se može prikazati pomoću slike na slijedeći način:

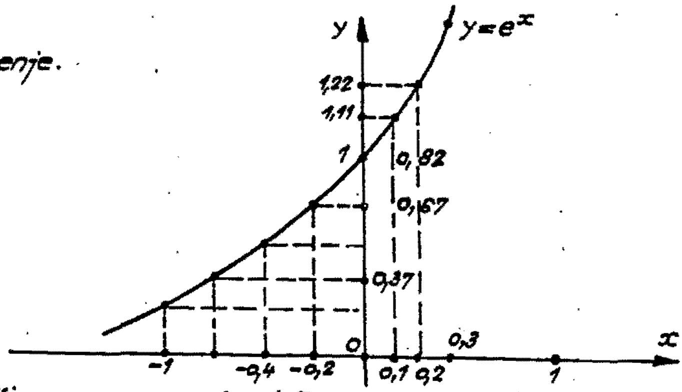


Primjetimo da je f preslikavanje R na R, tj. (surjekcija) $f(R)=R$. To slijedi otuda što za svako b iz R postoji $c \in R$ takvo da je $b=a+c$ (a je zadano).

93. Dato je tablica[22] značenja eksponencijalne funkcije (sa dva decimala). Konstruisati grafik spajanjem tačaka (koje se mogu predstaviti u koord. sist. xOy na osnovu tablice) nekom dosta glatkom krivom. Odgovarajuća tablica[23] je:

x	-1	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	1
$y=e^x$	$0,37$	$0,67$	$0,74$	$0,82$	$0,90$	1	$1,11$	$1,22$	$1,35$	$1,49$	$2,72$

Rješenje.

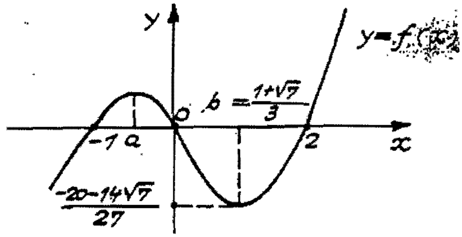


predstavili smo samo nekoliko tačaka (određenih sa gornjom tablicom).

22) Za funkcije koje se često pojavljuju u vrlo različitim problemima (trigonometrijske, eksponencijalne, logaritamske, Besselove, eliptički integrali i mnoge druge) napravljene su tablice na osnovi svojstava tih funkcija. Za argumente tih funkcija koji nisu u tablicama, vrijednosti f-e određuju se interpolacijom i ekstrapolacijom (metode koje se izučavaju na ETF-u u predmetu Matematika VI - numerička matematika). Time tablice praktički i zamjenjuju funkcije.

23) Preporučljivo je služiti se logaritmarom pri sastavljanju tabela (vršiti izračunavanje logaritmarom).

94. Dat je grafički prikaz



funkcije f definisane sa „jednačinom" $y=f(x)$.

a) Odredite domen $\mathcal{D}(f)$.

b) Odredite sliku funkcije f, tj. $\mathcal{R}(f)$ i kodomen.

c) Odredite $\sup \mathcal{R}(f)$ i $\inf \mathcal{R}(f)$.

d) Da li je graf simetričan u odnosu na neku tačku (ishodište) ili pravu (neku od osa ili ipak drugu pravu)?

e) Za koje vrijednosti promjenljive x funkcija ima vrijednost nula, pozitivnu vrijednost, negativnu vrijednost (dostiže li funkcija f svoju najmanju i najveću vrijednost na cijelom domenu – kakva je situacija na segmentu $[-1,2]$)?

f) Šta još možete reći o funkciji f?

g) Ako se zna da je data (grafički) funkcija $f(x)$ polinom trećeg stepena, odrediti analitički izraz funkcije f i obrazložiti kako se njen grafik može konstruisati poznavanjem grafova prostijih funkcija (kojih?).

Rješenje.

a) Smatrajući da se grafik funkcije f, definisane sa $y=f(x)$, proteže u beskrajnost – beskonačnost (i s jedne i s druge strane x-ose), zaključujemo da je područje definicije (prirodno) funkcije f cijeli skup realnih brojeva, tj. da je $\mathcal{D}(f)=R$, jer se, sa grafičkog prikaza, vidi da svakom realnom broju x (predstavljenom tačkom na x-osi) odgovara realan broj $y=f(x)$, koji je predstavljen tačkom na y-osi).

b) Pošto funkcija f realnom broju x pridružuje opet realan broj, zaključujemo da je kodomen skup R, tj. da funkcija f preslikava skup R u R. Dokažimo da je to preslikavanje „na", tj. da je slika

$$\mathcal{R}(f)\ (=f(R)) = R.$$

Stvarno, sa slike se vidi da funkcija f poprima svaku realnu vrijednost (svaki realan broj na y-osi predstavlja ordinatu tačke (x,y) na grafiku funkcije f; gdje je $y=f(x)$, tj. $f(R)=(-\infty,+\infty)$.

c) Iz razmatranja pod b) slijedi da je

$$\sup \mathcal{R}(f) = \sup f(R) = \sup R = +\infty,$$

$$\inf \mathcal{R}(f) = \inf f(R) = \inf R = -\infty.$$

d) očigledno (= ?), grafik nema nikakve simetrije.

e) Kada x raste od $-\infty$ do -1 onda vrijednost funkcije f raste od $-\infty$ do nule, kada x raste od -1 do a onda $y=f(x)$ raste od 0 do $f(a)$ (= lokalni maksimum); kada x raste od a do b onda y opada od $f(a)$ do $f(b)$ (= lokalni minimum); kada x raste od b do $+\infty$ onda y raste od $f(b)$ do $+\infty$.

Vidimo da je vrijednost funkcije jednaka nuli za $x=-1$, $x=0$, i $x=2$; $y>0$ za $x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$; $y<0$ za $x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)$.

Pošto je $\sup f(R)=+\infty$ i $\inf f(R)=-\infty$, to zaključujemo da funkcija ne dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost (ne postoji $x\in R$ takvo da je $f(x)=\sup f(R)\ (=+\infty)$, niti postoji $x'\in R$: $f(x')=\inf f(R)$ $(=-\infty)$, funkcija f je neograničena i odozdo i odozgo na $(-\infty,+\infty)$. Međutim, na segmentu $[-1,2]$ je:

$$y_{min}=\inf f([-1,2])=f(b)=-\frac{20+14\sqrt{2}}{27};$$

$$y_{max}=\sup f([-1,2])=f(a).$$

f) Funkcija f je strogo monotona (nema intervala konstantnosti) po dijelovima na intervalu $(-\infty,+\infty)$, jer postoji konačno mnogo tačaka $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ takvih da je f strogo monotona u svakom od $(-\infty, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_n, +\infty)$. Zapravo funkcija f je strogo monotona u svakom od intervala:

$$(-\infty, a], [a, b], [b + \infty).$$

Funkcija f nije ni parna ni neparna; nije ni periodična.
Grafik je neprekidna glatka kriva (sličan kubnoj paraboli), siječe koordinatne ose itd.

g) Da bi f bila polinom trećeg stepena, njen analitički izraz mora imati oblik

(1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, b, c, d \in R$; $a \neq 0$.

Uvrštavajući u (1) vrijednosti (koje se mogu očitati sa grafika)

$$f(-1) = 0 \;,\; f(0) = 0 \;,\; f(2) = 0 \;\; i \;\; f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{20+14\sqrt{7}}{27}$$

dobivamo (sistem od četiri jednačine - linearne sa četiri nepoznate - a, b, c, d):

$$0 = -a + b - c + d$$
$$0 = d$$
$$0 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$-\frac{20+14\sqrt{7}}{27} = \frac{22+10\sqrt{7}}{27}a + \frac{8+2\cdot\sqrt{7}}{9}b + \frac{1+\sqrt{7}}{3}c + d.$$

Rješavajući prethodni sistem (metodom zamjene - supstitucije) dobivamo da je $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ i $d = 0$.
Prema tome, polinom $f(x)$ ima oblik

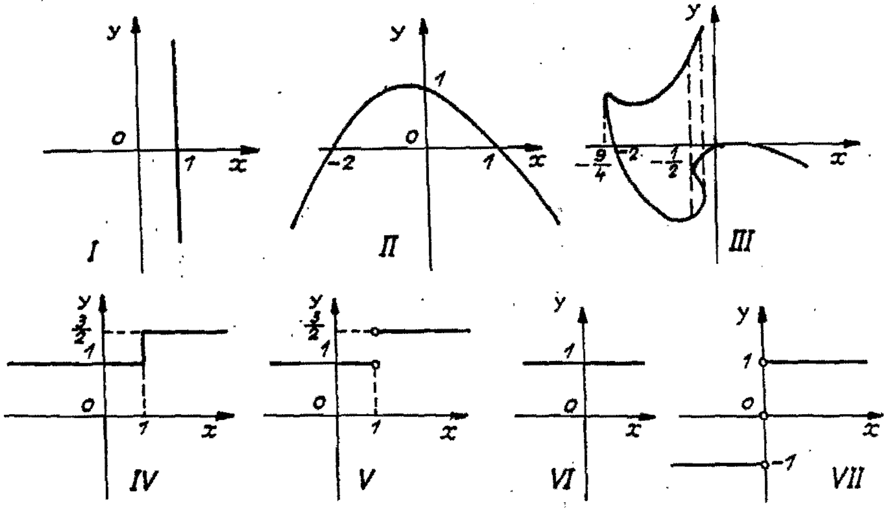
(2) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x \quad (= x(x+1)(x-2))$.

Grafik funkcije oblika (2) može se dobiti „zbrajanjem" grafika polinoma x^3, $-x^2 - 2x$. Kada je x dosta udaljeno od ishodišta O (tj. kada je x bar izvan intervala $[-1, 2]$ onda funkcija x^3 preovladava $-x^2 - 2x$ i kad $x \to \pm\infty$ grafik f se ponaša kao grafik funkcije x^3. Na segmentu $[-1, 2]$ situacija je drukčija (što se može zaključiti i upoređivanjem grafika funkcija f, x^3 i $-x^2 - 2x$).

Primjedba. Za vježbu izvršiti slično razmatranje za polinom

$$f(x) = x^3 + 3x.$$

95. Date su krive (krive linije) u ravni xOy sljedećim crtežima:



Koje od gornjih krivulja (sa slika I–VII) predstavljaju grafike nekih funkcija (jednoznačnih, iz R u R) argumenta x,[24]?

Rješenje. Krive na crtežima II, V, VI predstavljaju grafike nekih funkcija f, definisanih sa $y = f(x)$, jer svaki pravac paralelan sa y-osi siječe pomenute krive u najviše jednoj tački.

24) Nije svaka kriva ravnine grafik neke funkcije (misli se na jednoznačnu f-u f, definisanu sa $y = f(x)$ – eksplicitni oblik f-e jedne promjenljive za razliku od tzv. implicitnog oblika: $F(x, y) = 0$, koji će se proučavati u poglavlju „Funkcije više promjenljivih"):
kriva (skup $\Gamma \subseteq R \times R$) predstavlja grafik neke funkcije f, definisane sa $y = f(x)$, ako svaki pravac paralelan sa y-osi siječe krivu, (skup Γ) u najviše jednoj tački. Zato treba paziti kod „slobodnog" skiciranja grafika prilikom raznih razmatranja (dokaza, rješavanja zadataka itd.).

Međutim, krive na crtežima I, III, IV i VII ne predstavljaju grafik nikakve funkcije f, definisane sa $y=f(x)$; paralela sa y-osi kroz tačku $(1,0)$ ima sa krivima na slikama I i IV beskonačno zajedničkih tačaka, paralela sa y-osi kroz tačku $(-\frac{1}{2},0)$ ima sa krivom na slici III tri zajedničke tačke, dok paralela sa y-osi kroz tačku $(0,0)$ ima sa krivom na na slici VII tri zajedničke tačke (uporediti grafik funkcije f, definisane sa $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, sa krivom na slici $VIII$).

Napomenimo da kriva na slici I predstavlja funkciju f, definisanu sa $x=f(y)=1$; $\forall y \in R$ (pravac paralelan sa x-osi siječe krivu samo u jednoj tački), dok grafici sa slika III, IV i VII ne predstavljaju ni funkciju od argumenta y - zašto ?

96. Izračunajte $f(0)$, $f(-\frac{3}{4})$, $f(-x)$, $f(-\frac{1}{x})$, $\frac{1}{f(x)}$, ako je

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}.$$

Rezultat. 1 ; $\frac{5}{4}$; $\sqrt{1+x^2}$; $|x^{-1}|\cdot\sqrt{1+x^2}$; $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

97. Funkcija f definisana sa $y=f(x)$, je linearna (polinom prvog stepena). Nađite analitički oblik ove funkcije ako je $f(0)=-1$. i $f(-1)=0$.

Rezultat. $f(x)=-x-1$; $\forall x\in R$.

98. Analitički oblik funkcije f

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{za} \quad x\leqslant 5\\ -5 & \text{za} \quad 5<x\leqslant 10\end{cases}$$

napisati pomoću jedne formule, koristeći se oznakom apsolutne veličine.

Rezultat. $f(x)=-x+\frac{1}{2}(x-5+|x-5|)$; $\forall x\in R\setminus(10,+\infty)$.

99. Neka je X skup realnih brojeva x za koje je $0 \leq x \leq 2$, Y skup svih realnih brojeva, propis korespondencije $y = x^2$, tj. broj y iz Y koji odgovara broju x iz X dobije se kad se x kvadrira. Odrediti oblast vrijednosti funkcije $f(x)$.

Rješenje. Očigledno da je

$$f(X) = \{y \in Y;\quad 0 \leq y \leq 4\}.$$

Primjedba. Uz propis $y = x^2$ mogli smo za definicionu oblast mjesto skupa $0 \leq x \leq 2$ uzeti ma koji skup realnih brojeva pošto ovaj propis obezbjeđuje da se za svako realno x nađe odgovarajući realan broj y.

100. Propis kojim je data funkcija neka je $y = 3\cdot\sqrt{1-x^2}$, definiciona oblast x neka je skup svih realnih brojeva za koje izraz $3\cdot\sqrt{1-x^2}$ ima realnu vrijednost (ako u narednim zadacima treba odrediti definiciono područje onda se misli na to da to bude takav skup vrijednosti x za koje funkcija uzima (konačnu) realnu vrijednost). Odrediti definicionu oblast (područje) te funkcije i skup vrijednosti $f(X)$,[25].

Rješenje. Funkcija uzima konačnu vrijednost za svako konačno (realno) x, a realnu vrijednost samo za one x za koje je

$$(1-x^2 \geq 0) \Leftrightarrow (x^2 \leq 1) \Leftrightarrow (|x| \leq 1) \Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 1),$$

---

[25] Ako je funkcija f definirana formulom redovno se odstupa od opšte definicije funkcije. Naime za def. f-e treba imati E_x domen (ili skup $A \supseteq E_x$) i kodomen (skup B u koji se preslikava skup E_x) ili pak skup vrijednosti $f(E_x)$. Kod zadavanja f-e formulom „šutke" se ispušta skup E_x s tim (ako područje definicije nije potpuno specificirano) što se smatra da se definiciono područje $\mathcal{D}(f)$ sastoji od realnih brojeva $x \in R$ za koje dati (odgovarajući, koji definiše f) analitički izraz (jedna ili više formula, relacija) ima smisla i koji zadovoljavaju eventualno postavljene uslove (zahtjeve), a kodomen je skup realnih brojeva R. Takvo područje definicije zove se prirodno područje definicije funkcije f iz R u R. (do tačke 1.2.6. U paragrafu § 1.2. posmatraju se jednostavne elem. f-e koje su maturantu srednje škole poznate).

Prema tome definiciono područje je

$$X = \{x \in R: \quad -1 \leq x \leq 1\}.$$

Najveća vrijednost funkcije je za $x=0$, a najmanja za $x=1$;

$$y_{min} = 0 \text{ za } x=1, \text{ a } y_{max} = 3 \text{ za } x=0.$$

Zbog toga je

$$f(X) = \{y \in R; \quad 0 \leq y \leq 3\}.$$

101. Neka je X skup svih cijelih brojeva >1, Y- skup svih prostih brojeva, propis po kojem se preslikava X u Y neka je slijedeći: y koje odgovara jednom x je najmanji prost broj koji nije manji od x. Odrediti uređene parove (x,y).

Rješenje. Očigledno da se radi o parovima oblika

$(2,2)$; $(3,3)$; $(4,5)$; $(5,5)$; $(6,7)$; $(7,7)$;
$(8,11)$; $(9,11)$; $(10,11)$; itd.

102. Odrediti područja (prirodna) definicije slijedećih f-a:

a) $y = \sqrt{x-2}$; b) $y = \sqrt[3]{x-2}$; c) $y = \sqrt[2n]{x-2}$, $n \in N$;

d) $y = \sqrt[2n+1]{x-2}$, $n \in N$; e) $y = \dfrac{1}{x-2}$; f) $y = \dfrac{1}{x^2+2}$;

g) $y = x \cdot \sqrt{x-2}$; h) $y = x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; i) $y = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x-2}}$;

j) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$; k) $y = \sqrt{2+x-x^2}$; l) $y = \sqrt{x-x^3}$.

Rješenje. a) $\sqrt{x-2}$ je realan broj ako i samo ako je $x-2 \geq 0$, tj. $x \geq 2$. Prema tome funkcija je definisana za sve realne brojeve x koji zadovoljavaju uslov:

$$2 \leq x < +\infty,$$

odnosno

$$E_x \; (= \mathcal{D}(f)) = \{x \in R : 2 \leq x < +\infty\} \; (= [2, +\infty)).$$

b) $\sqrt[3]{x-2}$ je realan broj za svako x iz R (jer se radi o neparnom korijenu) pa je

$$E_x = R.$$

c) Analogno kao pod a) imamo

$$E_x = [2, +\infty), \text{ (zašto ?)}.$$

d) Analogno kao pod b):

$$E_x = R, \text{ (zašto ?)}.$$

e) Budući da je dijeljenje s nulom apsolutno isključeno (zašto ?) u skupu R, to mora biti

$$x-2 \neq 0, \text{ tj. } x \neq 2; \text{ dakle } 2 \notin \mathcal{D}(f), \text{ pa je}$$

$$\mathcal{D}(f) = R \setminus \{2\}. \; (= \{x \in R : x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)).$$

f) Budući da je $x^2+2 \neq 0$ za svako x iz R (čak je $x^2+2 > 0$ za $\forall x \in R$!), to je

$$E_x = R.$$

g) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2}$ je realan broj[26] ako i samo ako je $(x-2 \geq 0 \vee x = 0)$, tj.

$$E_x = \{0\} \cup [2, +\infty), \text{(tako je } f(0) = 0, \text{ ali } f(1) \text{ nema smisla},$$

jer $1 \notin E_x$).

h) Prema g) mora biti

$$2 \leq x < +\infty \vee x = 0 \qquad (1)$$

---

[26] Napomenimo da je $0 \cdot \sqrt{-2} = 0$ (realan broj, iako je $\sqrt{-2}$ imaginaran broj).

a prema e) mora biti

$$x \neq 2 \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi da je

$$E_x = \{0\} \cup (2, +\infty).$$

i) Prema h) mora biti

$$2 < x < +\infty \vee x = 0 \qquad (3)$$

ali sada mora biti

$$x \neq 0 \qquad (4)$$

jer je dijeljenje s nulom isključeno u R.

Iz (3) i (4) slijedi da je

$$E_x = (2, +\infty).$$

j) $\sqrt{x^2-2}$ je realan broj ako i samo ako je $x^2-2 \geqslant 0$, tj. $x^2 \geqslant 2$. No

$$(x^2 \geqslant 2) \Leftrightarrow (|x| \geqslant \sqrt{2}) \Leftrightarrow (-\infty < x \leqslant -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leqslant x < +\infty). \qquad (5)$$

Međutim, također mora biti (zašto?)

$$x^2 - 2 \neq 0. \qquad (6)$$

Iz (5) i (6) slijedi da je

$$E_x = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

k) $\sqrt{2+x-x^2}$ je realan broj ako i samo ako je $2+x-x^2 \geqslant 0$, tj. $x^2-x-2 \leqslant 0$, ili $(x+1)(x-2) \leqslant 0$. No

$$\{(x+1)(x-2) \leqslant 0\} \Leftrightarrow \{[(x+1 \geqslant 0) \wedge (x-2 \leqslant 0)] \vee [(x+1 < 0) \wedge (x-2 > 0)]\}$$

$$\Leftrightarrow \{[-1 \leqslant x \leqslant 2] \vee [(x < -1) \wedge (x > 2)]\}$$

$$\Leftrightarrow \{(x \in [-1, 2] \vee (x \in \emptyset)\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in ([-1, 2] \cup \emptyset) = [-1, 2]\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in [-1, 2]\}.$$

Prema tome

$$E_x = [-1, 2]$$ (do ovoga se moglo doći i pomoću tzv. tabličnog metoda ili crtanjem grafika f-e $y = 2 + x - x^2$).

l) $\sqrt{x - x^3}$ je realan broj ako i samo ako je

$$x - x^3 \geqslant 0, \text{ tj. } x(1 - x^2) = x(1-x)(1+x) \geqslant 0.$$

Koristeći metod ekvivalencija (kao pod k), tablični metod ili grafički metod (ili neki drugi metod) dobije se

$$(x - x^3 \geqslant 0) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1] \text{ pa je}$$

$$E_x = (-\infty, -1] \cup [0, 1].$$

103 Odredite oblast definicije funkcija:

a) $f(x) = 2 + \sqrt{3} - \dfrac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1+x}$;

b) $g(x) = 2 + \sqrt{3} - \dfrac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1+x}$,

(Šta znači $3^{\frac{1}{2}}$ a šta $3^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$?, ima li smisla $(-3)^{\frac{1}{2}}$, $(-3)^{\frac{1}{3}}$, $(-3)^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$?);

c) $$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 - 2} & \text{za } x < 10 \\ \sqrt{x+1} & \text{za } x \in \{10, 11, 12, \dots, 20\} \\ \sqrt{x^2 - 2} & \text{za } x \in (20, +\infty): \end{cases}$$

d) $$f(x) = (1 - x - \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{|x-1| + 1}}.$$

Rješenje.

a) $\sqrt{4 - x^2}$ $(= (4 - x^2)^{\frac{1}{2}})$ je realan broj a. i s. a. je

$$4 - x^2 \geqslant 0, \text{ tj. } x^2 \leqslant 4. \text{ No}$$

$$(x^2 \leqslant 4) \Leftrightarrow (-2 \leqslant x \leqslant 2). \qquad (1)$$

Takođe mora biti (zašto ?)

$$1+x\neq 0 \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi da je

$$E_x=[-2,-1)\cup(-1,2].$$

b) Prema a) mora biti

$$-2\leqslant x\leqslant 2\wedge x\neq -1, \qquad (3)$$

a prema zahtjevu zadatka

$$x<3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\ (\approx 1{,}73<2). \qquad (4)$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$E_x=[-2,-1)\cup(-1,\sqrt{3}).$$

Napomena. Za odgovore na pitanja u b) (ukoliko niste u stanju sami odgovoriti) korisno bi bilo pročitati; na primjer, POGLAVLJE 3 : LOGARITMIRANJE I ANTILOGARITMIRANJE iz knjige ALGEBRA za drugi razred gimnazije od autora dr. Đ. KUREPE i B. PAVLOVIĆA.

c) $x\sqrt{x^2-2}$ je realan b. a. i s. a. je

$$(x^2-2)\geqslant 0)\vee(x=0) \qquad (5)$$

Zbog uslova $x<10$ i uslova (5), mora biti

$$(x=0)\vee(|x|\geqslant\sqrt{2})\wedge(x<10),$$

odnosno

$$E_1=(-\infty,-\sqrt{2}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{2},10).$$

$\sqrt{x+1}$ je realan broj a. i s. a. je

$$x+1\geqslant 0. \qquad (6)$$

Zbog (6) i uslova $x\in\{10,11,\cdots,20\}$, mora biti

$$x\in\{10,11,\ldots,20\},$$

odnosno

$$E_2 = \{10, 11, \dots, 20\}.$$

$\sqrt{x^2-2}$ je realan broj za svako x iz R, pa je, zbog uslova $x \in (20, +\infty)$,

$$E_3 = (20, +\infty).$$

Prema tome područje definicije funkcije f je

$$E_x = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 10] \cup \{11, 12, \dots, 19\} \cup [20, +\infty).$$

d) $(1-x-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$ je realan broj a. i s. a. je

$$1 - x - \sqrt{2} \geq 0, \qquad (7)$$

a $\sqrt{\dfrac{x^2-x+2}{|x-1|+1}}$ je realan broj za svako x iz R (zašto?) pa je

$$E_x = (-\infty, 1-\sqrt{2}].$$

104. Odrediti skupove vrijednosti [27] funkcija iz prethodnog zadatka.

Rješenje. a) Kada x raste od -2 do -1 onda y raste od $2+\sqrt{3}$ (uzimajući i vrijednost $2+\sqrt{3}$) do $+\infty$, a kada x raste od -1 do 2 y raste od $-\infty$ do $2+\sqrt{3}$ (dostižući i vrijednost $2+\sqrt{3}$) (zašto?).

Prema tome imamo da je

$$f(E_x) = [2+\sqrt{3}, +\infty) \cup (-\infty, 2+\sqrt{3}] = R.$$

b) Analogo razmatranjem kao pod a), zaključujemo da je

$$g(E_x) = [2+\sqrt{3}, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{4+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right),$$

gdje je $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = f(\sqrt{3})$ (g ne „umije" djelovati na $\sqrt{3}$, ali njena vrijednost raste do $f(\sqrt{3})$ — nikad ne dostižući tu vrijednost, kada x raste do $\sqrt{3}$.

27) Zadatke ovakvog tipa (tj. određivanje $f(E_x)$) ćemo lakše (i preciznije u većini slučajeva) rješavati koristeći DIFERENCIJALNI RAČUN, NEPREKIDNOST I LIMES

c) kada x raste od $-\infty$ do $-\sqrt{2}$ onda y raste od $-\infty$ do 0; za $x=0$ je i $y=0$; kada x raste od $\sqrt{2}$ do 10 onda y raste od 0 do

$10\cdot\sqrt{10^2-2}=10\sqrt{98}$; za $x=10,11,12,\ldots,19,20 \Longrightarrow$

$y=\sqrt{11},\sqrt{12},\sqrt{13},\ldots,\sqrt{20},\sqrt{21}$; kada x raste od 20 do $+\infty$

onda y raste od $\sqrt{20^2-2}$ do $+\infty$.

Prema tome imamo

$$f(E_x)=(-\infty,0]\cup\{0\}\cup[0,10\sqrt{2})\cup\{\sqrt{11},\sqrt{12},\sqrt{13},\ldots,\sqrt{21}\}\cup$$

$$\cup(\sqrt{398},+\infty)=(-\infty,+\infty)=R.$$

d) Funkcija $x^2-x+2=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{4}{7}$ opada od $+\infty$ do $\frac{7}{4}$ kada x raste od $-\infty$ do $\frac{1}{2}$ (nas dalje ne interesuje zbog područja definicije funkcije

$$f(x)=(1-x-\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{|x-1|+1}}$$

, čak nas interesuje samo $x\leqslant 1-\sqrt{2}$).

Funkcija $|x-1|+1$ takođe opada u intervalu $(-\infty,1-\sqrt{2}]$ i to brže od x^2-x+2 (napomenimo da funkcija $\frac{x^2-x+2}{|x-1|+1}$ tek u tački $x=0$ prelazi iz opadanja u raščenje, zašto?) pa minimalnu vrijednost na intervalu $(-\infty,1-\sqrt{2}]$, dostiže izraz $\left(\frac{x^2-x+2}{|x-1|+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ u tački $x=1-\sqrt{2}$.

Vrijednost izraza $(1-x-\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$ opada od $+\infty$ do 0 kada x raste od $-\infty$ do $1-\sqrt{2}$.

Prema tome

$$f(E_x)=[0,+\infty)+[\sqrt{-6+5\sqrt{2}},+\infty)=$$

$$=[\sqrt{-6+5\sqrt{2}},+\infty).$$

Napomena. Skicirati (približno) grafike funkcija razmatranih u ovom zadatku, posebno je korisno vršiti skiciranja grafika prilikom određivanja slika funkcija.

105) Ispitati jednakost i negaciju jednakosti funkcija f i g (da li su jednake ili ne) u slijedećim slučajevima [28]:

a) $f: R \to R$ definisano sa $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{\sin^2 2x}{2}$, $\forall x \in R$;

$g: R \to R$ definisano sa $g(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x$, $\forall x \in R$;

b) $f: R \to R$ definisano sa $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{\sin^2 2x}{2}$, $\forall x \in R$

$g: R \to \{-1, 01\}$ definisano sa $g(x) = 1$, $\forall x \in R$;

c) funkcije f i g iz R u R su ovako definisane

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad \forall x \in R$$
$$g(x) = 1 \quad ; \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);$$

d) $f(x) = \sqrt{x^2} - x$, $g(x) = 0$;

e) $f(x) = \sqrt{x^2} - x$, $(\forall x > 1)$, $g(x) = 0$;

f) $f(x) = 2\ln x^2$, $g(x) = 4\ln x$;

g) $f(x) = \cos x$, $(x > 0)$, $g(x) = \cos x$;

h) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1. \end{cases}$

Rješenje. a) Transformacijom dobivamo

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 1, \ \forall x \in R \\ g(x) = 1, \ \forall x \in R \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Da bi funkcije f i g bile jednake ($f = g$) moraju biti ispunjena ova

28) Mjesto jednake, ponekad se kaže ekvivalentne funkcije.

tri uslova (i samo ona):

1° f i g su definirane na istom skupu E;

2° f i g imaju iste kodomene;

3° $f(x) = g(x)$ za svako x iz E.

Iz (1) i postavke zadatka, slijedi da su sva tri, pomenuta, uslova za jednakost funkcija f i g ispunjena pa je

$$f = g,$$

tj. f je jednaka funkciji g.

b) f i g nisu jednake, jer su im kodomene različite. Da li imaju slike (skupove vrijednosti) jednake?

c) Nije ispunjen uslov 1°, jer funkcija g nije definisana u $x=0$. Zato je $f \neq g$.

d) f i g su definisane na R i imaju jednake kodomene, ali nije ispunjen uslov 3°, jer

$$f(x) = \sqrt{x^2} - x = |x| - x = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

pa je $f \neq g$.

Primjetimo da je $f = g$ na intervalu $[0, +\infty) = E_1$ (što je korektnije pisati $f|E_1 = g|E_1$, gdje je $f|E_1$ funkcija (suženje–ograničenje od f) definisana sa $(f|E_1)(x) = f(x)$ za svako x iz E_1).

e) Za $x > 1$ imamo

$$f(x) = \sqrt{x^2} - x = x - x = 0,$$

ali je opet $f \neq g$, jer je $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(g)$, (šta je $\mathcal{D}(f)$ a šta $\mathcal{D}(g)$?).

f) $f \neq g$, jer su im područja definicije različita,

$$(\mathcal{D}(f) = R \setminus \{0\}, \quad \mathcal{D}(g) = (0, +\infty)).$$

Međutim,

$$f|(0,+\infty) = g|(0,+\infty).$$

g) $f \neq g$, jer su im oblasti definisanosti različite.

h) $f \neq g$, jer postoji bar jedan element (u ovom slučaju $x=1$) $a \in E$ takav da je $f(a) \neq g(a)$.

Napomena. Iz rješenja ovog zadatka slijedi upozorenje da treba biti oprezan kod transformacija izraza i kod rješavanja problema vezanih za funkcije (pojam).

1.2.3. Grafičko predstavljanje funkcije[29] (nekih jednostavnijih funkcion. zavis.)

106. Nacrtajte grafike ovih funkcija:

a) $f(x) = 2x-1$, $\forall x \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$;

b) $f(x) = 2x-1$, $-2x-1$, $\frac{1}{2}x-0{,}1$;

c) $f(x) = 2x^2$, $2(x-1)^2$, $2x^2+2$, $2(x-1)^2+2$, $\frac{1}{2}x^2+x+1$;

e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$, $\left|\dfrac{2x-1}{3x+2}\right|$, $\operatorname{sign}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)$;

d) $f(x) = x^3$, x^3+1, $(x+1)^3$, x^4, $2x^2-x^4$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $\dfrac{1}{|x^2-1|}$, $\dfrac{1}{3x^2-2x+1}$, $\dfrac{1}{3x^2-2x+1}+2$

---

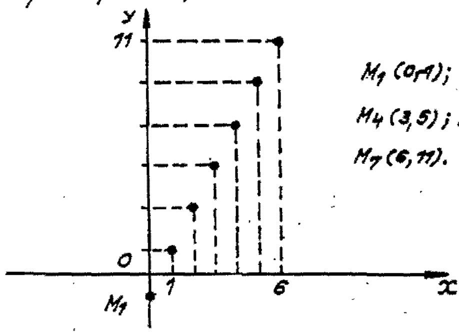
29) Predstavljaćemo uglavnom funkcije date analitičkim izrazom (teorijskom formulom dobijenom deduktivnom metodom uz ove ili one uslove, za razliku od empiričkih funkcija koje predstavljaju izvjesnu korespondenciju uspostavljenu mjerenjem ili posmatranjem stručnjaka - matematičara, fizičara, hemičara, ekonomista, liječnika, inženjera i dr.).

9) $f(x) = \frac{2}{x^3}$ b) $\frac{10}{x^2+1}$, $\frac{2x}{x^2+1}$, $x + \frac{1}{x^2}$, $x^2 + \frac{1}{x}$.

Rješenje. a) Data funkcija definisana je na konačnom skupu (od 7 elemenata) i njen grafik se sastoji od konačno mnogo tačaka (koje možemo sve nacrtati). Sastavimo tablicu:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-1	1	3	5	7	9	11

Sada ćemo tačke (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ nacrtati (konstruisati) u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu xOy (mogli smo izabrati i neki drugi sistem koordinata kao: afini – specijalno kosougli, krivolinijski – specijalno polarni):



$M_1(0,-1)$; $M_2(1,1)$; $M_3(2,3)$

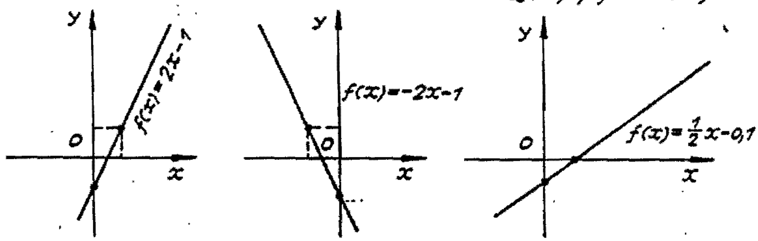
$M_4(3,5)$; $M_5(4,7)$; $M_6(5,9)$

$M_7(6,11)$.

b) Funkcija f je definisana na beskonačnom skupu i prima beskonačno različitih vrijednosti (funkcije s kojim ćemo se ubuduće baviti pretežno će biti definisane na beskonačnom skupu i primaće beskonačno različitih vrijednosti). Jasno je da je nemoguće nacrtati grafik takve funkcije, jer je to beskonačni skup tačaka ravni. Zbog toga se nacrta nekoliko tačaka koje pripadaju grafiku, te tačke se spoje nekom otsta glatkom krivuljom (da li tačka predstavlja, u opštem slučaju, krivu ?) i dobiveni skup se smatra grafikom funkcije f. Uzmemo nekoliko vrijednosti argumenta, nađemo odgovarajuću vrijednost funkcije i sastavimo tablicu (za date linearne funkcije):

x	-1	0	1	2	3	4
$2x-1$	-3	-1	1	3	5	7
$-2x-1$	1	-1	-3	-5	-7	-9
$\frac{1}{2}x-0{,}1$	$-0{,}6$	$-0{,}1$	$0{,}4$	$0{,}9$	$1{,}4$	$1{,}9$

Poznato je, da je grafik datih funkcija prava (poznato je iz srednje škole), a prava je određena sa dvije tačke, pa je dovoljno nacrtati po dvije odgovarajuće tačke i kroz njih postaviti pravu (napomenimo da je najsvrsishodnije nacrtati tačke $M_1(0, f(0))$, $M_2(\frac{-b}{a}, 0)$; $y=ax+b$).



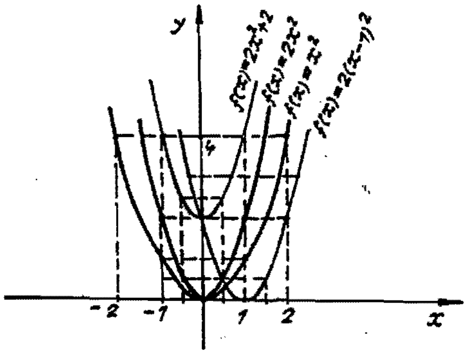
c) Grafike datih cijelih rac. funkcija 2. stupnja (čiji analitički izrazi predstavljaju jednačine parabole) dobićemo pomoću grafika funkcije $f(x)=x^2$ (često puta je korisno dovesti u vezu funkciju f sa funkcijom g kojoj je grafik lako nacrtati; npr. ako je nacrtan grafik f-e $g(x)$ onda se grafik funkcije $f(x)=-g(x)$ dobiva simetrijom u odnosu na x-os, ili grafik funkcije $a\cdot g(x)$ $(a>0)$ dobiva se iz grafika f-e g rastezanjem a puta po y-osi ako je $a>1$ odnosno stezanjem ako je $a<1$, ili grafik funkcije $f(-x)$ dobiva se simetrijom (zrcaljenjem) grafika $f(x)$ u odnosu na y-os; ili grafik od $f(x-a)$ dobiva se pomicanjem grafika od $f(x)$ u smjeru x-osi za a; ili grafik od $b+f(x)$ dobiva se pomicanjem grafika od $f(x)$ u smjeru y-osi za b.

Zatim se grafici komplikovanijih funkcija dobiju (približno) kombinacijom grafika prostijih funkcija –, „sumom", „proizvodom", „količnikom", „apsolutnom vrijednošću", „stepenovanjem", „korjenovanjem", „logaritmiranjem" i dr.),[30].

1° Razmotrimo slučaj funkcije $f(x)=x^2$.

Njeno definiciono područje je R. Slika $f(R)$ je skup svih pozitivnih realnih brojeva. Napravimo tablicu:

x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2	x	x^2
-2	4	-1	1	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4



2° Neka čitalac konstruiše grafike funkcija

$$f(x)=2(x-1)^2+2 \quad i \quad g(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1 \;\left(=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2} \equiv \text{kanonski}\right.$$

oblik) kombinacijom grafika f-e $2(x-1)^2$ odnosno grafika funkcije $\frac{1}{2}(x+1)^2$ (– koji se dobije iz grafika x^2 – kako ?).

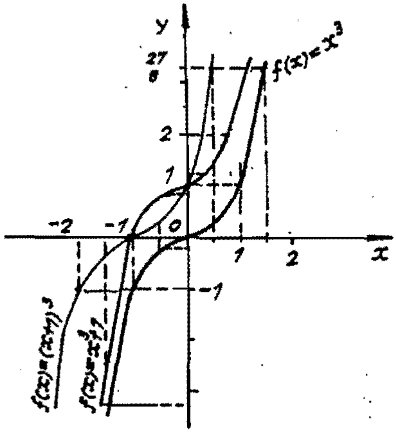
d) 1° Razmotrimo slučaj funkcije x^3. Njeno definiciono područje

30) Da bi se grafik preciznije nacrtao neophodno je, pored def. pod., odrediti: 1) nule (riješiti $f(x=0)$; 2) $f(x)>0$, $f(x)<0$; 3) rašćenje i opadanje; 4) ponašanje f-e pri neogr. pribl. argumenta ka krajnjim tačkama oblasti definisanosti; 5) još neke elemente (kao ekstrem, prevojne tačke i dr.) koji se lako određuju koristeći IZVODE (to ćemo kasnije raditi).

je R (i slika je R).

Pošto je $(-x)^3 = -x^3$, prema prethodnoj napomeni, grafik je simetričan u odnosu na ishodište pa je dovoljno praviti tablicu vrijednosti samo za $x \geq 0$. Grafik je kubna parabola.

x	x^3	x	x^3	x	x^3	x	x^3	x	x^3
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}$	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{8}$



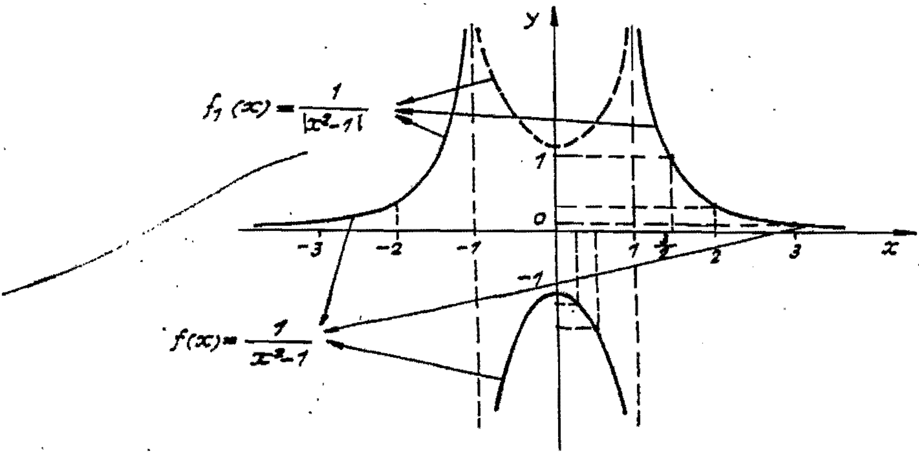
2° Grafik funkcije x^3+1 dobiven je (na prethodnoj slici) translacijom grafika funkcije x^3 za 1 u smjeru y-ose, a grafik funkcije $(x+1)^3$ dobiven je translacijom grafa od x^3 za -1 u smjeru x-ose.

3° Neka čitalac (za vježbu) sam konstruiše grafik od x^4 i grafik od $2x^2 - x^4$ („zbir" grafika od $2x^2$ i $-x^4$).

f) Treba napomenuti da sve tačke grafika nisu jednako važne za predodžbu toga grafika. Zbog toga je korisno kombinovati i grafičku i analitičku metodu kod skiciranja grafika funkcije.

Kod funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ tačke $x = \pm 1$ su najosjetljivije tačke pa će ponašanje funkcije u okolini tih tačaka dati najbolje informacije o tom grafiku. Zato ćemo u tabeli uzeti tačke koje su bliske tački $x = 1$ i tački $x = -1$ (dovoljno je uzeti u obzir samo $x > 0$ — zašto?).

x	$(x^2-1)^{-1}$	x	$(x^2-1)^{-1}$	x	$(x^2-1)^{-1}$	x	$(x^2-1)^{-1}$	x	$(x^2-1)^{-1}$	x	$(x^2-1)^{-1}$
0	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{16}{15}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{16}{7}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{25}{9}$
$\frac{9}{10}$	$-\frac{100}{19}$	$\frac{999}{1000}$	$-\frac{10^6}{1999}$	2	$\frac{1}{3}$	10	$\frac{1}{99}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	3	$\frac{1}{8}$



Definiciono područje funkcije $\frac{1}{x^2-1}$ je $R\setminus\{-1,1\}$, a slika

$$f(R\setminus\{-1,1\})=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty);$$

izraz x^2-1, za $x\in(-1,1)$, ima minimalnu vrijednost za $x=0$ pa će izraz, na $(-1,1)$, imati maksimalnu vrijednost za $x=0$; za $|x|>1$ je $f(x)>0$. Grafik se sastoji iz tri dijela kao i $\mathcal{D}(f)$. Kada se x približava broju 1 s lijeve strane onda $f(x)$ teži u $-\infty$, a kada se x približava 1 zdesna onda $f(x)$ teži u $+\infty$. Analogno se razmatra za $x=-1$. Dakle, udaljenost tačke $(x, f(x)$ od x-ose teži nuli kada x teži u $\pm\infty$. (Kažemo da je x-osa asimptota krive.)

Grafik funkcije $|f(x)|=\frac{1}{|x^2-1|}$ dobiva se iz grafika funkcije $f(x)$ tako da se dijelovi grafika od $f(x)$ koji su ispod x-osi zrcale u odnosu na x-os, a preostali dio grafika ostaje isti. (to je inače pravilo za proizvoljnu f-u $f(x)$).

Grafik funkcije $f(x)=\frac{1}{3x^2-2x+1}$ dobiva se iz grafika funkcije (parabole) $g(x)=3x^2-2x+1$ „dijeljenjem", a grafik funkcije

$h(x)=f(x)+2$ $\left(=\frac{1}{3x^2-2x+1}+2\right)$ dobiva se translacijom grafika

f-e $f(x)$ u smjeru y-osi za 2.

Za vježbu izvesti konstrukciju grafika funkcija $f(x)$ i $h(x)$. Takođe konstruisati, prije toga, grafik funkcije $-\frac{1}{x^2}$ (koja ulazi u Newtonov zakon o privlačenju dvaju tijela odnosno u Kulonov zakon o privlačenju električki nabijenih čestica).

e) Funkciju tipa $\frac{ax+b}{cx+d}$, $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$, možemo transformisati na oblik

$$y_0+\frac{m}{x-x_0}.$$

Zato ćemo datu funkciju $f(x)=\frac{2x-1}{3x+2}$ dovesti na pomenuti oblik. Imamo

$$\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{6x-3}{6x+4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6x+4-7}{6x+4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6x+4}=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{7}{x+\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{7}{9}}{x+\frac{2}{3}},$$

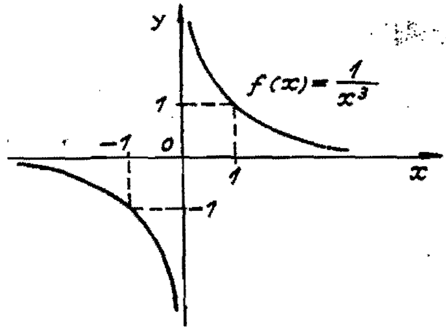
tj.

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{x+\frac{2}{3}}.$$

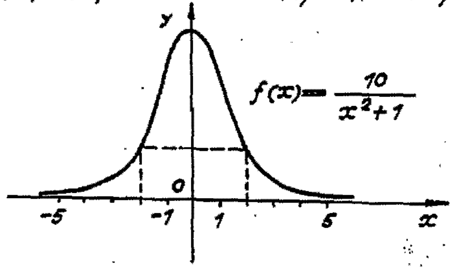
Grafik funkcije $f(x)$ dobiva se iz grafika funkcije $\frac{1}{x}$ pomakom za $-\frac{2}{3}$ po x-osi, stezanjem $\frac{7}{9}$ puta po y-osi, simetrijom u odnosu na x-osu i, konačno, translacijom paralelno y-osi za $\frac{2}{3}$. Ostavlja se čitaocu da to učini, kao i da nacrta grafike funkcija $|f(x)|$ i $\operatorname{sign}(f(x))$.

g) 1° Funkcija $\frac{1}{x^3}$ (i općenito $\frac{1}{x^{2n+1}}$, $(n\in N)$) ima slično ponašanje kao i funkcija $\frac{1}{x}$ (grafik funkcije $\frac{1}{x^3}$ dobije se „dijeljenjem"

grafika funkcije x^3).
Prema tome približan grafik funkcije $f(x)=\frac{1}{x^3}$ ima oblik:

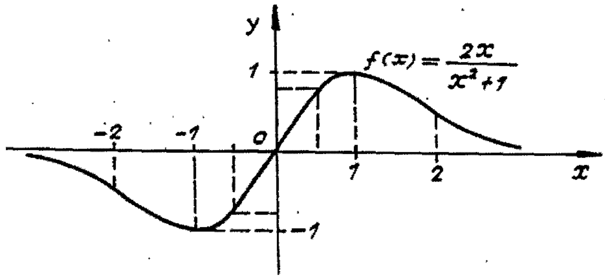


2° Funkcija $f(x)=\frac{10}{x^2+1}$ („Versiera" Marije Agnesi) definisana je za svako realno x. Pošto je $f(-x)=f(x)$ to je grafik simetričan u odnosu na y-osu (dovoljno je uzeti $x\geq 0$). Izraz x^2+1 ima minimalnu vrijednost za $x=0$, pa izraz $\frac{10}{x^2+1}$ ima maksimalnu vrijednost za $x=0$. Grafik siječe y-osu u $y=10$, a x-osu ne siječe nigdje, nego joj se beskonačno približava kada x teži u beskonačnost. Uvijek je $f(x)>0$ pa možemo zaključiti da grafik ima (približan) oblik:



3° Funkcija $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ (Newtonova serpentina) je definisana za svako realno x i grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak, jer je $f(-x)=-f(x)$. Zato ćemo sastaviti tablicu samo za $x\geq 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	7
$\frac{2x}{x^2+1}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{13}$	1	$\frac{12}{13}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{25}$



4° Grafik funkcije $x+\frac{1}{x^2}$ dobije se „zbrajanjem" grafika funkcija x i $\frac{1}{x^2}$. Takođe grafik funkcije $x^2+\frac{1}{x}$ dobije se „zbrajanjem" grafika funkcija x^2 i $\frac{1}{x}$ ($x^2+\frac{1}{x}$ – Newtonov trozubac). Neka to čitalac obavi.

107. Nacrtati grafike funkcija:

a) $f(x)=\text{sign}(x)+[x]$, gdje je

$$\text{sign}(x)=\begin{cases}1 & \text{za } x>0\\ 0 & \text{za } x=0\\ -1 & \text{za } x<0,\end{cases}$$ a $[x]$ „najveće cijelo od x";

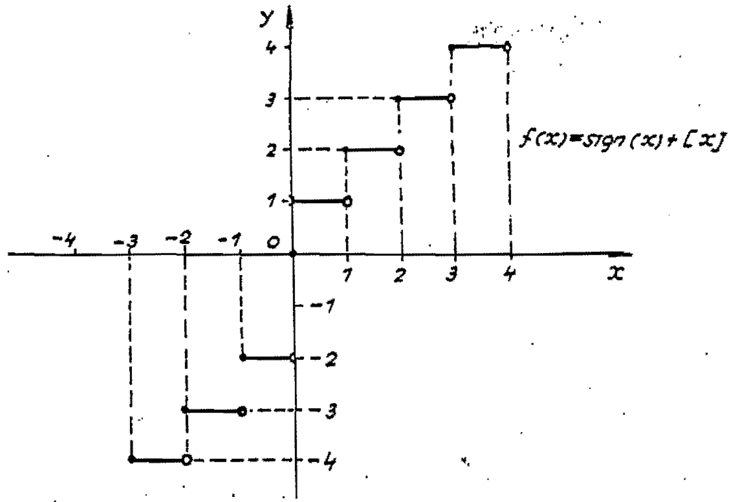
b) $\chi_A(x)$, $\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$ za $A=(1,2)$, $B=(\frac{3}{2},4]$; gdje je $\chi_A(x)$ karakteristična funkcija nepraznog skupa A, definisana sa

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{za } x\in A\\ 0 & \text{za } x\notin A;\end{cases}$$

Rješenje. a)

x	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	0	$(0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	...
$f(x)$	-3	-2	0	1	2	3	...

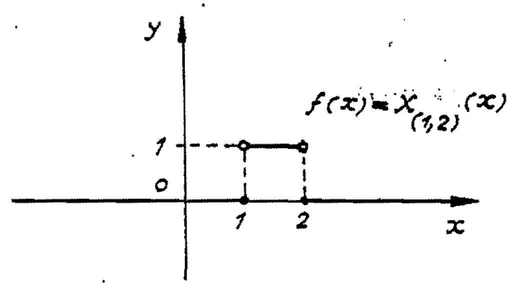
Na osnovu gornje tabele, imamo grafički prikaz date funkcije:



Vidimo da je njena slika skup svih cijelih brojeva. (Pomoću funkcije $g(x)=[X]$ možemo na jedinstven način prikazati svaki realan broj x u obliku: $x=y+t$, gdje je y cio broj i $t\in[0,1)$).

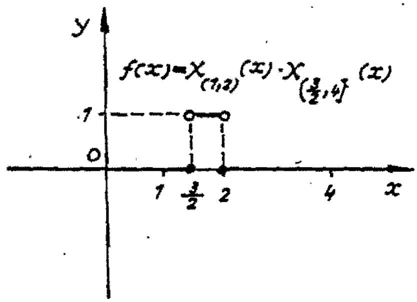
b) 1°

x	$(-\infty,1]$	$(1,2)=A$	$[2,+\infty)$
$X_A(x)$	0	1	0



2°

x	$\chi_{(1,2)}(x)\cdot\chi_{(\frac{3}{2},4]}(x)$
$(-\infty,1]$	$0\cdot 0=0$
$(1,\frac{3}{2}]$	$1\cdot 0=0$
$(\frac{3}{2},2)$	$1\cdot 1=1$
$[2,4]$	$0\cdot 1=0$
$(4,+\infty)$	$0\cdot 0=0$



108. Data je funkcijska veza

$$a)\ y=\sin x\ ;\quad b)\ y=\frac{1}{\sin x}\ ;\quad c)\ y=e^{x}.$$

Predstaviti funkcije 1° u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu; 2° u kosouglom koordinatnom sistemu (izuzimajući da osi x i y zatvaraju ugao od 60°); 3° u polarnom[31] koordinatnom sistemu; 4° u jednoj dimenziji funkcijskom skalom.

Rješenje. a) 1° Iz srednje škole je poznato kako se crta grafik funkcije $\sin x$ u Dekartovom sistemu (grafik je sinusoida).

2° U polarnom koordinatnom sistemu, grafik će biti kružnica s centrom u tački $(\rho,\varphi)=(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})$.

Stavljajući $y=\rho$, $x=\varphi$ imamo funkciju $\rho=\sin\varphi$ koja je definisana (mora biti $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$) za $0\le\varphi\le\pi$; dakle radi se o funkciji $f:[0,\pi]\to R$.

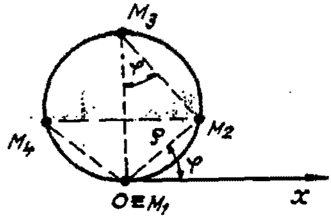
Njena slika je $f([0,\pi])=[0,1]$, (zašto?).

---

31) Polarne se koordinate primjenjuju za opisivanje funkcijske veze u kojoj vrijednost funkcije zavisi o smjeru u kome se promatra, kao što npr. jakost rasvjete nekog izvora svjetlosti zavisi o smjeru u kome se mjeri.

sastavimo tablicu:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin\varphi$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



$$M_1 \equiv O(0,\varphi)\,;\quad M_2 \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M_3 \equiv \left(1, \frac{\pi}{2}\right)\,;\quad M_4 \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

3° Za predstavljanje date funkcije na preostala dva grafička načina, neka čitalac postupi kao pod b) (analogno).

b) 1° Funkcija f iz R u R, definisana sa

$$y = \frac{1}{\sin x},$$

ima za definiciono područje skup

$$E = \{x \in R : x \neq k\pi\ ;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

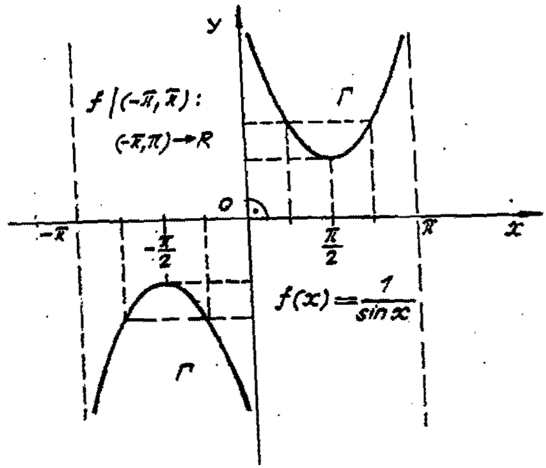
Grafik date funkcije dobije se iz grafika funkcije $\sin x$ i to „dijeljenjem". Pošto je funkciju $\sin x$ dovoljno predstaviti u intervalu $[-\pi, \pi]$ (zašto?), to ćemo mi posmatrati datu funkciju, ali sada zbog $\mathcal{D}(f)$, na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Sastavimo tablicu:

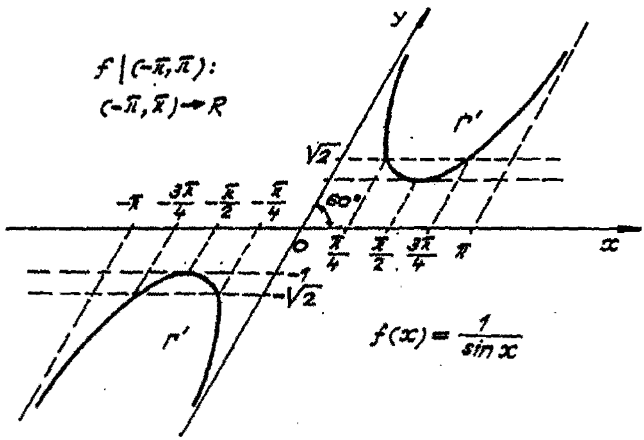
x	$\to -\pi_+$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\to 0_{\mp}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\to \pi_-$
$\frac{1}{\sin x}$	$\to -\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\to \mp\infty$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\to +\infty$

Primjećujemo (kako?) da je slika od f skup

$$f((-\pi, \pi)) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$



2° Koristeći tablicu iz 1° i znajući da su koordinate tačaka $M_i\ (x_i, f(x_i))$, u kosouglom koordinatnom sistemu, dužine paralela s koordinatnim osama povučenih iz tačke M_i (do presjeka sa osama– odgovarajućim) imamo ovaj grafik:



Uočiti razliku u grafičkom predstavljanju u pravouglom i kosouglom koordinatnom sistemu (naći vezu između koordinata ova dva sistema– napisati jednačinu krive Γ' u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu pa tako primijetiti kako je ponekad korisno upotrijebiti i kosougli koordinatni sistem).

3° Ako se grafik funkcije $y=\frac{1}{\sin x}$ razmatra u polarnim koordinatama stavljajući $y=r$, $x=\varphi$, grafik će biti pravac, što će se vidjeti iz sljedećeg.

Funkcija je definisana za $\sin\varphi>0$, tj. za $0<\varphi<\pi$; dakle, $f:(0,\pi)\to[1,+\infty)$, jer je f_{min} za $\varphi=\frac{\pi}{2}$, a $\sup f((0,\pi))=+\infty$.

Ako uzmemo dvije tačke (koje leže na grafiku $r=\frac{1}{\sin\varphi}$)

$M_1\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ i $M_2\left(\frac{1}{\sin\varphi},\varphi\right)$

onda će jednačina prave kroz ove dvije tačke upravo biti jednačina

$$r=\frac{1}{\sin\varphi}$$

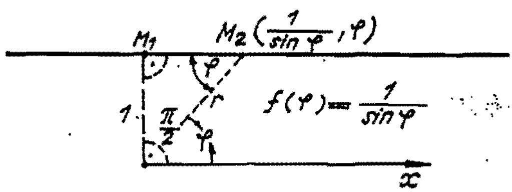
pa zaključujemo da je grafik funkcije $f(\varphi)=\frac{1}{\sin\varphi}$ prava linija. (Naime poznato je iz analitičke geometrije da jednačina prave koja prolazi kroz datu tačku $A(r';\alpha)$ i zaklapa ugao β sa polarnom osom ima oblik

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}\cdot\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\beta-\alpha)},$$

kod nas je $r'=1$, $\beta=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$).

Neka čitalac sastavi i odgovarajuću tablicu vrijednosti za f.

Prema tome grafik ima oblik:

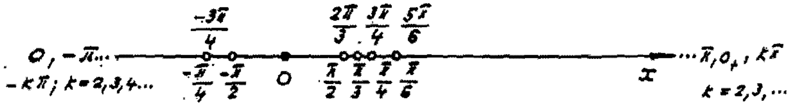


4° Da bi predstavili datu funkciju funkcijskom skalom,[32] nanosimo na brojnom pravcu (brojnoj osi) iz ishodišta dužine koje predočuju

32) Jedna od najpoznatijih funkcijskih skala je logaritamska koja je osnov logaritmara, a predočuje funkciju $f(x)=\log x$. Jedinica dužine u toj skali je interval od 0 do 10 (jer je $\log 10=1$); ona se sastoji iz kongruentnih dijelova dužine 1 od kojih svaki dio predočuje logaritme brojeva 10 puta većih od prethodnoga.

mjerne brojeve vrijednosti funkcije mjerene odabranom jedinicom, ali na kraj tih dužina ne bilježimo vrijednosti funkcije nego vrijednosti argumenta. Dakle, na funkcijskoj skali označene su vrijednosti $x-a$, a vrijednost funkcije nalazimo mjereći jedinicom dužina dužinu koja pripada toj vrijednosti argumenta.

Predstavićemo vrijednosti iz tablice pod 1° pa ćemo imati (uzimajući za jedinicu 1 cm):



c) Ostavlja se da čitalac sam to uradi. (U polarnom sistemu dobije se logaritamska spirala: ).

109. Grafički predstaviti sastav smjese [33] od tri sastavna dijela datih u sljedećim postotcima: prvi dio I iznosi 20 %, drugi II 30 % i treći III 50 %.

Rješenje. Služićemo se tzv. troosnim ili trilinearnim koordinatama, zapravo služićemo se trouganim koordinatnim sistemom kome je osnovni lik zadani trougao (npr. jednakostranični).

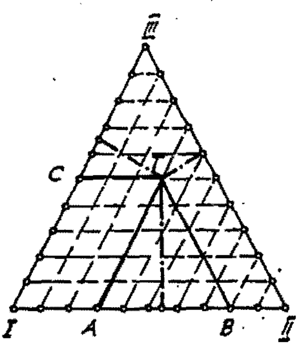
Zamislimo da je u svakom tjemenu trougla smješten samo po jedan sastavni dio i to sav; u vrhu I neka je koncentrisan sav prvi sastavni, dakle 100 % (II = III = 0), u vrhu II drugi dio i u vrhu III treći dio. Tačke strane I, II predstavljaju u postotcima sastav smjese samo dvaju sastavnih dijelova (I i II), tj. duž te stranice je III = 0. Analogno za ostale strane.

Strane trougla treba razdijeliti na 100 dijelova, ali ćemo mi (radi jednostavnosti crtanja) razdijeliti na 10 dijelova. Zatim kroz svaku diobenu tačku povlačimo paralele sa odgovarajućim stranama

33) Takvi problemi često se javljaju u hemiji i metalurgiji (npr.).

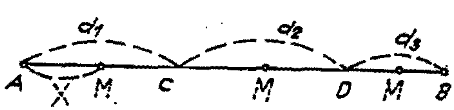
trougla (mogu se vući i okomice).

Tako dobivamo (ako uzmemo jednakostraničan trougao) tačku $T(IA = 30,\ IC = 50,\ 20)$ koja predstavlja datu smjesu; $A(I = 30, II = 70, III = 0)$, $C(I = 60, II = 0, III = 50)$. Udio u postocima svakog sastavnog dijela u toj smjesi daju nam dužine TC, TA, BII ili dužine IA, IC, IB na stranama trougla. Odgovarajući grafički prikaz ima oblik:



(110.) Data je linija $AB = d$ i na njoj tačke C i D (C između A i D) tako da je $AC = d_1$, $CD = d_2$ i $DB = d_3$ $(d_1 + d_2 + d_3 = d)$. Ako je linearna gustoća (masa po jedinici dužine) linije AB na dijelovima AC, CD, DB respektivno $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, izrazite masu m varijabilnog odsječka $AM = x$ te linije, kao funkciju od x zatim konstruišite grafik te funkcije, uzimajući da je $d_1 = 1$ i $d_2 = 3$, $d_3 = \frac{3}{2}$ i $\varrho_1 = 5$, $\varrho_2 = 4$, $\varrho_3 = 1$ (– čega?).

Rješenje. Odgovarajuća slika ima (simbolički) izgled:



Ako je $0 \leq x \leq d_1 \implies m = m_1 = \varrho_1 x$;

$d_1 < x \leq d_1 + d_2 \implies m = \varrho_1 d_1 + \varrho_2 (x - d_1)$;

$$d_1+d_2 < x \leqslant d \Rightarrow m = g_1 d_1 + g_2 d_2 + g_3 (x - d_1 - d_2).$$

za $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = \frac{3}{2}$; $g_1 = 5$, $g_2 = 4$, $g_3 = 1$ imamo

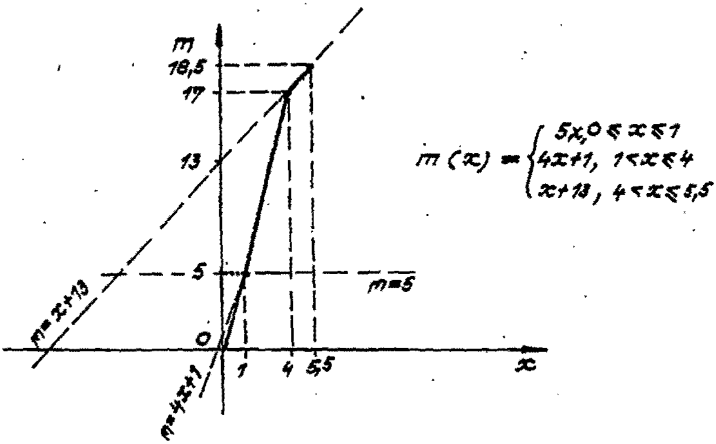
$$m(x) = \begin{cases} 5x \text{ za } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 5+4(x-1) = 4x+1 \text{ za } 1 < x \leqslant 4 \\ 5+12+1(x-4) = x+13 \text{ za } 4 < x \leqslant 5{,}5. \end{cases} \quad (1)$$

(zašto nismo stavili $1 \leqslant x \leqslant 4$ u gornjem izrazu, da li bi onda dobili funkciju – jednoznačnu, kada više formula definišu jednu funkciju?).

Dakle dobili smo funkciju $m : [0, \frac{11}{2}] \to R$, definisanu sa (1). Njena slika je skup

$$m([0, \tfrac{11}{2}]) = \{5\} \cup (5, 17] \cup (17, 18\tfrac{1}{2}] = [0, 18\tfrac{1}{2}].$$

Grafik funkcije (1) ima oblik:



111. Tijelo je izbačeno iz tačke O početnom brzinom $v_0 = 10^2$ m/sec pod uglom $\alpha = 45°$ od ravni horizonta.

a) odrediti položaj tijela u zavisnosti od vremena t.

b) Odrediti jednačinu putanje tijela.

c) označujući sa $f(x)$ visinu tijela iznad horizonta, sa x - horizontalno udaljenje tijela od tačke O, odrediti područje definicije funkcije f

(definisane analitičkim izrazom $f(x)=$ visina tijela ...).

d) Odrediti trenutak (vrijeme t) kada će tijelo dostići najveću visinu.

e) Naći maksimum funkcije f (najveću visinu) i konstruisati grafik funkcije f.

U svim slučajevima (gdje je potrebno) zanemariti otpor vazduha i uzeti da je (poznato) ubrzanje Zemljine teže $g = 9,81\ m/sec^2$.

Rezultat. a) $x = v_0 \cos 45° \cdot t = 50\sqrt{2} \cdot t$

$$y = v_0 \sin 45° \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot t - 4,905 \cdot t^2;$$

b) $y = x - 4,905 \cdot \dfrac{x^2}{5000} \ \left(= x - 9,81 \cdot 10^{-4} \cdot x^2\right); \ \left(y = f(x)\right);$

c) $\mathcal{D}(f) = E_x = \left[0, \dfrac{10^6}{981}\right]$; (šta je slika od f?);

d) $y_{max} = \max f$ za $x = \dfrac{10^4}{2 \cdot 9,81}$, tj. za $t = \dfrac{x}{50 \cdot \sqrt{2}} \approx 7 sec.$

e) $\max f = f\left(\dfrac{10^4}{2 \cdot 9,81}\right) = \dfrac{10^4}{2 \cdot 9,81} - 9,81 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\dfrac{10^4}{2 \cdot 9,81}\right)^2,$

a grafik je dio kvadratne parabole.

112. Dokazati da se grafik funkcije f, definisane sa $f(x) = \log_a kx$; $k > 0$, može dobiti translacijom grafika funkcije g, definisane sa $g(x) = \log_a x$, duž y-osi. Za koliko treba izvršiti tu translaciju?

Rezultat. Za vrijednost $b = \log_a k \ (= f(x) - g(x))$.

1.2.4 SPECIJALNE KLASE FUNKCIJA JEDNOG ARGUMENTA (OGRANIČENE I NEOGRANIČENE FUNKCIJE, MONOTONE FUNKCIJE; PARNE I NEPARNE FUNKCIJE, PERIODIČNE FUNKCIJE

113. Ispitajte ograničenost (neograničenost) funkcija:

a) $f(x)=x^{-1}$, $(x\in\{0,1,2,3,\dots,10\})$; ✓

b) $f(x)=x^{-1}$, $(x\geqslant 0)$; ✓

c) $f(x)=x^{-1}$, $(x\in(m,n);\ m,n\in(0,+\infty))$; ✓

d) $f:(0,1]\to R$, gdje je $f(x)=x^{-1}$;

e) $f: A\to R$, A konačan skup $(A\subset R)$;

f) $f(x)=\cos x+\sin x$; ✓

g) $f(x)=x^4+x^2-1$; ✓

h) $f(x)=ax^2+bx+c$; $a,b,c\in R$;

i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Rješenje. a) Funkcija f je definisana na skupu $E_x=\{1,2,3,\dots,10\}$, tj. na konačnom skupu (podskupu od R, čak i od N). Skup vrijednosti date funkcije je: $E_y=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{10}\}$, tj. postoje brojevi $p\in R$ i $P\in R$ takvi da je:

$$p\leq f(x)<P,\ \text{za}\ \forall x\in E_x$$

pa je data funkcija ograničena (za p se može uzeti bilo koji broj manji od $\frac{1}{10}$, npr. $p=\frac{1}{100}$, a za P bilo koji broj veći od 1, npr. $p=\frac{3}{2}$). Ako uzmemo $M=\max\{|p|,|P|\}$ onda važi

$$|f(x)|<M,\ (\forall x\in E_x).$$

pošto je funkcija ograničena sa donje strane to postoji najveći broj m koji nije veći ni od jedne vrijednosti funkcije f na E_x i zove se donja međa (infimum) funkcije f na E_x ($m=\inf f=\inf\limits_{x\in E_x} f(x)=\inf f(E_x)$).

Analogno zbog ograničenosti sa gornje strane postoji najmanji broj M (gornja međa - supremum: $M=\sup f=\sup f(x)=\sup f(E_x)$), koji nije manji ni od jedne vrijednosti funkcije f na E_x. Dakle m je donja međa funkcije f na E_x ako su ispunjeni uslovi:

1) $f(x)\geq m$ za svako $x\in E_x$ i

2) za svako $\epsilon>0$ postoji u skupu E_x, element x' takav da je $f(x')<m+\epsilon$,

a M je gornja međa ako su ispunjeni uslovi:

1) $f(x)\leq M$ za svako $x\in E_x$ i

2) za svako $\epsilon>0$ postoji u skupu E_x, element x'' takav da je $f(x'')+\epsilon>M$ (ili ako je $a\in R$ takvo da je $a<M$, onda u E_x postoji bar 1 element $x''\in E_x$ takav da je $a<f(x'')$).

Za slučaj date funkcije f imamo da je

$$m\ (=\inf f=\inf_{x\in E_x} f(x)=\inf f(E_x))=\inf E_y=\frac{1}{10},$$

$$M\ (=\sup f=\sup_{x\in E_x} f(x)=\sup f(E_x))=\sup E_y=1.$$

Ako je za neko $x'\in E_x$, $f(x')=\inf\limits_{x\in E_x} f(x)$, donja međa funkcije f na E_x je najmanja vrijednost funkcije f na E_x i piše se $\min f$ $(=f_{min})=\inf f$ (kaže se da funkcija dostiže svoju donju među).

Analogno, ako postoji bar jedan element $x'' \in E_x$ takav da je $f(x'') = M = \sup_{x \in E_x} f(x)$, kažemo da f obstiže svoj supremum (max od f na E_x). Za datu funkciju f postoje elementi $x' = \frac{1}{10}$ i $x'' = 1$ iz E_x takvi da je $f(x') = m$, $f(x'') = M$, tj. $f_{min} = \inf f = \frac{1}{10}$, $f_{max} = \sup f = 1$.

b) Data funkcija f je definisana na $E_x = (0, +\infty)$, a njena slika je skup $E_y = f(E_x) = (0, +\infty)$ pa je

$$\sup f = \sup E_y,$$

pošto E_y nije odozgo ograničen skup stavljamo, po dogovoru, $\sup E_y = +\infty$ (to nije ništa drugo nego zamjena za rečenicu „skup E_y je odozgo neograničen").

Pošto je skup vrijednosti E_y neograničen odozgo (pa, dakle, neograničen), to je i f neograničena odozgo (njena gornja međa je $M = \sup f = +\infty$), tj. f je neograničena.

Međutim,

$$\inf f = \inf E_y = 0$$

pa je f ograničena sa donje strane (odozdo, slijeva), ali njena međa $m = \inf f = 0$ ne pripada slici od f, jer $0 \notin E_y = (0, +\infty)$ pa f nema minimuma na $E_x = (0 + \infty)$.

c) Data funkcija f je definisana na skupu $E_x = (m, n)$; $m, n \in (0, +\infty)$. Njena slika je

$$E_y = f(E_x) = (g(n), g(m));$$

gdje je

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ za } x \in [m, n], \text{ tj.}$$

$$E_y = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \text{ pa je } \inf f = \inf E_y = \frac{1}{n} > -\infty \text{ i}$$

$$\sup f = \sup E_y = \frac{1}{m} < +\infty.$$

Dakle funkcija f je ograničena (prema tome, ako je $\inf f > -\infty \Rightarrow f$ ograničena odozdo, $\sup f < +\infty \Rightarrow f$ ograničena odozgo,

$-\infty < \inf f \leqslant \sup f < +\infty \Rightarrow f$ ograničena). Napomenimo da f nema najmanje niti najveće vrijednosti na $E_x = (m, n)$.

d) Data funkcija f je definisana na skupu $E_x = (0, 1]$, a njena slika je $E_y = [1, +\infty)$ pa imamo

$$\inf f = \inf E_y = 1 > -\infty \quad (\text{čak je } \min f = 1),$$
$$\sup f = \sup E_y = +\infty.$$

Dakle funkcija je neograničena (zbog neograničenosti odozgo), ali je ograničena odozdo i donja međa pripada skupu vrijednosti E_y funkcije f.

e) Definiciono područje date funkcije je skup A (konačan skup $\subset R$) pa je i skup vrijednosti od f konačan (diskretan) skup tj.

$$E_y = f(A) \equiv \text{konačan skup.}$$

No, konačni skupovi (podskupovi od R, ili čak uređenog skupa) posjeduju minimalni element (koji je sada infimum) i maksimalni element (supremum) tj.

$$\min E_y = \inf E_y > -\infty, \quad \max E_y = \sup E_y < +\infty$$

pa je

$$\inf f \ (= \inf E_y) > -\infty \quad \text{i} \quad \sup f \ (= \sup E_y) < +\infty.$$

Otuda slijedi da je f ograničena (bez obzira kakav joj je konkretni analitički ili empirički ili tabelarni izraz) na konačnom skupu A.

f) Data funkcija f definisana je na skupu $E_x = (-\infty, +\infty)$, a njena slika je (zbog $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}(\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45°) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$).

$$E_y = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

pa imamo

$$\inf f = \inf E_y = -\sqrt{2} > -\infty \quad (f \text{ dostiže inf, jer } -\sqrt{2} \in E_y),$$
$$\sup f = \sup E_y = \sqrt{2} < +\infty \quad (f \text{ ima max jednak } \sqrt{2}).$$

Prema tome f je ograničena na skupu $E_x = R$.

g) Data funkcija je definisana na $E_x = R$, a njena slika je

$E_y = f(E_x) = [-1, +\infty)$ pa imamo $\inf f = \inf E_y = -1 \in E_y (\Rightarrow f_{min} = -1$ i f ogr. odozdo); $\sup f = \sup E_y = +\infty$ ($\Rightarrow f$ neogr. odozgo).

Vidimo da je f neograničena na R.

h) Data funkcija je definisana na R. Pošto za $a \neq 0$, $f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, tj. f ima $f_{min} = \frac{4ac-b^2}{4a}$ ako je $a>0$,

a $f_{max} = \frac{4ac-b^2}{4a}$ za $a<0$, to zaključujemo da je

$$\inf f = \begin{cases} c > -\infty & \text{za } a=b=0 \Rightarrow f \text{ ogr. odozdo,} \\ -\infty & \text{za } a=0 \text{ i } b\neq 0 \Rightarrow f \text{ neogr. odozdo,} \\ -\infty & \text{za } a<0 \Rightarrow f \text{ neogr. odozdo,} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} > -\infty & \text{za } a>0 \Rightarrow f \text{ ogr. odozdo;} \end{cases}$$

$$\sup f = \begin{cases} c < +\infty & \text{za } a=b=0 \Rightarrow f \text{ ogr. odozgo,} \\ +\infty & \text{za } a=0 \text{ i } b\neq 0 \Rightarrow f \text{ neogr. odozgo,} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} < +\infty & \text{za } a<0 \Rightarrow f \text{ ogr. odozgo,} \\ +\infty & \text{za } a>0 \Rightarrow f \text{ neogr. odozgo.} \end{cases}$$

Prema tome, data funkcija je ograničena na R samo u slučaju da je $a=b=0$, tj. da se f svodi na konstantu ($f(x)=c$).

i) Data funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ definisana je u intervalu $E_x = (0, +\infty)$. Ona je neograničena u tom intervalu jer kad se x neograničeno približava nuli, onda izraz $\frac{1}{\sqrt{x}}$ raste neograničeno; naime, slika od f na E_x je $E_y = f(E_x) = (0, +\infty)$ pa je $\sup f = \sup E_y = +\infty$ ali je f ograničena odozdo zbog

$\inf f = \inf f = E_y = 0 > -\infty \Rightarrow f$ nema minimum).

114. Nađite infimum i supremum od f i klasificirajte (f raste, f opada, f neopadajuća, f nerastuća – f monotona, po dijelovima monotona; parna, neparna, simetrična odnosno antisimetrična u odnosu na neku tačku c, konveksna, konkavna, ograničena (odozdo,

odozgo), dostiže donju ili gornju među) svaku od sljedećih funkcija

a) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{za } x<-1 \\ x+2 & \text{za } -1\leqslant x\leqslant 0 \\ -x+5 & \text{za } 0<x\leqslant 1 \\ \frac{1}{2} & \text{za } x>1 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{za } x\leqslant 0 \\ x & \text{za } x\geqslant 0 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} -2x-2 & \text{za } x<-1 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{za } x\in[-1,1] \\ 2x-2 & \text{za } x>1 \end{cases}$; d) $f(x)=x+[x],\ \forall x\in R$;

e) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sign}(x)}{1+|x|}$; f) $f(x)=([x])^2+2[x]+1,\ \forall x\in R$;

g) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{za } x\geqslant 0 \\ 0 & \text{za } x<0 \end{cases}$; h) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sign}\dfrac{2x-1}{x+3} & \text{za } x\in(5,+\infty) \\ \left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right| & \text{za } x\in(-\infty,5) \end{cases}$;

i) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}),\ (a>0,\forall x\in R)$; j) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

Rješenje. a) 1° Funkcija f je definisana na R, a njena slika je

$$E_y=f(E_x=R)=\{1\}\cup[+1,2]\cup[4,5)\cup\left\{\tfrac{1}{2}\right\}=$$
$$=\left\{1,\tfrac{1}{2}\right\}\cup[1,2]\cup[4,5)$$

pa imamo

$$\inf f=\inf E_y=\tfrac{1}{2}=\min f>-\infty \quad (\Rightarrow f \text{ ogr. odozdo}),$$

$$\sup f=\sup E_y=5<+\infty \quad (\Rightarrow f \text{ ogr. odozgo, ali } f \text{ nema maksimuma}).$$

Otuda, f je ograničena.

2° Ispitajmo monotonost date funkcije f. Imamo

$$(x_1,x_2\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty);\ x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)=1=f(x_2)$$

$\Longrightarrow f$ ima interval konstantnosti $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$;

$$(x_1, x_2 \in [-1,0];\ x_1<x_2) \Longrightarrow (f(x_1)=x_1+2 < f(x_2)=x_2+2) \Longrightarrow$$

f je monotono rastuća (ili, kako se često kaže, strogo monotono rastuća, ili strogo rastuća, ili rastuća) na segmentu $[-1,0]$;

$$(x_1,x_2 \in (0,1];\ x_1<x_2) \Longrightarrow (f(x_1)=-x_1+5>-x_2+5=f(x_2)) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow f$ je monotono opadajuća.

Prema tome, data funkcija je monotona po dijelovima,[34].

3° O parnosti odnosno neparnosti jedne funkcije ima smisla govoriti pod pretpostavkom da ako je f definisana u tački x, onda je f definisana i u tački $(-x)$, tj. da je E_x simetričan u odnosu na 0 $(E_x=\langle -a, a\rangle)$.

Data funkcija f je definisana na R pa da bi

$$f : (-\infty,+\infty) \to R$$

bila parna (neparna) morala bi vrijediti

$$\left.\begin{array}{ll} & f(-x)=f(x) \text{ za } \forall x\in(-\infty,+\infty) \\ \text{(odnosno :} & f(-x)=-f(x) \text{ za } \forall x\in(-\infty,+\infty) \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Primjetimo da za, npr., $x=1\in R$ relacije (1) nisu ispunjene, jer je $f(1)=-1+5=4\neq \pm f(-1)=\pm 1$.

Otuda slijedi da data funkcija nije ni parna ni neparna na području definicije R.

4° Da bi funkcija $f:\langle c-a, c+a\rangle \to R$ bila simetrična odnosno antisimetrična u odnosu na tačku c (grafik u odnosu na pravu $x=c$) mora vrijediti

$$f(c-x)=f(c+x) \text{ odnosno } f(c-x)=-f(c+x),\ \forall x\in\langle c-a, c+a\rangle.$$

Očigledno ne postoji $c\in R$ sa gornjom osobinom za datu funkciju f.

---

34) Ponekad se kaže da f monotona na E_x ako je f na E_x rastuća (neopadajuća) na konačnom broju intervala (sadržanih u E_x), a na ostalom dijelu od E_x – opadajuća (nerastuća) ili da je monotona odnosno strogo monotona na intervalima (kojih saoo može biti i ∞, npr., slučaj funkcije $tg\,x$).

Konstruisati (za vježbu) grafik date funkcije pa na osnovu geometrijskog svojstva tog grafika klasificirati datu funkciju. Učiniti to i za ostale funkcije, date u ovom zadatku. U vezi konkavnosti, važeti rješenje pod b).

b) 1° $E_x = R$, $E_y = f(E_x) = [0, +\infty) \Longrightarrow$

$$\inf f = \inf E_y = 0 \in E_y \Rightarrow (f_{min} = 0 \text{ i } f \text{ odozdo ograničena}),$$

$$\sup f = \sup E_y = +\infty \Rightarrow (f \text{ odozgo neograničena}),$$

tj. f je neograničena na R.

2° $(x_1, x_2 \in (-\infty, 0]; x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2))$,

$(x_1, x_2 \in [0, +\infty); x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2))$,

tj. f je strogo monotona, i to opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$ a rastuća za $x \in (0, +\infty)$; u tački $x = 0$. f mijenja karakter monotonosti.

3° Definiciono područje, date funkcije, je simetrično u odnosu na o, ali nije ispunjen uslov

$$(f(-x) = f(x) \vee f(-x) = -f(x), \forall x \in R = E_x)$$

pa data funkcija nije ni parna ni neparna; naime, za $x \in (0, +\infty)$ slijedi da je $-x \in (-\infty, 0)$ pa je $f(x) = X$, a $f(-x) = x^2$;

$x = x^2$ samo za $x = 0$, ili $x = -1$, a $x = x^2$ za $x = 0$ ili $x = 1$.

4° Data funkcija nije ni simetrična ni antisimetrična u odnosu na neku tačku $c \in R$, jer ne postoji $c \in R$ takovo da je

$$f(c - x) = f(c + x) \text{ ili } f(c - x) = -f(c + x) \text{ za } \forall x \in R.$$

Dovoljno je uzeti $x = 1$ pa da se dokaže da gornja relacija ne vrijedi ni za jedno $c \neq 0$ (za $c = 0$ već smo pokazali u 3°).

Naime,

$$f(c+1) = \begin{cases} (c+1)^2 & \text{za } c+1 \leq 0 \Longrightarrow c \leq -1 \\ c+1 & \text{za } c+1 \geq 0 \Longrightarrow c \geq -1 \end{cases}$$

$$f(c-1) = \begin{cases} (c-1)^2 & \text{za } c-1 \leq 0 \Longrightarrow c \leq 1 \\ c-1 & \text{za } c-1 \geq 0 \Longrightarrow c \geq 1 \end{cases}$$

pa

za $c \leq -1$ slijedi $f(c-1) \neq \pm f(c+1)$ (očigledno),

za $-1 < c < 1$, $c \neq 0$, slijedi $f(c-1) \neq \pm f(c+1)$ (provjerite!),

za $c \geq 1$ slijedi $f(c-1) \neq \pm f(c+1)$ (očigledno).

5° Da bi funkcija $f: \langle a, b\rangle \to R$ bila konveksna (odnosno konkavna) na intervalu $\langle a, b\rangle$ mora biti

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$$

odnosno

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle),$$

s tim što znak jednakosti vrijedi za $x_1 = x_2$,[25].

Data funkcija nije ni konveksna ni konkavna za $x > 0$ jer je

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ za } \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty).$$

Međutim, za $x \in (-\infty, 0)$ data funkcija f je konveksna, jer je za $\forall\ x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2}{2} = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Naime, tačnost nejednakosti

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \qquad (*)$$

može se lako provjeriti na taj način što se iz ove nejednakosti dobije tačna nejednakost

$$(x_1-x_2)^2 \geq 0 \text{ iz koje se obratno može izvesti } (*).$$

---

25) Ponekad se kaže da je f konkavna ako je

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, za $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ (neki autori ovu konkavnost zovu konkavnost u širem smislu). Poneki autori, takođe, mjesto konkavna kažu konveksna i obratno.

c) 1° $E_x = R$, $E_y = f(E_x) = (0,+\infty) \cup [-1,0] \cup (0,+\infty) = [-1,+\infty) \Longrightarrow$

$\sup f = \sup E_y = +\infty$ ($\Longrightarrow f$ neograničena odozgo),

$\inf f = \inf E_y = -1 \in E_y$ ($\Longrightarrow \min f = -1$, f ogr. odozdo),

tj. f je neograničena na $E_x = R$.

2° $(x_1, x_2 \in (-\infty,-1)\,;\ x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) = -2x_1 - 2 > -2x_2 - 2 = f(x_2))$;

$(x_1, x_2 \in [-1,1]\,;\ x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) = -\sqrt{1-x_1^2} > -\sqrt{1-x^2} = f(x_2)$ za $x_1^2 > x_2^2$, ili $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$; dok je $f(x_1) < f(x_2)$ za $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1)$;

$(x_1, x_2 \in (1,+\infty)\,;\ x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) = 2x_1 - 2 < 2x - 2 = f(x_2))$.

Iz gornjih relacija slijedi da je data funkcija f strogo monotona, i to opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$ a rastuća za $x \in (0,+\infty)$; u $x=0$ f mijenja karakter monotonosti.

3° Data funkcija je parna, jer je

za $x \in [0,1] \subset E_x$ i $-x \in [-1,0] \subset R$ pa je

$f(-x) = -\sqrt{1-(-x)^2} = -\sqrt{1-x^2} = f(x)$, a za $x \in (1,+\infty)$ je $-x \in (-\infty,-1)$ pa imamo

$$f(-x) = -2\cdot(-x) - 2 = 2x - 2 = f(x),\ \text{tj.}$$

$$f(-x) = f(x) \text{ za } \forall x \in E_x.$$

4° Lako se vidi da ne postoji tačka $c \in R$ $(c \neq 0)$ u odnosu na koju je f simetrična ili antisimetrična (posebno, ako se nacrta grafik).

5° Nije teško provjeriti (kvadrirajući i transformišući nejednakost se svodi na $x_1^2 + x_2^2 - 2x\ x_2 \geqslant 0$ koja je uvijek istinita u R). da je

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \text{za } \forall x_1, x_2 \in [-1,1],$$

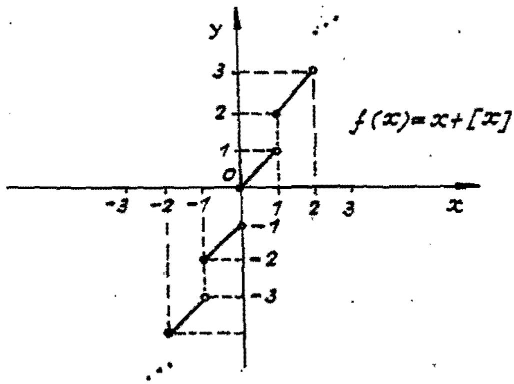
tj. da je f konveksna na $[-1,1]$

Napomenimo, da je na $R \setminus [-1,1]$ f konkavna (konveksna) u širem smislu.

d) Ova funkcija može biti definisana sa neograničeno mnogo analitičkih izraza:

$$f(x)=x+[x]=\begin{cases} x-2, & x\in[-2,-1) \\ x-1, & x\in[-1,0) \\ x, & x\in[0,1) \\ x+1, & x\in[1,2) \\ x+2, & x\in[2,3) \end{cases}$$

Njen grafik ima izgled



1° $E_x=R$, $E_y=[0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup\dots\cup[-2,-1)\cup[-4,-3)\cup\dots$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \inf f=\inf E_y=-\infty \ (\Rightarrow f \text{ neogr. odozdo}), \\ \sup f=\sup E_y=+\infty \ (\Rightarrow f \text{ neogr. odozgo}), \end{cases}$$

tj. f je neograničena.

2° Sa slike se vidi da je f monotono-rastuća u cijeloj oblasti definisanosti.

3° Sa slike se takođe vidi da f nije ni parna ni neparna, jer je, npr.,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \quad i \quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}\neq\pm f\left(\frac{1}{2}\right).$$

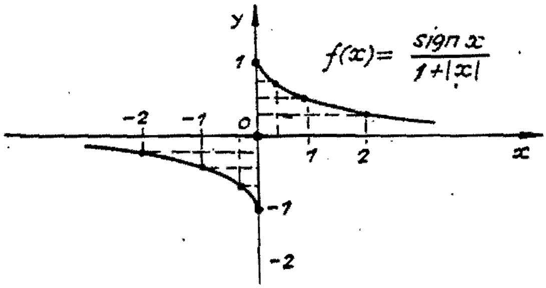
4° Takođe f nije ni simetrična ni antisimetrična u odnosu na bilo koju tačku $c\in R$.

5° Prema slici i prema razmatranju pod b) i c) slijedi da f nije ni konkavna ni konveksna (a u širem smislu ?).

e) Data funkcija se može definisati u obliku

$$f(x) = \frac{sign(x)}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & za \quad x>0 \\ 0 & za \quad x=0 \\ \frac{1}{x-1} & za \quad x<0 \end{cases}$$

i njen približan grafik izgleda ovako:



1° $E_x = R$, $E_y = f(E_x) = (0,1) \cup \{0\} \cup (-1,0) = (-1,1)$

pa je

$\inf f = -1 > -\infty$ ($\Longrightarrow f$ ograničeno odozdo),

$\sup f = 1 < +\infty$ ($\Longrightarrow f$ ograničeno odozgo),

tj. f je ograničena, ali ne dostiže svoju donju niti gornju među (nema ekstrema).

2° Funkcija je strogo monotona, i to opadajuća u $(0,+\infty)$ i u $(-\infty,0)$ (šta je za $x=0$ i može li se reći da je f opadajuća u R?).

3° Funkcija je neparna, jer je za $x>0$

$$f(-x) = \frac{1}{-x-1} = -\frac{1}{x+1} = -f(x).$$

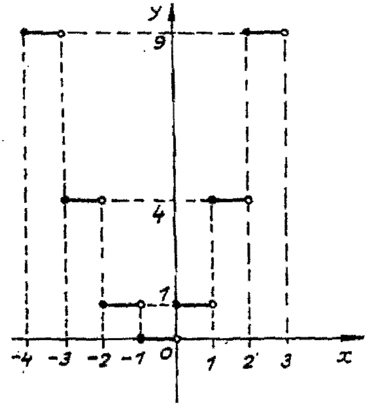
4° Nema simetričnosti u odnosu na $0 \neq c \in R$.

5° Provjeriti da je f konveksna u $(0,+\infty)$ a konkavna u $(-\infty,0)$.

f) Data funkcija f je definisana na $E_x = R$. Ova funkcija može se definisati sa neograničeno mnogo analitičkih izraza:

$f(x)=([x])^2+2[x]+1=$
$=([x]+1)^2$

$$f(x)=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots \\ 16, & x\in[-5,-4) \\ 9, & x\in[-4,-3) \\ 4, & x\in[-3,-2) \\ 1, & x\in[-2,-1) \\ 0, & x\in[-1,0) \\ 1, & x\in[0,1) \\ 4, & x\in[1,2) \\ 9, & x\in[2,3) \\ 16, & x\in[3,4) \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$



Vidimo da je $E_y=f(E_x)=\{0,1,4,9,16,\ldots,k^2,\ldots\}$,

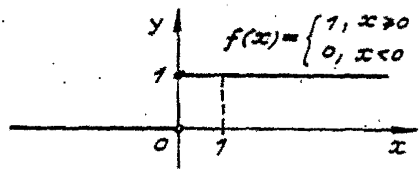
$\inf f=\inf E_y=0\in E_y$ ($\Rightarrow f_{min}=0$, f odozdo ogr.),

$\sup f=\sup E_y=+\infty$ ($\Rightarrow f$ odozgo neogr.),

tj. f je neograničena.

2° Šta je sa monotonošću, parnosti (neparnosti), simetričnosti i konkavnošću (konveksnošću)?

g) Grafik date funkcije f ima oblik



$E_y=f(E_x)=\{0,1\}\Longrightarrow f$ ograničena ($f_{min}=0$, $f_{max}=1$).

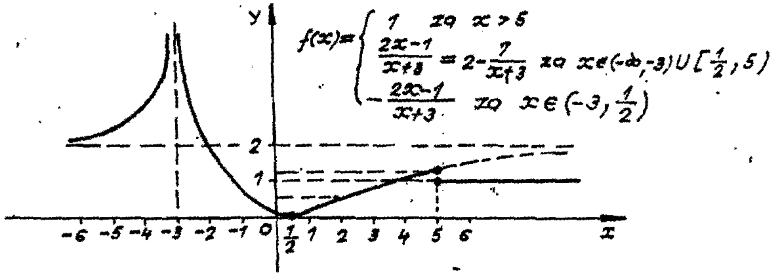
Koje još osobine ima f?

h) Kako je

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sign}\dfrac{2x-1}{x+3}, & \text{za } x\in(5,+\infty) \\ \left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right|, & \text{za } x\in(-\infty,5) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{za } x \in (5, +\infty) \\ \dfrac{2x-1}{x+3} & \text{za } x \in (-\infty, -3) \cup [\tfrac{1}{2}, 5), \quad (\text{je li } -3 \in \mathcal{D}(f)?) \\ -\dfrac{2x-1}{x+3} & \text{za } x \in (-3, \tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

to je grafik (približan) od f oblika:



Vidimo da je slika od f ($E_x = ?$):

$$E_y = f(E_x) = (2, +\infty) \cup (0, +\infty) \cup [0, \tfrac{9}{8}) \cup \{1\} = [0, +\infty)$$

pa je f neograničena (ograničena je samo odozdo).

2° Ispitajte i ostale osobine date funkcije (pokažite da nije ni parna ni neparna, nema simetrije, monotona po dijelovima, odredite intervale konkavnosti i konveksnosti).

i) 1° $E_x = R$, $E_y = f(E_x) = [1, +\infty)$, $\inf f = 1 = \min f$ ($\Rightarrow f$ ogr. odozdo),
$\sup f = +\infty$ ($\Rightarrow f$ neogr. odozgo),
tj. f je neograničena.

2° Skicirati grafike za $0 < a < 1$ i $a > 1$ (uzeti, npr. $a = 2$ i $a = \frac{1}{2}$).
Pošto je

$$f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-x} + a^{x}) = \frac{1}{2}(a^{x} + a^{-x}) = f(x), \ \forall x \in R$$

to slijedi da je f parna na R.

3° Ispitati monotonost za $0 < a < 1$ i za $a > 1$ i simetričnost u odnosu na $c \in R$.
Što je sa konkavnošću i konveksnošću date funkcije f?

j) 1° Funkcija f data sa

$$f(x) = lg\,(x + \sqrt{1+x^2}), \quad (lg = log_{10}),$$

definisana je na

$$E_x = \{x \in R:\ x + \sqrt{1+x^2} > 0\} = \{x \in R:\ \sqrt{1+x^2} > -x\} = R,$$

jer je uvijek $\sqrt{1+x^2} > -x$ (ako je $x > 0$, to je očigledno i ako je $x < 0$ onda je $-x > 0$ pa se kvadriranjem dobije $1+x^2 > x^2$ što je uvijek tačno).

Njena slika je (za $x > 0$ je $f(x) > 0$, a za $x < 0$ je $f(x) < 0$):

$$f(E_x) = (-\infty, +\infty) \quad (= R)$$

pa je

f neograničena (sa obje strane).

2° Funkcija je monotono rastuća u R (provjeriti!).

3° Funkcija je neparna jer je

$$f(-x) = lg\,(-x + \sqrt{1+x^2}) = lg\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = lg\,(x + \sqrt{1+x^2})^{-1} =$$

$$= -lg\,(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x) \quad za \ \forall x \in R.$$

4° Ne postoji $c \in R$, $(c \neq 0)$ u odnosu na koje je f simetrična ili antisimetrična.

5° Funkcija f je konveksna za $x < 0$, a konkavna za $x > 0$; u $x = 0$ mijenja se karakter konkavnosti.

Skicirati grafik i provjeriti nedokazane tvrdnje u ovom zadatku pod j) (bilo posmatranjem slike bilo analitički).

Napomena. Kod ispitivanja da li je neka funkcija monotona korisno je služiti se slijedećim činjenicama:

1° Ako je $[f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) \geq 0$ onda je f neopadajuća, a ako je za $\forall x_1, x_2 \in E_x$

$$[f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) \leq 0$$

onda je f nerastuća;

2° ako je $f(x)$ rastuća, onda je $-f(x)$ opadajuća;

3° ako je $f(x)$ opadajuća, onda je $-f(x)$ rastuća;

4° ako je $f(x)$ rastuća sa određenim znakom (+ ili −) onda je $\frac{1}{f(x)}$ opadajuća i obratno;

5° aritmetički zbir rastućih f-a je rastuća, a proizvod rastućih pozitivnih f-a je rastuća f-a. Može li se u opštem slučaju logaritmirati nejednakost?

115. Date su funkcije:

a) $y = \sin \frac{x}{4}$; b) $y = \sin \frac{3x-2}{5} + \cos \frac{\pi}{2} x$;

c) $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{tg} 3x$; d) $f(x) = 3x \cos x$;

e) $f(x) = 2 + \sin \frac{\pi}{2} x$; f) $f(x) = [x] + 1$;

g) $f(x) = \cos \sqrt{x}$; h) $f(x) = 10$;

i) $f(x) = 3\cos(4x+6) + \sin x \cos x + \cos^4 x + \sin^4 x$;

j) $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 2$;

k) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{za } 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \\ -\sin x & \text{za } \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \end{cases}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

l) $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R$ definisana sa

$$f(x) = \sin x + 1,$$

n) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0. \end{cases}$

Ispitati periodičnost datih funkcija i odrediti osnovni − primitivni period, u koliko je f periodična (ukoliko postoji najmanji pozitivan period).

Rješenje (a za neke f samo rezultat).

Da bi funkcija f bila periodična mora postojati broj $p \neq 0$ takav da vrijedi

1° $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow x+p \in \mathcal{D}(f)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$;

2° $f(x+p) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}(f)$.

a) $\mathcal{D}(f)\ (=\mathcal{D}_f) = (-\infty, +\infty) = R$

pa je za svaki realan broj $p \neq 0$ ispunjena relacija

$$x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow x+p \in \mathcal{D}_f\ ,\ \forall x \in \mathcal{D}_f .$$

Odredimo (pokušajmo) iz definicione relacije 2° broj p (koji ne zavisi od x, a takvih brojeva može biti beskonačno, čak i neprebrojivo mnogo).

Naime,

$$\left(f(x+p)=f(x)\right) \Leftrightarrow \left(\sin\frac{x+p}{4} = \sin\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+p}{4} = \frac{x}{4} + 2k\pi \vee \frac{x+p}{4} = \pi - \frac{x}{4} + k\pi\ ;\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(p = 8k\pi \vee p = 4\pi - 2x + 8k\pi\ \ (=p(x))\ ;\ k=0,\pm1,\dots\right)$$

pa data funkcija ima za period bilo koji broj $(\neq 0)$:

$$p_k = 8k\pi\ ;\ k = \pm1, \pm2, \dots$$

Najmanji od pozitivnih brojeva p_k naziva se primitivnim (osnovnim – prostim) periodom funkcije f i njegova je vrijednost:

$$T = \min\{p_k : p_k > 0\} = 8\pi ,$$

tj. data funkcija je periodična sa osnovnim periodom $T = 8\pi$.

b) Ponekad je zgodnije datu funkciju f predstaviti u obliku:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x)$$

pa (ako su $f_1, f_2, \dots f_n$ periodične, a ako nije bar jedna od njih periodična to još ne znači da je f neperiodična npr. $f(x) = x - [x]$ je periodična sa $T=1$ iako $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = -[x]$ nisu periodične) je T najmanji zajednički sadržalac za $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$.

Stavljajući

$$f_1(x) = \sin\frac{3x-2}{5} \quad i \quad f_2(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$$

imamo :

$$f_1(x) = \sin\frac{3x-2}{5} = \sin\left(\frac{3x-2}{5} + 2\pi\right) = \sin\frac{3x-2+10\pi}{5} =$$

$$= \sin\frac{3\left(x+\frac{10\pi}{3}\right)-2}{5}, \ \text{tj.} \ T_1 = \frac{10\pi}{3};$$

$$f_2(x) = \cos\frac{\pi}{2}x = \cos\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi x + 4\pi}{2} = \cos\left[\frac{\pi}{2}(x+4)\right] \ \text{tj.} \ T_2 = 4.$$

Međutim, odnos

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{10\pi}{12}$$ nije racionalan broj, jer ne postoje cijeli

brojevi p i q takvi da je

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}, \ (\text{zbog } \pi \equiv \text{iracionalan broj}).$$

Dakle funkcija f ipak nije periodična iako je jednaka zbiru period. f-a).

Napomena. Kako se svaki iracionalan broj može aproksimirati po volji tačno racionalnim brojevima, može se pokazati da ima uvijek cijelih brojeva r i s takvih da su rT_1 i sT_2 gotovo jednaki. U toj je činjenici izvor teorije tzv. „gotovo-periodičnih funkcija" (Harald Bohr, 1925) čija je važnost značna i u teoriji realnih funkcija i u primjenama na tehniku i fiziku.

c) Označujući $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, gdje je

$$f_1(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad i \quad f_2(x) = \operatorname{tg} 3x, \ \text{imamo}$$

$$T_1 = \pi, \ T_2 = \frac{\pi}{3}, \ \text{tj } f \text{ je periodična sa osnovnim periodom}$$

$$T = N\cdot Z\cdot S\,(T_1, T_2) = \pi \quad \left(\frac{T_2}{T_1} = 3 - \text{racionalan broj}\right).$$

d) Prvi uslov za periodičnost je ispunjen, jer

$$x \in \mathcal{D}_f \ (=R) \Rightarrow x+p \in \mathcal{D}_f, \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ \forall p \in R.$$

Međutim, drugi uslov nije ispunjen jer

$$f(x+p)=f(x) \Longleftrightarrow 3(x+p)\cos(x+p)=3x\cos x$$

$\Longrightarrow p=p(x)$, (mogu se uzeti i dvije vrijednosti od x-sa da se pokaže da se za razne x-ve dobiju različiti brojevi p)..

e) Poznato je da je $f(x)=\sin x$ periodična s osnovnim periodom $T=2\pi$. Međutim, i funkcija

$$g(x)=a\sin(bx+c), \quad (a, b\neq 0;\ a,b\in R)$$

je takođe periodična, jer je

$$g(x+p)=g(x) \Leftrightarrow a\sin[b(x+p)+c]=a\sin(bx+c)$$

$$\Leftrightarrow \{[b(x+p)+c=bx+c+2k\pi] \vee [b(x+p)+c=\pi-(bx+c)+2k\pi]\}$$

$$\Longrightarrow p=\frac{2k\pi}{b};\ k=0\pm1\pm2,\ldots$$

pa je njen osnovni period $T=\dfrac{2\pi}{|b|}$.

Otuda slijedi da je data funkcija $f(x)=2+\sin\frac{\pi}{2}x$ periodična, s osnovnim periodom $T=4$.

f) Ne postoji broj $p\neq 0$ takav da je

$$f(x+p)=f(x) \ \text{za} \ \forall x\in E_x=R,$$

jer je

$$f(x+p)=f(x) \Leftrightarrow [x+p]+1=[x]+1$$

$$\Leftrightarrow [x+p]=[x],$$

a kako je

$$[x]=k,\ x\in[k,k+1),\ (k=0,\pm1\pm2,\ldots)$$

to bi moralo biti:

$$x+p\in[k,k+1) \ \text{što je nemoguće za} \ p\neq 0.$$

g) $E_x=\{x\in R:\ x\geqslant 0\}=[0,+\infty)\Rightarrow(x\in E_x\Rightarrow x+p\in E_x$ za $\forall x\in E_x,\ p>0)$

$(f(x+p)=f(x))\Leftrightarrow(\cos\sqrt{x+p}=\cos\sqrt{x})$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x+p}=\sqrt{x}+2k\pi \vee \sqrt{x+p}=2\pi-\sqrt{x}+2k\pi;\ k=0,\pm1,\dots)$

$\Rightarrow p=p(x)\Rightarrow f$ nije periodična (podrazumijeva se da $p(x)$ nije konstanta za svako $x\in E_x$).

h) $E_x=R\Rightarrow(x\in E_x\Rightarrow x+p\in E_x,\ \forall x\in E_x$ i $\forall p\in R)$.

$(f(x+p)=f(x))\Leftrightarrow 10=10$ (što je uvijek istinito za bilo koje x i bilo koje $p\in R$).

Prema tome f je periodična sa periodom p koji može biti bilo koji, različit od nule, realan broj; ne postoji osnovni period jer ne postoji minimalni element u skupu realnih brojeva.

i) $f_1(x)=3\cos(4x+6)$, $f_2(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$,

$f_3(x)=\cos^4x\ \sin^4x=(\cos^2x)^2+(\sin^2x)^2=$

$$=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

odnosno

$$T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\quad T_2=\frac{2\pi}{2}=\pi,\quad T_3=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

pa je $T=\pi$.

j) $f(x)=\cos^6x+\sin^6x+2=\dots=\frac{21}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$.

k) Rezultat. $T=\pi$.

l) Rezultat. Neperiodična.

n) Rezultat. Neperiodična.

116. Navesti primjer harmonijskog kretanja iz koga nastaje modulirano titranje, tj. amplituda A nije konstantna, nego se i sama periodički mijenja s periodom različitim od perioda harmonijskog kretanja. Neka taj primjer ujedno ilustruje pojavu kretanja (udara); amplituda sastavljena kretanja periodički se mijenja, a uho zamjeđuje jačanje i slabljenje zvuka.

Rješenje. Posmatrajmo dva harmonijska kretanja definisana izrazima

$$y_1(x) = \sin 8x \ , \quad y_2(x) = \sin 7x \ ;$$

Njihove frekvencije (broj titraja u jedinici vremena, frekvencija $= \frac{1}{T}$, $T \equiv$ period) se razlikuju za $\frac{1}{2\pi}$ pa se kretanje

$$y(x) = \sin 8x + \sin 7x = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\sin\left(\tfrac{15}{2}x\right)$$

može shvatiti kao harmonijsko kretanje dato sa $y_3(x) = \sin\frac{15}{2}x$ sa periodom $T = \frac{4\pi}{15}$, a kome se amplituda $A(x) = 2\cos\frac{1}{2}x$ mijenja periodično sa periodom 4π, dakle mnogo sporije (sastavljeno kretanje ima ipak period 2π).

1.2.6 INVERZNE I SLOŽENE FUNKCIJE

117. Dati su skupovi

$$E_x = N \ (= \{1, 2, 3, \ldots\}), \qquad E_u = Z \setminus (N \cup \{0\} \ (= \{-1, -2, -3, \ldots\}),$$

$$E_y = Z \ (= \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}).$$

Navedite primjer funkcije φ, definisane na E_x i funkcije f definisane na E_u

a) tako da je sa

$$y = h(x) = f[\varphi(x)], \quad \forall x \in E_x \tag{1}$$

zadana funkcija $h: E_x \to E_y$ (koja se zove kompozicija ili složena funkcija, funkcija φ i f);

b) tako da relacija (1) ne definira kompoziciju h:

$$h = f \cdot \varphi .$$

Rješenje. a) Stavimo, npr.,

$$(u =)\ \varphi(x) = -6x \ (\forall x \in E_x), \quad f(u) = u^2 - 10 \ (\forall u \in E_u).$$

Kako je funkcija f definisana na skupu E_u u kojem leži slika funkcije φ, to je definisana i funkcija $h = f \cdot \varphi$, tj. funkcija oblika

$$h(x) = f[\varphi(x)] \quad (\forall x \in E_x)$$

pa imamo

$$y = h(x) = \varphi(x) - 10 = (-6x) \cdot (-6x) - 10 = 36x^2 - 10 .$$

b) Ako je, npr.,

$$\varphi(x) = -6x + 10,$$

onda kompozicija $h = f \circ \varphi$ ne bi bila definisana; jer bi imali, npr., $h(1) = f[\varphi(1)] = f(4)$, a f ne „umije" djelovati na pozitivne brojeve (4 nije u području definicije od f).

118. Nadite $f \circ \varphi$ i $\varphi \circ f$ za polinome

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \quad \varphi(x) = x^2 + 1$$

Da li je $f \circ \varphi = \varphi \circ f$?

Rješenje.

$$(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)] = 3 \cdot [\varphi(x)]^2 - 2 \cdot \varphi(x) + 5 =$$

$$= 3(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) + 5 = 3x^4 - 4x^2 + 6,$$

$$(\varphi\circ f)(x) = \varphi[f(x)] = [f(x)]^2 + 1 = (3x^2-2x+5)^2 + 1 =$$

$$= 9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 26$$

pa je

$$f\circ\varphi \neq \varphi\circ f.$$

119. Neka su f i φ polinomi. Da li je $f\circ\varphi$ polinom? Obrazložiti odgovor.

Rezultat. Da.

120. Da li je kompozicija racionalnih funkcija racionalna?

121. Neka su f i φ razlomljene linearne funkcije. Dokažite da je takva i njihova kompozicija.

122. Za polinome f, g, h vrijedi

$$(f+g)\circ h = (f\circ h) + (g\circ h).$$

Nađite tri polinoma f, g, h takva da je

$$h\circ(f+g) \neq (h\circ f) + (h\circ g),$$

tj. da lijevi zakon distribucije ne vrijedi, a desni vrijedi.

Rješenje. Neka je, npr., $h(x) = x-2$, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$. Otuda je s jedne strane

$$[h\circ(f+g)](x) = h[(f+g)(x)] = h[f(x)+g(x)] =$$

$$= h(x^3+x^2) = x^3+x^2-2,$$

a s druge

$$[(h\circ f)+(h\circ g)](x) = (h\circ f)(x) + (h\circ g)(x) = h[f(x)] + h[g(x)] =$$

$$= f(x)-2+g(x)-2 = x^3-2+x^2-2$$

pa je

$$h\circ(f+g) \neq (h\circ f)+(h\circ g).$$

123. Nađite sve polinome f drugog stepena takve da je

$$f\circ g = g\circ f \quad \text{gdje je}$$

a) $g(x)=x$, b) $g(x)=x^2$, c) $g(x)=1+x^2$.

124. Neka su f, g funkcije sa R u R. Da li vrijedi implikacija

$$(f\cdot g=0) \Rightarrow (f=0 \vee g=0)\ ?$$

(Pod $f: R \to R$, $f=0$ podrazumjeva se funkcija definisana sa: $f(x)=0$ za $\forall x\in R$).

Rješenje. Ne vrijedi.

Zaista, neka je, npr., $f(x)=x-1$, a $g(x)=1$.

Sada je

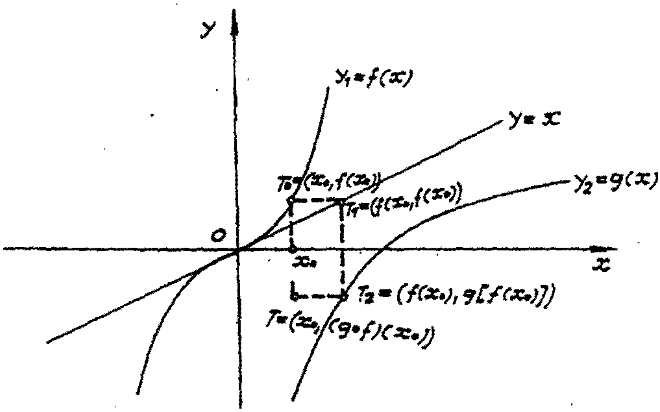
$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=g(x)-1=1-1=0 \text{ za } \forall x\in R, \text{ tj. } f\circ g=0,$$

iako je $f\neq 0$, $g\neq 0$.

125. Ako su f i g polinomi stepena manjeg ili jednakog 1, onda je i njihova kompozicija stepena ≤ 1. Dokazati.

126. Neka je poznat grafik funkcije f i funkcije g, konstruisati grafik funkcije $g\circ f$.

Rješenje. Nacrtamo grafike od f i g i povučemo pravu $y=x$. Uzmimo proizvoljan element $x_0\in \mathfrak{D}(f)$ i tačkom $(x_0,0)$ vučemo paralelu sa y-osi do presjeka sa grafikom od f. Označimo presječnu tačku sa $T_0=(x_0, f(x_0))$ pa iz nje idimo po paraleli sa x-osi do tačke $T_1=(f(x_0),\ f(x_0))$ na pravoj $y=x$. Iz tačke T_1 paralelno sa y-osi idemo do presjeka sa grafikom od g; presječnu tačku označimo sa $T_2=(f(x_0),\ g[f(x_0)])$. Iz T_2 paralelno sa x-osi idemo do presjeka sa pravom $x=x_0$ i $T=(x_0,\ (g\circ f)(x_0))$ koja je na grafiku funkcije $h=g\circ f$. Odgovarajuća slika je (uzećemo proizvoljne grafike funkcija f i g):



Za vježbu uzeti konkretan primjer (npr. $f(x)=x^3+1$, $g(x)=\ln x$). Također za vježbu konstruisati grafike funkcija $f\circ g$ i $g\circ f$ pomoću grafika polinoma f (poznat proizvoljan grafik), ako je $g(x)=ax+b$. Šta možete reći o stepenu polinoma $f\circ g$ i $g\circ f$? Da li je kompozicija strogo monotonih funkcija strogo monotona? Rješenje ovog zadatka može korisno poslužiti pri crtanju grafika složenijih funkcija.

127. Neka je dat lanac preslikavanja $x\to u\to y$ definisan sljedećim zakonima korespondencije

$$y=f(u)=\sqrt{u},\quad u=\varphi(x)=x-6.$$

Definiše li dati lanac složenu funkciju

$$y=f(\varphi(x))\ ?$$

Rješenje. $\mathcal{D}(\varphi)=E_x=(-\infty,+\infty)=R$, $\mathcal{D}(f)=E_u=\{u\in R: u\geq 0\}=[0,+\infty)$. Slika od φ je:

$\varphi(E_x)=(-\infty,+\infty)$, tj. slika od φ se ne nalazi u $\mathcal{D}(f)$ pa se ne može definisati složena funkcija $h=f\circ\varphi: E_x\to E_y$. No, može se definisati složena funkcija

$$h_1=f\circ\varphi: E_1=\{x\in R: u=x-6\geq 0\}\to E_y\ (\subset R),$$

$$h_1(x)=(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]=\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{x-6}.$$

Vidimo da se definiciono područje složene funkcije može razlikovati od područja definicije funkcija od kojih je složena (E_1 je dio od E_x).

128. Navesti primjere lanaca preslikavanja

a) koja definišu složenu funkciju na $E_1=E_x$ (E_x područje def. od $\varphi(x)$);

b) koja ne definišu složenu funkciju.

Rješenje. a) Neka je lanac uzastopnih preslikavanja dat izrazima:

$$y=f(u)=\cos u,\quad u=x^7+1\ (=\varphi(x));$$

tada je definisana kompozicija funkcija

$$h=f\circ\varphi: (E_x=R)\to R,$$

$$h(x)=f[\varphi(x)]=\cos\varphi(x)=\cos(x^7+1).$$

b) Lanac uzastopnih preslikavanja dat u obliku:

$$y=f(u)=\sqrt{u},\quad u=\varphi(x)=-1-x^2,$$

ne definiše složenu funkciju $h=f\circ\varphi$, jer simbol

$$f[\varphi(x)]=\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{-1-x^2}$$

nema realnu vrijednost ni za jedno realno x. Dakle ovdje je skup $E_1=\emptyset$ (skup x-va za koje je $u=\varphi(x)\in\mathcal{D}(f)$).

129. Zadane funkcije napišite u obliku lanca jednakosti (uzastopnih preslikavanja) u kojem svaka karika sadrži jednostavnu funkciju (potenciju, eksponencijalnu, trig., i dr.):

$$a)\ y=(3x-4)^7\ ;\quad b)\ y=\cos tg\frac{x}{2}\ ;\quad c)\ y=\ln tg\, 2^{\cos x}$$

Rješenje. a) $y=u^7$, $u=3x-4$; b) $y=\cos u$, $u=tg\, v$, $v=\frac{x}{2}$ (u i v su međuargumenti); c) $y=\ln u$, $u=tg\, v$, $v=2^t$, $t=\cos x$.

130. Ako je $f(x)=\log x$, dokazati da je

$$f(x)+f(x+1)=f[x\cdot(x+1)] \text{ za } \forall x\in(0,+\infty). \qquad (1)$$

Može li se relacija (1) zamijeniti sa

$$f(x)+f(x+1)\equiv f[x(x+1)]\ ?$$

131. Ako je $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, provjeriti da je $f(x)=f(\frac{1}{x})$.

132. Neka je funkcija $f(x)$ definisana na segmentu $[0,1]$. Naći područje definicije slijedećih funkcija:

$$a)\ g(x)=f(x^2);\quad b)\ g(x)=f(\cos x);\quad c)\ g(x)=f(a+x);$$
$$d)\ g(x)=f(\ln x).$$

Rješenje. a) Funkciju $g(x)=f(u)$ možemo smatrati složenom preko međuargumenta $u=x^2\ (=\varphi(x))$. Na, $E_x=R$, $E_u=[0,1]$ pa će složena funkcija $g=f\circ\varphi$ biti definisana na

$$E_1=\{x\in E_x:\ 0\leqslant u=x^2\leqslant 1\}=\{x\in E_x:-1\leqslant x\leqslant 1\}=[-1,1],\ tj.$$

$$g\ (=f\circ\varphi):\ [-1,1]\to R.$$

b) Stavljajući $y=f(u)$, $u=\varphi(x)=\cos x$, imamo

$$E_x=R,\ E_u=[0,1],\ \text{tj. složenu funkciju } g(x)=f(\cos x)$$

biće definisana na $E_1 = \{x \in E_x : u = \varphi(x) \in E_u \ (= \mathcal{D}(f))\} =$

$= \{x \in E_x : \cos x \in [0,1]\} = \{x \in R : -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in Z\}$.

c) $(y = f(u),\ u = \varphi(x) = a + x,\ E_u = [0,1]) \Rightarrow$

$E_x = R,\quad \mathcal{D}_g = \mathcal{D}(f \circ \varphi) = \{x \in E_x : u = \varphi(x) = a + x \in E_u\} =$

$= \{x \in E_x : 0 \leqslant a + x \leqslant 1\} = [-a, 1-a]$;

d) $(g(x) = f(u),\ u = \varphi(x) = \ln x,\ E_u = [0,1]) \Rightarrow$

$E_x = (0, +\infty),\quad \mathcal{D}_g = \{x \in E_x : u = \varphi(x) = \ln x \in E_u\} =$

$= \{x \in E_x : 0 \leqslant \ln x \leqslant 1\} = [1, e]$.

133. Neka je funkcija $f(u)$ definisana u $(0,1)$. Nađi područje definicije funkcije $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$

Rezultat. $\{x \in R : 1 < x < +\infty,\ x \neq k \ ;\ k = 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

134. Nađi $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g$ i $f \circ f$ ako je

RIJEŠENI

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in (-\infty, 0], \\ x & \text{za } x \in (0, +\infty); \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in (-\infty, 0], \\ -x^2 & \text{za } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Rezultat. 1° $g \circ g = g$, (vrijedi li to inače ?);

2° $g \circ f = 0$, jer je

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \begin{cases} 0 & \text{za } f(x) \in (-\infty, 0] \\ f(x) & \text{za } f(x) \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ za } & (f(x) = -x^2 \vee f(x) = 0), \text{ tj. } x \in (-\infty, +\infty), \\ -x^2 & \text{za } -x^2 \in (0, +\infty) \ (\Leftrightarrow x \in \emptyset) \end{cases}$$

$= 0$ za $\forall x \in R$:

3° $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x)$ za $\forall x \in R$;

4° $f(f(x))=0$.

135. Nađi $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, ako je

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Rezultat. $\frac{x-1}{x}$, x.

136. Neka su f, g i h – monotono rastuće funkcije iz R u R. Dokazati implikaciju:

$$(f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x))\Rightarrow(f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]).$$

137. Izračunajte $f(x+1)$, ako je $f(x-1)=x\sqrt{x-2}$, a zatim odredite definiciona područja složenih funkcija $f(x+1)$ i $f(x-1)$.

Rješenje. Neka je $x-1=u$, tj. $x=u+1$, gdje je u nova promjenljiva. Tada je $f(u)=(u+1)\sqrt{u-1}$. Da bismo dobili $f(x+1)$ uvedimo $u=x+1$. Dakle $f(x+1)=(x+2)\sqrt{x}$. Područje definicije funkcije $h(x)=f(x-1)$ je:

$$\mathcal{D}_h=\{x\in R:\ x=0\vee x-2\geqslant 0\}=\{0\}\cup[2,+\infty),$$

a za funkciju $g(x)=f(x+1)$ je:

$$\mathcal{D}_g=\{x\in R:\ x=-2\vee x\geqslant 0\}=\{-2\}\cup[0,+\infty).$$

138. Za funkciju

$$y=1-2^{-2x} \tag{1}$$

odrediti inverznu funkciju (ukoliko postoji).

Rješenje. Ako jednačinu $y=f(x)$ možemo jednoznačno riješiti po promjenljivoj x, tj. ako postoji takva funkcija $x=g(y)$ da je

$y \equiv f[g(y)]$, tada je funkcija g, definisana sa $x=g(y)$, ili uobičajenom oznakom $y=g(x)$, inverzna od funkcije f sa osobinom: $g(f(x)) \equiv x$ (tj. f i g su međusobno inverzne). Napomenimo da općenito, jednačina $y=f(x)$ definiše višeznačnu funkciju $x=f^{-1}(y)$ i to takvu da je

$$y \equiv f(f^{-1}(y)) \text{ za } \forall y \in E_y = \{y \in R:\ y=f(x)\}.$$

Ako jednačinu (1) riješimo po x, dobivamo:

$$2^{-2x} = 1-y,$$

odnosno $$-2x \log 2 = \log(1-y), \text{ tj.}$$

$$x = \frac{\log(1-y)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)}. \qquad (2)$$

Jednačina (2) definiše funkciju $x=g(y)$ koja je inverzna funkciji $y=f(x)$. Područje definicije funkcije g je:

$$\mathcal{D}_g = \{y \in R:\ y<1\} = (-\infty,-1),$$

dok je funkcija f definisana za svako realno x.

Napomenimo da smo umjesto promjenljive y mogli uvesti (što se obično i čini) promjenljivu x, a da je $g(x)$ opet inverzna od $f(x)$ s tim što treba razlikovati sljedeće:

1° Grafici od uzajamno inverznih f-a $y=f(x)$ i $x=g(y)$ $(=f^{-1}(y))$ predstavljeni su jednom istom krivom.

2° Grafik funkcije $y=g(x)$ $(=f^{-1}(x))$ je sa grafikom funkcije $y=f(x)$ simetričan u odnosu na pravu $y=x$ (i ova se osobina često koristi kod skiciranja grafika).

139. Navesti primjer funkcije f koja nema inverzne funkcije.

Rješenje. Neka je $f: f(x)=x^2$ $(\forall x \in R)$, tada inverzno preslikavanje nije jednoznačno, pošto svakom $y=f(x)=x^2$ (>0) odgovaraju dvije vrijednosti od x, tj. $x=\pm\sqrt{y}$. Zato funkcija f nema inverznu funkciju f^{-1}.

Napomenimo da dato preslikavanje nije bijekcija - biunivoko preslikavanje - (1-1) preslikavanje, jer f nije injekcija, tj. ne vrijedi implikacija

$$(f(x)=f(y)) \Longrightarrow x=y, \quad (\forall x,y\in R),$$

dok je $f: R\to[0,+\infty)$ preslikavanje „na", tj. surjekcija).

Primjedba. Funkcija $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$; $f(x)=x^2$, je bijekcija pa postoji jedinstvena bijekcija $g=f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, gdje je $g(x)=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ $(\forall x\geq 0)$, tj f ima inverznu funkciju (na $[0,+\infty)$).

140. Navesti primjer funkcije f za koju važi:

(1) $\quad 1_{E_x}=f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}$, tj za koju je

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x \text{ za } \forall x\in\mathcal{D}_f\,(=E_x),$$

$$(f\circ f^{-1})(y)=y \text{ za } \forall y\in\mathcal{D}_{f^{-1}};\ (\mathcal{D}_{f^{-1}}=\mathcal{D}_f=E_x=E_y).$$

Rješenje. Ako je $f:E\to F$ bijekcija, tada postoji jedinstvena inverzna funkcija $f^{-1}:F\to E$ takva da je

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x \quad \forall x\in E$$

$$(f\circ f^{-1})(y)=y \quad \forall y\in F \quad (F \text{ je slika od } f)$$

pa, ukoliko je $E\neq F$, funkcije $g(x)=f^{-1}(f(x))$ i $h(x)=f(f^{-1}(x))$ nisu jednake. Prema tome, za odgovor na postavljeni zadatak dovoljno je naći funkciju f čija je slika $F=f(E)$ jednaka skupu $E=\mathcal{D}_f$ (jedino tada i važi jednakost $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}$).

U tu svrhu posmatrajmo funkciju

$g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ iz R u R. Tada je $\mathcal{D}_g=R\setminus\{1\}$.

Funkcija g je injekcija, jer

$$(g(x_1)=g(x_2)) \Longleftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_1-1}=\frac{x_2}{x_2-1}\right)$$

$$\Longrightarrow [x_1(x_2-1)=x_2(x_1-1)] \Longrightarrow (x_1x_2-x_1=x_1x_2-x_2)$$

$$\Longrightarrow (x_1=x_2).$$

Neka je $f: \mathcal{D}_g \to g(\mathcal{D}_g)$, tj. $f:(R\setminus\{1\}) \to g(R\setminus\{1\})$ tako da je $f(x)=g(x)$ $\forall x \in (R\setminus\{1\})$. Tada je f bijekcija, pa postoji $f^{-1}: f(R\setminus\{1\}) \to (R\setminus\{1\})$ $(=\mathcal{D}_f)$. Nađimo tu inverznu funkciju f^{-1}. Ako je $y \in f(R\setminus\{1\})$, onda postoji jedinstveno $x \in \mathcal{D}_f$ takvo da je $y=f(x)=g(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

Odavde je

$$((x-1)y=x) \Longrightarrow \left(x=\frac{y}{y-1}\right).$$

Prema tome imamo

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y}{y-1}$$

Iz čega se vidi da je

$$\mathcal{D}_{f^{-1}}=f(R\setminus\{1\})=R\setminus\{1\},$$

tj. područje definicije od f jednako je skupu vrijednosti od f (f i f^{-1} imaju isto područje definicije pa će to isto područje imati i funkcije $f\circ f^{-1}$, $f^{-1}\circ f$).

Uvjerimo se da su funkcije $f\circ f^{-1}$ i $f^{-1}\circ f$ jednake.

Zaista,

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=y \quad \text{za} \quad \forall y \in (R\setminus\{1\}),$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x \quad \text{za} \quad \forall x \in (R\setminus\{1\}), \text{ tj.}$$

$$(f\circ f^{-1})(x) \equiv (f^{-1}\circ f)(x)=x.$$

141. Za funkciju f izračunajte inverznu, ako je:

a) $f: R \to R$, $f(x)=2x+5$, (Ima li funkcija $f: [0,10] \to R$, $f(x)=2x+5$, inverznu funkciju ?);

b) $y=x^2+10$ (izračunajte višeznačnu inverznu)

c) $y=\log(x-1)$, i odredite njihovo područje definicije.

Rezultat. a) $x=\frac{y-5}{2}$, $\forall y \in R$; b) $x=\pm\sqrt{y-10}$, $y \geq 10$;

c) $x=10^y+1$, $\forall y \in R$.

142. Pokažite da je inverzna funkcija funkcije $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ sama ta funkcija f.

143. Naći inverznu funkciju $x=x(y)$, ako

$$y=x+[x].$$

Rezultat. $x=y-k$, ako $2k \leq y < 2k+1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

144. a) Može li nemonotona funkcija $y=f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ imati jednoznačnu inverznu (inverznu) funkciju ? Razmotriti primjer:

$$y=f(x)=\begin{cases} x & \text{za } x \text{ racionalno} \\ -x & \text{za } x \text{ iracionalno}. \end{cases}$$

b) Može li neopadajuća ili nerastuća funkcija f (koja je monotona, ali ne strogo) imati (jednoznačnu) inverznu funkciju. Razmotriti primjere :

1° $y=2$;

2° $y=\begin{cases} 2 & \text{za } x \in [5,6] \\ x & \text{za } x \in (-\infty,5) \cup (6,+\infty). \end{cases}$

Rezultat. a) Da. Funkcija $f(x)$ ima jednoznačnu inverznu funkciju

$$g(y)(=x)=\begin{cases} y & \text{za } y \text{ racionalno} \\ -y & \text{za } y \text{ iracionalno}, \end{cases}$$

gdje je $f=g$ $(=f^{-1})$. Ima li Dirihleova funkcija bilo kakvu inverznu funkciju ?

b) Ne.

1.2.6 FUNKCIJE, ZADANE PARAMETARSKI

145. Izraziti funkcionalnu zavisnost između promjenljivih x i y posredstvom pomoćne promjenljive (parametra) na dva načina [26], ako je

a) $y=1-x$, $(x\in[0,1])$; b) $y=\ln x-2$.

Rješenje. a) Svaka funkcija $y=f(x)$ može biti parametrizovana na neograničeno mnogo načina.

1° Najjednostavniji postupak je taj što se može uzeti $x=t$, te je onda $y=f(x)=f(t)=1-t$, $t\in[0,1]$, tako da funkcija $y=f(x)$ može biti ovako data:

$$x=t\,,\quad y=1-t\quad(\forall t\in[0,1]).$$

2° Znamo da je $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ za $\forall t\in R$ pa, ako stavimo $x=\cos^2 t$ (a to možemo jer dok t prođe kroz interval R, dotle t „prošeta" segment $[0,1]$ i obratno), dobivamo

$$x=\cos^2 t,\quad y=\sin^2 t\quad(\forall t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]. \tag{1}$$

Definiše li relacija (sistem jednačina):

$$x=\cos^2 t\;,\quad y=\sin^2 t\;.\;(\forall t\in(-\infty,+\infty))$$

istu funkciju kao i relacija (1), (tj. je li uslov: $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ neophodan)? Na osnovu grafika funkcije t^2 konstruisati grafike funkcija $x=\cos^2 t$ i $y=\sin^2 t$.

---

26) Parametarske jednačine $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$; $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$ predstavljaju parametarske jednačine krive u ravni i ove su jednačine često puta podesnije za ispitivanje krive (za ispitivanje implicitne funkcije, a i za izražavanje višeznačne funkcije jednoznačnim funkcijama).

b) Data funkcija $y=y(x)$ definisana je za $x\in(0,+\infty)$.

1° Stavljajući $x=e^t$ (to možemo jer je $x>0$ pa je slika od $f(t)=e^t$ upravo skup $(0,+\infty)$ koji je jednak skupu X-eva – primjetimo da na to moramo paziti kod izbora funkcije od t), dobivamo

$$x=e^t,\quad y=t-2\quad (\forall t\in R).$$

Jesmo li mogli staviti $y=e^t$?

2° Uzimajući da je

$$x=\operatorname{tg} t,\ \forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

dobivamo

$$x=\operatorname{tg} t,\ y=\ln \operatorname{tg} t,\ \forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Zašto smo uzeli da je $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ i jesmo li morali to učiniti?

146. Data je funkcija u parametarskom obliku (bolje reći: dat je sistem jednačina):

(1) $$x=\sqrt{2}\sin t,\quad y=1-\cos 2t,\quad (\forall t\in R).$$

a) Naći funkciju $y=y(x)$ i odrediti joj područje definicije i sliku (skup vrijednosti).

b) Koje su bitne karakteristike (osobine) funkcije $y=y(x)$?

c) Postoje li vrijednosti: $y(-2)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(3)$?

d) Ima li funkcija $y=y(x)$ inverznu funkciju i, ako ima, odrediti je kao i njenu oblast definisati?

e) Da li sistem jednačina

(2) $$x=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\sin t,\quad y=2\sin^2 t\quad \left(\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

definiše istu funkciju $y=y(x)$ koju definiše relacija (1)?

f) Ako u (2) t varira na segmentu (sadržanom u R) dužine 2π, o kojoj se onda funkciji $y=y(x)$ radi?

Rezultat. a) $y=x^2$; $E_x=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$; $E_y=[0,2]$;

b) Ograničena, dostiže svoj supremum i infimum (tj. ima minimum i maksimum – koji?), strogo monotona, i to rastuća u $(0, \sqrt{2}]$, a opadajuća u $[-\sqrt{2}, 0)$; parna, konveksna, nenegativna (i druge osobine koje za sada ne umijemo ispitati);

c) $y(-2)$ i $y(3)$ ne postoje, jer -2 i 3 nije u području definicije od $y = y(x)$; dok $y(-1)$ i $y(0)$ postoje i jednake su respektivno: $1, 0$.

d) Funkcija $y = y(x) = x^2$, $(\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$ nema inverznu već višeznačnu inverznu funkciju $x = \pm\sqrt{y}$, koja je definisana u $[0, 2]$.

e) Ne (zašto?)

f) o istoj funkciji kao pod a) (zašto?).

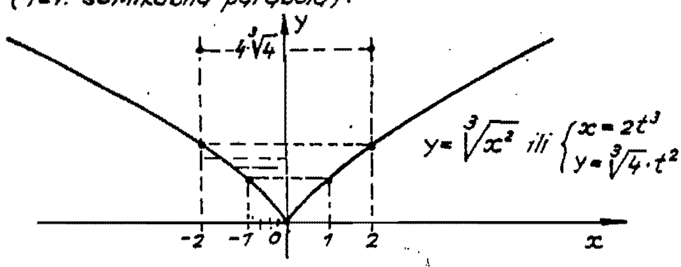
147. Konstruisite grafike funkcija koje su zadane parametarski:

a) $x = 2t^3$, $y = t^2 \cdot \sqrt[3]{4}$; b) $x = \frac{t}{1-t}$, $y = \cos t$; c) $x = |t+1| - 2$, $y = t^2 - 3$.

Rješenje. a) Funkcije $x = f_1(t) = 2t^3$ i $y = f_2(t) = \sqrt[3]{4} \cdot t^2$ su definisane za $\forall x \in R$. Sastavimo (odgovarajuću) tablicu vrijednosti

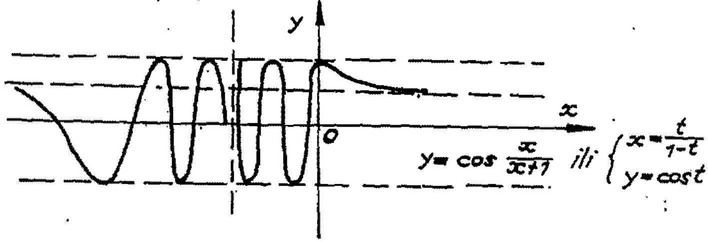
t	$\to -\infty$	$\ldots -2$	-1 $-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\ldots$
x	$\to -\infty$	$\ldots -16$	-2 $-\frac{1}{4}$	0	2	$\frac{27}{4}$	$\ldots$
y	$\to +\infty$	$\ldots 4 \cdot \sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4}$ [illegible]	0	$\sqrt[3]{4}$	$\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{4}$	$\ldots$

i konstruišemo odgovarajuće tačke $M_i = (x_i, y_i)$ u ravni (Dekartovoj) xOy pa ćemo (spajanjem tačaka M_i glatkom krivom) dobiti slijedeći grafik krivulje (tzv. semikubna parabola):

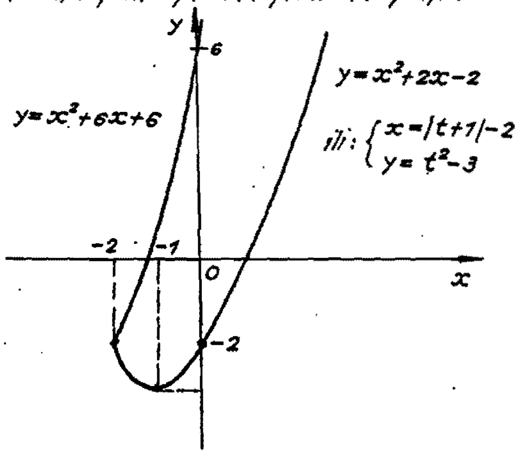


Parametar t ne gubi svoj geometrijski smisao (t se ne odvaja geometrijski – objasniti !). Napisati datu funkciju $y=\sqrt[3]{x^2}$ u jednostavnijem parametarskom obliku.

b) Sastaviti odgovarajuću tablicu vrijednosti i provjeriti da se dobije, približno, sljedeći grafik:



c) Sastavljajući tablicu vrijednosti (i koristeći analitičku metodu) provjeriti da data funkcija ima približan grafik:



Da li dobivena kriva predstavlja grafik neke funkcije f iz R u R?

1.2.7 OSOBINE, NEKI VAŽNI POJMOVI I GRAFICI NEKIH ELEMENTARNIH FUNKCIJA

148. Date su stepene funkcije

a) $y = x^2,\ x^3,\ x^7$; b) $y = \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x^7}$; c) $y = \sqrt[3]{x},\ \sqrt[4]{x},\ \sqrt[3]{x^2},$
$x^{\frac{2}{7}},\ x^{\frac{3}{4}}$;

d) $y = x^{-\frac{1}{3}},\ x^{-\frac{1}{4}},\ \frac{1}{x^{2/3}},\ \frac{1}{x^{2/7}},\ x^{-\frac{3}{4}}$; e) $x^{\pi},\ x^{\sqrt{2}},\ x^{-\pi},\ \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}$.

Odrediti područja definicije ovih funkcija, njihove bitne osobine, konstruisati približno grafike za predstavnike:

1° polinoma (cijele racionalne funkcije);

2° racionalne razlomljene;

3° racionalne algebarske;

4° iracionalne (algebarske);

5° transcedentne.

Zatim za svaku od funkcija, predstavljenih grafički, odrediti po jednu vrijednost, ukoliko postoji, koja predstavlja 1) algebarski (šta je aritmetički broj?); 2) iracionalni algebarski broj i 3) transcedentan broj. Mora li svaki iracionalan izraz biti iracionalan broj?

Rezultat. a) Definisane za svako realno x. F-a x^2 je parna, neograničena, strogo monotona i to: opadajuća za $x \in (-\infty, 0)$ a rastuća u $(0, +\infty)$, konveksna. F-e x^3 i x^7 su neparne, rastuće, neograničene. Algebarski broj je npr., $-\sqrt[17]{27}$ (to je vrijednost f-e x^3 u tački $x = -\sqrt[17]{3}$) i to: iracionalan algebarski broj (algebarski broj je svaki realni broj – racionalni ili iracionalni koji je korijen nekog polinoma s cijelim racionalnim koeficijentima). Međutim date funkcije mogu poprimiti i transcedentne iracionalne vrijednosti (iracionalan broj koji nije algebarski). Tako su e, e^3, π, π^2 transcedentni brojevi.

b) Definisane u $R\setminus\{0\}$. Sve tri opadaju u $(0,+\infty)$, a $\frac{1}{x}$ i $\frac{1}{x^7}$ opadaju u $(-\infty,0)$, dok u tom intervalu funkcija $\frac{1}{x^2}$ raste. $\frac{1}{x^2}$ je ograničena sa donje strane, dok su ostale neograničene s obje strane.

c) Funkcije $\sqrt[3]{x}$, $x^{2/7}$ i $\sqrt[3]{x^2}$ su definisane u R, dok su $x^{3/4}$ i $\sqrt[4]{x}$ definisana u $[0,+\infty)$. $\sqrt[3]{x}$ je neparna, $x^{2/7}$ i $\sqrt[3]{x^2}$ parne, a $x^{3/4}$ i $\sqrt[4]{x}$ ni parne ni neparne (zašto?). $\sqrt[3]{x}$ je neograničena s obje strane, dok su $\sqrt[3]{x^2}$, $x^{2/7}$, $x^{3/4}$ i $\sqrt[4]{x}$ ograničene s donje strane.

d) Funkcije $x^{-\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{x^{2/5}}$, $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$ su definisane u $R\setminus\{0\}$, dok su funkcije $x^{-\frac{1}{4}}$ i $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ definisane u $(0,+\infty)$.

$x^{-\frac{1}{3}}$ je neparna, $\frac{1}{x^{2/5}}$ i $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$ su parne, a $x^{-\frac{1}{4}}$ i $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ ni parne ni neparne.

Jesu li monotone? Svaki iracionalni izraz ne mora biti iracionalan broj, jer je, npr., iracionalni izraz $x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ za $x=\frac{1}{27}$ cijeli racionalni broj 3, a za $x=27$ dobivamo razlomljeni racionalni broj $\frac{1}{3}$.

e) Funkcije x^{π} i $x^{\sqrt{2}}$ su definisane u $[0,+\infty)$, dok su funkcije $x^{-\pi}$ i $\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}$ definisane u $(0,+\infty)$. Tako, npr., izrazi $(-2)^{\pi}$, $(-2)^{\sqrt{2}}$, $0^{-\pi}$, $(-1)^{-\pi}$, $(-2)^{-\pi}$, $\frac{1}{(-2)^{\sqrt{2}}}$ nemaju smisla (nisu definisani i ne predstavljaju određeni realni broj). Sve četiri funkcije su ograničene odozdo. Jesu li monotone? Ima li smisla govoriti o parnosti (neparnosti)?

149. Koje su od sljedećih jednakosti (identičnosti) i relacija tačne (istinite, važe, vrijede, ...):

a) 1° $\sqrt{4}\neq\pm2$, 2° $\sqrt{4}=\pm2$, 3° $\sqrt{4}=2$, 4° $(x^2=4)\Rightarrow(x=\pm\sqrt{4}=\pm2)$,

5° $\sqrt{(-5)^2}=5$, 6° $\sqrt{(-5)^2}=-5$,

7° $\sqrt[n]{a^n}=a$, $(n\in N)$, 8° $\sqrt[n]{a^n}=|a|$, 9° $(\sqrt[n]{a})^n=a$ za $a\geq0$,
10° $(\sqrt[n]{a})^n=a$ za a proizvoljno i n neparan broj,
11° $\sqrt[n]{a^n}=a$ za $a\geq0$ i n proizvoljan, 12° $\sqrt[n]{a^n}=a$ za a proizvoljno i n neparan broj; 13° jednačina $\sqrt{2x}+\sqrt{x+5}=\sqrt{10x+1}$ predstavlja 1) jednu određenu jednačinu ako se simbol $\sqrt[2k]{a}$ $(a\geq0)$ uzima

kao jednoznačan, 2) četiri različite jednačine ako simbol $\sqrt[2k]{a}$ $(a \geq 0)$ ima dvije vrijednosti, (Kako se u srednjoškolskoj praksi to čini? Može li se dopustiti neobsjednost u tumačenju značenja korijena s parnim eksponentom - do čega može dovesti ta neobsjednost?),

$14°$ $\sqrt[n]{a^{np}} = a^p \ (n, p \in N)$, $15°$ $\sqrt[n]{a^{np}} = \begin{cases} |a|^p & \text{za } a<0,\ n=2k,\ p=2k+1 \\ a^p & \text{inače (za ostale } a, n \text{ i } p) \end{cases}$

$$16° \quad \sqrt{x^2+x} - x = \frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}, \ (x \neq 0);$$

b)

$1°$ $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ $(n, p \in N)$; $2°$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $(n \in N)$;

$3°$ $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$, $(b \neq 0)$, $(n \in N)$; $4°$ $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$, $(n, p \in N)$;

$5°$ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$; $6°$ $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3\cdot 2]{(-8)^2}$;

$7°$ $\sqrt{(x-1)(x-6)} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-6}$, $(x \in R)$; $8°$ $(0<a<b) \Rightarrow (\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b})$;

$9°$ $(0<a<1) \Rightarrow \sqrt[n]{a} < 1$; $(a>1) \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$, $(\forall n \in N)$;

$10°$ $(a<b, n \in N) \Rightarrow (\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b})$; $11°$ $(m<n; m, n \in N) \Rightarrow (\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a})$;

c) $1°$ $a^r \cdot a^q = a^{r+q}$; $2°$ $(a^r)^q = a^{rq}$; $3°$ $(ab)^r = a^r \cdot b^r$ (u sva tri slučaja $r, q \in R$);

$4°$ $a^r > 0$, $(r \in R)$; $5°$ $(r>0) \Rightarrow (a^r > 1)$;

$6°$ $(r>0; a<b) \Rightarrow (a^r < b^r)$; $7°$ $(r<0, 0<a<1) \Rightarrow (a^r > 1)$;

$8°$ $(r<0, a>1) \Rightarrow (a^r < 1)$;

$9°$ $(r<0, 0<a<b) \Rightarrow (a^r > b^r)$;

d)

$1°$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $(m, n \in N)$; $2°$ $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$; $3°$ $a^{\frac{6}{7}} = \sqrt[7]{a^6}$;

$4°$ $a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$; $5°$ $a^{\frac{6}{10}} = \sqrt[10]{a^6} > 0$, $(a<0)$; $6°$ $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3} < 0$, $(a<0)$;

7° $a^{\frac{6}{10}} = a^{\frac{3}{5}}$; 8° $a^{\frac{4}{6}} \neq a^{\frac{2}{3}}$, $(a<0)$; 9° $a^{\frac{6}{8}} \neq a^{\frac{3}{4}}$, $(a<0)$.
(šta iz ovoga zaključujemo u vezi definicije stepena $a^{\frac{m}{n}}$ u slučaju $a<0$?).

Rezultat. a)(Poznato je da se pod n-tim aritmetičkim korijenom broja $a \geqslant 0$ podrazumijeva nenegativan broj b čiji je n-ti stepen jednak datom nenegativnom broju a i označava se sa $\sqrt[n]{a}$. Tako je a.k. $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, a a.k. $\sqrt[3]{-27}$ ne postoji. Ako se razmatraju dvije vrijednosti parnog korjena: $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, riječ je o algebarskoj vrijednosti korjena u oblasti realnih brojeva; ako se, pak, razmatra svih n vrijednosti $\sqrt[n]{a}$, riječ je o algebarskoj vrijednosti korjena u oblasti kompleksnih brojeva. Mi ćemo, dosljednosti radi, uzimati jednoznačnu - aritmetičku vrijednost korjena s parnim eksponentom nenegativnog broja : npr. $\sqrt{16} = 4$, a ne $\sqrt{16} = \pm 4$.)

1° važi, 2° ne važi, 3° važi, 4° važi, 5° važi, 6° ne važi,
7° ne važi, (važi za $a \geqslant 0$ i $n \in N$ ili za $a \in R$ i n-neparan),
8° važi, 9° važi, 10° važi; 11° važi, 12° važi, 13° 1) i 2) tačne tvrdnje, (U srednjoškolskoj praksi simbol $\sqrt[2k]{a}$, $(a \geqslant 0)$, jednom se uzima kao dvoznačan pa se npr. piše $\sqrt{16} = \pm 4$, a drugi put kao jednoznačan, pa se npr. data jednačina u 13° smatra jednom određenom jednačinom. Isto tako se uzima da je eksponencijalna funkcija a^x jednoznačna pa se npr. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ uzima kao jednoznačna vrijednost ove funkcije u tački $x = \frac{1}{2}$. Međutim, ta nedosljednost je nedopustiva, jer ona može da dovede do zbrke i grešaka. Zbog toga je ispravno uzimati jednoznačnu vrijednost korjena s parnim eksponentom.);

14° ne važi, 15° važi, 16° ne važi, jer je učinjena greška kod skraćivanja sa x; naime $\sqrt{x^2} = |x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$;

b) 1° ne važi (kada, ipak, važi ?); 2° ne važi (za koje a, b i n važi?);

3° ne važi, (za koje, pak, a, b i n važi); 4° ne važi, (za koje a, n i p važi ?); 5° ne važi, (za koje a, n i p, ipak, važi ?); 6° ne važi, jer je $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$ a $\sqrt[3\cdot 2]{(-8)^2} = 2$; 7° ne važi, jer je izraz na lijevoj strani definisan za one x za koje je $(x-1)(x-6) \geqslant 0$, dok je izraz na desnoj strani definisan za $x \geqslant 6$; 8° važi, (mora li eksponent n biti prirodan broj pa da bi važila data relacija ?); 9° važi; 10° ne važi, (važi samo za neparne n); 11° ne važi, (važi samo ako je $0 < a < 1$);

c) 1° ne važi, (važi ako je još $a > 0$); 2° i 3° također ne važe, izuzev u slučaju da je $a > 0$; 4° ne važi, izuzev ako je $a > 0$ (za neke r može važiti i za $a < 0$ – koji su to realni brojevi r ?); 5° ne vrijedi, (izuzev u slučaju kada je $a > 1$, ili pak, za neke r – koje ?); 6° ne važi, izuzev u slučaju da je $0 < a < b$ (može li, pak, za neke r vrijediti ?); 7° vrijedi; 8° vrijedi; 9° vrijedi;

d) 1° ne vrijedi, (za koje a, n i m, ipak, vrijedi ?); 2° vrijedi; 3° vrijedi; 4° ne važi, jer izrazi $a^{\frac{5}{4}}$ odnosno $\sqrt[4]{a^5}$ nisu definisani za $a < 0$ (u skupu realnih brojeva, na koji uvijek i mislimo kad govorimo o definiciji izraza u ovoj zbirci, jer se radi o realnoj analizi, za razliku od kompleksne – koja se posebno izučava); važi za $a \geqslant 0$; 5° vrijedi; 6° važi; 8° ne važi, jer je $a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ za $\forall a \in R$; 9° važi (za $a \geqslant 0$ imamo $a^{\frac{6}{8}} = a^{\frac{3}{4}}$); 7° ne važi. (Iz ovoga zaključujemo da se pri definiciji $a^{\frac{m}{n}}$ u slučaju $a < 0$ možemo ograničiti samo na slučajeve kad je razlomak $\frac{m}{n}$ dat u redukovanom obliku).

150. Navesti bar četiri konkretne primjene eksponencijalne funkcije u prirodnim i tehničkim naukama. Koja se pri tome (u primjeni) od eksp. funkcija obično pojavljuje ?

Rezultat 1) Raspadanje radioaktivne materije:

$$m = m_0\, e^{kt} \quad \text{(opadanje mase } m \text{ u toku vremena, } k<0).$$

2) Tok hemijske reakcije (ista formula kao u 1)).

3) Razmnožavanje mikroba u jednoj kulturi (ista formula kao u 1)).

4) Zavisnost pritiska (vazdušnog) od visine h:

$$p = p_0\, e^{-\frac{1}{c}\cdot h} \quad \text{(neprekidno mijenjanje u prostoru).}$$

5) Uopšte ako se neka veličina y mijenja u vremenu t tako da u svakom momentu t brzina promjene srazmjerna je vrijednosti te veličine u tom momentu onda kažemo da se veličina y mijenja po eksponencijalnom zakonu, jer se ona izražava eksponen. funkcijom vremena t. (To ćete lako moći dokazati kad budete proučavali proste diferencijalne jednačine.).

Dobije se

$$y = y_0\, e^{kt},$$

gdje je y_0 vrijednost od y za $t=0$.

Razmotriti primjer narastanja kapitala uloženog u banku.

Najčešće se pojavljuje funkcija f definisana sa: $f(x) = e^x$, $e = 2{,}71\ldots$. Broj e se prirodno pojavljuje u gornjim primjerima, a i pri opisu mnogih pojava u nauci.

151. Nacrtajte grafike funkcija (eksponencijalnih i logaritamskih):

a) 2^x, 2^{-x}, -2^x, -2^{-x};

b) polazeći od 2^x nacrtati grafik od 2^{-x};

c) $\log x^3$, $\log(x-1)$, $\log\left(\frac{1}{x}\right)$, $\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pomoću $\log x$;

d) $1+3^x$, 3^{x-2}, 3^{-x}, $3^{\frac{x}{3}}$ pomoću grafika od 3^x;

e) e^{-x^2}; e^{x^2}, $e^{\frac{1}{x}}$, $e^{\frac{1}{x^2}}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

152. Jesu li tačne sljedeće relacije:

a) 1° $\log_c ab = \log_c |ab|$ $(0<c\neq 1;\ a,b>0)$;

2° $\log_c |a\cdot b| = \log_c |a| + \log_c |b|$, $(0<c\neq 1;\ a,b\neq 0)$;

3° $\log_c a\cdot b = \log_c |a| + \log_c |b|$, $(0<c\neq 1;\ a,b\neq 0)$;

4° $\log_c a\cdot b = \log_c |ab| = \log_c(|a|\cdot|b|) = \log_c |a| + \log_c |b|$

(ako je $ab>0$, $0<c\neq 1$);

5° $\log_c a\cdot b = \log_c(-a) + \log_c(-b)$; $(0<c\neq 1;\ a<0,\ b<0)$;

6° $\log_c a^p = p\log_c |a|$, (ako je $a>0$, $0<c\neq 1$ ili ako je $a<0$ a p paran broj, $0<c\neq 1$);

b) 1° $\log f(x)\,g(x) = \log f(x) + \log g(x)$;

2° $\log (f(x))^p = p\log f(x)$;

c) 1° $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ $(0<a\neq 1,\ 0<b\neq 1,\ x>0)$;

2° $\log x = \dfrac{1}{\ln 10}\cdot \ln x$;

3° $a^x = e^{x\ln a}$ $(=\exp(x\ln a))$ $(\forall x\in R,\ a>0)$;

4° $\log_a b < \log_a c$ za $b<c$?

Rezultat. a) 1° Da; 2° da; 3° ne, izuzev ako je $ab>0$; 4° da; 5° da; 6° da;

b) ne, jer izraz na lijevoj strani nema isto definiciono područje kao izraz na desnoj strani (odnosi se i na 1° i na 2°); (Kada ipak vrijede relacije 1° i 2° ?);

c) 1° da; 2° da (za $x>0$); 3° da; 4° ne, izuzev u slučaju da je $a>1$.

153. Nacrtati grafik funkcije $y=2\log x$, $y=\log x^2$, $y=2\log|x|$ (podrazumjeva se da je baza >1).

Rezultat. Za $x>0$ sva tri grafika se podudaraju sa grafikom $y=2\log x$, za $x<0$ druga dva imaju još granu simetričnu sa grafikom $y=2\log x$ u odnosu na y-os.

154. Predstaviti grafički funkciju

a) $y=2^{1+\log_2 x}$; b) $y=e^{2\ln x}$; c) $y=10^{3\log x}$; d) $y=5^{1-\log_5 x}$.

Rezultat. a) $y=2x$, $E_x=(0,+\infty)$; b) $y=x^2$, $x>0$;

c) $y=x^3$, $x>0$; d) $y=\frac{5}{x}$ za $x>0$.

155. Dokažite ove formule:

a) $(ch\,x \pm sh\,x)^n = ch(nx) \pm sh(nx)$, $(n\in N)$ (vrijedi li i za neke druge n ?), $\left(sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$;

b) $ch(x\pm y)=ch\,x\,ch\,y \pm sh\,x\,sh\,y$;

c) $sh(x\pm y)=sh\,x\,ch\,y \pm ch\,x\,sh\,y$;

d) $ch^2x=\frac{1+ch\,2x}{2}$, $sh^2x=\frac{-1+ch\,2x}{2}$, $(ch^2x-sh^2x=1)$;

e) $th(x\pm y)=\frac{th\,x\pm th\,y}{1\pm th\,x\cdot th\,y}$, $\left(th\,2x=\frac{2th\,x}{1+th^2x}\right)$,

$\left(th\,x=\frac{sh\,x}{ch\,x}\right.$, $cth\,x=ch\,x/(sh\,x)$;

f) $cth(x\pm y)=\frac{cth\,x\cdot cth\,y\pm 1}{cth\,y\pm cth\,x}$, $\left(cth\,2x=\frac{cth^2x+1}{2\,cth\,x}\right)$;

g) $sh\,x\,sh\,y=\frac{1}{2}\left[ch(x+y)-ch(x-y)\right]$,

$$ch\,x\ ch\,y = \frac{1}{2}[ch(x+y) + ch(x-y)],$$

$$sh\,x\ ch\,y = \frac{1}{2}[sh(x+y) + sh(x-y)],$$

$$ch\,x\ sh\,y = \frac{1}{2}[sh(x+y) - sh(x-y)];$$

h) $$ch\,x - ch\,y = 2\,sh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sh\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$ch\,x + ch\,y = 2\,ch\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot ch\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$sh\,x + sh\,y = 2\,sh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot ch\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$sh\,x - sh\,y = 2\,ch\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sh\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

156. Odrediti oblast (područje) definisanosti slijedećih funkcija:

a) $y = \ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$; $(y = \ln x \Leftrightarrow y = \log_e x,\ e = 2{,}718\ldots)$;

b) $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$; $(y = \lg x \Leftrightarrow y = \log_{10} x)$;

c) $y = (2x)!$;

d) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$;

e) $y = \sqrt{\lg tg\, x}$;

f) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

Rješenje. a) Funkcija $y = \ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ je definisana (uzima konačnu i realnu vrijednost) samo za one vrijednosti nezavisno promjenljive x za koje je $\sin\frac{\pi}{x} > 0$.

Međutim,

$$\sin\frac{\pi}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 2k\pi < \frac{\pi}{x} < \pi + 2k\pi \\ -2\pi - 2k\pi < \frac{\pi}{x} < -\pi - 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Otuda
$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \quad i \quad -\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$$
$$k = 0, 1, 2, \dots .$$

Dakle, definiciono područje je
$$E = \left\{ x \in R \,\middle|\, \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \vee -\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}; \right.$$
$$\left. k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

b) Funkcija $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$ je definisana za
$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ \left.\begin{array}{l} \log x > 0 \Rightarrow x > 10^0 = 1 \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < x \leq 2.$$

Dakle, definiciono područje date funkcije je
$$E = \{x \in R \mid 1 < x \leq 2\}.$$

c) Funkcija $y = (2x)!$ je definisana (ima smisla s obzirom na definiciju izraza $n!$) samo za $2x = k$, k prirodan (ili $k = 0$) broj.

Dakle definiciono područje je
$$E = \left\{ x \in R \,\middle|\, x = \frac{k}{2};\ k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \right\}.$$

d) Funkcija $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$ je definisana (uzima konačnu-odredjenu i realnu vrijednost) samo za one x za koje je

(1) $\log_3 \log_4 x > 0 \Rightarrow \log_4 x > 3^0 = 1 \Rightarrow x > 4^1 = 4,$

(2) $\log_4 x > 0 \Rightarrow x > 4^0 = 1,$

(3) $x > 0.$

Vidimo da su sve tri relacije: (1), (2) i (3) zadovoljene za $x>4$, pa je

$$E=\{x\in R \mid x>4\}.$$

e) Funkcija $y=\sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$ je definisana (uzima konačnu i realnu vrijednost) za one x za koje je potkorjena veličina nenegativna (jer se radi o parnom korjenu), te za koje je $\operatorname{tg} x>0$ (jer realni logaritmi negativnih brojeva ne postoje, a $\lg 0=-\infty$ - beskonačna vrijednost) i za koje je $\cos x\neq 0$ (jer funkcija $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ uzima beskonačnu vrijednost za $\cos x=0$).

Prema tome imamo

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \lg \operatorname{tg} x\geqslant 0 \Longrightarrow \operatorname{tg} x\geqslant 10^{0}=1\\ (2) & \operatorname{tg} x>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \operatorname{tg} x\geqslant 1,$$

$$(3)\quad \cos x\neq 0 \longrightarrow x\neq \pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

$$1\leqslant \operatorname{tg} x<+\infty \Longrightarrow \frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Dakle,

$$E=\{x\in R \mid \frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k=0,\pm 1\pm 2,\}.$$

f) Funkcija $y=\frac{x}{\sin \pi x}$ je definisana (uzima konačnu i realnu vrijednost) samo za one x za koje je potkorjena veličina nenegativna (jer se radi o parnom korjenu - korjenu parnog eksponenta) i nazivnik različit od nule (jer ako je nazivnik jednak nuli a brojnik različit od nule funkcija postaje beskonačna - poprimiće beskonačnu vrijednost, a ako su i brojnik i nazivnik jednaki nuli funkcija je neodređena - poprima za to x svaku vrijednost). Prema tome mora biti

$$x\geqslant 0,$$

$$\sin \pi x\neq 0 \Longrightarrow \pi x\neq k\pi \Longrightarrow x\neq k \quad (k=0\pm 1,\pm 2,\dots).$$

Otuda mora biti

$$x > 0 \quad i \quad x \neq k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dakle, definiciono područje je

$$E = \{x \in R \mid \; x > 0 \wedge x \neq k \; ; \; k = 1, 2, 3, \cdots\}.$$

157. Odrediti definiciono područje (domen) i skup vrijednosti slijedećih funkcija:

a) $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$;

b) $y = (-1)^x$.

Rješenje. a) Kako je uopšte funkcija $y = \arcsin x$ definisana (uzima (konačnu i) realnu vrijednost) samo za $-1 \leqslant x \leqslant 1$, jer funkcije $y = \sin x$ je po modulu ograničena sa jedinicom, to mora biti

$$-1 \leqslant \lg \frac{x}{10} \leqslant 1 \Longrightarrow 10^{-1} \leqslant \frac{x}{10} \leqslant 10^{1} \Longrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 100.$$

Dakle, domen je

$$E = \{x \in R \mid 1 \leqslant x \leqslant 100\}.$$

Za $x = 1$, funkcija uzima vrijednost

$$y = \arcsin \lg \frac{1}{10} = \arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Za $x = 100 \Longrightarrow$

$$y = \arcsin \lg \frac{100}{10} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Prema tome, obzirom da je funkcija $y = \arcsin x$ rastuća funkcija, imamo da je skup vrijednosti funkcije

$$f(E) = Y = \left\{y \in R \mid -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

b) Kako je funkcija $y = a^x$ za $a < 0$ definisana samo za $x = \dfrac{p}{q}$, gdje je $q = 2k + 1$ neparan broj (dakle, ni za kakva iracionalno x, kao ni za racionalno koje nije navedenog oblika), to mora biti

$$x = \frac{p}{2q+1}, \; p \text{ i } q \text{ cijeli brojevi.}$$

Prema tome domen je

$$E = \left\{ x \in R \mid x = \frac{p}{2q+1} : p \text{ i } q \text{ cijeli brojevi} \right\},$$

a skup vrijednosti funkcije je

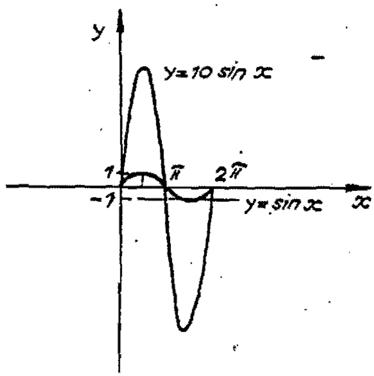
$$f(E) = \{ y \in R \mid y = -1 \vee y = +1 \} = \{-1, 1\}.$$

158. Nacrtati grafik funkcije $y = 6 \cos x + 8 \sin x$.

Rješenje. Napišimo y u obliku $y = A \sin(x + x_0)$. Mora biti

$$A \sin x_0 = 6, \quad A = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad x_0 = \arcsin 0{,}6 = 0{,}64.$$

$$A \cos x_0 = 8.$$

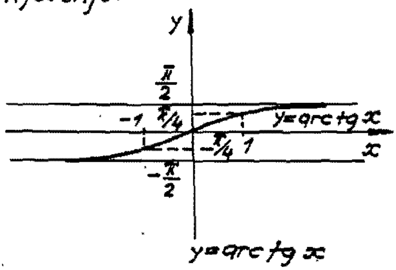


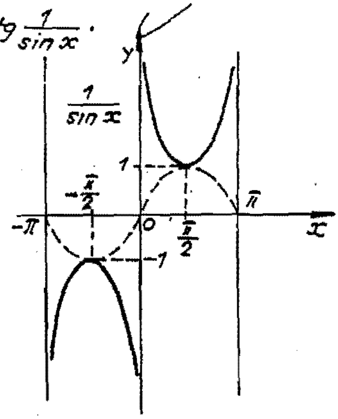
$y = 10 \sin(x + 0{,}64)$.

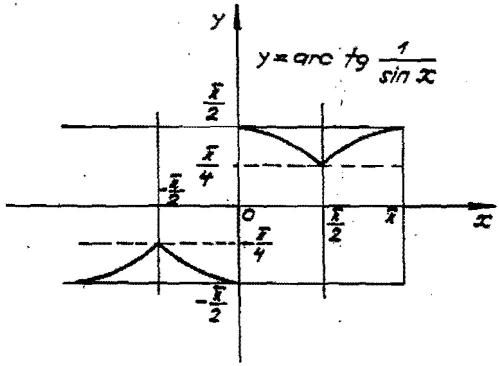
Krivu $y = 10 \sin x$ treba pomjeriti u smjeru $-x$ ose (tj. ulijevo) za 0,64, ili translirati osu y u smjeru $+x$ ose (tj. udesno) za 0,64.

159. Nacrtati grafik funkcije $y = \text{arc tg}\,\frac{1}{\sin x}$.

Rješenje.







Za vježbu:

Nacrtati grafike funkcija:

a) $\text{arc tg}\,\ln x$

b) $\text{arc sin}\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$

c) $\text{arc sin}\,(\cos 2x)$.

160. Dokazati relacije:

a) $\text{Arc sin}\,x = (-1)^n \cdot \text{arc sin}\,x + \pi n$, gdje je n cio broj; $\text{arc sin}\,x$ predstavlja luk (ugao, broj) u intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ čiji je sinus jednak x; $\text{Arc sin}\,x$ predstavlja skup lukova čiji su sinusi svi jednaki x (dakle, $\operatorname{Arc}\sin x$ je inverzna f-a od $\sin x$ i višeznačna je - ima beskonačno mnogo vrijednosti za istu vrijednost argumenta - čita se „arkus sinus", a $\arcsin x$ - je jednoznačna, glavna vrijednost i čita se: „mali arkus sinus");

b) $\operatorname{Arc}\cos x = \pm \arccos x + 2\pi n$; gdje je n cio broj $(0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi)$

| kao u a) i ovdje je $\operatorname{Arc}\cos x$ skup funkcija i bolje ga je označiti sa: $\operatorname{Arc}\cos x = \{f_k(x):$

$$(f_k(x) = \arccos x + 2k\pi) \vee (f_k(x) = -\arccos x + 2k\pi);\ k = 0, \pm 1, \dots\}$$

iako se u matematičkoj analizi označava i ovako:

$$\operatorname{Arc}\cos x = \begin{cases} \arccos x + 2k\pi \\ -\arccos x + 2k\pi, \end{cases}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ | ;

c) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = \pi n + \operatorname{arctg} x$, n cio broj $\left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}\right)$;

d) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n$, cio broj $(0 < \operatorname{arcctg} x < \pi)$.

161. Dokazati jednakosti:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(x) \qquad (x \neq 0)$;

c) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + k\pi$, $k = k(x,y) = 0, 1$ ili -1 (k prima jednu od ove tri vrijednosti);

d) $$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}) \text{ za } xy \leqslant 0 \text{ ili } x^2+y^2 \leqslant 1 \\ (-1)^{\operatorname{sign} x} \cdot \arcsin(x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}) + \pi\cdot\operatorname{sign} x \end{cases}$$

za $xy > 0$ i za $x^2 + y^2 > 1$,

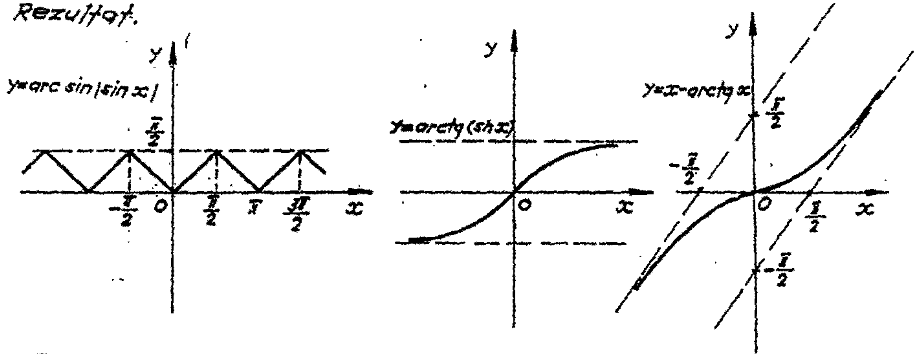
(naravno uz uslov $|x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1$);

e) $\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) \text{ za } x+y \geq 0; |x|,|y| \leq 1, \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) \text{ za } x+y < 0; |x|,|y| \leq 1. \end{cases}$

162. Nacrtati grafike sljedećih funkcija:

a) $y = \arcsin|\sin x|$; b) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$; c) $y = x - \operatorname{arctg} x$;

Rezultat.



163. Nacrtati grafike funkcija:

a) $y = \arcsin(x+2)$ $\quad (= \operatorname{Sin}^{-1}(x+2))$ $\left(\operatorname{Sin} x = \sin x \text{ za } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $y = \dfrac{1}{|\sin x + \cos x|}$; c) $y = e^{\sin 2x}$; d) $y = \operatorname{Arcth} x$

$\left(= \operatorname{cth}^{-1} x = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}, \ \forall |x| > 1\right)$.

164. Data je funkcija f, definisana sa

$$f(x) = \operatorname{Arsh} x + \operatorname{Arch} x + 10 + \sqrt{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg}\frac{x}{3}.$$

(a) Odrediti oblast definisanosti date funkcije.

(b) Ispitati periodičnost date funkcije.

(c) Dokazati identitet:

$$f(x)-\operatorname{Arch} x+\operatorname{tg}\frac{x}{3}-10-\sqrt{\operatorname{tg} x}+\operatorname{Arsh} y \equiv \operatorname{Arsh}\left(x\cdot\sqrt{1+y^2}+y\cdot\sqrt{1+x^2}\right)$$

(za x i y iz oblasti definisanosti izraza u datom identitetu).

Rješenje. a) $E_x=\left\{x\in R:(x\geq 1)\wedge(\operatorname{tg} x\geq 0)\wedge\left(\cos\frac{x}{3}\neq 0\right)\right\}=$

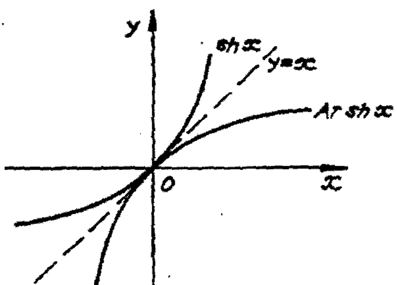
$$=\left\{x\in R:(x\geq 1)\wedge\left(0+2k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\wedge\left(\frac{x}{3}\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}\right);\ k=0,\pm 1,\ldots\right\}$$

$$=\left\{x\in R:(x\geq 1)\wedge\left(2k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\wedge\left(x\neq\frac{3\pi}{2}(2k+1)\right);\ k=0,1,2,\ldots\right\}.$$

b) Iz definicione relacije $f(x+p)=f(x)$ lako se vidi da p zavisi od x, tj. da ne postoji $0\neq p\in R$ takav da je $f(x+p)=f(x)$ za $\forall x\in E_x$ pa je f neperiodična.

c) Izraz na lijevoj strani je $\operatorname{Ar sh} x+\operatorname{Ar sh} y$. Funkcija $\operatorname{sh} x$ ima inverznu funkciju:

$$y=\operatorname{Ar sh} x,\quad x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$



$$e^y=t\Rightarrow t^2-2tx-1=0;$$

$$t>0,\quad e^y=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow$$

$$y=\operatorname{Ar sh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow$$

$$\operatorname{Ar sh} x+\operatorname{Ar sh} y=\ln\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}+xy+\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}\right).$$

Kako je

$$\left(xy+\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}\right)^2=\left(x\sqrt{1+y^2}\right)^2+\left(y\sqrt{1+x^2}\right)^2+2x\sqrt{1+y^2}\cdot y\sqrt{1+x^2}+1,$$

to je

$$Ar\,sh\,x + Ar\,sh\,y = \ln\left(x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2})^2+1}\right) =$$

$$= Ar\,sh\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right).$$

165. Ispitati monotonost slijedećih funkcija:

1) $f(x) = ax+b$; 2) $f(x) = ax^2+bx+c$; 3) $f(x) = x^3$;

4) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; 5) $f(x) = a^x$ $(a>0)$.

Rezultat. 1) Raste za $a>0$, opada za $a<0$.

2) Pri $a>0$ opada u intervalu $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ i raste u intervalu $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

3) Raste.

4) Za $ad-bc>0$ raste u intervalima $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ i $\left(-\dfrac{d}{c}, +\infty\right)$.

5) Raste pri $a>1$, a opada pri $0<a<1$.

166. Data je funkcija $f(x-1) = \frac{1}{2}\ln\dfrac{x}{2-x}$.

a) Naći funkciju $f(x)$, odrediti njeno definiciono područje, nacrtati njen grafik i utvrditi monotonost.

b) Napisati inverznu funkciju od funkcije $f(x)$, odrediti definiciono područje, nacrtati njen grafik i utvrditi monotonost.

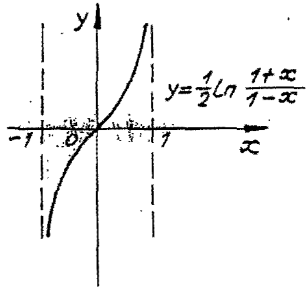
Rješenje.

a) $f(x-1) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{2-x}$, $\quad x-1 = v$, $\quad x = v+1$,

$$f(v) = \frac{1}{2}\ln\frac{v+1}{1-v}, \text{ tj. } f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$E_x=\{x\in R: -1<x<1\}$.

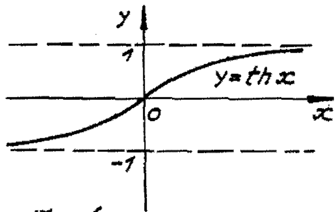
Monotono rastuća na E_x.



b) Inverzna funkcija za funkciju

$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ je

$y=th\,x$.



$D=\{x\in R;\ -\infty<x<+\infty\}$.

Monotono rastuća na D.

Ovo je zadatak i rješenje V. Dragičevića.

167. Grafički riješiti

a) jednačinu $\lg x=0,1\,x$;

b) sistem jednačina: $\left.\begin{aligned} xy&=6\\ x^2+y^2&=13\end{aligned}\right\}$.

Rezultat. a) $x_1=1,37$; $x_2=10$.

b) $x_1=-3,\ y_1=-2$; $x_2=-2,\ y_2=-3$;

$x_3=2,\ y_3=3$; $x_4=3,\ y_4=2$.

§ 1.3. NIZOVI (SLJEDOVI) BROJEVA

1.3.1. Pojam niza, međa niza, nula-niz, granična vrijednost niza, svojstva konvergentnih nizova, tačka nagomilavanja niza, računanje s graničnim vrijednostima nizova

168. Dajte nekoliko primjera na kojima se vidi kako niz (preslikavanje N u A) može biti zadan na različite načine.

Rješenje. Da je niz zadan znači da je dat propis (zakon) po kome se (vrši preslikavanje skupa N u A) svaki a_n može jednoznačno odrediti, ako mu znamo indeks n koji određuje njegovo mjesto u nizu (niz je podesno označavati simbolom (a_n)).

1) Općenito možemo zadati niz u obliku

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

ili

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Tako imamo nizove

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots \qquad (1)$$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \left(1-\frac{1}{n}\right), \ldots \qquad (2)$$

Napomenimo da ne može svaki skup (podskup skupa realnih brojeva) predstavljati vrijednosni skup nekoga niza.

2) Funkcija $a: N \to R$ zadana sa zakonom korespondencije $n \to a(n)$ (umjesto $a(n)$ redovito se piše a_n) također

predstavlja niz u R. Tako je sa $a(n) = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in N)$ zadan niz: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

3) Neka je f funkcija iz R u R definisana sa

$$f(x) = (x-1)!$$

Njeno definiciono područje je:

$$E_x = \{x \in R: x-1=0 \vee x-1=k,\ k \in N\} = N.$$

Dakle, možemo pisati

$$a_n = f(n) = (n-1)!$$

To je niz

$$1, 1, 2, 6, 24, \dots$$

169. Napišite peti i deseti član svakog od nizova:

a) $a_n = n^2,\ n = 1, 2, \dots$;

b) $n \mapsto a_n = 2$;

c) $(a_n)_{n \in N} = (\cos n\pi)_{n \in N}$,

d) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

Rješenje.

a) $a_5 = 5^2 = 25$, $a_{10} = 10^2 = 100$;

b) $a_5 = a_{10} = 2$;

c) $a_5 = \cos(5\pi) = (-1)^5 = -1$, $a_{10} = \cos(10\pi) = (-1)^{10} = 1$;

d) $a_5 = \frac{4}{5}$, $a_{10} = 1 + \frac{(-1)^{10}}{10} = \frac{11}{10}$

(Općenito se zaključuje da je $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$).

170. Nađite kompoziciju $a \cdot b$ za nizove a, b kojih je opšti član:

a) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$;

b) $a_n = \frac{n+1}{n}$, $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

c) $a_n = 2n-1$, $b_n = 2n$.

Rješenje. a) $(a \circ b)(n) = a[b(n)] = a_{b(n)} = a_n$, tj. $a \circ b = a$;

b) $(a \circ b)(n) = a[b(n)] = a_{b(n)} \Longrightarrow$ da kompozicija $a \circ b$, u ovom slučaju, nije definisana, jer a „umije" djelovati samo na prirodne brojeve, a brojevi b_n nisu prirodni;

c) $(a \circ b)(n) = a_{b(n)} = a_{2n} = 2 \cdot (2n) - 1 = 4n-1$, tj $a \circ b = p$ je podniz niza a. Prema tome podniz p niza

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7, \ldots$$

ima oblik

$$a_{b_1} = a_2 = 3,\ a_{b_2} = a_4 = 7, \ldots$$

170.1. Da li je skup $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\}$ vrednosni skup niza?

Rješenje. Pošto elemente datog skupa možemo numerisati (prebrojati), ako uzmemo da je $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; $(n \in N)$, to zaključujemo da je dati skup vrednosni skup niza.

171. Dati su nizovi:

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$;

b) $a_n = \frac{1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$;

c) $a_n = 3n+2, \quad n = 1, 2, \cdots$

d) $a_n = 3n+2, \quad n = 1, 2, \ldots, 10.$

Ispitati njihovu ograničenost, naći gornju i donju među (ukoliko postoje) i odrediti minimum odnosno maksimum (ako postoje) svakog od datih nizova.

Rješenje. a) Ako uzmemo da je $p=-2$ i $P=10$, onda vidimo da je

$$-2 = p < a_n < P = 10 \quad (\forall n \in N),$$

tj. dati niz je ograničen (jer su p, P realni brojevi, a važi prethodna nejednakost). Međutim, njegova donja međa (donja međa njegovog skupa vrijednosti) je:

$$m = \inf a = \inf_{n\in N} (a_n) = \inf a(N) = \inf \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = -1$$

i ona pripada nizu (član je niza - element skupa vrijednosti niza). Gornja međa je $M = \sup a = \frac{1}{2}$ i ona pripada nizu te je

$$M = \max a = \max_{n\in N} \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} = \frac{1}{2}, \text{ a}$$

$$m = -1 = \min_{1\le n<+\infty} \{a_n\} = \min_{n\in N} \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}. \quad V$$

b) Niz je ograničen i njegova donja međa je $m=0$, koja ne pripada nizu, a gornja $M = \frac{1}{2}$, koja pripada nizu te je

$$\max_{n\in N} \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Napomenimo da je donja međa jednaka nuli zato što postoji bar jedan (a ima ih beskonačno mnogo) koji je manji od $0+\varepsilon$, za ma kakvo malo $\varepsilon > 0$.

c) Niz je ograničen sa donje strane i njegova donja međa $m=5$ pripada nizu, ali je sa gornje strane neograničen (pa, dakle, neograničen).

d) Svaki konačni niz je ograničen, dostiže svoju donju i gornju među (tj. ima min. i max.) pa to vrijedi i za ovaj niz.

172. Dati su nizovi:

a) $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$;

b) $a_n = \frac{2}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$

c) $a_n = \frac{1}{2n}$, $n = 1, 2, \dots, 5$

d) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{za } n > 5,\ n \in N \\ \frac{1}{2n} & \text{za } n = 1, 2, \dots, 5. \end{cases}$

Koji je od gornjih nizova nula-niz (objasniti)?

Rješenje. a) Nijedan član ovoga niza nije jednak nuli, ali kada n raste oni opadaju i približavaju se nuli. Možemo n izabrati tako veliko da $|a_n|$ bude manja od unaprijed datog broja $\varepsilon > 0$. Na pr., ako želimo da $|a_n| < \varepsilon\ (= 10^{-10})$, treba uzeti samo $n > 10^{10}$ (npr. $n = 10^{10} + 1$), tj. za svako $n > 10^{10}$ vrijedi $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Prema tome, za $\forall \varepsilon > 0$ možemo izabrati jedan cio > 0 broj $N = N(\varepsilon)$, koji zavisi samo od ε, takav da je

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{čim je} \quad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Dakle, niz $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ je nula niz, jer za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $N = N(\varepsilon)$ takav da je za $n > N(\varepsilon)$ ispunjena nejednakost $|a_n| < \varepsilon$. Ovdje je $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ (cijeli dio od $\frac{1}{\varepsilon}$), jer

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

b) Niz $a_n = \frac{2}{n^2}$ je, takođe, nula niz; jer je $|a_n| < \varepsilon$ kad je

$$n > N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right].$$

Naime $(|a_n| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\frac{2}{n^2} < \varepsilon) \Leftrightarrow (n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}})$ pa se može staviti

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right].$$

Posebno, $|a_n| = |\frac{2}{n^2}| < \varepsilon = \frac{1}{100}$, kad je $n > N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{2}{100^{-1}}}\right] = [10 \cdot \sqrt{2}] =$

$$= [10 \cdot 1{,}41] = [14{,}1] = 14.$$

c) Dati niz je konačan (ima konačan broj $|5|$ članova) pa nema smisla primijeniti definiciju nula-niza na dati niz, tj. dati niz nije nula-niz.

d) Dati niz je nula niz, jer je $|a_n| < \varepsilon$ kad je $n > N(\varepsilon) = 5$ (ovdje je $N(\varepsilon)$ konstanta). Naime $|a_n| = a_n = 0 < \varepsilon$ za $\forall n > 5 = N(\varepsilon)$ i za $\forall \varepsilon > 0$.

Primjetimo da je jednakost nizova isto što i jednakost funkcija iz N u A, A proizvoljan skup, ali nas će ubuduće interesovati kad je $A = R$ ili $A \subset R$ i kad je niz funkcija sa N, tj. beskonačni niz realnih brojeva – koji ne moraju biti svi različiti – mogu biti svi članovi jednaki nekom realnom broju).

173. Navesti primjer niza za koji se ne može navesti ni izraz za opšti član, ni rekurzivni postupak (kao kod aritmetičkog i geometrijskog niza) pomoću koga su obrazovani slijedeći članovi niza.

Rješenje. 1) Niz prostih brojeva 1, 2, 3, 5, 7, ... (Ipak ima postupak pomoću kojeg se može napisati niz prostih brojeva do bilo kojeg ranga).

2) Pri izvlačenju kvadratnog korijena poznatim postupkom ne može se navesti zakon po kome se može napisati bilo koja decimala, tj zakon po kome se obrazuje niz približnih vrijednosti tog korijena sa tačnošću do $\frac{1}{10^n}$, pa ipak mi smo u mogućnosti da nađemo bilo koji član r_n iz niza donjih, kao i član iz niza gornjih približnih vrijednosti.

Na pr. za $\sqrt{3}$ niz donjih pribl. vrij.: 1,7 ; 1,73 ; 1,732; 1,7320; 1,73205 ; ...

174. Za niz $\{a_n\}$, $n \in N$ je: $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dokazati da je $a_n = 2^n + 1$ za $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Rješenje: Dokaz ćemo izvesti koristeći princip matematičke indukcije. 1° Za $n = 1$ je $a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 9 - 4 = 5 = 2^2 + 1$, tj. formula za a_n je tačna za $n = 1$. Ona je tačna i za $n = 0$ (očigledno).

2° Pretpostavimo da je formula za a_n tačna za sve brojeve $1, 2, \ldots, k$ $(k \geq 1)$, $k \in N$, tj. da vrijedi (za $m = 1, 2, \ldots, k\ (\in N)$):

$$a_m = 2^m + 1. \qquad (1)$$

3° Kako je

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} \overset{(1)}{=} 3 \cdot (2^k + 1) - 2 \cdot (2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1,$$

to zaključujemo da je formula za a_n tačna za svaki prirodan broj n.

175. Nalazeći za proizvoljan $\varepsilon > 0$ jedan broj N takav da je $|a_n| < \varepsilon$ za sve $n > N$, dokazati da je niz a, čiji je opšti član

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n^2+5}$; b) $n \mapsto (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; c) $a_n = \dfrac{1+\sqrt{n}}{n}$, nula-niz.

Rješenje. (za a) i b)). a) $\frac{n-1}{n^2+5} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$ za $n > \frac{1}{\varepsilon} (= N)$.

b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ za $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ $(= N)$.

176. Dokazati da je granična vrijednost niza

a) $\left(\frac{1}{n}\right)$ jednaka 0 ; b) $\left\{\frac{2n-3}{n+1}\right\}$ jednaka 2 ;

c) $\left(\frac{1+\sqrt{2n}}{n}\right)$ jednaka 0 ; d) $\left(\frac{n^2+10}{5n^2+1}\right)$ jednaka $\frac{1}{5}$.

Rješenje. a) Zaista, za $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj $N = N(\varepsilon)$ takav da je $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Odavde $n > N$ povlači $n > \frac{1}{\varepsilon}$ što daje $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$; dakle

$$(n > N(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon\right),$$

a to pokazuje da je $\lim \frac{1}{n} = 0$.

b) Stvarno, neka je $\varepsilon > 0$ ma kakav > 0 realan broj, tada imamo

$$\left(\left|\frac{2n-3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow \left(\left|\frac{-5}{n+1}\right| < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{5}{n+1} < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow \left(n+1 > \frac{5}{\varepsilon}\right) \Longleftrightarrow \left(n > \frac{5}{\varepsilon} - 1\right),$$

tj. za $\forall \varepsilon > 0$ postoji prirodni broj $N(\varepsilon) \geqslant \frac{5}{\varepsilon} - 1$ (ako je $0 < \varepsilon < \frac{5}{2}$ onda za $N(\varepsilon)$ možemo uzeti broj $\left[\frac{5}{\varepsilon} - 1\right]$, a ako je $\varepsilon \geqslant \frac{5}{2}$ onda za $N(\varepsilon)$ možemo uzeti broj 1 tj. $N(\varepsilon) = 1$), takav da

$$(n > N(\varepsilon)) \Longrightarrow \left(|a_n - 2| = \left|\frac{2n-3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon\right).$$

Napomena. Neki autori u definiciji limesa niza uzimaju da je $n \geqslant N(\varepsilon)$ ili $n \geqslant n_0$, gdje su $N(\varepsilon)$ i n_0 prirodni brojevi, pa bi u našem slučaju morali uzeti da je $N(\varepsilon)$ ili $n_0 > \frac{5}{\varepsilon} - 1$, dok drugi autori uzimaju da je $n > N$, N bilo kakav broj pa bi u našem slučaju imali $N = \frac{5}{\varepsilon} - 1$ – što za neke ε može biti negativan broj ili bilo kakav realan broj veći od -1 – zašto ?).

Pod c) i d) može se dokazati kao u prethodnim slučajevima pod a) ili b).

177. Na osnovu definicije limesa niza (tj. nakazedi za proizvoljan $\varepsilon > 0$ jedan broj N takav da je $|a_n| < \varepsilon$ za sve $n > N$) dokazati da:

a) $a^n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, za $|a| > 1$; $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ za $|a| < 1$;

b) $\frac{2n+1}{n-1} \to 2$ $(n \to +\infty)$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n} = 0$;

d) $\lim \sqrt{1+\frac{k}{n}} = 1$ (za $k = 0$);

e) $\lim \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$;

f) $\lim a_n$, gdje je

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 2k \\ \frac{1}{n} & \text{za } n = 2k-1, \end{cases}$$ ne postoji;

g) $\lim \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}$ (i nađi $N(\varepsilon)$ ako je $\varepsilon = 0{,}0001$).

Rezultat. (Uputstva) za a), b), c) i d) postupiti kao u prethodnom zadatku. Za e) iskoristiti identitet $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pa postupiti kao u prethodnim slučajevima.

f) Niz je ograničen, ali ima dvije tačke nagomilavanja : 1 i 0 pa ne može imati graničnu vrijednost. U to se možemo uvjeriti ako iskoristimo definiciju konačne i beskonačne granične vrijednosti. Pošto je niz ograničen, to on nema beskonačnu graničnu vrijednost pa ostaje da može imati samo konačnu graničnu vrijednost. No, ni nju nema, jer je dovoljno uzeti za ε broj između 0 i 1 pa da se vidi da ne postoji broj $N = N(\varepsilon)$ za koji bi bilo $|a_n - 1| < \varepsilon$ ili $|a_n - 0| < \varepsilon$ za $n > N(\varepsilon)$.

g) $\left|\dfrac{3n-1}{5n+2} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{8}{25n+5} < \varepsilon,\ N(\varepsilon) = \dfrac{1}{25}\left(\dfrac{8}{\varepsilon} - 5\right),\ N(0{,}0001) = 3200.$

178. Objasnite smisao dogovornog pisanja:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\dfrac{1}{n} = -\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{n}\right) = +\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty \quad (n\in N)$.

Rezultat. a) $\ln\dfrac{1}{n} < A\ (\in R)$ ako je $n > N(A)$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{n}\right) > A \in R$ za $n > N(A)$;

c) $|f(n)| > A$ ako je $n > N(A)$.

179. Dati su nizovi čiji je opšti član:

a) $a_n = n$; b) $a_n = \dfrac{1}{3n}$; c) $a_n = (-1)^n$;

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n n+1}{n+1}$; e) $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

odrediti tačke nagomilavanja (ukoliko postoje), utvrditi da li pripadaju nizu, ispitati ograničenost nizova, i njihovu konvergenciju (divergenciju).

a) Da bi neka tačka a bila tačka nagomilavanja niza, mora se u njenoj okolini (blizini) nalaziti beskonačno članova toga niza, ili ih mora biti beskonačno mnogo koji su svi jednaki samoj tački a, tj. ako vrijedi

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{za } \forall \varepsilon > 0 \text{ i za beskonačno mnogo indeksa } n.$$

Odmah vidimo da niz $a_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ nema tačaka nagomilavanja u konačnosti, ali se može smatrati da ima jednu tačku nagomilavanja u beskonačnosti, koja pretstavlja njegovu graničnu vrijednost, tj.

$$\lim a_n = \lim n = +\infty$$

pa je niz divergentan (u užem smislu). Niz je neograničen.

b) $a = 0$, je tačka nagomilavanja i pripada nizu. Pošto niz ima jedinu tačku nagomilavanja, to je ta tačka upravo njegova granična, a pošto je konačna to je niz konvergentan (pa mora biti i ograničen, dok obratno ne vrijedi, vrijedi ako je niz još i monoton).

c) Ima dvije tačke nagomilavanja $a_1 = -1$ i $a_2 = 1$. (Svaka tačka nagomilavanja nekog niza a_n je granična vrijednost povoljno izabranog podniza – djelimičnog niza a_{n_k}). Niz je ograničen i tačke nagomilavanja mu pripadaju (niz predstavljaju, geometrijski na brojnoj pravoj, dvije tačke 1 i −1 pa je skup tačaka koje predstavljaju članove niza konačan (sastoji se od 1 i −1) i nema tačku nagomilavanja). Niz je ograničen (ali nije monoton) i divergentan u širem smislu (oscilira u intervalu $[-1, +1]$).

d) Dati niz ima tačku nagomilavanja $a = 1$ koja mu pripada i tačku nagomilavanja $b = -1$, koja mu (nizu) ne pripada. Niz je ograničen i nema granične vrijednosti – limesa (oscilira – divergira u širem smislu).

e) Napišimo nekoliko prvih članova niza:

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{9}{5}$, $a_5 = 1$, ... Svi članovi sa neparnim indeksom su 1, jer je $\cos\left(\frac{2k+1}{2}\cdot\pi\right)=0$ za svako k iz N i ima ih beskonačno mnogo. Ako je $n=2k$, onda je $\cos k\pi=(-1)^k$ pa je za $k=2m$ $a_{4m}=1+\frac{4m}{4m+1}$ a za $k=2m-1$ je

$a_{4m-2}=1-\frac{4m-2}{4m+1}$. Dakle, $\lim\limits_{m\to+\infty} a_{4m}=2$ i $\lim a_{4m-2}=0$, tj. niz ima tri tačke nagomilavanja: 0, 1 i 2; divergentan je (oscilira između 0 i 2) i ograničen.

180 Dati su nizovi:

a) $|a|, |a|^2, \ldots a_n=|a|^n, \ldots$;

b) konvergentan niz $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$

c) $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \ldots, \ldots, \sqrt[n]{a}, \ldots \quad (a>0)$

d) $\frac{a}{1}, \frac{a^2}{2!}, \frac{a^3}{3!}, \ldots, \frac{a^n}{n!}, \ldots \quad (a>0)$.

Ispitati njihovu konvergenciju i to za a), c) i d) a za b) provjeriti šta će biti sa nizovima $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ (primijeniti na niz: $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{2+(-1)^n}{n}, \ldots$).

Rezultat. a) za $|a|>1$, primjenom Bernoulli-eve nejednakosti, dobije se da niz divergira ka $+\infty$.
za $|a|<1$, stavljanjem $|a|^n=\frac{1}{b^n}$ $(b>1)$, dobije se $\lim|a|^n= =\lim\frac{1}{b^n}=0$. Najzad za $|a|=1$, biće $\lim|a|^n=1$.

b) Na osnovu osobine podniz konvergentnog niza je konvergentan i ima istu graničnu vrijednost – dobije se da su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni: $\lim a_{2n}=\lim\frac{3}{2n}=0$, $\lim a_{2n+1}=\lim\frac{1}{2n+1}=0$.

c) Za $a>1$, stavljajući $\sqrt[n]{a}=1+h$ i primjenom Bernoulli-eve nejednakosti: $(1+h)^n>1+nh$, dobivamo

$$\lim\sqrt[n]{a}\overset{?}{=}\lim(1+h)=1.$$

Dok za $0<a<1$, stavljajući $a=\frac{1}{b}$, $(b>1)$, dobiva se $\lim \sqrt[n]{a}=1$. Za $a=1$ je $\lim \sqrt[n]{a}=1$.

d) Neka je k cio broj takav da je $k>2a$, tada je

$$\frac{a^n}{n!}=\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\right)\cdot\left(\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n}\right),\ (n>k).$$

Kako je $\frac{a}{p}\leqslant a$ (za $p=1,2,\ldots,k$), $\frac{a}{p}<\frac{1}{2}$ (za $p=k+1,k+2,\ldots n$), to imamo

$$\frac{a^n}{n!}<a^k\cdot\frac{1}{2^{n-k}}=(2a)^k\cdot\frac{1}{2^n},$$

odakle je $\lim\frac{a^n}{n!}=0$ $(n\to+\infty)$ jer je $(2a)^k$ konačan broj, a $\lim\frac{1}{2^n}=0$.

181. Provjeriti sljedeće jednakosti (koristeći osobine konvergentnih nizova ili definiciju granič. vr.):

a) $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=\lim\sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}}=\lim\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}}=1;$

b) $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$ c) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0;$

d) $\lim\frac{n+1}{n}=1;$ e) $\lim\frac{n^2+1}{n^2}=1;$

f) $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\lim\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2;$

g) $\lim\left(5-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim\left[6-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]=4;$

h) $\lim\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right]=\lim\frac{1-(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3};$

i) $\lim\frac{2n^2-1}{3n^2+n}=\frac{2}{3}.$

182. Navesti primjer koji ilustruje činjenicu da iz egzistencije limesa zbira, razlike, proizvoda i količnika ne slijedi egzistencija limesa (konačne granične vrijednosti) respektivno: sabiraka, umanjenika i umanitelja, činilaca, brojnika i nazivnika (dok obratno vrijedi – što je jako važno za izračunavanje limesa po pravilima ovim, jer je često puta komplikovano koristiti definiciju limesa).

Rješenje Neka je $a_n = n + \frac{1}{n}$ i $b_n = n + \frac{3}{n}$, onda je

$$\lim a_n = \lim b_n = \infty, \quad \text{iako je}$$

$$\lim (a_n - b_n) = -\lim \frac{2}{n} = 0.$$

183. Koristeći tzv. Stolz-ovu teoremu: „ako $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, počev od nekog n $b_{n+1} > b_n$ tada je $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ ako postoji limes na desnoj strani, konačan ili beskonačan ($\lim a_n$ može biti konačan, ∞ ili neodređen") naći:

u.VI 14.

$$\lim \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \qquad (k > -1).$$

Rezultat. $\frac{1}{k+1}$, (podesno je iskoristiti binomnu formulu i dijeliti sa n^k).

184. Koristeći tzv. Cauchy-evu teoremu (koja slijedi iz Stolzove): „ako postoji $\lim a_n$, konačan ili beskonačan, tada je

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim a_n\text{"}, \text{ dokazati:}$$

$$\lim \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \right) = 1.$$

185. Koristeći činjenicu: „ako postoji $\lim a_n$ ($\lessgtr +\infty$), gdje je $a_n > 0$ (za $\forall n \in N$), tada je

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim a_n\text{''},$$ dokazati da je

a) $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$; b) $\lim \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e$.

186. provjeriti slijedeće jednakosti:

a) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (koristeći binomnu formulu);

b) $\lim \dfrac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{za } |a| < 1 \text{ i } k > 0, \\ +\infty & \text{za } a > 1, \ k > 0 \\ 0 & \text{za } |a| = 1, \\ -\infty & \text{za } a < -1, \end{cases}$;

c) $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}$; d) $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$ (jer je $2^n > n^2$ za $n \geq 5$, pa je $\frac{n}{2^n} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$);

e) $\lim \dfrac{a^n}{n-1} = +\infty$, $(a > 1)$; $\lim \dfrac{a^n}{(n-1)!} = 0$; $\lim \dfrac{|a|^n}{n!} = 0$ za $\forall a$;

f) $\left(a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}},\ b_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}},\ c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \Longrightarrow (a_n < c_n < b_n$ i $\lim a_n = \lim c_n = \lim b_n = 1)$;

g) $(a < 1) \Rightarrow \lim n a^n = 0$; $(a > 1) \Rightarrow \lim \dfrac{a^n}{n} = +\infty$;

h) $\lim \dfrac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2} = 1$;

i) $\lim \left(\dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1}\right) = \dfrac{1}{2}$;

j) $\lim \left(\dfrac{1\cdot 1 + 2\cdot 3 + \cdots n(2n-1)}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}\right) = 2$;

k) ? $\lim \left(\frac{n \sin n!}{n^2+1}\right)=0.$

1.3.2. Monotoni nizovi, potreban i dovoljan uslov konvergencije niza, limes inferior i limes superior niza

187. Znajući da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

naći granične vrijednosti:

a) $\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; b) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+10}$; c) $\lim \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$;

d) $\lim \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$; e) $\lim \{n\cdot[\ln(n+1)-\ln n]\}$.

Rješenje. a) $\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$;

b) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10+n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} = e\cdot 1 = e$;

c) $\lim \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n = \lim \left(1-\frac{1}{3n}\right)^{(-3n)\cdot\frac{-1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$;

d) $\lim \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$;

e) $\lim \{n\cdot[\ln(n+1)-\ln n]\} = \lim \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$

188. Dokazati da je niz

$$a_1 = \sqrt{2},\quad a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\quad a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},\ \dots,\ a_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}\Big\}{\scriptstyle (n-1)\text{ puta}},\ \dots$$

konvergentan.

Rješenje. (Ispitivanje konvergencije redovito nije lak posao. No ako uspijemo dokazati da je niz monoton i ograničen, onda smo također dokazali da je niz i konvergentan).
Niz je monotono rastući i ograničen, jer je

$$a_{n-1} < a_n < 2 \quad \text{za } \forall n \in N.$$

Stoga je konvergentan i njegova granična vrijednost je

$$\lim a_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

189. Dokazati da je niz sa opštim članom $a_n = \frac{3n}{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$ ograničen i monotono rastući, a niz sa opštim članom $b_n = \frac{2^n+1}{2^n}$ ograničen i monotono opadajući. Naći limese ovih nizova.

Rješenje. a) Niz a_n je ograničen, jer je $|a_n| < 3$ za svako $n \in N$.
Niz je i monotono rastući, jer je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)}{n+2} - \frac{3n}{n+1} = \frac{3n^2+3n+3n+3-3n^2-6n}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \dots$$

Stoga je on i konvergentan i ima limes:

$$A = \lim a_n = \lim \frac{3}{1+\frac{1}{n}} = 3.$$

(Može se i po definiciji, dokazati da je $A = 3$, a konvergencija, koristeći opšti kriterij konvergencije – Koši-Bolcanova teorema :

„ da bi niz a_n imao konačnu graničnu vrijednost – bio konvergentan, potrebno je i dovoljno da za svaki broj $\varepsilon>0$ postoji broj N takav da je $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ čim je $n>N$ i $n+p>N$ $(p=0,1,2,3,\dots)$.

Tako je za niz a_n:

$$\left(|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\right)\Longrightarrow\left(\left|\frac{3(n+p)}{n+p+1}-\frac{3n}{n+1}\right|<\varepsilon\right)\Longrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{(n+1)\,(n+p+1)}<\varepsilon\right)\Longrightarrow N(\varepsilon)=\frac{p+2}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\frac{3p}{\varepsilon}},$$

tj. postoji broj $N(\varepsilon)$ sa gornjom osobinom.

b) Dokazuje se kao u a) ograničenost i monotonija, a $\lim b_n=1$.

190. Pokazati da kad $n\to\infty$ niz sa opštim članom

$$x_n=\frac{3n+4}{2n+1}\quad \text{ima limes jednak } \frac{3}{2}.$$

Rješenje. $x_n-\frac{3}{2}=\frac{5}{2(2n+1)}\Longrightarrow\left|x_n-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$ za $n>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

Za $\varepsilon=0,01$ ovaj izraz iznosi $124,5$ pa je uslov ispunjen za $n>124=N(\varepsilon)$.

Za $\varepsilon=0,001$ ovaj izraz iznosi $1249,5$ pa mora biti $n>1249$.

191. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-4n^2+5n}{4n^3-2n-7}\right)^3$.

Rješenje. Ovaj limes je jednak

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{4-\frac{2}{n^2}-\frac{7}{n^3}}\right)^3=\left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^3}}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

192. Naći $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

Rješenje.
Stavimo $(n+1)^{\frac{2}{3}}=\varphi$; $(n-1)^{\frac{2}{3}}=\theta$, pa ćemo dobiti

$$\varphi-\theta=\frac{\varphi^3-\theta^3}{\varphi^2+\varphi\theta+\theta^2}=\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+1)^{\frac{4}{3}}+(n^2-1)^{\frac{2}{3}}+(n-1)^{\frac{4}{3}}}=$$

$$=\frac{4n}{(n+1)^{\frac{4}{3}}+(n^2-1)^{\frac{2}{3}}+(n-1)^{\frac{4}{3}}}=\frac{\frac{4}{n^{\frac{1}{3}}}}{(1+\frac{1}{n})^{\frac{4}{3}}+(1-\frac{1}{n})^{\frac{2}{3}}+(1-\frac{1}{n})^{\frac{4}{3}}},$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi-\theta)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{n}}}{1+1+1}=0.$$

193. Pokazati

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ (a broj >1),

i na osnovu toga naći:

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^\theta}$, 2° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}$, 3° $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a\cdot n}$

4° $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{an+b}$ $(b>1)$.

Rješenje.
a) za $n\geq 3$ važi nejednakost $(1+\frac{1}{n})^n<n \Longrightarrow$

$(n+1)^n<n^{n+1}$ ili $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$. Niz je monotono opadajući i ograničen i njegov limes nije manji od jedinice. Neka je on jednak A. Postoji n takvo da je $\sqrt[n]{n}>A$, tj. $n>A^n$. Stavimo da je $A=1+a$, $a>0$, pa imamo:

$$A^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\dots+a^n,$$

$$\frac{A^n}{n} = \frac{1}{n} + a + \frac{n-1}{2}a^2 + \cdots + \frac{a^n}{n}.$$

Otuda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n} = \infty \text{ ili}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{A^n} = 0$ odnosno $n < A^n$ za $A>1$ i dovoljno veliko n.

Iz protivriječnosti izlazi da je $A=1$.

b) $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \ldots > \sqrt[n]{a} > 1.$

Niz je ograničen i monotono opadajući. Njegov limes A ne može da bude manji od 1. Ako je $A>1$, za veliko n je $\sqrt[n]{a} > A$ odnosnu $a > A^n$ što je u suprotnosti sa uslovom zadatka da je a broj kad $n\to\infty$, pa mora da bude $A=1$.

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}^{\,8} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^8 = (\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^8 = 1.$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \log_a n^{\frac{1}{n}} = \log_a\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = 0.$

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{an} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4° za $n>b$ važi nejednakost

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{an+b} < \sqrt[n]{(a+1)n} = \sqrt[n]{a+1}\cdot\sqrt[n]{n}, \text{ tj.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a+1)n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{an+b} = 1.$$

194. Ispitati konvergenciju nizova

a) $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$; b) $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Rješenje. Prema Cauchy-jevoj teoremi imamo:

a) $(n+1)^2 > n(n+1) \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$,

$$(n+2)^2 > (n+1)(n+2) \Longrightarrow \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\vdots$$

$$(n+p)^2 > (n+p-1)(n+p) \Longrightarrow \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}, \text{ tj.}$$

$$|x_n - x_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} +$$

$$+ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = N(\varepsilon).$$

Razmotriti slijedeće izvođenje:

$$n+1 > n \Longrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}, \quad n+2 > n \Longrightarrow \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{n^2}, \dots n+p > n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n^2}, \text{ tj.}$$

$$|x_n - x_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{p}{n^2} < \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n > \sqrt{\frac{p}{\varepsilon}}; \quad (p>0)$$

b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{n}.$

Kako je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} >$$

$$> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

√
4.XI'94.
[illegible]

itd, to imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k \text{ članova}},$$

(gdje je $k: 2+2^2+2^3+\ldots+2^k \leq n-2$),

$$\Longrightarrow x_n > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k \text{ članova}}.$$

Kada $n \to \infty$ i, k postaje neomjerno pa niz $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ divergira.

195 Dokazati da je niz

$$a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{n!}, \quad n > 1,$$

monotono rastući sa n.

Rješenje.

$$a_{n+1} = \frac{\left(\frac{n+1+1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)^n}{(n+1)\, n!} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)^n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Kako je

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{n+1}, \quad (n \geqslant 1),$$

to imamo

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}\right)\left(1 + \frac{n}{n+1}\right) = 1 + n + \frac{n}{2(n+1)} > 1 + n$$

$$\Longrightarrow a_{n+1} > a_n \cdot \frac{n+1}{n+1} = a_n,$$

tj. niz a_n je monotono rastući sa n. Prvi njegov član $a_1 = 1$, pa se imaju nejednakosti

$$1 < a_2 < a_3 < \ldots\ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots\ldots$$

prema tome imamo $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, za $n > 1$.

196. Dokazati: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ \ldots\ \frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$

Rješenje. Dokazaćemo najpre pomoćnu nejednakost

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ \ldots\ \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,.$$

označimo $L(n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ \ldots\ \frac{2n-1}{2n}$, $D(n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$$L(n)\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)} < D(n)\,\frac{2n+1}{2(n+1)} \quad \text{ili} \quad L(n+1) < \frac{2n+1}{\sqrt{2n+1}\ \ 2(n+1}\,.$$

Treba pokazati $L(n+1) < D(n+1)$ pošto po pretpostavci nejednakost važi za neko n (za $n=1$ ona očigledno postoji). Mora biti

$$\frac{2n+1}{\sqrt{2n+1}\ \ 2(n+1)} < D(n+1).$$

Dokazujući suprotnu nejednakost ovog, zapada se u kontradikciju pošto bi moralo biti $3 > 4$, pa je prema tome

$$L(n+1) < D(n+1),$$

odnosno, pomoćna nejednakost je dokazana primjenom metode matematičke indukcije. Dalje je $\lim\limits_{n\to\infty} L(n) < \lim\limits_{n\to\infty} D(n) = 0$, što je ispunjeno za $n > \frac{1}{2}(\varepsilon^{-2} - 1)$.

197. Naći $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ i $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ako je $x_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}$.

Rješenje. Vrijednost $\cos\frac{2\pi n}{3}$ je naizmjenično $-\frac{1}{2}$ i 1 kada n

prolazi skupom prirodnih brojeva.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \cos\frac{2\pi n}{3},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\frac{1}{2}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1.$$

198. Naći $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ i $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$, ako je:

a) $x_n = \cos^n\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; b) $x_n = \frac{n}{n+5}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Rezultat. a) 0 i 1 ; b) 0 i 1.

O donjim i gornjim limesima biće više govora u tački 1.4.6. (na primjeru limesa funkcije, i niz je f-a).

§ 1.4. GRANIČNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA

1.4.1. Tačka nagomilavanja skupa, definicija konačne i beskonačne granične vrijednosti funkcija, teoreme o egzistenciji granične vrijednosti funkcija (Cauchyev kriterij egzistencije limesa, Heineova teorema)

199. Dati su skupovi:

a) N ; b) $A=\left\{x\in R:\ x=\sqrt{n}-\frac{1}{m}\ ;\ n=1,2,\dots,\ m=1,2,\dots\right\}$;

c) $B=\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$; d) $C=\left\{0,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$;

e) Q (skup svih rac. brojeva) ; f) R (skup realnih brojeva) ;

g) $[0,1]$; h) $[a,b]$ $(a,b\in R)$;

i) (a,b) $(a,b\in R)$.

Odrediti njihove tačke nagomilavanja i granične tačke.

Rješenje. a) Skup prirodnih brojeva nema tačke nagomilavanja, jer ne postoji tačka u N u čijoj se okolini (proizvoljnoj) nalazi beskonačno tačaka datog skupa (ekvivalentno bi bilo da u svakoj okolini postoji bar jedna tačka datog skupa, različita od tačke gomilanja).

b) Ako n i m prolaze nezavisno jedan od drugog cijelim skupom prirodnih brojeva, onda dati skup ima beskonačno mnogo tačaka nagomilavanja i to : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... (pripadaju li one datom skupu i jesu li one u isto vrijeme granične tačke datog skupa ?). Primijetimo da uvijek vrijedi: $m \leq a \leq b \leq M$, gdje je m donja međa skupa, M gornja; a - donja, b - gornja tačka gomilanja.

c) Skup B ima samo jednu tačku gomilanja 0 koja ne pripada skupu B. Granične tačke su sve tačke od B i još broj 0 (jer se u svakom otvorenom intervalu, koji sadrži jednu od tih graničnih tačaka, nalaze tačaka koje pripadaju ovom skupu kao i tačaka koje mu ne pripadaju).

d) Skup C ima za tačku nagomilavanja (gomilanja) tačku 0, koja mu pripada. Sve tačke od C su ujedno njegove granične tačke.

e) Tačke gomilanja skupa svih racionalnih brojeva čine skup svih realnih brojeva; one koje su racionalne pripadaju Q. Granične tačke se u ovom slučaju poduadaraju sa tačkama gomilanja.

f) Skup realnih brojeva ima za tačke gomilanja sve svoje tačke (ponekad se tu ukljućuju i tačke $-\infty$ i $+\infty$ koje ne pripadaju R). On nema graničnih tačaka (mogu li se tačke $-\infty$ i $+\infty$ smatrati za granične tačke skupa R).

g) Segment $[0,1]$ ima za tačke gomilanja sve svoje tačke, a za granične samo 0 i 1.

h) Analogno kao pod g).

i) Otvoreni interval ima za tačke gomilanja sve svoje tačke i tačke a i b, koje mu ne pripadaju. Tačke a i b su jedine njegove granične tačke.

200. Dokazati da je $\lim\limits_{x \to 1} (2x+3) = 5$. Nađi broj δ takav da za svako x iz $(1-\delta, 1+\delta)$ imamo

$$f(x) = (2x+3) \in (5-\varepsilon, 5+\varepsilon), \text{ gdje je } \varepsilon > 0 \text{ po volji dato.}$$

Rješenje. Da bi dokazali datu jednakost za limes, treba dokazati da za svako $\varepsilon>0$ postoji takav $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, da je

$$|f(x)-5|<\varepsilon \quad \text{za} \quad 0<|x-1|<\delta.$$

Zaista, imamo

$$(|f(x)-5|<\varepsilon)\Leftrightarrow(|2x+3-5|=|2x-2|<\varepsilon)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2|x-1|<\varepsilon)=\left(|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

pa dakle, postoji broj δ sa traženom osobinom, jer se može uzeti, npr. $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ (ili neki još manji broj, ali >0). Time smo ujedno odgovorili i na drugi dio zadatka.

201. Dokazati da je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x-3}{2x+1}=2$. Za koje se vrijednosti argumenta x vrijednost funkcije f, definisane sa $f(x)=\frac{4x-3}{2x+1}$, razlikuje od $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ za manje od 0,001?

Rješenje. Da bi dokazali datu jednakost, treba dokazati da za $\forall\varepsilon>0$ postoji $N=N(\varepsilon)$ takav da je

$$|f(x)-2|<\varepsilon \quad \text{za} \quad |x|>N.$$

Stvarno, neka je $\varepsilon>0$ po volji dat, tada je:

$$(|f(x)-2|<\varepsilon)\Leftrightarrow\left(\left|\frac{4x-3}{2x+1}-2\right|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2x+1}<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(|2x+1|>\frac{5}{\varepsilon}\right)=$$

$$\Leftrightarrow\left\{\left(x>\frac{5}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\vee\left(x<-\frac{5}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

tj. možemo uzeti da je $N(\varepsilon)=\frac{5}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}$ pa će vrijediti tvrdnja zadatka (jer postoji N sa traženom osobinom).

Napomenimo da pravila o limesima olakšavaju izračunavanje limesa i njih ćemo uglavnom koristiti.

202. Provjeriti sljedeće relacije:

a) $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ ($a = 1 \in (0,2)$ i $|x+1| < 3$ za svako $x \in (0,2)$ pa je $|x^2-1| < \varepsilon$ za $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$);

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ (jer je $\left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$ za $x > \frac{2}{\varepsilon} - 1$);

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ (jer je $\left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$ za $x < 1 - \frac{2}{\varepsilon}$);

d) $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (jer je za $x > 0$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon$ za $x > \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$);

e) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$ (jer je $\left|\frac{x^2-1}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ za $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$);

f) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ ($a \in R$, tj. $a \neq \pm\infty$), (jer je

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2}\cdot 1 = |x-a| < \varepsilon);$$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (jer je za $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $|\sin x| < |x| <$

$$< |\operatorname{tg} x|, \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x, \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{2} \Longrightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} < \varepsilon \Longrightarrow |x| < \sqrt{2\varepsilon} = \delta(\varepsilon));$$

h) $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$, (jer je $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$);

i) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;

j) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ $(0 \leq a \in R)$, (jer je $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| =$

$$= \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}\cdot a} + \dots + \sqrt[n]{a^{n-1}}} < \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \varepsilon);$$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, (jer je $\sqrt[n]{x} > M$ za $x > M^n$);

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ ne postoji (dobiju se razne granične vrijednosti ako se x uvećava preko raznih vrijednosti: za $x = k\pi$ je $\lim\limits_{x=k\pi\to\infty} \sin x = 0$; $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\to+\infty} \sin x = 1$; itd.);

m) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0$;

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$ (n ma kakav racionalan broj, vrijedi li i ako je n bilo koji realan broj ?);

o) $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$; p) $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x^2 = 2\lim\limits_{x\to 0} \log_a |x| =$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{za } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{za } a > 1. \end{cases}$$

203. Koristeći Cauchyev kriterijum, dokazati da postoji konačna granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ako je $a = 0$, $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$.

Rješenje. Treba dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji takva okolina U_a tačke a da je nejednakost

$$|f(x_1) - f(x_2)| \tag{1}$$

ispunjena za dvije proizvoljne vrijednosti x_1 i x_2 iz okoline U_a (ili da postoji $\delta > 0$ takvo da je za $0 < |x_1 - a| < \delta$ i $0 < |x_2 - a| < \delta$ ispunjeno (1)), gdje je a tačka nagomilavanja definicionog područja

E_x date funkcije (a nemora $\in E_x$).

zaista,

$$\left(|x\cos\frac{1}{x}| \leqslant |x|\right) \Longrightarrow \left(|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant\right.$$

$$|x_2 \cos\frac{1}{x_2}| + |x_1 \cos\frac{1}{x_1}| \leqslant |x_2| + |x_1|$$

pa, ako odaberemo $\varepsilon > 0$, tada u $\frac{\varepsilon}{2}$ - okolini tačke $x = 0$ je $|x_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x_2| < \frac{\varepsilon}{2}$; dakle $|f(x_2)-f(x_1)| < \varepsilon$, tj. za $f(x)$ važi Košijev kriterij.

1.4.2. Beskonačno male i beskonačno velike veličine (utvrđivanje da li je neka veličina b. mala ili b. velika na osnovu teorema i def. o b. malim i b. velikim veličinama)

204. Provjeriti (utvrditi) koje su od veličina

a) funkcija $y = \frac{\sin x}{x}$ kad $x \to +\infty$;

b) niz $a_n = \frac{2}{n^2}$; c) $y = \sin x$ kad $x \to 0$;

d) niz $a_n = (-1)^n$; e) $y = x\sin x$ kad $x \to +\infty$

beskonačno male, a koje b. velike veličine?

Rješenje. (Ovi termini b. mala i b. velika veličina sve rjeđe se upotrebljavaju, jer nisu dovoljno precizni).

a) y je b. mala, jer je proizvod ograničene funkcije $\sin x$ sa b. malom $\frac{1}{x}$ opet b. mala;

b) niz $a_n = \frac{2}{n^2}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ je b. mala, jer je $|a_n| < \varepsilon$ kad je $n > N = [\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}]$, (ovo je također nula-niz);

c) $x \sin x$ je b. mala kad $x \to 0$, jer je $|\sin x| < \varepsilon$ kad je $|x-0| < \delta$, gdje se može uzeti $\delta = \varepsilon$;

d) $a_n = (-2)^n$ je b. velika, jer je $|(-2)^n| > M$ kad je $n > N = [\log_2 M]$;

e) $y = x \sin x$ kad $x \to +\infty$ nije b. velika, jer y postaje (za neke – koje ?) jednako nuli za ma kako velike vrijednosti od x.

1.4.3. Računanje (određivanje, nalaženje) graničnih vrijednosti funkcija na osnovu teorema o gr. vrij. sume, razlike, proizvoda, količnika

205. Naći limese funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$ kad $x \to 3$; b) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$, $(x \to 3)$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$, $(x \to 2)$; d) $f(x) = \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$ $(x \to 1)$;

e) $f(x) = (\sqrt[m]{x}-1)/(\sqrt[n]{x}-1)$, $(x \to 1;\ m, n \in N)$.

Rezultat. a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x-12) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-9x+9) = 0$,

$$x^2+x-12 = (x-3)(ax+b) \Rightarrow a=1,\ b=4,$$

$$2x^2-9x+9 = (x-3)(mx+n) \Rightarrow m=2,\ n=-3.$$

$$\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9} = \frac{x+4}{2x-3}.\ \text{Limes je } \frac{7}{3}.$$

b) Rezultat: $\frac{1}{6}$. c) Rezultat: $\frac{3}{4}$.

d) Može se koristiti jednakost:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

$$y = 1, \quad x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

Rezultat: $\frac{5}{4}$.

e) Uvodi se smjena $x = t^{m \cdot n}$ i dalje rješava kao zadatak d)

Rezultat: $\frac{n}{m}$.

206. Nađi limese:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Rezultat: a) $\frac{2}{5}$; b) 0;

c) Primjenjuje se formula

$$z^3 - y^3 = (z-y)(z^2 + zy + y^2), \text{ Rezultat: } -\frac{1}{9}.$$

d) Rješava se slično prethodnom primjeru. Rezultat: 3.

207. Dokazati, prema definiciji granične vrijednosti, da je

$$\lim_{x\to 2} (3x+1) = 7$$

Rješenje. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno uzeto. Onda $|(3x+1)-7| < \varepsilon$ je ekvivalentno sa $|3(x-2)| < \varepsilon$ tj.

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{3} \; (= \delta).$$

Dakle, za $(\forall \varepsilon < 0)\,(\exists \delta)$: $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, tako da $|x-2| < \delta(\varepsilon)$

$$\Rightarrow |(3x+1)-7| < \varepsilon,$$

tj. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$ po definiciji granične vrijednosti funkcije.

U zadacima od 208–213 odrediti limese:

208. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ $(=A)$.

Rješenje.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=1.$$

209. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+x-2}$.

Rješenje. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

210. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ $(=A)$.

Rješenje: smjenom $\sqrt{x}=t$ $(x^2=t^4,\ x\to 1\Leftrightarrow t\to 1)$ imamo

$$A=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-t}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}t\,(t^2+t+1)=\lim_{t\to 1}t\,\lim_{t\to 1}(t^2+t+1)=1(1+1+1)=3.$$

211. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ $(=A)$.

Rješenje.

Kako je

$$\sqrt{1-x}-3\equiv\frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+3}\,(\sqrt{1-x}-3)$$

$$= \frac{1-x-3^2}{\sqrt{1-x}+3}$$

$$= \frac{x+8}{\sqrt{1-x}+3},$$

$$2+\sqrt[3]{x} = \frac{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{4-2\cdot\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{8+x}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}},$$

slijedi

$$A = \lim_{x\to-8}\left[-\left(\frac{x+8}{\sqrt{1-x}+3}\quad\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x+8}\right)\right]$$

$$= -\lim_{x\to-8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}$$

$$= -\frac{\lim_{x\to-8}(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\lim_{x\to-8}(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$= -\frac{4-2\sqrt[3]{-8}+\sqrt[3]{64}}{\sqrt{1+8}+3}$$

$$= -\frac{4-2(-2)+4}{3+3}$$

$$= -2.$$

212. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}\ (=A).$

Rješenje.

Kako je

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$

$$x^2-8x+15 = (x-5)(x-3)$$

$$\Longrightarrow A = \lim_{x\to3}\frac{x-2}{x-5} = \frac{3-2}{3-5} = -\frac{1}{2}.$$

213. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \quad (=A).$

Rješenje.

I način. Faktorizacijom se dobije:

$$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2),$$

$$x^4-4x+3 = (x-1)^2(x^2+2x+3),$$

tj.

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}.$$

II način. Smjenom $x-1=t$ $(\Leftrightarrow x=1+t)$, tj. $t\to 0$ kod $x\to 1$, dobije se

$$\begin{aligned} x^3-3x+2 &= (t+1)^3-3(t+1)+2 \\ &= t^3+3t^2 \\ &= t^2(t+3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4-4x+3 &= (t+1)^4-4(t+1)+3 \\ &= t^4+4t^3+6t^2 \\ &= t^2(t^2+4t+6) \end{aligned}$$

ili

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{t^2(t+3)}{t^2(t^2+4t+6)} = \frac{\lim\limits_{t\to 0}(t+3)}{\lim\limits_{t\to 0}(t^2+4t+6)} = \frac{0+3}{0+0+6} = \frac{1}{2}.$$

Pokušaj na ovaj način riješiti prethodni zadatak.

214. Provjeriti slijedeće rezultate

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{\dfrac{x^4-2x^2}{x-1}} - x\right) = \dfrac{1}{3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = 1$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(x^3-1)\,(x^4-1)} = \dfrac{1}{12}$;

e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1} = \dfrac{1}{3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1} = \dfrac{m}{n}$, $(m, n, \in N)$;

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ax^3+bx+c}{dx^3+ex+f} = \dfrac{a}{d}$, $(d\neq 0)$;

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \dfrac{1}{5^5}$;

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{4x^2-3x+2}}{\sqrt[6]{2x^4+2x^3-x}}\right) = \sqrt{2}$;

j) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2-2x+3}\right) = \pm 2$, (oprezno sa $\sqrt{x^2}$);

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \infty$.

1.4.4. Upoređivanje b. m. i b. v. veličina (ekvivalentne b. m. i b. v. veličine)

215. Na primjerima objasniti pojam infinitezimale, infinitezimale istog reda, te ekvivalentnih infinitezimala uvodeći pojam asimptotske relacije.

Rješenje.

za $x \to 0$ infinitezimale su $\sin x$, $1-\cos x$.

za $x \to 1$ infinitezimale su $\sin\frac{\pi}{2}(x-1)$, $\cos\frac{\pi}{2}x$, $\dfrac{x-1}{x^3}$

Iz $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{\cos 3x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ slijedi da su beskonačno male veličine: $2\sin x - 1$, $\cos 3x$ istog reda.

Iz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin \sim x \quad (x\to 0)$

ili $\sin x$ i x su ekvivalentne beskonačno male kad $x\to 0$.

216. Dokazati asimptotske relacije

1) $\sqrt{1+x} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x\to\infty)$

2) $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x} \sim \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x\to\infty)$

3) $\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{x} \sim \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \quad (x\to\infty)$

4) $\sqrt[n]{1+x} - \sqrt[n]{x} \sim \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{n-1}} \quad (x\to\infty)\ (n\in N\setminus\{1\})$.

Rješenje.

Dokaz za 3). Kako je

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^3}+\sqrt[4]{(x+1)^2x}+\sqrt[4]{(x+1)x^2}+\sqrt[4]{x^3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x})^3}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+1}$$

to se neposredno provjerava data asimptotska relacija

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}} = 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x})^3}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+1} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{4} = 1.$$

217. Neka $x\to 0$. Odrediti red slijedećih beskonačno malih u odnosu na x i uspostaviti odgovarajuće asimptotske relacije

a) $2x-3x^3+x^5$ c) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$

b) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ d) $tg\,x-\sin x$.

Rješenje.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^3+x^5}{2x}=1 \overset{df}{\Longleftrightarrow} 2x-3x^3+x^5\sim 2x\ (x\to 0)$$

$2x-3x^3+x^5$ je beskonačno mala prvog reda u odnosu na x kad $x\to 0$.

218. Dokazati da je

$$L=\lim_{x\to\infty}(x-\ln \operatorname{ch} x)=\ln 2.$$

Rješenje. Koristeći da je

$$\ln \operatorname{ch} x = \ln\frac{e^x(1+e^{-2x})}{2}$$

$$=x+\ln(1+e^{-2x})-\ln 2$$

tj. $L=\lim_{x\to\infty}(\ln 2-\ln(1+e^{-2x}))=\ln 2.$

$\left(\lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln\lim_{x\to a}f(x)\ \ (?)\right)$.

219. Dokazati da je

a) $\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=1.$

Na osnovu a) i b) možemo ispisati dvije asimptotske relacije kad $x\to\infty$. Koje?

Rješenje.

a) smjena $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{x+1} = y$ ($y \to 0$ kad $x \to \pm\infty$)

tj. $\frac{x}{x+1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$

ili $$x = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)} = \dots = \frac{1 - \operatorname{tg} y}{2 \operatorname{tg} y}.$$

Dakle,
$$\lim_{x \to \pm\infty} A = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \operatorname{tg} y}{2 \operatorname{tg} y}\, y = \frac{1}{2} \overset{df}{\Longleftrightarrow} A \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad (x \to \pm\infty)$$

b) $B = x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$

Smjena:
$$y = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad y \to 0_+ \text{ kad } x \to +\infty;$$

$$\left(\text{pošto } \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \begin{matrix} \to 1 & ; & x \to +\infty \\ \to -1 & ; & x \to -\infty \end{matrix}\right)$$

tj. $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (= \cos y)$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \cos^2 y$$

tj. $$x^2 = \frac{\cos^2 y}{1 - \cos^2 y} = \operatorname{ctg}^2 y$$

$$x = \operatorname{ctg} y \quad (y > 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} B = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1.$$

Dakle je
$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x} \quad (x \to +\infty).$$

c) Provjeri da je

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{-x} \quad (x \to -\infty).$$

1.4.5. Korištenje posebnih kriterija za određivanje gr. vrij. f-e (poređenje, gr. vrij. monotone funkcije), određivanje gr. vrij. f-a koristeći jednakosti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad i \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

220 Nađi limese:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-ax}-e^{bx}}{\sin ax+\sin bx}$, (znajući da je $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$); c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} x^{\frac{1}{(2-x)}}$.

Rješenje. a) Smjena: $x+2=y$, kad $x\to -2$ onda $y\to 0$ pa je

$$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} = \lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y(y-2)} = \left|\begin{array}{c}\arcsin y = t\\ y=\sin t\\ \text{za } y\to 0 \Rightarrow t\to 0\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t(\sin t-2)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}(\sin t-2)} = -\frac{1}{2}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-e^{bx}}{\sin ax+\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\left(\frac{x(a+b)}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x(a-b)}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-e^{x(a+b)}-1}{e^{ax}}}{2\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{x(a+b)}{2}\right)}{\frac{x(a+b)}{2}}\cdot\cos\left(\frac{x(a-b)}{2}\right)\cdot\frac{x(a+b)}{2}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-e^{x(a+b)}-1}{x(a+b)}}{e^{ax}\dfrac{\sin\left(\frac{x(a+b)}{2}\right)}{\frac{x(a+b)}{2}}\cdot\cos\left(\frac{x(a-b)}{2}\right)}=-1.$$

c) i d) sami zaključiti!

221. Naći

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\quad (=A).$$

Rješenje.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Provjeriti rezultate:

222. a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x\sin\dfrac{a}{2^x}=a$ (smjena: $y=\frac{1}{2}$; $y\to 0$ kod $x\to\infty$)

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\cos\alpha.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{tg\,x+tg\,2x}=\dfrac{2}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) tg\, x = 1$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = 1 \quad \left(y = \frac{1}{x},\ y \to 0 \text{ kod } x \to \infty\right)$

h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{\cos 3x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Uputstvo.

e) Kako je

$$A = \frac{x + \sin x}{tg\, x + tg\, 2x} = \frac{x+\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{tg\, x}{x} + \frac{tg\, 2x}{x}}$$

$$= \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{tg\, x}{x} + \frac{tg\, 2x}{x}}$$

te

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{tg\, 2x}{x} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} A = (1+1)\cdot\frac{1}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

f) Smjenom $x = \frac{\pi}{2} - y$, tj. $\frac{\pi}{2} - x \to 0$ kod $x \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) tg\, x = \lim_{y\to 0} y\, tg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{tg\, y} = 1.$$

h) Smjena $x = \frac{\pi}{6} + t.$

223. Naći limese :

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + tg\, x)^{ctg\, x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}, (a > 0)$; e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(1+x)^x - 2}{x - 1}$;

?

1 f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln \dfrac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x\cdot \cos 2x\cdot \cos 3x \cdots \cos nx - 1}{x^2}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!)$; i) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Rezultat. a) e ; b) 1 ; c) 1 ; d) 1 za $a\le 1$; a za $a>1$;

e) $\ln 4+1$; f) $\frac{1}{6}$; g) $-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$; h) 2π ; i) 1.

Napomena. Limesi neodređenih izraza se na različite načine određuju (kao što smo dosada činili: dijeleći razlomak, uvodeći smjenu, transformišući izraze, racionalisanjem i „štimanjem" na neki poznati limes). Međutim, jedna od najopštijih metoda (obično še, ne uvijek primjenljiva) je lopitalenje (pomoću izvoda - što će se kasnije vidjeti).

1.4.6. Određivanje lijeve i desne granične vrijednosti, limes superior i limes inferior u datoj tački, oscilacija funkcije u intervalu i tački

224. Dokazati sljedeće jednakosti (za jednostrane limese):

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$;

c) $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

d) $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{za } x\leqslant 1\\ 2x+2 & \text{za } x>1,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=0$;

e) $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sign} x=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sign} x=1$;

f) $\lim\limits_{x\to 0-} (\operatorname{sign} x)^2=\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{sign} x)^2=1$, (iako je $\operatorname{sign} 0=0$);

g) $f(x)=\sqrt{x}$ za $x\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$, ali $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, nema smisla;

h) $f(x)=\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, ali, npr. $\lim\limits_{x\to -1\pm} f(x)$, nema smisla;

i dati, za neke, geometrijsku interpretaciju i smisao simbola ∞.

Rješenje. (za neke funkcije samo uputstvo).

a) 1° Da bi dokazali jednakost $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}=+\infty$, treba dokazati da za svako $E>0$ postoji $\delta>0$, takvo da je $<0,0+\delta>\subseteq O$ (otvoreni skup $\subseteq R$, na kome je f definisana, osim možda u točki $c=0$, u ovom slučaju $\frac{1}{x}$ nije definisano u $c=0$ i njeno područje definicije je $E_x=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\subset O=(-\infty,+\infty)$, tj. $O\setminus\{0\}=E_x$) i da

$$(x>0;\ |x-0|<\delta)\Rightarrow\left(f(x)=\frac{1}{x}>E\right).$$

zaista za $E>0$ postoji $\delta>0$, takvo da $(x>0;\ |x-0|<\delta)\Rightarrow(\frac{1}{x}>E)$ (može se uzeti da je $\delta=\frac{1}{E}$ ili pak neki drugi broj manji od $\frac{1}{E}$, npr. $\delta=\frac{1}{E+10}$). Zbog proizvoljnosti broja E slijedi tvrdnja da je

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

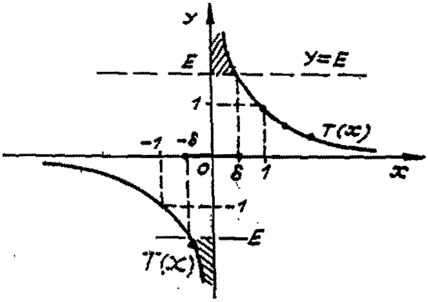
2° Da bi dokazali jednakost (odgovornu) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-\infty$, treba dokazati da za svako $E>0$ postoji $\delta>0$, takvo da je $<0-\delta,0>\subseteq O$ i da

$$(x<0;\ |x-0|<\delta)\Rightarrow\left(f(x)=\frac{1}{x}<-E\right).$$

Zaista za $E>0$ postoji δ sa prethodnom osobinom jer se za δ može uzeti $\delta = \frac{1}{E}$

pa, zbog proizvoljnosti broja $E>0$, slijedi tvrdnja.

Prikažimo na slici geometrijsku interpretaciju (jednostrane) beskonačne limese u konačnoj tački $c=0$ (i to i slijeva i zdesna) za datu funkciju $f(x)=\frac{1}{x}$:



kada se x približava k o zdesna, onda ordinata tačke $T(x)=(x,f(x))$ postaje sve veća i veća i neograničeno raste prema $+\infty$. Kažemo da $f(x)$ teži ka $+\infty$ kada $x\ (\neq 0)$ teži ka o zdesna.

Analogno se može zaključiti da da ordinata tačke $T(x)$ pada prema $-\infty$ kada se x približava ka o slijeva.

Sada $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$ očito znači sljedeće : ako uzmemo ma kako velik realan broj $E>0$, tada postoji $\delta>0$ takvo da grafik funkcije f, definisane sa $f(x)=\frac{1}{x}$, koji odgovara intervalu $(0,\delta)$, leži iznad prave $y=E$.

b) Za složenije funkcije koristimo (češće nego definiciju, ili kombinovano definiciju i pravila - kao i inače kod traženja običnih limesa, koje smo prije odredivali) teoreme o limesima u $\bar{R}=R\cup\{-\infty,+\infty\}$, beskonačnim limesima i jednostranim limesima u konačnoj tački, konačnim limesima u beskonačnosti i beskonačnim limesima u beskonačnosti.

1° Stavimo $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $h(x)=1+g(x)$. Kada $x\to 0-$ imamo (prema a)) $g(x)\to 0$, tj. $h(x)\to 1$ pa je

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{h(x)}\right)=1.$$

2° Analogno zaključujemo (jer $\frac{1}{x}\to+\infty$ kad $x\to 0+$) da je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+} h(x)} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = 0.$$

3° Da dokažemo jednakost $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ odnosno $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, treba dokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\Delta > 0$, takvo da je $(\Delta, +\infty) \subseteq \mathcal{D}(f)$ i da $(x \to \Delta) \Rightarrow (|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon)$ odnosno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\Delta > 0$, takvo da je $(-\infty, -\Delta) \subseteq \mathcal{D}(f)$ i

$$(x < -\Delta) \Rightarrow (|f(x) - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon).$$

No, koristeći pravila za konačne limese u beskonačnosti, (nećemo primijeniti gornju definiciju limesa na datu funkciju, tj. nećemo tražiti $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, već ćemo iskoristiti pravila – teoreme, smatrajući da je dokazano po definiciji ispravnost jednakosti:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$), imamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

c) Izvesti dokaz koristeći rečeno pod a) i b).

d) Radi se o konačnoj desnoj i lijevoj gr. vrij. u konačnoj tački $c = 1$. Zato za dokaz datih jednakosti, treba dokazati slijedeće: za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da je $(1, 1+\delta) \subseteq O$ (f def. u svakoj tački otvorenog skupa O, osim možda u tački $x = 1$, kod nas je f definisano i u tački $x = 1$ pa je $O = E_x = R$)

i

$$(x > 1\ ;\ |x-1| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - 4| < \varepsilon),$$

odnosno, za $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da je

$$(1-\delta, 1) \subseteq O \quad i \quad (x < 1\ ;\ |x-1| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - 0| < \varepsilon).$$

Za $x > 1$ je $f(x) = 2x + 2$, pa kako je

$$|f(x) - 4| = 2\,|x-1|,$$

imamo da je

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \text{ za } 0 < x-1 < \delta \left(= \frac{\varepsilon}{2}, \text{ npr. }\right),$$

tj. postoji desna granična vrijednost u $x=1$ i jednaka je

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 4$.

Analogno, imamo za svako $\varepsilon > 0$ postoji δ $(=\varepsilon$, npr.) takvo da je $(1-\delta, \delta) \subseteq \mathcal{O}$ $(=E_x = R)$ i da

$$(x<1\ ;\ |x-1| < \delta) \Longrightarrow (|f(x)-0| = |f(x)| < \varepsilon),$$

tj. postoji lijeva granična vrijednost i jednaka je

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0.$$

Za e), f), g) i h) nacrtati sliku, a zatim dokazati analitički (koristeći precizne definicije odgovarajućih limesa, ili kombinujući definicije i teoreme, ili samo pomoću teorema – „prećutno" ispuštajući odgovarajuće definicije limesa).

Napomena. Vidimo da imamo sljedeće vrste limesa:
1) običan (konačan limes u konačnoj tački), 2) jednostrani (lijevi i desni limes u konačnoj tački), 3) beskonačni (obostrani ili jednostrani) limes u konačnoj tački, 4) konačni limes u beskonačnosti (u $+\infty$ ili $-\infty$ – jednostrani, ili u ∞), 5) beskonačni limes u beskonačnosti.

Zbog toga, na prvi pogled, izgleda da je „teško" shvatiti sve te pojmove iz teorije graničnih vrijednosti (koja izučava svojstva limesa i uslove njihove egzistencije). No, pomenuta teorija (ona predstavlja osnovu savremene matematičke analize) utvrdila nam je pravila po kojim se mogu, znajući granične vrijednosti nekoliko prostih promjenljivih veličina, naći limesi najprostijih funkcija ovih veličina (koje ne mogu istovremeno težiti ka dvije različite granične vrijednosti u „specijalnim prostorima"). Zato ne treba štedjeti vrijeme kod usvajanja pravila i kriterijuma koje olakšavaju izračunavanje limesa ili, pak, utvrđivanje njihove egzistencije. U ovoj knjizi su upravo dati zadaci na kojima se mogu „prirodnije" shvatiti tako važni pojam limesa i njegovi razni tipovi.

Jeste li upamtili te najjednostavnije limese (dokazane na osnovu definicije ili pravila, kriterijuma) i da li ste uvježbali primjenu pravila na određivanje limesa? Ako niste, dalje ne listajte ovu zbirku! Sada ćemo ilustrovati neka od pravila i pokušaćemo preobčiti još dva tipa limesa: limes superior i limes inferior funkcije u tački.

225. Provjeriti slijedeće iskaze:

a) $\lim\limits_{x\to 1\pm} \frac{10x}{x-1} = \pm\infty$; b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)$ za $x \neq 0$;

$f(0+) = +\infty$, $f(0-) = 0$ (da li f ima limes u nuli?);

c) funkcija $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{za } x > 0 \\ -x & \text{za } x \leq 0 \end{cases}$ nema limes u nuli, jer je

$f(0-) = 0$ i $f(0+)$ ne postoji;

d) funkcija $f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$ nema limes u nuli za $n \in N$ (jer je $f(0-) \neq f(0+)$);

e) za funkciju $f(x) = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ je $f(0+) = +\infty$;

f) funkcija $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ nema limes u $x = 1$ i $x = -2$ (jer nije ispunjen potreban i dovoljan uslov za egzistenciju limesa), (a u ostalim tačkama iz oblasti definisanosti i u $\pm\infty$?);

g) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$,

$$\lim_{x\to 0+} \left(x + \frac{1}{x} + x - 1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} (2x-1) = -1$$

(odakle se vidi, da iz zbira limesa ne slijedi limes zbira – koji uslov nije ispunjen?, zato imati na umu da se pravila mogu primjenjivati samo u slučaju kada se javljaju određeni izrazi, tj ne mogu se primijeniti ako njihova primjena dovodi do neodređenih izraza: „0^0", „1^∞", „∞^0", „$\infty-\infty$", „$\frac{\infty}{\infty}$", „$0\cdot\infty$"; za takve slučajeve posebno se ispituje - vrše se transformacije izraza, uvođenje nove varijable, i lopitalenje pomoću izvoda);

h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(\sin x+2)}{x\pm 1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sin x+2-\dfrac{\sin x+2}{x+1}\right)$

ne postoji, jer $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sin x+2)$ ne postoji a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x+2}{x+1}=0$.

226. Naći limes inferior i limes superior funkcije f u tački c, ako je:

a) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $c=0$; b) $f(x)=\sin x$, c je u beskonačnosti;

c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^4}$, $c=2$; d) $f(x)=x\cos x$, c je zamijenjeno simbolima $+\infty$, $-\infty$;

e) $f(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $c=1$; f) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, x teži ka $c=0$ zdesna ili slijeva.

Rješenje. a) Limes inferior f-e $f(x)$ u tački a je najmanja - konačna ili beskonačna tačka nagomilavanja limesa funkcije $f(x)$ u tački a (limes superior je najveća).

Zna se da je $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ za $\forall x\in R$ i da je $\sin\frac{1}{x}=1$ za $\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $(k=0,\pm1\pm2,\dots)$ pa, ako x teži ka 0 preko vrijednosti $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ tada će se dobiti najveći limes za datu funkciju (od svih mogućih nizova $\left\{\sin\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ kod kojih $x_n\to 0$, najveći limes ima niz $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}_{k=1}^{+\infty}$):

$$\lim_{x\to 0} \sup \sin\frac{1}{x} \left(=\overline{\lim_{x\to 0}} \sin\frac{1}{x}\right) = 1 \left(=\overline{\lim_{x\to 0\pm}} \sin\frac{1}{x}\right),$$

a najmanji je

$$\underline{\lim_{x\to 0}} \sin\frac{1}{x} = -1 \left(= \underline{\lim_{x\to 0\pm}} \sin\frac{1}{x}\right).$$

b) Analogno kao u a) slijedi:

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \sin x = \underline{\lim_{x\to -\infty}} \sin x = \underline{\lim_{x\to +\infty}} \sin x = -1;$$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \sin x = \overline{\lim_{x\to +\infty}} \sin x = \overline{\lim_{x\to -\infty}} \sin x = 1.$$

c) $$\underline{\lim_{x\to 2-}} \frac{1}{(x-2)^4} = \underline{\lim_{x\to 2+}} \frac{1}{(x-2)^4} = \underline{\lim_{x\to 2}} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty.$$

d) $$\underline{\lim_{x\to\infty}} x\cos x = -\infty \left(= \underline{\lim_{x\to\pm\infty}} x\cos x\right);$$

$$\overline{\lim_{x\to\pm\infty}} x\cos x = +\infty.$$

e) $$\underline{\lim_{x\to 1}} \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right] = \underline{\lim_{x\to 1\pm}} \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right] = \overline{\lim_{x\to 1\pm}} \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right] = -\infty =$$

$$= \lim_{x\to 1} \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right], \text{ (tj. postoji limes u } x=1).$$

f) $$\underline{\lim_{x\to 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty, \text{ ali } \underline{\lim_{x\to 0+}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty;$$

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = \overline{\lim_{x\to 0+}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \left(\neq \overline{\lim_{x\to 0-}} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty\right).$$

227. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{za } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ x-1 & \text{za } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

odrediti skok i oscilaciju u tačkama definisanosti i oscilaciju u intervalu $[-1,1]$.

Rješenje. Skok funkcije f u tački c je:

$$f(c+)-f(c-)=\lim_{x\to c+} f(x)-\lim_{x\to c-} f(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } -1<c<0, \\ -2 & \text{za } c=0, \\ 0 & \text{za } 0<c<1, \end{cases}$$

a oscilacija u tački c:

$$\omega(f,c)=\max\{|f(c+)-f(c-)|,\ |f(c+)-f(c)|,\ |f(c-)-f(c)|\}=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{za } -1<c<0 \\ 2 & \text{za } c=0, \text{ jer je } |f(0+)-f(0)|=|-1-0|=1=|f(0-)-f(0)|=1, \\ 0 & \text{za } 0<c<1. \end{cases}$$

Međutim, oscilacija u intervalu $[-1,1]$ iznosi: $\omega=M-m=1-(-1)=2$.

§ 1.5. NEPREKIDNOST FUNKCIJA

1.5.1. Priraštaj argumenta i priraštaj funkcije, definicija neprekidnosti funkcije u tački, tačke prekida funkcije i tipovi tačaka prekida

228. Za funkciju $f(x)=x\ln x$ odrediti priraštaj u tačkama $a=1$ i $a=e$ i ocijeniti kakvog su znaka odgovarajući priraštaji funkcije i argumenta.

Rješenje. 1° Priraštaj argumenta u tački $a=1$ je $\Delta x = x-1$, a priraštaj funkcije f je $\Delta y = f(x)-f(1)=f(x)=x\ln x$; ako označimo $\Delta x = h$, onda je $x=1+h$ pa imamo

$$\Delta y = f(1+h)-f(1) = (1+h)\ln(1+h).$$

2° Za $a=e$ imamo: $h=\Delta x = x-e$, $\Delta y = f(e+h)-f(e) =$

$$= (e+h)\ln(e+h) - e\ln e = (e+h)\ln(e+h)-e.$$

Pošto je funkcija rastuća, to Δx i Δy imaju isti znak.

229. Dokazati da su istiniti sljedeći iskazi:

(a) Funkcija f: $f(x)=3x+10$ je neprekidna na R.

(b) Funkcija f: $f(x)=\dfrac{2}{x}$ je neprekidna u svakoj tački $c\neq 0$.

(c) Funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{|x|} & \text{za } (-2<x<0)\vee(0<x<\frac{1}{2})\\ -1 & \text{za } x=0\end{cases}$$

je neprekidna u svakoj tački $0\neq x_0\ (\in(-2,0)\cup(0,\frac{1}{2}))$, a u tački $x_0=0$ ima prekid.

(d) Funkcija $f: R\to R$ data sa

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj}\\ x & \text{ako je } x \text{ racionalan broj}\end{cases}$$

je neprekidna u $x_0=0$, dok je za $x_0\neq 0$ prekidna.

Rješenje. (a) I. Uzmimo $\varepsilon>0$ i promatrajmo interval

$$(f(c)-\varepsilon,\ f(c)+\varepsilon).$$

II. Tražimo $\delta>0$ takvo da $(|x-c|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(c)|<\varepsilon)$.
No,

$$|f(x)-f(c)| = |(3x+10)-(3c+10)| = |3(x-c)| = 3|x-c|.$$

Izraz $|x-c|<\delta$ treba da implicira (povlači) $3|x-c|<\varepsilon$. To će biti sigurno ispunjeno, ako je $3\delta\leq\varepsilon$, tj. $\delta\leq\frac{\varepsilon}{3}$.
Uzmemo li $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ onda

$$(|x-c|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(c)|=3|x-c|<3\delta=\varepsilon).$$

Dokazali smo da postoji bar jedno δ takvo da vrijedi

(1) $$(|x-c|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(c)|<\varepsilon).$$

(Pošto (1) vrijedi za dato $\varepsilon>0$ i za $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, onda (1) pogotovo vrijedi za svako $\delta'>0$ koje je manje od $\frac{\varepsilon}{3}$, tj za dato $\varepsilon>0$ postoji beskonačno mnogo brojeva $\delta>0$ takvih da vrijedi (1). Međutim, nama je dovoljno samo jedno takvo δ. Također, ako za dato $\varepsilon>0$ vrijedi (1), onda (1) vrijedi tim prije za svako $\varepsilon'>\varepsilon$, tj. treba pažnju posvetiti za malene brojeve $\varepsilon>0$).

III. Budući da za svako $\varepsilon>0$ možemo uzeti $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, to je dokazano da je f neprekidna u tački c. Kako je tačka c bila proizvoljna tačka iz R, to je dokazano da je f neprekidna na R.

(b) I. Dato je $\varepsilon>0$ (dakle, dat je interval oko tačke $f(c)$).

II. Dokažimo egzistenciju intervala oko c, tj. broja δ takvog da vrijedi (1). (Važno je utvrditi da δ postoji, a kako ga naći nije od kakve važnosti, jer se u definiciji neprekidnosti to i ne zahtijeva).

Dakle, traži se $\delta > 0$ takvo da

(2) $$(x \neq 0\,;\ |x-c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x)-f(c)| < \varepsilon).$$

No,

$$|f(x)-f(c)| = \left|\frac{2}{x}-\frac{2}{c}\right| = \frac{2|x-c|}{x\cdot c}.$$

Primjetimo da se argument x ne pojavljuje samo u kombinaciji $(x-c)$ kao u primjeru pod a).

Zato se ograničimo samo na one x iz intervala oko c za koje je moguće isključiti iz „igre" izraz $|x\cdot c|$ i pri tome moramo paziti da izraz $|x\cdot c|$ umijemo zamijeniti sa manjim brojem (koji zavisi samo od c).

Nije teško primijetiti da za $|x-c| < \frac{1}{2}|c|$ slijedi $x \neq 0$ i $|x| > \frac{1}{2}|c|$, pa je za takve x (iz okoline broja c)

$$|x\cdot c| > \frac{1}{2}|c|\cdot|c| = \frac{1}{2}|c|^2.$$

Otuda

(3) $$\left(|x-c| < \frac{1}{2}|c|\right) \Longrightarrow \left(|f(x)-f(c)| = \frac{2|x-c|}{|x\cdot c|} \leqslant \frac{4|x-c|}{|c|^2}\right).$$

Odavde slijedi da će (2) biti zadovoljeno, ako zahtijevamo da bude

$$\frac{4\delta}{|c|^2} \leqslant \varepsilon, \text{ tj. } \delta \leqslant \frac{|c|^2\cdot\varepsilon}{4}.$$

Dakle, x treba da zadovoljava uslove:

(4) $$|x-c| < \frac{1}{2}|c|, \qquad |x-c| < \frac{|c|^2\cdot\varepsilon}{4}.$$

Ako stavimo

(5) $$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}|c|,\ \frac{|c|^2\cdot\varepsilon}{4}\right\},$$

onda će $|x-c| < \delta$ povlačiti (3), jer je $\delta \leqslant \frac{1}{2}|c|$, a pošto je $|x-c| < \delta \leqslant \frac{|c|^2\cdot\varepsilon}{4}$ to iz (3) dobivamo:

$$|f(x)-f(c)| < \frac{4}{|c|^2}\cdot\frac{|c|^2\cdot\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

tj. ako za dato $\varepsilon>0$ uzmemo δ prema (5) onda vrijedi (2).

III. Budući da za svako $\varepsilon>0$ možemo odabrati $\delta>0$, takvo da vrijedi (2) to je data funkcija $\frac{2}{x}$ neprekidna funkcija u tački $c\neq 0$. Pošto je tačka $c\neq 0$ bila proizvoljna tačka, to smo dokazali da je data f neprekidna u svakoj tački iz $(R\setminus\{0\})$. Funkcija $\frac{1}{x}$ ima u nuli prekid, jer $f(0)$ nema smisla (f nije definisana u nuli).

(c) I. Dato je $\varepsilon>0$ (tačnost aproksimacije broja $f(c)$).

II. Dokažimo egzistenciju intervala oko c, tj. broja δ takvog da vrijedi (1).

1° Neka je $c\neq 0$. Za $x\neq 0$ imamo:

$$|f(x)-f(c)|=\left|\frac{6x}{|x|}-\frac{6c}{|c|}\right|.$$

Neka je $|x-c|<\frac{1}{2}|c|$. Tada je $x\neq 0$ i x,c su oba ili pozitivni ili oba negativni brojevi, pa je $[(f(x)=6\wedge f(c)=6)\vee((f(x)=-6\wedge f(c)=-6)]$, tj. $f(x)=f(c)$.

Dakle, za $\varepsilon>0$ broj $\delta=\frac{1}{2}|c|$ ima osobinu da

$$\left(|x-c|<\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x)-f(c)|<\varepsilon\right),$$

tj vrijedi (1) (uslov neprekidnosti).

III. Pošto za svako $\varepsilon>0$ možemo naći $\delta>0$, takvo da vrijedi (1), to je f neprekidna u $c\neq 0$. Zbog proizvoljnosti broja $c\neq 0$ slijedi da je f neprekidna u svakoj tački iz $(R\setminus\{0\})$.

2° Pretpostavimo sada da je $c=0$. Onda za $x>0$ slijedi

$$|f(x)-f(0)|=\left|\frac{6x}{|x|}+6\cdot 1\right|=12,$$

tj. za, npr., $\varepsilon=1$ i svako $\delta>0$ postoji tačka x takva da je $|x-0|<\delta$ i $|f(x)-f(0)|>\varepsilon$; dakle f ima prekid u tački $c=0$. / Napomenimo da f ima prekid u c, ako i samo ako postoji bar jedno $\varepsilon>0$ takvo da za svako $\delta>0$ vrijedi:

$$(\exists x_\delta)(|x_\delta - c| < \delta) \Rightarrow (|f(x_\delta) - f(c)| \geq \varepsilon)./$$

(d) Funkcija f je neprekidna u $c=0$, jer za dato $\varepsilon > 0$ broj $\delta = \varepsilon$ ima osobinu da $(|x-0|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-f(0)| = |f(x)| = |x| < \varepsilon)$. Međutim nije teško dokazati da f ima prekid u svim ostalim tačkama. Otuda slijedi da je neprekidnost lokalno svojstvo, svojstvo funkcije u tački. Primjetimo takođe da δ zavisi od tačke i od ε, tj. $\delta = \delta(c, \varepsilon)$. Vidjećemo kasnije da kod nekih (uniformnih) neprekidnih f-a δ ne zavisi od tačke.

230. Neka $f: (a,b) \to R$ ima u tački $c \in (a,b)$ osobinu: za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da $(|f(x)-f(c)| < \varepsilon) \Rightarrow (|x-c| < \delta)$. Da li je f neprekidna u c?

231. Neka $f: (a,b) \to R$ ima u $c \in (a,b)$ osobinu:

a) za svako $\delta > 0$ postoji $\varepsilon > 0$ takvo da

$$(|f(x)-f(c)| < \varepsilon) \Rightarrow (|x-c| < \delta);$$

b) za svako $\delta > 0$ postoji $\varepsilon > 0$ takvo da

$$(|x-c| < \delta) \Rightarrow (|f(x)-f(c)| < \varepsilon);$$

c) za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da

$(|x-c| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x)-f(c)| \leq \varepsilon)$, odnosno $(|x-c| < \delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow (|f(x)-f(c)| \leq \varepsilon)$, odnosno $(|x-c| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x)-f(c)| < \varepsilon)$.

Da li neka od osobina a), b), c) povlači neprekidnost funkcije f?

232. Neka je $f: (a,b) \to R$ neprekidna funkcija u tački $c \in (a,b)$. Ako je $f(r) = 0$ za svaki racionalan broj $r \in (a,b)$, dokazati da je $f(c) = 0$.

Rješenje. Budući da je f neprekidna u c, to za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takvo da

(1) $$(|x-c|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(c)|<\varepsilon).$$

Međutim, ma kakav bio interval oko tačke c, to u njemu mora biti bar jedan racionalan broj. Ako je c racionalan onda je $f(c)=0$. No, ako c nije racionalan, onda postoji neka tačka r iz okoline od c takva da ona predstavlja racionalan broj (ali takva da je $|r-c|<\delta$) tj. iz (1) slijedi da

$$(|r-c|<\delta)\Rightarrow(|f(r)-f(c)|=|0-f(c)|=|f(c)|<\varepsilon).$$

Pošto je $\varepsilon>0$ proizvoljno (dakle i po volji malo) to je $f(c)=0$.

233. a) Nađite monotonu funkciju f (primjer takve funkcije) koja otvoren interval I preslikava na otvoren interval $f(I)$, a da f nije strogo monotona.

b) Nađite monotonu funkciju f koja je neprekidna na otvorenom intervalu I, a da $f(I)$ nije otvoren interval.

c) Nađite neprekidnu strogo monotonu funkciju $f: I\to R$.

Uputstvo. a) Takva funkcija mora biti neprekidna na I; za neprekidnost je dovoljno da je f monotona i da su I, $f(I)$ otvoreni intervali.

b) Za neprekidnost nisu potrebni uslovi da je f strogo monotona ili $f(I)$ otvoren interval.

c) Ako je f strogo monotona i neprekidna na I, onda je slika $f(I)$ otvoreni interval i f^{-1}:

$$f(I)\to I \quad \text{je neprekidna na } f(I).$$

Napomena. Koristeći „ε, δ terminologiju" lako se dokažu prethodne činjenice, kao i niz osobina o neprekidnosti zbira, razlike, $\lambda\cdot f$, proizvoda, količnika ($\neq 0$ nazivnik), apsolutne vrijednosti, ako su neprekidne funkcije koje ulaze u te izraze. Koristeći onda te osobine lako se dokaže da je svaka od elem. funkcija (polinom, rac. funkcija, iracionalne, eksponencijalna, logaritamska, opšta potencija x^r, hiperbolne, area, trigonometrijske i njihove inverzne) neprekidna u svakoj tački svog definicionog područja. Pri tome se takođe koristi činjenica o neprekidnosti složenih funkcija; ako je $f:(a,b)\to R$, $g:(c,d)\to R$ tako da $f((a,b))\subseteq(c,d)$ (ali tako da je $g\circ f$ definirano), te ako je f neprekidna u $x_0\in(a,b)$ i g neprekidna u $y_0=f(x_0)\in(c,d)$, tada je složena funkcija $h=g\circ f$ neprekidna u x_0.

Napomenimo takođe da mnoge funkcije nisu neprekidne onaje gdje su i definisane (tako npr. $x!$, često puta funkcije definisane sa više formula i dr.). Takođe, neprekidnost možemo dokazivati i bez „ε,δ terminologije" koristeći definiciju da je f neprekidna u c, ako:

1) f definisana u c, tj. postoji $f(c)$;
2) postoji konačan limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$.

Ova definicija je naročito pogodna za utvrđivanje tipova tačaka prekida.

Takođe neprekidnost funkcije na segmentu može se definisati na dva (ekvivalentna načina):

1) f je neprekidna na $[a,b]$, odnosno $(a,b]$, odnosno $[a,b)$, ako i samo ako je f suženje neke funkcije f_1 koja je neprekidna na nešto širem otvorenom intervalu I_1 (koji sadrži interval $[a,b]$, odnosno $(a,b]$, odnosno $[a,b)$).

2) f je neprekidna na $[a,b]$ ako je neprekidna na (a,b) i ako je neprekidna slijeva u b i zdesna u tački a.

234. Da li je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{za } (-1 \leq x < 0) \vee (0 < x \leq 1), \\ 2x+1 & \text{za } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{za } 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

neprekidna, neprekidna slijeva odnosno neprekidna zdesna u tački $x=1$? A u ostalim tačkama? Nacrtajte grafik i utvrdite vrste prekida (ukoliko postoje prekidi).

Rješenje. 1° Budući da je

$$f(1+) = \lim_{x \to 1+} (2x+1) = 3, \quad f(1-) = \lim_{x \to 1-} f(x) =$$

$$= \lim_{x \to 1-} (-2x+1) = -1,$$ tj. $f(1+) \neq f(1-)$, to zaključujemo da je f prekidna u $x=1$ (jer ne postoji limes u toj tački, mada $f(1)$ ima smisla). O prekidnosti, odnosno prekidima ima smisla govoriti samo u onim tačkama koje su iz oblasti definicije funkcije ili su pak tačke nagomilavanja za tu oblast.

Pošto je $f(1-) = -1 = f(1)$, to je f neprekidna slijeva u $x=1$, dok $f(1+) = 3 \neq -1 = f(1)$ povlači da f nije neprekidna zdesna.

Napomenimo da smo to sve mogli dokazati i bez limesa (koristeći „ε, δ terminologiju" – koju ćemo izbjegavati kad je moguće).

Ovaj prekid je prve vrste i to neodstranjiv (jer je $f(1-) = f(1) \neq f(1+)$).

2° $$\left.\begin{aligned} f(0-) &= \lim_{-1 \leq x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-2x+1) = 1 \\ f(0+) &= \lim_{(1 \geq)\, x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (-2x+1) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

tj. postoji limes u tački $x=0$. Međutim u toj tački f nije definisana pa nema smisla $f(0)$; time nije ispunjen uslov

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Takođe f nije neprekidna ni slijeva ni zdesna u tački $x=0$, jer $f(0)$ nema smisla pa nije ispunjen uslov $f(0-) = f(0)$ odnosno $f(0+) = f(0)$. Ovaj prekid u $x=0$ je prve vrste i to je odstranjiv (nebitan, uklonjiv), jer možemo f na prirodan način po neprekidnosti proširiti (modificirati) u tačku $x=0$ ako definišemo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{za} \quad x \in \mathcal{D}(f) \\ 1 & \text{za} \quad x = 0 \,. \end{cases}$$

Funkcija g će biti neprekidna u nuli jer je:

$$g(0+) = g(0-) = g(0) \quad (=1).$$

3° Šta je sa tačkom $x = -1$?

U toj tački funkcija je definisana, a definisana je i zdesna, pa možemo govoriti o neprekidnosti zdesna u $x=-1$. No, kako je

$$f(-1+) = \lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} (-2x+1) = 3 = f(-1),$$

to zaključujemo da je f neprekidna zdesna u $x=-1$. Budući da f nije definisana lijevo od $x=-1$, to ne možemo govoriti o neprekidnosti slijeva.

4° $f(2-) = \lim\limits_{(1<)x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (2x+1) = 5$, $f(2) = -1$,

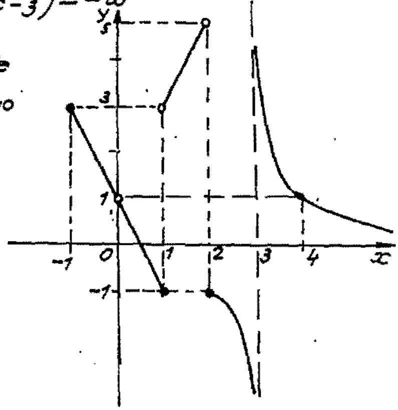
$$f(2+) = \lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \left(\frac{1}{x-3}\right) = -1,$$

pa je $f(2-) = 5 \neq f(2+) = -1 = f(2)$, tj. f je prekidna u $x=2$; neprekidna je zdesna, a prekidna slijeva i prekid je prve vrste – neodstranjiv (jer postoje lijevi i desni limesi konačni i različiti).

5° Ostaje nam još jedna karakteristična tačka za neprekidnost (sve su tačke karakteristične ako se u njima mijenja analitički oblik funkcije, ili funkcija nije definisana – a to joj je tačka nagomilavanja za domen).

Funkcija nije definisana u tački $x=3$, ali je 3 tačka nagomilavanja za domen od f; $f(3)$ nema smisla ali ima smisla tražiti limes u toj tački, pa ako postoje konačni lijevi i desni limes bilo jednaki (jer sada $f(3)$ nema smisla pa će biti $f(3-)=f(3+)\neq f(3)$) ili različiti, onda se radi o prekidu prve vrste. Ako ne postoji bar jedan od njih, onda je to prekid druge vrste (a ako ne postoji ni konačan ni kao beskonačan onda je to opet prekid druge vrste, ali još komplikovaniji i kao što je slučaj sa funkcijom $\sin(1:x)$ u $x=0$).

No,
$$f(3-)=\lim_{(2\geq)x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}\left(\frac{1}{x-3}\right)=-\infty$$



pa odmah možemo zaključiti da je to prekid druge vrste. Ali je korisno vidjeti (za crtanje grafika, npr.) i vrijednost $f(3+)$:

$$f(3+)=\lim_{x\to 3+}\left(\frac{1}{x-3}\right)=+\infty,$$

tj. funkcija f ima skok u $x=-3$:

$$f(3+)-f(3-)=+\infty.$$

6° svaka od formula u izrazu za f definiše po jednu elementarnu funkciju, a one su neprekidne ondje gdje su i definisane. Zbog toga a i na osnovu 1°–5°, možemo zaključiti da je f neprekidna na svakom od intervala: $[-1,0)$; $(0,1]$; $(1,2)$; $[2,3)$, $(3,+\infty)$, ali nije neprekidna na njihovoj uniji, tj nije neprekidna na skupu:

$$A=[-1,0)\cup(0,1]\cup(1,2)\cup[2,3)\cup(3+\infty)=[-1,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty),$$

jer je prekidna u $x=1$ i $x=2$.

235. Koju relaciju treba da zadovoljavaju parametri a i b pa da funkcija

$$f(x)=\begin{cases}-2\cos x & za \quad x\leq -\pi\\ a\cos x+b & za \quad -\pi<x<\pi\\ 2\sin\frac{x}{2} & za \quad x\geq \pi\end{cases}$$

bude neprekidna na R?

Rješenje. Funkcija $f: A\to R$, ($A\subseteq R$, A otvoren skup) je neprekidna na A ako i samo ako je:

$$f(c-)=f(c+)=f(c) \quad za \ \forall c\in A.$$

/Ako je A segment: $A=[a_1,a_2]$, onda

$$f(a_1+)=f(a_1) \quad i \quad f(a_2-)=f(a_2), \quad f(c-)=f(c+)=f(c)$$

za svako $c\in(a_1,a_2)$/.

U našem slučaju f je definisana na $A=E_x=R$. Pošto svaka od formula u izrazu za f predstavlja elementarnu funkciju (one su neprekidne ondje gdje su i definisane), to je f neprekidna u svakoj tački intervala (za $\forall a,b\in R$):

$$(-\infty,-\pi);\ (-\pi,\pi);\ (\pi,+\infty).$$

Ostaje da se ispita što je u karakt. tačkama $x=\pm\pi$; mogu li se odrediti a i b takvi da f bude u tim tačkama neprekidna. Funkcija f će biti neprekidna u $x=-\pi$ ako je

(1) $\qquad f(-\pi-)=f(-\pi+)=f(\pi)$,

a u tački $x=\pi$, ako je

(2) $\qquad f(\pi-)=f(\pi+)=f(\pi)$.

No iz uslova (1) slijedi:

$$\Big[\lim_{x\to-\pi-}f(x)=\lim_{x\to-\pi+}f(x)=f(\pi)\Big]\Leftrightarrow\Big[\lim_{x\to-\pi-}(-2\cos x)=$$

$$=\lim_{(\pi\,?)x\to-\pi+}(a\cos x+b)=f(\pi)\Big]\Leftrightarrow\big[+2=a\cdot(-1)+b)=2\big]\Leftrightarrow\big[-a+b=2\big].$$

Pošto je $\lim\limits_{x\to\pi-} f(x) = \lim\limits_{(-\pi\leq)x\to\pi-} (a\cos x+b) = -a+b$, $\lim\limits_{x\to\pi+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to\pi+} (2\sin\frac{x}{2}) = 2$ to iz uslova (2) slijedi $2 = -a+b$.

Dakle, da bi f bila neprekidna na R, a i b moraju zadovoljavati relaciju: $-a+b=2$.

236. Neka je f definisana jednačinom $f(x) = \dfrac{\sin\pi x}{x(1-x)}$ za $0<x<1$. Definišite funkciju f u $x=0$ i $x=1$ tako da f bude neprekidna na $[0,1]$. Diskutirajte i skicirajte grafik.

237. Dokažite: ako je f neprekidna funkcija u b i ako je

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ onda je

$\lim\limits_{x\to a} f[g(x)] = f(b)$.

238. Neka je

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ za $x \neq 0$;

b) $g(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$ za $x \neq 0$;

c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x-1}$ (funkcija gubi smisao za $x=1$).

1° Kako treba definisati funkciju f u $x=0$ da bi bila neprekidna za svako $x>-1$?

2° Odredite takvu vrijednost $g(0)$, da dopunjena funkcija bude neprekidna u $x=0$.

3° Može li se funkcija h na prirodan način proširiti do funkcije koja će biti neprekidna u $x=1$, tj. može li se odrediti konstanta A, tako da funkcija :

$$h_1(x)=\begin{cases} h(x) & \text{za} \quad x\in\mathcal{D}(h) \\ A & \text{za} \quad x=1 \end{cases}$$

bude neprekidna u A?

Rezultat. 1° $f(0)=\frac{3}{2}$; 2° $g(0)=2$; 3° Ne, jer je

$$h(1-)=-\frac{\pi}{2}\neq h(1+)=\frac{\pi}{2}.$$

239.1. Ispitati neprekidnost i konstruisati grafik funkcije f definisane sa izrazom

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(x \operatorname{arc\,tg} nx).$$

Rezultat. Funkcija f je neprekidna na R;

$f(x)=-\frac{\pi}{2}x$ za $x<0$, $f(x)=0$ za $x=0$ i $f(x)=\frac{\pi}{2}x$ za $x>0$.

239.2. Odrediti konstantu a tako da vrijednost funkcije f, date sa izrazom $f(x)=\operatorname{tg} x+a\operatorname{tg} 3x$, ostane konačna kada $x\to\frac{\pi}{2}$.

Rezultat. $a=-3$.

240. Odrediti intervale neprekidnosti za funkciju

$$f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}].$$

Rezultat. Neprekidna za $x\in\mathcal{D}(f)$ i $x\neq k^2$ $(k=1,2,\ldots)$.

241. Ispitati neprekidnost funkcije:

a) $f(x)=\operatorname{sign}(\sin x)$;

b) $f(x)=[x]\operatorname{sign} x$.

Rezultat. a) Neprekidna na $A=R\setminus\{x\in R: x=k\pi; k=0,\pm1,\dots\}$. Tačke $x=k\pi$, $(k=0,\pm1,\dots)$ su tačke prekida prvog reda.
b) Prekid prvog reda za $x=k\ (k=0,1,2,\dots)$

242. Navedite primjer koji će pokazati da zbir dviju prekidnih funkcija može biti neprekidna funkcija.

243. Ispitati neprekidnost funkcije f, date sa

$$f(x)=2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}.$$

Rješenje. Data funkcija je elementarna, pa je neprekidna ondje gdje je i definisana, tj. neprekidna je na $E_x=R\setminus\{1\}$. Pošto je $x=1$ tačka nagomilavanja od E_x, to ćemo ispitati o kojem se prekidu radi u toj tački (f je tu prekidna, jer nije definisana u $x=1$, a $x=1$ je tačka nagomilavanja od E_x).

$$f(1-)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{y\to0+}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1-y)}}}+2\right)=0+2=2;\ \text{jer } 1-y=x,$$

$$f(1+)=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{y\to0+}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1+y)}}}+2\right)=1+2=3;$$

$$/\ x=1+y\Rightarrow[(x\to1+)\Leftrightarrow(y\to0+)]\ /.$$

Pošto je $f(1-)\neq(1+)$ (i oba konačna), to se radi o prekidu prvog reda.

244. Odrediti $f(0)$ tako da je funkcija $y=x\ln^2x$ neprekidna za $x=0$.

Rezultat. $f(0)=0$, (pogodno je uvesti smjenu $\ln x=-t$ za $t>0$, to se može za $0 < x < 1$!).

245. Ispitati neprekidnost funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{za } x > -1 \text{ i } x \neq 0 \\ e & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Rješenje. Funkcija f je neprekidna za svako $c \in (\mathcal{D}(f) \setminus \{0\})$ kao složena funkcija neprekidnih funkcija. Međutim u $x = 0$ funkcija $\frac{1}{x}$ je prekidna pa ne možemo primijeniti teoremu o neprekidnosti složene funkcije (f je definisana u nuli a $g(x) = \frac{1}{x}$ nije definisana u nuli)

Dakle, nije „očigledno" da je f neprekidna i u $x = 0$ pa treba temeljitije razmotriti (neophodna su znatna sredstva matematičke analize, kao što su limes i Lopitalovo pravilo).

Međutim,

$$f(0-) = \lim_{(-1>)x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e;$$

$$f(0+) = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

tj.

$$f(0-) = f(0+) = e = f(0)$$

pa je f neprekidna u $x = 0$.

1.5.2. Osobine funkcija neprekidnih na segmentu (ograničenost, najmanja i najveća vrijednost funkcije, uniformna neprekidnost, međuvrijednost)

246. Za funkciju f, definisanu sa

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+11x-6 & \text{za } 4\geqslant x\geqslant \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{za } 0<x<\frac{1}{2} \\ 0 & \text{za } x=0 \end{cases}$$

ispitati ograničenost, odrediti segmente na kojim dostiže svoju najmanju i najveću vrijednost, dokazati da f uzima sve vrijednosti između $f(0)$ i $f(\frac{3}{2})$ iako je prekidna (u kojoj tački?). Zatim dokazati da f ima samo dvije nule u intervalu $[0,\frac{7}{4}]$.

Rješenje. 1° Data funkcija je neprekidna na svakom od intervala na kojima je definisana jednom formulom (koje definišu elem. funkcije). Međutim, ne možemo zaključiti da je f neprekidna i na njihovoj uniji, dok ne ispitamo neprekidnost u karakterističnim tačkama ($x=0$; $\frac{1}{2}$; 4).

$$\left(f(0+)\overset{?}{=}+\infty\neq f(0)\right)\Longrightarrow f \text{ nije neprekidna zdesna u } x=0.$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}-\right)=\lim_{(0<)x\to\frac{1}{2}-}\left(\frac{1}{x}\right)=2\neq f\left(\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{15}{8};$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}+\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}+}f(x)=\lim_{(4>)x\to\frac{1}{2}+}(x^3-6x^2+11x-6)=-\frac{15}{8}=f\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

pa je f neprekidna zdesna u $x=\frac{1}{2}$, a prekidna slijeva, tj. f je prekidna u $x=\frac{1}{2}$.

$$f(4-)=\lim_{x\to 4-}f(x)=6=f(4), \text{ tj. } f \text{ je neprekidna slijeva}$$

u $x=4$ (zdesna nema smisla, jer f nije definisana za $x>4$).

Prema tome, f je neprekidna na svakom od intervala :
$(0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, 4]$; na njihovoj uniji je prekidna u $x = \frac{1}{2}$.

2° Na osnovu 1° f je neprekidna na segmentu $[\frac{1}{2}, 4]$ pa je na njemu i ograničena. Na intervalu $(0, \frac{1}{2})$, nije ograničena iako je neprekidna, jer kad se x približava beskrajno ka nuli, onda vrijednost funkcije postaje neograničeno velika (desni limes u nuli je beskonačan). Međutim, na svakom segmentu sadržanom u $(0, \frac{1}{2})$, f je ograničena jer je neprekidna. Čak je ograničena i na svakom intervalu oblika $[r, \frac{1}{2})$; (gdje je $r > 0$), / jer je ograničena sa donje strane u $(0, \frac{1}{2})$?! /

3° Već smo u 2° rekli da je f neprekidna na segmentu $[\frac{1}{2}, 4]$, pa tu funkcija dostiže svoju najmanju i najveću vrijednost (odrediti te vrijednosti).
Funkcija takođe dostiže svoju najmanju i najveću vrijednost na svakom od segmenata sadržanih u skupu $(0, \frac{1}{2})$, (zašto ?).

4° Primijetimo da je

$$0 = f(0) = f(1).$$

Pošto je f neprekidna na segmentu $[1, \frac{3}{2}]$, to ona uzima sve vrijednosti između donje i gornje međe skupa vrijednosti funkcije f na $[1, \frac{3}{2}]$.
Pošto je na tome segmentu

$$m = \inf f = \inf f\, [1, \tfrac{3}{2}] = \inf\, [0, \tfrac{3}{8}] = 0 = f(1) = f(0)$$

i $$M = \sup f\, [1, \tfrac{3}{2}] = \sup\, [0, \tfrac{3}{8}] = \tfrac{3}{8} = f(\tfrac{3}{2}),$$

to f, stvarno, uzima sve vrijednosti između $f(0)$ i $f(\frac{3}{2})$.

5° U intervalu $(0, \frac{1}{2})$ funkcija nema nijedne nule, jer je tu uvijek $f(x) > 0$.

Međutim na segmentu $[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}]$ funkcija je neprekidna, pa ($f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{8} < 0$ i $f(\frac{7}{4}) = \frac{15}{64} > 0$) povlači da postoji tačka $c \in (\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ takva da je $f(c) = 0$. Odmah se vidi da je $c = 1$. Budući da je $f(0) = 0$ dokazali smo da f ima dvije nule u $[0, \frac{7}{4}]$.

Međutim, ostaje da dokažemo da f nema više nula u tom segmentu. Zato moramo utvrditi da li ima još koja nula u $[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}]$. Na tom segmentu f je data sa $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, a ovaj polinom može imati najviše tri nule (čak i u polju kompleksnih brojeva).

Pošto je $f(\frac{7}{4}) > 0$ i $f(\frac{5}{2}) < 0$, to, zbog neprekidnosti f na segmentu $[\frac{7}{4}, \frac{5}{2}]$, mora postojati još jedna nula u $[\frac{7}{4}, \frac{5}{2}]$. Takođe ($f(\frac{5}{2}) < 0$ i $f(\frac{7}{2}) > 0$) povlači (zbog neprekidnosti f na segmentu $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$) da postoji još jedna nula u $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$. Tako smo „iscrpli" sve moguće nule od f i možemo zaključiti da f stvarno ima samo dvije nule na segmentu $[0, \frac{7}{4}]$.

247. Dokažite da jednačina

$$12x^3 - 16x^2 - 73x + 105 = 0$$

ima sva tri realna korijena i da se jedan korijen nalazi u intervalu $(0, 2)$. Odrediti tu nulu približno smanjujući interval $(0, 2)$ u kojem f ima nulu (gruba aproksimacija nule polinoma).

248. Dokažite da svaki polinom neparnog stepena n sa realnim koeficijentima ima bar jednu realnu nulu.

Uputstvo. Može se uzeti da je koeficijent a_n uz najstariji član polinoma, veći od nule; za vrlo velike (po apsolutnoj vrednosti) x, $f(x)$ se ponaša kao najstariji član $a_n x^n$. Pa je za vrlo

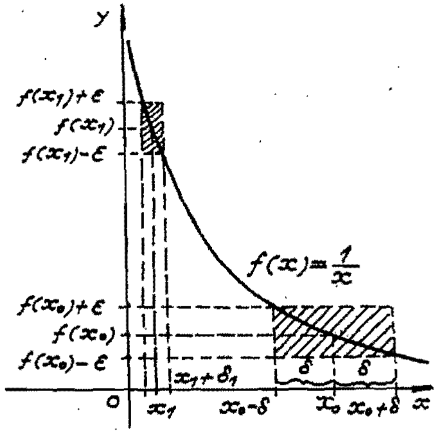
velike pozitivne x, $f(x)>0$, a vrlo velike i negativne x, $f(x)<0$, tj. postoje $a,b\in R$: $f(a)<0$ i $f(b)>0$.
Analogno za $a_n<0$. ($P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$).

249. Dokažite da jednačina
$$tg\, x = x$$
ima neizmjerno mnogo korijena (realnih).

250. Dokazati da je funkcija $f(x)$ neprekidna u proizvoljnoj tački $x_0\in(0,+\infty)$ i uvidjeti da broj δ zavisi od ε i x_0, tj. da f nije ravnomjerno (uniformno, jednako) neprekidna i taj, stvarno teški, pojam jednolike neprekidnosti, donekle geometrijski objasniti.

Rješenje. Da bi funkcija f bila ravnomjerno neprekidna na nekom intervalu I, mora za svako $\varepsilon>0$ postojati $\delta>0$ koje ne ovisi od x, takvo da
$$(x',x''\in I;\ |x'-x''|<\delta)\Rightarrow(|f(x')-f(x'')|<\varepsilon).$$
Napomenimo da smo u jednom od prethodnih zadataka dokazali da je f neprekidna na $(0,+\infty)$ i da je δ zavisilo od točke $c\in(0,+\infty)$ u kojoj je dokazivana neprekidnost (Naime, za δ smo uzeli $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}|c|,\frac{\varepsilon|c|^2}{2}\right\}$, mogli smo i, naravno, manje δ uzeti).
Međutim, f nije ravnomjerno neprekidna, jer ako uzmemo
$$x'=\frac{1}{n},\quad x''=\frac{1}{n+1},\ (n\in N,\ n>1),$$ tada je $|f(x')-f(x'')|=1$ iako se $|x'-x''|=\frac{1}{n(n+1)}$ može učiniti proizvoljno malim kad $n\to+\infty$.
Ilustrujmo to grafički:
Vidimo da $\delta>0$, koje je zadano $\varepsilon>0$ bilo „dobro" u točki x_0 nije više „dobro" za to isto ε u tački x_1. Tek broj δ_1 koji je znatno

manji od δ ima svojstvo da $(|x-x_1|<\delta_1)\Rightarrow(|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon)$. Čitalac se može lako uvjeriti da se isti fenomen ponavlja za svaki broj $\delta>0$. Da smo, npr., uzeli mjesto δ broj δ_1, onda bi on bio „dobar" kako u x_0 tako i u x_1, ali u nekoj tački x_2 koja je između 0 i x_1 grafik funkcije f bi „utekao" iz odgovarajućeg pravougaonika. To znači da ne možemo uzeti $\delta>0$ takvo da ono bude „dobro" u svakoj tački $x\in(0,+\infty)$. Međutim, situacija je sasvim drukčija da smo uzeli neki segment $[r,p]$, $0<r<p\in R$. Onda bi f morala biti uniformno neprekidna na tom segmentu, a pošto važi tvrdnja: „ako je f neprekidna za $a\leqslant x<\infty$ i postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tada je $f(x)$ ravnomjerno neprekidna na tom intervalu", to je $\frac{1}{x}$ ravnomjerno neprekidna i na svakom intervalu $[a,+\infty)$ gdje je $a>0$. Kakva je situacija u $(-\infty,0)$?



251 Dokazati da su slijedeće funkcije ravnomjerno neprekidne na naznačenim intervalima.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+5}$, $100\leqslant x\leqslant 200$; b) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $-\infty<x<+\infty$,

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $10\leqslant x<+\infty$.

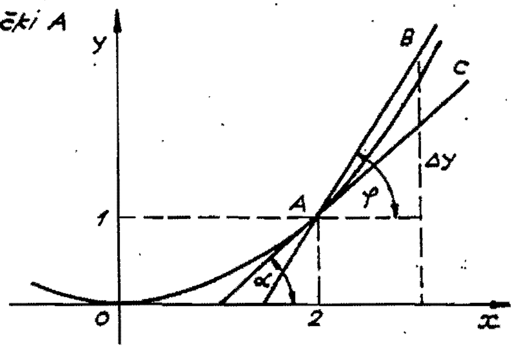
Uputstvo. Iskoristiti tvrdnju, formulisanu u prethodnom zadatku, i činjenicu da je svaka neprekidna funkcija na segmentu, takođe i uniformno (ravnomjerno) neprekidna na tome segmentu.

Glava druga

IZVODI I DIFERENCIJALI FUNKCIJA REALNE PROMJENLJIVE

§ 2.1. Izračunavanje izvoda po definiciji

252. Sječica AB povučena je kroz tačke $A(2,1)$ i $B(2+\Delta x, 1+\Delta y)$ parabole $y=\frac{1}{4}x^2$. Odredi koeficijent smjera sječice AB ako je
a) $\Delta x=1$; b) $\Delta x=0{,}1$; c) $\Delta x=0{,}01$.
Čemu je jednak koeficijent smjera tangente povučene u tački A parabole.



Rješenje.
Kako je prirast funkcije

$$\Delta y = y_B - y_A = y(2+\Delta x) - y(2) = \frac{1}{4}(2+\Delta x)^2 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 = \frac{1}{4}\Delta x(4+\Delta x),$$

to je koeficijent smjera sječice $tg\,\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{4}\Delta x$.
Prema (1) je koeficijent smjera sječice:
a) Za $\Delta x=1$: $tg\,\varphi = 1{,}25$; b) za $\Delta x = 0{,}1$ $tg\,\varphi = 1{,}025$;
c) za $\Delta x = 0{,}01$: $tg\,\varphi = 1{,}0025$.
Koeficijent smjera tangente u tački A je granična vrijednost koeficijenta smjera sječice AB kad tačka B, po datoj krivoj, teži ka tački A, tj.

$$tg\,\alpha = \lim_{B\to A} tg\,\varphi = \lim_{x_B\to x_A} tg\,\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} tg\,\varphi(\Delta x) = 1.$$

253.1*. Polazeći od definicije izvoda funkcije, naći izvod funkcije $y=x^2$ (za bilo koji x).

Rješenje Ako x-su damo prirast Δx, tada dobijemo prirast Δy, tj.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = (2x+\Delta x)\Delta x.$$

Odavde dobijemo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

pri čemu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ označava srednju brzinu promjene funkcije $f(x)=x^2$ u razmaku $\langle x, x+\Delta x\rangle$.

Da bi našli izvod y' date funkcije treba naći graničnu vrijednost količnika $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kad $\Delta x \to 0$, tj.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x,$$
$$y' = 2x.$$

(Kod traženja ove granične vrijednosti smatramo da je veličina x konstanta, ali y' zavisi od x-a).

1° Uzmimo $x=3$, tada je vrijednost izvoda $y'(3)=6$. Dobiveni broj 6 predstavlja brzinu promjene funkcije $f(x)=x^2$ (u odnosu na argument) za $x=3$.

2° Uzmimo da je $x=3$ i nađimo $y'(3)$, (preko priraštaja):

$$\Delta y = f(3+\Delta x) - f(3) = (3+\Delta x)^2 - 9 = (6+\Delta x)\Delta x;$$
$$y'(3) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x) = 6.$$

253. 2.* Polazeći od definicije izvoda funkcije naći izvod funkcije $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

Rješenje. Ako x-su damo priraštaj Δx, tada dobijemo prirast Δy, tj.

$$\Delta y = 2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4 - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

Odavde; dijeljenjem sa Δx, dobijemo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Granična vrijednost količnika $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kad $\Delta x \to 0$ tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7)$$
$$= 6x^2 + 10x - 7$$

je izvod date funkcije $(y' = 6x^2 + 10x - 7)$.

253.3.* Neka se tačka kreće po pravoj sa zakonom puta $s = 3t^3 - 2t^2 + 1$, gdje je s pređeni put mjeren u centimetrima u momentu t, a t je vrijeme mjereno u sekundama.

1° Naći srednju brzinu na razmaku $\langle t_1, t_2 \rangle$, za $t_1 = 1$ i $t_2 = 1,1$;

2° Naći brzinu promjene date funkcije za $t = 1$.

Rješenje. 1° $\Delta s = 3(t + \Delta t)^3 - 2(t + \Delta t)^2 + 1 - (3t^3 - 2t^2 + 1)$
$= 3t^3 + 9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 - 2t^2 - 4t\Delta t - 2\Delta t^2 + 1 - 3t^3 + 2t^2 - 1 =$
$= 9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 - 4t\Delta t - 2\Delta t^2,$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9t^2 + 9t\Delta t + 3\Delta t^2 - 4t - 2\Delta t.$$

Stavimo $t = 1$ $(t_1 = 1)$ i $\Delta t = 0,1$ $(t_2 = 1,1)$, dobit ćemo

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9 + 9 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1^2 - 4 - 2 \cdot 0,1 = 5 + 7 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1^2 =$$
$$= 5 + 0,1(7 + 0,3) = 5 + 0,1 \cdot 7,3 = 5,73.$$

Ako sa $V_{sr.}$ označimo srednju brzinu kretanja $(V_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t})$, tada je $V_{sr} = 5,73$ cm/sek.

2° Kako je $s'(t) = 9t^2 - 4t$ (po definiciji izvoda), za $t = 1$ imamo

$$s'(1) = 5.$$

Znači brzina promjene date funkcije za $t = 1$ je 5 cm/sek.

254. Odrediti po definiciji izvoda, izvodi funkcija

a) $f(x)=\sqrt{x+a}$ u tački $x\ (\geq -a)$;
b) $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ za one vrijednosti x za koje je $f(x)=0$;
c) $f(x)=x^2\sin(x-2)$ za $x=2$;
d) $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, za $x=1$.
e) $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$, $(n\in N)$ za $x\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Rješenje:
a) kako je

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sqrt{x+a+\Delta x}-\sqrt{x+a}}{\Delta x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+a+\Delta x}-\sqrt{x+a})(\sqrt{x+a+\Delta x}+\sqrt{x+a})}{\Delta x(\sqrt{x+a+\Delta x}+\sqrt{x+a})}$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+a+\Delta x}+\sqrt{x+a})}$$

to je po definiciji izvoda

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x+a}}\ (x>-a).$$

U tački $x=-a$ može da postoji samo desni izvod (pošto funkcija nije definisana za $x<-a$).
Po definiciji je desni izvod u tački $x=-a$;

$$f'(-a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta f(-a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sqrt{\Delta x}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty.$$

b) Pošto je $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=3$;
to je, po definiciji izvoda

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3-0}{x-1}.$$

tj. $f'(1) = (1-2)^2\,(1-3)^3 = -8$;

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3-0}{x-2} = 0;$$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3-0}{x-3} = 0.$$

c) Po definiciji izvoda je

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 \sin(x-2)-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} x^2 \cdot \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 4\cdot 1 = 4.$$

d) Na isti način:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x+(x-1)\cdot \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - (1-0)}{x-1}$$

$$= \frac{(x-1)\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)}{x-1}$$

tj.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) = 1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 1+\frac{\pi}{4}.$$

d) kako je $f(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-k)$

$(i\leq n;\ i\in N)$ $f'(i) = \lim_{x\to i} \dfrac{f(x)-f(i)}{x-i}$,

tj.

$$f'(i) = \lim_{x\to i} \frac{\prod_{k=1}^{n}(x-k)}{x-i} = \lim_{x\to i} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} (x-k),$$

ili

$$f'(i) = (i-1)(i-2)\cdots[i-(i-1)][i-(i+2)]\cdots(i-n)$$

$$= (i-1)!\,(-1)^{n-i}\,1.2\ldots(n-i)$$

$$= (-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!.$$

255. a) Za funkciju $f(x)$ koja ima izvod u tački x_0, dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f'(x_0) \qquad (1)$$

gdje je $n \in N$.

Pokazati da obratno ne važi, tj. ako postoji granična vrijednost (1), to još ne znači da funkcija ima izvod u tački x_0. Razmotri na pr. Dirihleovu funkciju).

Rješenje. Ako postoji izvod $f'(x_0)$ funkcije $f(x)$ u tački $x=x_0$, tada je po definiciji izvoda

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

zato je, prema definiciji granične vrijednosti, za proizvoljan niz $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ takav da je $(\forall n\in N)\, h_n \neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0\ (x+h_n \in E_x)$:

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \qquad (2)$$

Ako se u (2) zamijeni $h_n=\frac{1}{n}$ dobije se (1), što je i trebalo dokazati.

Da pokažemo da ne važi obratno, dovoljno je navesti kontraprimjer; Dirihleova funkcija:

$$f(x) = 1,\ x\in Q$$
$$= 0,\ x\notin Q$$

je prekidna u svakoj tački. Da to pokažemo dovoljno je pokazati da $f(x)$ nema graničnu vrijednost $(\forall x_0 \in R)$.

zaista $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1,$ za $x\in Q$
$\qquad\qquad\qquad\quad = 0,$ za $x\notin Q$

Pošto je Dirihleova funkcija prekidna u svakoj tački, to nema izvod ni u jednoj tački.

S druge strane granična vrijednost (1) ipak postoji.

Pošto je

$$(\forall n\in N)\quad f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)=1-1=0,\ \text{za } x_0\in Q$$
$$=0-0=0,\ \text{za } x_0\notin Q$$

tj.

$$(\forall n\in N)\ (\forall x_0\in R)\qquad f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)=0$$

to slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=0.$$

255.b. Pokazati da funkcija

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ako je } x \text{ racionalno}\\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalno}\end{cases}$$

ima izvod samo u tački $x=0$.

Rješenje. Pokazaćemo da je funkcija prekidna u svakoj tački $x\ (\neq 0)$. Kad $x\to a$, tako da je x racionalno, slijedi (prema definiciji date funkcije i definicije limesa)

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x^2=a^2;$$

kad $x\to a$, tako da je x iracionalno (tj. x teži ka a preko niza iracionalnih vrijednosti)

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} 0=0.$$

Pošto ne postoji granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($\neq a^2\neq 0$, tj. ako je $a\neq 0$) to je data funkcija prekidna u svakoj tački $x\neq 0$.

Pretpostavka da funkcija $f(x)$ ima izvod u nekoj tački $x\neq 0$ povlači da je i neprekidna u toj tački, što je protivno gornjem dokazu.

Potražimo sad izvod u tački $x=0$. Očito je

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}\quad (\because f(0)=0),\qquad (1)$$

sem toga je $0 \le f(x) \le x^2$, tj.

$$(\forall x) \quad 0 \le \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le |x| \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \qquad (2)$$

iz (1) i (2) je $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 0.$

§ 2.2. TEHNIKA NALAŽENJA IZVODA

U slijedećim zadacima primjenjujući pravila za nalaženja izvoda, treba odrediti izvode slijedećih funkcija.

256. Nađi izvod funkcija $y = f(x)$:

a) $y = 2 + x - x^2$,

b) $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$,

c) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$,

d) $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

Rješenje: Iskoriste li se pravila: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; $(af(x))' = af'(x)$, te $[f_1(x) \pm f_2(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$, slijedi:

a) $y' = (2)' + (x)' - (x^2)' = 1 - 2x$;

b) $y' = (a^5)' + 5a^3(x^2)' - (x^5)' = 10a^3x - 5x^4$;

c) $y' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \dots + (a_{n-2}x^2)' + (a_{n-1}x)' + (a_n)'$

$= na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$,

tj.

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}\right)' = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)a_i x^{n-i-1}.$$

d) $y' = (x^{-1})' + 2(x^{-2})' + 3(x^{-3})' = -1 \cdot x^{-2} + 2(-2)x^{-3} + 3(-3)x^{-4}$

$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right).$$

256.1.* Nađi izvod funkcije $f(x) = e^{2x}$.

Rješenje: $f'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}$.

257. Dokazati da je

$$[f(x)e^{ax}]' = [af(x) + f'(x)]\cdot e^{ax},$$

pa zatim nađi izvod funkcije
$y = (2x^2-5x+1)e^x$.

Rješenje: Po pravilu za diferenciranje proizvoda funkcija je $[f(x)e^{ax}]' = f(x)(e^{ax})' + f'(x)e^{ax} = af(x)e^{ax} + f'(x)e^{ax} = [af(x) + f'(x)]\cdot e^{ax}$,
š.t.d. (što je trebalo dokazati).
sad je

$$y' = [1\cdot(2x^2-5x+1) + (2x^2-5x+1)']\cdot e^x$$
$$= (2x^2-x-4)e^x.$$

258. a) $y = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$ ✓ b) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

c) $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$ d) $y = \log_a \dfrac{x}{1-x^2}$

Rješenje: Ovdje, pored naviše korištenih, treba da primjenimo pravilo za diferenciranje količnika dviju funkcija tj.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \quad (v\neq 0).$$

a) $$y' = \frac{(x\sin x+\cos x)'(x\cos x-\sin x) - (x\sin x+\cos x)\cdot(x\cos x-\sin x)'}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

$$= \frac{x\cos x\,(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}, \quad (tg\,x \neq x).$$

b) $y' = 2\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = 2\,\frac{(x)'(1-x^2)-x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$

$$= 2\,\frac{1\cdot(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (x \neq \pm 1).$$

c) $y' = \frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)}$

$$= \frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(-1+x-x^2-1-x+x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

za $\forall x \in R$.

d) $y' = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^{-1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$

pošto je $(\log_a u(x))' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u(x)}\,u'(x)$, $(u(x)>0)$.

U zadacima 259 - 262. nađi izvode složenih funkcija:

259. a) $y=\sqrt{1+x^2}$, tj. $y=\sqrt{u}$, gdje je $u=1+x^2$;
b) $y=e^{x^2}$, tj. $y=e^u$, gdje je $u=x^2$;
c) $y=\sqrt{tg\,\frac{1}{2}x}$; d) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$;
e) $y=\mathrm{arctg}\,(\sin^3 x)$ f) $y=(1+\sin x^{\alpha})^{\beta}$.

Rješenje. Prema pravilu za diferenciranje složene funkcije $[F(u(x))]'_x = F'_u\cdot u'_x$ je

a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(1+x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

b) $y' = e^u \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x$.

U slijedećim primjerima demostrira se postepena primjena pravila za diferenciranje složene funkcije

c) $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{tg\frac{1}{2}x}} (tg\frac{1}{2}x)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{tg\frac{1}{2}x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x} \cdot (\frac{1}{2}x)'$

$= \frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}x\sqrt{tg\frac{1}{2}x}}$. (Šta je oblast definisanosti funkcije y'?).

d) $y' = 2^{\sin^2\frac{1}{x}} \ln 2 \cdot (\sin^2\frac{1}{x})'_x = 2^{\sin^2\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot 2\sin\frac{1}{x} \cdot (\sin\frac{1}{x})'_x =$

$= 2^{\sin^2\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 (2\sin\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x}) (\frac{1}{x})'$

tj. $y' = -\frac{\ln 2}{4x^2} \sin\frac{2}{x} \cdot 2^{\sin^2\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$.

e) $y' = \frac{1}{1+(\sin^3 x)^2} (\sin^3 x)'_x = \frac{1}{1+\sin^6 x} 3\sin^2 x (\sin x)'_x$

$= \frac{3\sin^2 x \cdot \cos x}{1+\sin^6 x}$;

f) $y' = \beta(1+\sin x^\alpha)^{\beta-1} \cdot (1+\sin x^\alpha)'_x$

$= \beta(1+\sin x^\alpha)^{\beta-1} \cos x^\alpha (x^\alpha)'_x$

$= \alpha\beta x^{\alpha-1} \cos x^\alpha (1+\sin x^\alpha)^{\beta-1}$

260. $y = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

Rješenje. $y' = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1\cdot\sqrt{x^2+a^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{(x^2+a^2)^2}} = \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

261. a) $y=\dfrac{1}{\sqrt{b-ac}}\ln\dfrac{\sqrt{ax-b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}$ $(b-ac>0)$;

b) $y=\dfrac{2}{\sqrt{ac-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{ax+b}{ac-b}}$ $(b-ac<0)$.

Rješenje. a) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{b-ac}}\left[\dfrac{\dfrac{a}{2\sqrt{ax-b}}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}-\dfrac{\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right]$

$y'=\dfrac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$;

b) $y'=\dfrac{2}{\sqrt{ac-b}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{ax+b}{ac-b}}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ac-b}}\cdot\dfrac{a}{2\cdot\sqrt{ax+b}}$

$=\dfrac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$.

262. a) $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$;

b) $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$; $(a>0;\ x>0)$

c) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

d) $y=\arccos(\cos(\arccos x))$.

Rješenje.

a) $y'=[\sin(\cos^2 x)]'\cos^2(\sin^2 x)+\sin(\cos^2 x)[\cos(\sin^2 x)]'$

$=\cos(\cos^2 x)\cdot 2\cos x(-\sin x)\cos(\sin^2 x)+$

$$+\sin(\cos^2 x)\cdot[-\sin(\sin^2 x)]\cdot 2\sin x\cdot\cos x$$

ti:

$$y' = -2\cos x\sin x\,[\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)+\sin(\cos^2 x)$$
$$\cdot\sin(\sin^2 x)] = -\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x).$$

b) $y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a}\ln a\cdot a x^{a-1} + a^{a^x}\ln a\cdot a^x\cdot\ln a.$

c) $y' = \dfrac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}\cdot 2\ln(\ln^3 x)\dfrac{1}{\ln^3 x}\,3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}$

$$= \frac{6}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln^3 x)}.$$

d) $y' = \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}(-\sin(\arccos x))\dfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

pošto je:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}. \qquad (1)$$

Primjedba: formula (1) napisana je prema

$$\sin\alpha = 1-\cos^2\alpha \Longleftarrow \alpha\in[0,\pi],$$

pošto je $\arccos x \in [0,\pi]$.

262.1.* Nađi izvode slijedećih funkcija:

1) $y = (a+bx)^m$; 2) $y = a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$; 3) $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$;

4) $V = \sqrt[4]{(2t-t^2)^3}$; 5) $y = (2x^3-21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}$;

6) $y = (4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}$; 7) $y = \dfrac{x^m}{(1-x)^n}$;

8) $y=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$; 9) $y=\cos ax$; 10) $y=\sin\sqrt{x}$;

11) $y=tg\sqrt{\frac{1+x}{x}}$; 12) $y=\sqrt{\frac{1}{\cos x}}$; 13) $y=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

14) $y=3\cos^3 x$; 15) $y=tg^3 2x$; 16) $y=\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{2}{3}\cos 6x$;

17) $y=tg\,x+\frac{1}{3}tg^3 x$; 18) $y=\arcsin\sqrt{x}$ $(x>0)$;

19) $y=\sqrt{\arccos x}$; 20) $y=arctg\sqrt{x^3}$; 21) $y=arctg\frac{\cos x}{1+\sin x}$;

22) $y=e^{\sin x}$; 23) $y=6^{\frac{1}{4x}}$; 24) $y=e^{arctg\,x^2}$;

25) $y=\ln\sin x$; 26) $y=\ln(2e^x+x^2)$;

27) $y=3^{\ln(x^2+1)}$; 28) $y=x\sqrt{x}(\ln x-2)$;

29) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+k})$;

30) $y=arc\,tg\frac{\ln x}{3}$; 31) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$;

32) $y=e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)$; 33) $y=\log_{x^2}2$; 34) $y=\log_2(\sin^2 x)$;

35) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+4})$; 36) $y=\log_{x^2}x$.

Rješenje:

1) $y'=bm(a+bx)^{m-1}$;

2) $y'=\frac{a}{\sqrt{x}}+\sqrt{a}$;

3) $y' = \left(5x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 5\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -5\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{10}{3}x^{-\frac{5}{3}},$

$$y' = -\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}},$$

Ili

$$y' = \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = -\frac{5}{(\sqrt[3]{x^2})^2}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = -\frac{5}{(\sqrt[3]{x^2})^2}\cdot$$

$$\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{5}{(\sqrt[3]{x^2})^2}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},$$

$$y' = -\frac{10}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}};$$

4) $y' = \left(\sqrt[4]{(2t-t^2)^3}\right)' = \left(\sqrt[4]{u^3}\right)'u'_t$, gdje je

$u = 2t-t^2,\ u'_t = 2(1-t),$

$y' = \frac{3}{4}u^{-\frac{1}{4}}u'_t = \frac{3}{2}\frac{1-t}{\sqrt[4]{2t-t^2}};$

5) $y' = \left[(2x^3-21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}\right]' = (2x^3-21)'\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}$

$+(2x^3-21)\left(\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}\right)' = 6x^2\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}+$

$+(2x^3-21)\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{7+4x^3}}(7+4x^3)' =$

$6x^2\cdot\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}+\frac{2}{3}\frac{(2x^3-21)}{\sqrt[3]{7+4x^3}}\cdot 12x^2$, itd.

$$y' = \frac{2x^2(20x^3-63)}{\sqrt[3]{7+4x^3}} \;;$$

6) $y' = (4x-7)'(3x+7)\sqrt[3]{3x+7} + (4x-7)(3x+7)' \cdot$

$\cdot \sqrt[3]{3x+7} + (4x-7)(3x+7)(\sqrt[3]{3x+7})' = 28x\sqrt[3]{3x+7}\;;$

7) $$y' = \left(\frac{x^m}{(1-x)^n}\right)' = \frac{(x^m)'(1-x)^n - x^m[(1-x)^n]'}{(1-x)^{2n}} =$$

$$= \frac{mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1}(-x)'}{(1-x)^{2n}} =$$

$$= \frac{(1-x)^{n-1}[mx^{m-1}(1-x) + nx^m]}{(1-x)^{2n}}, \quad y' = \frac{x^{m-1}[m(1-x)+nx]}{(1-x)^{n+1}};$$

8) $$y' = 2 \cdot \frac{x'\sqrt{1+x^2} - (\sqrt{1+x^2})'_x}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot x}{(\sqrt{1+x^2})^2},$$

$$y' = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} \;;$$

9) $y' = (\cos u)'u'_x$, gdje je $u = ax$; $u'_x = a$, tj.

$y' = -\sin u \cdot u'_x$; $y' = -a\sin ax$;

10) $y' = (\sin u)'u'_x$ gdje je $u = \sqrt{x}$, $u'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$y' = \cos u \cdot u'_x = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

11) $y' = (\operatorname{tg} u)'u'_v \cdot v'_x$, gdje je $u = \sqrt{v}$, $v = \dfrac{1+x}{x}$,

$$U'_V = \frac{1}{2\sqrt{V}}, \quad V'_x = \frac{-1}{x^2}, \quad tj.$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'_V \cdot V'_x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{1+x}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}} \cdot \frac{1}{x^2};$$

12) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}}\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot(-\sin x);$$

13) $$y' = \frac{(1+\sin x)'(1-\sin x)-(1+\sin x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2};$$

14) $y' = 3(U^3)'U'_x$, gdje je $U = \cos x$, $U'_x = -\sin x$,
$y' = 9U^2U'_x$, $y' = 9\cos^2 x(-\sin x)$;

15) $$y' = 3tg^2 2x\,(tg 2x)' = 3tg^2 2x\,\frac{1}{(\cos 2x)^2}\cdot(2x)',$$

$$y' = 6tg^2 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x};$$

16) $$y' = \frac{1}{8}\cos 8x \cdot (8x)' - \frac{2}{3}\sin 6x \cdot (6x)' = \cos 8x - 4\sin 6x;$$

17) $$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + tg^2 x \cdot (tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x};$$

18) $y' = (\arcsin U)' \cdot U'$, gdje je $U = \sqrt{x}$, $U' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, u' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

19) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\arccos x}}\,(\arccos x)' = \frac{1}{2\sqrt{\arccos x}} \cdot$

$\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right);$

20) $y' = -\frac{1}{1+(\sqrt{x^3})^2}\,(\sqrt{x^3})' = -\frac{1}{1+x^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} = -\frac{3}{2} \cdot$

$\cdot \frac{\sqrt{x}}{1+x^3};$

21) $y' = \frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)' = \frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}} \cdot \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2},$

$y' = -\frac{1}{2};$

22) $y' = e^{\sin x}(\sin x)'$, $y' = \cos x\; e^{\sin x};$

23) $y' = 6^{\frac{1}{4x}} \ln 6 \cdot \left(\frac{1}{4x}\right)'$, $y' = -\frac{6^{\frac{1}{4x}}}{4x^2} \ln 6;$

24) $y' = e^{\operatorname{arctg} x^2}\,(\operatorname{arctg} x^2)' = e^{\operatorname{arctg} x^2}\, \frac{1}{1+x^4} \cdot (x^2)';$

$y' = \frac{2x}{1+x^4}\, e^{\operatorname{arctg} x^2};$

25) $y' = (\ln u)' \cdot u'$, gdje je $u = \sin x$, $u' = \cos x$,

$y' = \frac{1}{u}\, u' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$, $y' = \operatorname{ctg} x;$

$$26)\ y'=\frac{1}{2e^{x}+x^{2}}\left(2e^{x}+x^{2}\right)'=\frac{2(e^{x}+x)}{2e^{x}+x^{2}};$$

$$27)\ y'=3^{\ln(x^{2}+1)}\ln 3\left[\ln(x^{2}+1)\right]'=3^{\ln(x^{2}+1)}\ln 3\cdot\frac{1}{x^{2}+1}\cdot$$

$$\cdot\left(x^{2}+1\right)',$$

$$y'=3^{\ln(x^{2}+1)}\ln 3\cdot\frac{2x}{x^{2}+1};$$

$$28)\ y'=(x)'\sqrt{x}\,(3\ln x-2)+x\left(\sqrt{x}\right)'(3\ln x-2)+x\sqrt{x}\,(3\ln x-2)'$$

$$=\sqrt{x}\,(3\ln x-2)+\frac{x}{2\sqrt{x}}\,(3\ln x-2)+x\sqrt{x}\cdot\frac{3}{x},$$

$$y'=\frac{9}{2}\sqrt{x}\,\ln x;$$

$$29)\ y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^{2}+k}+\frac{x}{2}\,\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+k}}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+k}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+k}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x^{2}+k}}{2}+\frac{x^{2}}{2\sqrt{x^{2}+k}}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+k}}\cdot\frac{\sqrt{x^{2}+k}+x}{\sqrt{x^{2}+k}},$$

$$y'=\sqrt{x^{2}+k};$$

$$30)\ y'=\frac{1}{1+\frac{\ln^{2}x}{9}}\cdot\left(\frac{\ln x}{3}\right)',\quad y'=\frac{3}{x\left(9+\ln^{2}x\right)};$$

$$31)\ y'=\left(\frac{\sin x}{\cos^{2}x}\right)'+\left[\ln(1+\sin x)-\ln\cos x\right]'=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos^{2}x-2\sin x\cos x(-\sin x)}{\cos^{4}x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

$$y' = \frac{2}{\cos^3 x} \quad , \quad y' = 2\sec^3 x \ ;$$

32) $y' = \left(e^{\sqrt{2x}}\right)' \left(\sqrt{2x} - 1\right) + e^{\sqrt{2x}} \left(\sqrt{2x} - 1\right)'$

$$= e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}} \left(\sqrt{2x} - 1\right) + e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} \left(\sqrt{2x} - 1 + 1\right),$$

$$y' = e^{\sqrt{2x}} \ ;$$

33) $y' = \log_{x^2} 2 \ (x > 0)$.

Iz jednačine $\log_{x^2} 2 \cdot \log_2 x^2 = 1$ slijedi

$$\log_{x^2} 2 = \frac{1}{2\log_2 x} .$$

Kako je $\log_2 x = \log_2 e \ \ln x$ i $\log_2 e \ \ln 2 = 1$, to je

$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$. Sada možemo napisati

$$y' = \frac{\ln 2}{2\ln x} \quad , \quad y' = \frac{\ln 2}{2x\ln^2 x} \ ;$$

34) $y' = \log_2 (\sin^2 x)$.

Primjenit ćemo obrazac za traženje izvoda funkcije $y = \log_{(a)} f(x)$, tj.

$$y' = \frac{\log_{(a)} e \, f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{\ln a \cdot f(x)} .$$

Dakle, možemo pisati

$$y' = \frac{(\sin^2 n)'}{\ln 2 \cdot \sin^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{\ln 2 \cdot \sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\ln 2 \cdot \sin x},$$

$$y' = \frac{2}{\ln 2} \cdot \cot g x;$$

35) $$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)'}{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\ln a} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\ln a},$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4} \cdot \ln a};$$

36) $y' = \log_{x^2} x \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Prema tome imamo $y'=0$.

262.2. Provjeriti slijedeće rezultate:

$f(x)$	$f'(x)$
1° $\ln tg \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$	$\frac{1}{\sin x}$
2° $\ln tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \ln \frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}$	$\frac{1}{\cos x}$
3° $x + \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$	$\frac{2}{1+tg x}$
4° $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$f(x)$	$f'(x)$
5° $\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$	$-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \neq -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$
6° $x(1+x^2)^{-1}+\operatorname{arctg}x$	$2(1+x^2)^{-2}$
7° $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\operatorname{arctg}x$
8° $\frac{1}{n}\cdot\frac{x^n}{(1+x)^n}$	$\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$
9° $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$
10° $\frac{x^2+1+x}{x^2+1-x}+\frac{x^2+1-x}{x^2+1+x}$	$8x$
11° $\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$	$\frac{2}{\sin^2 x}$
12° $\sin^n x\cdot\cos nx$	$n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$
13° $\frac{1}{\cos^n x}$	$\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$
14° $e^x(x^2-2x+2)$	$x^2\cdot e^x$
15° $\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
16° $\arcsin(\sin x)$	$\operatorname{sgn}(\cos x)$

Pored toga u gornjim primerima odrediti oblast

$E_x^{(o)}$ definisanosti funkcije f i oblast $E_x^{(1)}$ definisanosti njenog izvoda.

Voditi računa o tome da je $E_x^{(1)} \subset E_x^{(o)}$, tj. da izvod može (a ne mora) da postoji samo u onim tačkama u kojima je funkcija definisana (i neprekidna).

U slijedećem zadatku primjenjeno je pravilo za izvod inverzne funkcije.

263. Dokazati da postoji (jednoznačna) funkcija $y=y(x)$ zadana slijedećim jednačinama i zatim odrediti y'_x:

a) $y^3 + 3y = x$;

b) $y + \ln y = x$;

c) $e^y + y = x$.

Rješenje: a) Data jednakost definiše jednoznačnu funkciju $x = x(y)$, čiji je izvod $x'_y = 3(y^2+1)$ $(\neq 0, \forall y \in R)$. Ako je $x=x(y)$ monotona funkcija, tada postoji jedinstvena inverzna funkcija $y=y(x)$.

Monotonost funkcije $x=x(y)$ ispitaćemo po definiciji. Kako je $x(y_1) - x(y_2) = (y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + 3)$

$$= (y_1 - y_2)\left[(y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + 3\right]$$

to važi implikacija

$y_1 - y_2 > 0 \Rightarrow x(y_1) - x(y_2) > 0$,

tj. funkcija $x=x(y)$ je monotono rastuća, prema definiciji, te ima jedinstvenu inverznu funkciju $y=y(x)$.

Prema teoremi o izvodu inverzne funkcije je

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2+1)}.$$

b) Na isti način kao u prethodnom zadatku $x=x(y)$

$$x'_y = 1 + \frac{1}{y} = \frac{y+1}{y}, \quad (y \neq 0).$$

Sem toga je

$$x(y_1)-x(y_2) = (y_1-y_2) + \ln\frac{y_1}{y_2} > 0 \Leftarrow y_1 > y_2 \ (>0), \text{ tj.}$$

data funkcija $x=x(y)$ je monotono rastuća, te ima jedinstvenu inverznu funkciju za koju je

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{y}{y+1}.$$

c) Na isti način imamo:

$$x = y + e^y \Rightarrow x'_y = 1 + e^y.$$

zatim

$$x(y_1) - x(y_2) = (y_1 - y_2) + e^{y_2}\left(e^{y_1-y_2}-1\right) > 0 \Leftarrow y_1 - y_2 > 0,$$

pošto

$$y_1 - y_2 > 0 \Rightarrow e^{y_1-y_2} > 1, \quad (e^{y_2} > 0, \ \forall y_2 \in R),$$

tj. data funkcija $x=x(y)$ je, po definiciji, monotono rastuća, te ima jedinstvenu inverznu funkciju $y=y(x)$ za koju je

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+e^y}.$$

264.1. Vodeći računa o definicionom području datih funkcija, provjeri rezultate:

a) $\left(\frac{1}{4}\,sh2x-\frac{1}{2}\,x\right)'=sh^2x$; $\left(\frac{1}{4}\,sh2x+\frac{1}{2}\,x\right)'=ch^2x$; $\forall x\in R$;

b) $(\ln chx)'=thx$; $(\ln shx)'=cth\,x$;

c) $\left(Arsh\sqrt{2x+x^2}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+x^2}}$; $\left(Arsh(tgx)\right)'=\dfrac{1}{\cos x}$;

d) $\left(arch\,\dfrac{x+1}{x-1}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$; $\left(arch\,\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{1}{\cos x}$;

Rješenje:

a) $\left(\frac{1}{4}\,sh2x-\frac{1}{2}\,x\right)'=\frac{1}{4}\,2ch2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(ch2x-1)=sh^2x$,

$\forall x\in R$, $\left(\frac{1}{4}sh2x+\frac{1}{2}\,x\right)'=\frac{1}{4}\,2\,ch\,2x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(ch2x+1)=$

$=ch^2x$;

b) $(\ln chx)'=\dfrac{1}{chx}\cdot shx=tghx$, za $\forall x\in R$,

$(\ln chx)'=\dfrac{1}{shx}\,chx=cthx$, za $x\in(0,+\infty)$;

c) $\left(Arsh\,\sqrt{2x+x^2}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2x+x^2}\right)^2+1}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2x+x^2}}\,(2+2x)$

$$=\frac{|x+1|}{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}\quad\left(\Leftarrow\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|\right).$$

Primjetimo da je data funkcija $y=Arsh\,\sqrt{2x+x^2}$ definisana za $2x+x^2\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ te je

$$\left(Arsh\sqrt{2x+x^2}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} \text{ za } x\in(-\infty,-2),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} \text{ za } x\in(0,+\infty).$$

Primjedba: Primjeti da je data funkcija u tački $x=-2$ neprekidna samo slijeva (nije definisana zdesna od tačke -2, tj. za $-2<x<0$), tj. da je (na isti način) neprekidna zdesna u tački $x=0$. Zatim odredi lijevi izvod $f'_-(-2)$ u tački $x=-2$ (tj. desni izvod u tački $x=0$) i provjeri da li je

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to 2-} f'(x) \;\left(\text{tj. } f'_+(0)=\lim_{x\to 0+} f'(x)\right).$$

d) $$\left(\operatorname{arch}\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1}}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2-(x-1)^2}}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2},\ (x\neq 1)$$

$$= \frac{|x-1|}{x-1}\cdot\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$$

Kako je funkcija Archt definisana za $t\geq 1$ to je data funkcija $Arch\,\frac{x+1}{x-1}$ definisana za $\frac{x+1}{x-1}\geq 1 \iff x>1$.

Za $x>1 \Rightarrow |x-1|=x-1$, te je traženi izvod

$$\left(\operatorname{arch}\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}, \qquad (x>1).$$

Primjedba: Primjeti da je data funkcija prekidna i zdesna u tački $x=1$ ($\Leftarrow \lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$). Zato, jasno, ne može da postoji ni desni izvod $y'_x(1)$, za razliku od predhodnog zadatka, kad je funkcija bila neprekidna s jedne strane (u tački -2 ili 0).

264.2.** Naći izvode slijedećih funkcija:

1) $y=ch^3x$; 2) $y=\sin(chx)$; 3) $y=thx-\frac{1}{3}\coth^3x$;

4) $y=5\,sh^3\frac{x}{15}+3\,sh^5\frac{x}{15}$; 5) $y=ar\,sh^2 2x$,

6) $y=arth\,x^2+arcoth\,(x+1)$.

Rješenje:

1) $y'=(u^3)'\cdot u'$, gdje je $u=chx$, $u'=shx$, tj.
$y'=3u^2\cdot u'=3\,ch^2x\cdot shx$;

2) $y'=(\sin u)'u'$, gdje je $u=chx$, $u'=shx$, tj.
$y'=\cos u\cdot u'=\cos(chx)\,shx$;

3) $$y'=\frac{1}{ch^2x}-\frac{3}{3}\coth^2x(\coth x)'=\frac{1}{ch^2x}-\coth^2x\left(-\frac{1}{sh^2x}\right),$$

$$y'=\frac{1}{ch^2x}+\frac{ch^2x}{sh^4x}=\frac{sh^4x+ch^4x}{ch^2x\,sh^4x};$$

4) $$y'=15\,sh^2\frac{x}{15}\left(sh\frac{x}{15}\right)'+15\,sh^4\frac{x}{15}\left(sh\frac{x}{15}\right)'$$

$$=15\,sh^2\frac{x}{15}\,ch\frac{x}{15}\left(\frac{x}{15}\right)'+15\,sh^4\frac{x}{15}\,ch\frac{x}{15}\left(\frac{x}{15}\right)'$$

$$=sh^2\frac{x}{15}\,ch\frac{x}{15}+sh^4\frac{x}{15}\,ch\frac{x}{15}=sh^2\frac{x}{15}\,ch\frac{x}{15}\cdot\left(1+sh^2\frac{x}{15}\right)$$

$$= sh^2 \frac{x}{15}\ ch^3 \frac{x}{15}.$$

5) $y' = (u^2)' u'_v \cdot v'$, gdje je $u = \operatorname{arsh} v$,

$$u'_v = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \quad v = 2x, \quad v' = 2,$$

$$y' = 2u \cdot \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \cdot v', \quad y' = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} \operatorname{arsh} 2x;$$

6) $y' = (\operatorname{arth} u)' u' + (\operatorname{arcoth} v)' v'$, gdje je

$u = x^2$, $u' = 2x$, $v = x+1$, $v' = 1$, to je

$$y' = \frac{1}{1-u^2} u' - \frac{1}{v^2-1} v' = \frac{2x}{1-x^4} - \frac{1}{x^2+2x},$$

$$y' = \frac{x^4+2x^3+4x-1}{x(x+2)(1-x^4)}, \quad |x| < 1, \quad |x+1| > 1.$$

§ 2.3. LOGARITAMSKI IZVOD.

265. Koristeći logaritamski izvod $(\ln y)'_x = \frac{y'_x}{y}$ ili na neki drugi način dokazati pravilo:

$$[u(x)^{v(x)}]'_x = v \cdot u^{v-1} u'_x + u^v \cdot \ln u \cdot v'_x,$$

$$(u(x) > 0);$$

tj. izvod funkcije $u(x)^{v(x)}$ može se odrediti tako da se odredi izvod te funkcije kad se $v(x)$ smatra konstantom, pa se izvod traži po formuli

$$(u^m)'_x = mu^{m-1} u'_x \,, \qquad (1)$$

zatim smatramo $u(x)$ konstantom pa se nađe izvod po formuli

$$(a^v)' = a^v \cdot v'_x \cdot \ln a \qquad (2)$$

i dobijene rezultate (1) i (2) saberemo.
Dokaz.

I način: Kako je

$$(\forall a > 0) \; a^m = e^{m \ln a} \,,$$

to je

$$u^v = e^{v \ln u} \qquad (u = u(x) > 0, \; v = v(x))$$

$$(u^v)'_x = e^{v \ln u} (v \ln u)'_x = u^v \left(\frac{1}{u} \cdot u'_x + v'_x \cdot \ln u \right) =$$

$$= vu^{v-1} u'_x + u^v v'_x \cdot \ln u \,,$$

š.t.d.
II način: Iz $y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u$,

odakle slijedi diferenciranjem

$$\frac{y'_x}{y} = v \cdot \frac{u'_x}{u} + v'_x \ln u$$

tj.

$$y'_x = y \left(v \frac{u'_x}{u} + v'_x \ln u \right) = vu^{v-1} \cdot u'_x + u^v v'_x \cdot \ln u.$$

266. Koristeći se rezultatom datim u predhodnom zadatku (ili na drugi način) odrediti izvode slijedećih funkcija:

a) $y_1 = x^x$; $y_2 = x^{x^x}$; $y_3 = (x^x)^x$

b) $y_2 = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$; $y_2 = (\sin x)^{\ln x}$; $y_3 = \sin(x^{\ln x})$.

Rješenje:

a) $y_1 = x^x (x>0) \Leftrightarrow \ln y_1 = x \ln x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y_1'}{y_1} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y_1' = x^x(1+\ln x);$$

$$y_2 = x^{x^x} (x>0) \Leftrightarrow \ln y_2 = x^x \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_2'}{y_2} = (x^x)' \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x(1+\ln x)\cdot \ln x + x^x \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_2' = x^{x^x+x-1}\left[1 + x \ln x (1+\ln x)\right];$$

$$y_3 = (x^x)^x = x^{x^2} (x>0) \Leftrightarrow \ln y_3 = x^2 \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y_3'}{y_3} = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \Rightarrow y_3' = x^{x^2+1}(1+2\ln x)$$

b) $y_1 = \sqrt[x]{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = u^u \left(x>0,\ u=\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

$$\ln y_1 = u \ln u \left(u = \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \frac{y_1'}{y_1} = u_x' \cdot \ln u + u \frac{u_x'}{u} \left(u_x' = -\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow y_1' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x - 1}{x^2};$$

$$y_2 = (\sin x)^{\ln x} \left(x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln y_2 = \ln x \cdot \ln \sin x \Rightarrow y_2' = y_2 \left(\frac{1}{x} \ln\sin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x\right)$$

$$\Rightarrow y_2' = (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln \sin x}{x} + \operatorname{ctg} x \ln x\right);$$

$$y_3 = \sin(x^{\ln x})\ (x > 0) \Rightarrow y' = \cos(x^{\ln x}) \cdot (x^{\ln x})'$$

te kako je

$$x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} \Rightarrow (x^{\ln x})' = e^{\ln^2 x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

izlazi

$$y' = \frac{2\ln x}{x} \cdot x^{\ln x} \cdot \cos x^{\ln x}.$$

267. Naći logaritamski izvod funkcija

$$a)\ y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad b)\ y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$

$$c)\ y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n}$$

$$d)\ y = (x + \sqrt{1+x^2})^n.$$

Rješenje:

a) Dakle je

$$\ln y = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x)\quad (|x|<1)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}.$$

b) Sada je

$$\ln y = 2\ln x - \ln(1-x) + \frac{1}{3}\ln\frac{3-x}{(3+x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3-x} - \frac{2}{3+x}\right)$$

$$= \frac{3[2(1-x)(9-x^2)+x(9-x^2)]-x(1-x)(9-x)}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

$$= \frac{54-36x+4x^2+x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}.$$

c) kako je

$$y = \prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^{\alpha_k} \Rightarrow \ln y = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \ln(x-a_k)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x-a_k}.$$

d) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n \Rightarrow \ln y = n\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{1+x^2} \qquad \left(\Leftarrow (\mathrm{Arsh}x)' = \frac{1}{1+x^2}\right).$$

§ 2.4. NEKE OSOBINE IZVODNE FUNKCIJE, LIJEVI I DESNI IZVOD – RAZNI ZADACI

268. Neka je

$$F(x) = f(g(x)).$$

Odredi izvod funkcije $F(x)$ u tački $x=0$, ako je:

a) $f(x)=x^2,\ g(x)=|x|$; b) $f(x)=|x|, g(x)=x^2$;

c) $f(x)=2x+|x|,\quad g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|.$

Rješenje. a) U ovom slučaju ne važi formula o izvodu složene funkcije

$$F'_x(x)=f'_g\cdot g'_x,\qquad (2)$$

pošto funkcija $g(x)=|x|$ nema izvod u tački $x=0$. To još ne znači da funkcija $F(x)$ nema izvod za $x=0$.
$\Rightarrow F(x)=f(g(x))=|x|^2=x^2 \quad (\forall x\in R)$

$\Rightarrow F'_x(x)=2x \Rightarrow F'_x(0)=0.$

b) U ovom slučaju ne može da se primjeni formula (2) pošto funkcija $f(x)=|x|$ nema izvod u tački $x=g(0)=0$. To još ne znači da funkcija $F(x)$ nema izvod u tački $x=0$; pošto je $F(x)=f(g(x))=|x^2|=x^2\ (\forall x\in R)$

$$\Rightarrow F'_x(x)=2x \Rightarrow F'_x(0)=0.$$

c) U ovom slučaju niti funkcija $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$ ima izvod u tački $x=0$, niti funkcija $f(x)=2x+|x|$ ima izvod u tački $x=g(0)=0$. Da li to znači da funkcija $F(x)$ nema izvod u tački $x=0$?
Pošto je

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ \frac{1}{3}x, & x\geq 0\end{cases}\qquad (3)$$

tj.

$$\Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 3x, & x\geq 0. \end{cases} \qquad (4).$$

Sada je prema (1), (3) i (4)

$$F(x)=f(g(x))=\begin{cases} x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$$

tj.

$$(\forall x\in R)\ F(x)=x \Rightarrow F'(0)=1.$$

Dakle, ako funkcija $f(x)$ nema izvod u tački $x=g(x_0)$ i funkcija $g(x)$ nema izvod u tački $x=x_0$, to još ne znači da funkcija $F(x)=f(g(x))$ nema izvod u tački $x=x_0$, već samo da se ne može primjeniti formula (2). Slično važi i za predhodna dva slučaja a) i b).

269. Odredi izvod funkcije

$$y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Zatim ispitaj neprekidnost dobijene funkcije.

Rješenje. Izlazi, prema pravilima za diferenciranje

$$y'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \Leftarrow x\neq 0.$$

Izvod u tački $x=0$ je

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

tj.

$$y'(0)=0 \quad (\Leftarrow 0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \Leftarrow |\sin\frac{1}{x}| \leq 1).$$

Dakle je

$$y'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0, \end{cases} \tag{2}$$

tj. funkcija ima izvod u svakoj tački, ali je $\underline{\lim}_{x\to 0} y'(x)=-1\neq \overline{\lim}_{x\to 0} y'(x)=1$, tako da je funkcija $y'(x)$ prekidna u tački $x=0$ (jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} y'(x)$).

Prema tome je funkcija $y'(x)$ definisana za svako x, ali je prekidna za $x=0$.

270. Za koje vrijednosti parametra α funkcija

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

a) neprekidna u tački $x=0$;
b) ima izvod u tački $x=0$;
c) ima neprekidan izvod u tački $x=0$?

Rješenje:

a) Kako je $(|\sin\frac{1}{x}| \leq 1 \Rightarrow)$

$$0 \leqq |x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}| \leqq |x|^{\alpha} \tag{1}$$

iz $(1) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0, \quad za\ \alpha>0, \tag{2}$$

tj. funkcija je prekidna u tački $x=0$ za $\alpha \leqq 0$ pošto tada ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Dakle, funkcija $f(x)$ je neprekidna za $\underline{\alpha > 0}$.

b) Količnik priraста funkcije i argumenta u tački $x=0$ je

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x},$$

te prema (1) postoji $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$, tj. funkcija ima izvod u tački $x=0$, ako je

$$\alpha - 1 > 0, \quad \text{tj. } \underline{\alpha > 1}.$$

ili

$$f'(0)=0, \quad \text{za } \alpha > 1. \qquad (3)$$

c) Po pravilima za diferenciranje je

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, \quad (x\neq 0) \qquad (4)$$

to je očito, prema (1)

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0) \Longleftrightarrow \alpha > 2.$$

Dakle prvi izvod je neprekidan u tački $x=0$, za $\alpha > 2$.

271. Odrediti lijevi $f'_-(x)$ i desni izvod $f'_+(x)$ funkcija

a) $f(x)=|x|$ u tački $x=0$;

b) $f(x) = [x]\sin \pi x$ u tački $x=n$ (n cio broj), gdje je $[x]=$ najveći cio broj $< x$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$

Po def

u tački $x=0$.

d) $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$ u tački $x=0$.

Rješenje:

a) Po definiciji je

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0_-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0_+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

$$(h\to 0- \Longleftrightarrow (h<0)\, h\to 0;\ h\to 0^+ \Longleftrightarrow (h>0)\, h\to 0).$$

Sada je

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

te je

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0_+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0_+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ (|\Delta x|=\Delta x>0)$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0_-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0_-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

tj. funkcija $|x|$ nema izvod u tački $x=0$, pošto je $f'_+(0)=$ $=1\neq f'_-(0)=-1$.

b) Za $\Delta x\in(-1,0)$ je $[n+\Delta x]=n-1$ te je tada $f(n+\Delta x)=$ $=(n-1)\sin\pi(n+\Delta x)$.
Kako je $f(n)=0$ $(\Leftarrow \sin n\pi=0)$

$$\Rightarrow f'_-(n) = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(n+\Delta x) - f(n)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{(n-1)\sin \pi (n+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_-} (-1)^n (n-1) \frac{\sin \pi \Delta x}{\Delta x}$$

$$= (-1)^n (n-1)\pi.$$

Za $\Delta x \in (0,1)$ je $[n+\Delta x] = n$ i $f(n+\Delta x) = n \sin \pi (n+\Delta x)$, te $\Rightarrow f'_+(n) = \lim\limits_{\Delta x \to 0_+} \dfrac{f(n+\Delta x) - f(n)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{n \sin \pi (n+\Delta x)}{\Delta x} = (-1)^n n \pi.$$

Dakle, funkcija $[x] \sin \pi x$ nema izvod ni u jednoj cjelobrojnoj tački, pošto su u cjelobrojnim tačkama lijevi i desni izvod različiti.

c) $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0_-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0_-} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

$$= \frac{1}{1 + \lim\limits_{x \to 0_-} e^{1/x}} = 1 \quad (\Leftarrow \lim_{x \to 0_-} e^{\frac{1}{x}} = 0;$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0.$$

Pošto je $f'_-(0) = 1 \neq f'_+(0) = 0$, izvod $f'(0)$ ne postoji.

d) Za $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$ je

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}\quad (\Leftarrow f(0)=0),$$

tj.

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot \operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}\quad (\Leftarrow x=\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{x^2})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$$

pa je:

$$f'_+(0)=1\ ;\quad f'_-(0)=-1$$

pošto je

$$\lim_{x\to 0\pm} e^{-\frac{x^2}{2}}=1;\quad \lim_{x\to 0\pm}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\ln e=1;\quad \lim_{x\to 0\pm}\operatorname{sgn}x=\pm 1.$$

272. Dokazati da kriva

a) $y=\sqrt[3]{x}$ ima tangentu u svakoj tački;

b) $y=\sqrt[3]{x^2}$ nema tangentu samo u tački $x=0$.

c) $y=\begin{cases} x+1, & x\leq 1\\ 3-ax^2, & x>1\end{cases}\qquad (a\in R)$

nema tangente u tački $x=1$.

Rješenje: a) Kako je $y=x^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\quad (\forall x\neq 0);$$

$$x=0\Rightarrow y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$

Prema tome funkcija $y=\sqrt[3]{x}$ ima konačan izvod u svakoj tački $x \neq 0$, ili beskonačan izvod $(x=0)$, tj. grafik te funkcije ima tangentu u svakoj tački. (U tački $x=0$ $y'=+\infty$, tj. kriva u toj točki ima vertikalnu tangentu).

b) Za $y=x^{2/3}$

$$\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 0);$$

$$x=0 \Rightarrow y'=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

tj.

$$y'_+(0)=+\infty, \quad y'_-(0)=-\infty.$$

Dakle, ne postoji izvod u tački $x=0$, te kriva u toj tački nema tangentu.

c) Da bi kriva imala tangentu u tački $x=1$, mora biti neprekidna za $x=1$. Kako je: $f(1)=1+1=2$;
$y(1-)=\lim\limits_{x\to 1-} y(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x+1)=2$; $y(1+)=\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(3-ax^2)=3-a$ to iz uslova neprekidnosti u tački $x=1$, slijedi.

$f(1)=f(1-)=f(1+) \Leftrightarrow 2=2=3-a \Leftrightarrow a=1$, tj. funkcija je neprekidna u tački $x=1$ samo ako je $a=1$.

Za $a=1$:

$$y=\begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-x^2, & x>1, \end{cases}$$

te je

$$y'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(3-x^2)-2}{x-1} = -2$$

$$y'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{(x+1)-2}{x-1} = 1.$$

Pošto je $y'_+(1) \neq y'(1)$, to kriva $y=y(x)$ nema tangentu u tački $x=1$.

273. Dokazati da je:

a) Izvod parne funkcije (ako postoji) neparna funkcija; a izvod neparne funkcije parna funkcija;

b) Izvod periodične funkcije periodična funkcija istog perioda.

Rješenje: a/ Neka je $f(x)$ parna (i $g(x)$ neparna funkcija),
tada je:

$$(\forall x \in E_x)\; f(-x) = f(x), (tj.\ g(-x) = -g(x).). \qquad (1)$$

Prema definiciji je:

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$

$$= \lim_{-h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-(-h)} \qquad (\Leftarrow (1))$$

$$= -f'(x) \qquad š.t.d.$$

(Za neparnu funkciju $g(x)$ slično se dokazuje, koristeći (1), da je $g'(-x) = g'(x)$).

b) Neka je $f(x)$ periodična funkcija sa periodom T (>0), tada je $(\forall x)\; f(x+T) = f(x)$. $\qquad (2)$

Neka postoji izvod $f'(x)$, tada je

$$f'(x+T) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (\Leftarrow (2)).$$

tj.

$$(\forall x) \quad f'(x+T) = f'(x). \tag{3}$$

Dakle, izvod periodične funkcije je periodična funkcija sa istim periodom.

274. Pri kakvim uslovima:

a) kvadratna parabola $y=ax^2+bx+c$ (jednačina $ax^2+bx+c=0$);

b) kubna parabola $y=x^3+px+q$ (jednačina $x^3+px+q=0$); ima za tangentu osu Ox (ima dvostruki korijen)?

Rješenje. a) U tački $x=\xi$ za koju je $y'(\xi)=0$, $y(\xi)=0$ kriva $y=y(x)$ ima za tangentu osu Ox (tj. jednačina $y(x)=0$ ima dvostruki korijen.

Za kvadratnu parabolu taj uslov je

$$\left.\begin{array}{l} y'(\xi)=2a\xi+b=0 \\ y(\xi)=a\xi^2+b\xi+c=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (a\neq 0)\ \xi=-\frac{b}{2a};\ 4ac-b^2=0$$

b) Za kubnu parabolu

$$\left.\begin{array}{l} y'(\xi)=3\xi^2+p=0 \\ y(\xi)=\xi^3+p\xi+q=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (p<0)\ \xi=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}};\ 4p^3+27q^2=0.$$

275. Koristeći se izvodima odrediti sume:

a) $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1};$ (1)

b) $Q_n(x) = 1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1};$ (2)

c) $S_n(x) = \frac{1}{2}\,tg\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,tg\,\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\,tg\,\frac{x}{2^n}.$ (3)

Pri izvođenju formule za $S_n(x)$ koristiti se identitetom:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ \ldots\ \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}, \qquad (4)$$

koji je lako dokazati (napr. matematičkom indukcijom).

Rješenje: a) Kako je:

$$G_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1},\ x \neq 1$$

$$G_n'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = P_n(x)$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},\ x \neq 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},\ x = 1.$$

b) Kako je:

$$x P_n(x) = x + 2x^2 + \ldots + nx^n = \sum_{i=1}^{n} i\,x^i$$

$$\Rightarrow [x P_n(x)]' = \sum_{i=1}^{n} i^2 x^{i-1} = Q_n(x),$$

to slijedi:

$$Q_n(x) = \left[x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\right]' =$$

$$= \frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2+2n-1)x^{n+1} + (n+1)^2 x^n - x - 1}{(x-1)^3} (x \neq 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), (x=1).$$

c) Kako $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow f_1'(x) = f_2'(x)$, i kako iz (4) $\Rightarrow \ln \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} =$

$$= \ln \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

to je:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\cos \frac{x}{2^k}\right)'}{\cos \frac{x}{2^k}} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} - \frac{\left(\sin \frac{x}{2^n}\right)'}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

tj.

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} tg \frac{x}{2^k} = ctg x - \frac{1}{2^n} ctg \frac{x}{2^n},$$

ili

$$S_n(x) = \frac{1}{2^n} ctg \frac{x}{2^n} - ctg x.$$

276. Neka je na skupu $\mathcal{F}$ realnih funkcija realne promjenljive definisana binarna operacija „o" na slijedeći način

$$(\forall f, g \in \mathcal{F}) \; f(x) \circ g(x) = f[g(x)]. \qquad (1)$$

Koristeći se definicijom (1) dokazati slijedeću tvrdnju:

a) Ako je $f(x) = \sqrt{1+x}$, tada se za konačnu potenciju $f^k(x)$, definisanu rekurentnom formulom

$$f^1(x) = f(x), \; f^k(x) = f^{k-1}(x) \circ f(x)$$
$$(k = 2, 3, \dots N); \qquad (2)$$

prvi izvod računa po formuli

$$[f^k(x)]'_x = \frac{1}{2^k}\ \frac{1}{f^k\ (x)} \cdot \frac{1}{f^{k-1}(x)} \cdots \frac{1}{f(x)}$$

$(x \neq 1;\ k=1, 2, \ldots, N).$ (3)

b) Naći izvod funkcije $\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+x}}}}_{N}$.

Rješenje: Za $k=1$

$$f^1(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow [f^1(x)]' = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{f(x)}\ (x \neq -1),$$

tj. formula (3) je tačna za $k=1$.
Pretpostavimo da je formula (3) tačna za neki prirodan broj $k\ (\in \{1, 2, \ldots, N-1\})$, tada je

$$[f^{k+1}(x)]' = [f^k(x) \circ f(x)]'_x$$

$$= \{f^k[f(x)]\}'_x$$

$$= \{f^k[f(x)]\}'_f \cdot f_1'(x) \quad (x \neq -1)$$

$$= \frac{1}{2^k}\ \frac{1}{f^k(f)} \cdot \frac{1}{f^{k-1}(f)} \cdots \frac{1}{f(f)} \cdot \frac{1}{2}\ \frac{1}{f(x)}$$

$$\left(f^i(f) = f^i[f(x)]\right)$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{f^{k+1}(x)} \cdot \frac{1}{f^k(x)} \cdots \frac{1}{f^2(x)} \cdot \frac{1}{f(x)},$$

(gdje je niz jednakosti dobijen na slijedeći način, prva i druga na osnovu rekurentne formule (2) i definicije (1) operacije „o", treća na osnovu formule za izvod složene funkcije; četvrta na osnovu induktivne pretpostavke (tj. na osnovu (3) kad se umjesto x stavi $f(x)$ i peta ponovo na osnovu definicije operacije „0"), tj. formula (3) tačna je za prirodan broj $k+1$, ako je tačna za neko $k\,(\in\{1,2,\ldots,N-1\})$, te pošto je tačna za $k=1$, tačna je po principu matematičke indukcije za svaku konačnu potenciju $f^k(x)$ $(k=1,2,\ldots;N)$.

b) kako je

$$\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+x}}}}_{N}=f^N(x),$$

prema formuli (3) je

$$\Big(\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+x}}}}_{N}\Big)'=\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{f^N(x)}\cdot\frac{1}{f^{N-1}(x)}\cdots$$

$$\cdots\frac{1}{f(x)}\qquad\qquad (x\neq-1).$$

277. Odredi prvi izvod funkcija:

$$a)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{tg^{2n}\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\sqrt{x}}{tg^{2n}\left(\frac{\pi x}{4}\right)+1}\qquad (x\geq 0),$$

$$b)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}\qquad (x>-2);$$

$$c)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}.$$

Rješenje. a) kako je

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{2n} = 0, \ |\alpha| < 1$$
$$= 1, \ |\alpha| = 1$$
$$= \infty \ |\alpha| > 1$$

to je (naša funkcija je definisana za $x \geq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} tg^{2n} \frac{\pi x}{4} = 0, \ x \in E_1 = [0,1) \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k-1, 4k+1) \ (\Leftarrow |tg \frac{\pi x}{4}| < 1, x \geq 0)$$

$$= 1, \ x \in E_2 = \{1\} \cup \{4k \pm 1 / k \in N\} \ (\Leftarrow tg \frac{\pi x}{4} = \pm 1, \ x \geq 0)$$

$$= \infty, \ x \in E_3 = \bigcup_{k=0}^{\infty} (4k+1, 4k+3) \ (\Leftarrow |tg \frac{\pi x}{4}| > 1, \ x \geq 0).$$

Prema tome se dobije

$$\lim_{n\to\infty} \frac{tg^{2n} \frac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{tg^{2n} \frac{\pi x}{4} + 1} = \sqrt{x} \quad , \ x \in E_1,$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}, \ x \in E_2,$$
$$= 1, \qquad x \in E_3$$

tj.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \ x \in E_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}, \ x \in E_2 \\ 1 \qquad , \ x \in E_3 . \end{cases}$$

Sada je:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}}, & x\in E_1\setminus\{0\}\\ 0, & x\in E_3\\ \frac{1}{4\sqrt{x}}, & x\in E_2\end{cases}$$

(Primjetiti da su $E_1\setminus\{0\}$ i E_3 otvoreni skupovi).

U tački $x=0$, postoji samo desni izvod

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0_+} f'(x)=\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty .$$

U tačkama $x\in E_2$ ne postoji izvod:
u tački $x=1\in E_2$ je

$$f(1+)=\lim_{\substack{x\to 1\\ (x\in E_3)}} f(x)=1$$

$$f(1-)=\lim_{\substack{x\to 1_+\\ (x\in E_1)}} f(x)\lim_{x\to 1+}\sqrt{x}=1$$

tj. $f(1+)=f(1-)=f(1)$, pa je funkcija neprekidna ali u toj tački nema izvod, pošto je

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ (x\in E_3)}} f'(x)=0\\ f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1_-\\ (x\in E_1)}} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1);$$

U tačkama $x=4k-1$ $(k\in N)$ je

$$f((4k-1)-) = \lim_{\substack{x\to(4k-1)-}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4k-1\\(x\in E_3)}} 1 = 1,$$

$$f((4k-1)+) = \lim_{x\to(4k-1)+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4k-1\\(x\in E_1)}} \sqrt{x} = \sqrt{4k-1}$$

$\Rightarrow f((4k-1)-) \neq f((4k-1)+)$ $(\forall k\in N)$,
tj. u tačkama $x=4k-1$ $(\in E_2, k\in N)$ funkcija je prekidna, ima prekid prve vrste, pošto u tim tačkama ima lijevu i desnu graničnu vrijednost ali one nisu jednake (i nisu jednake vrijednosti funkcije u toj tački $f(4k-1)=\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{4k-1})$);
u tačkama $x=4k+1$ $(\in E_2, k\in N)$ je

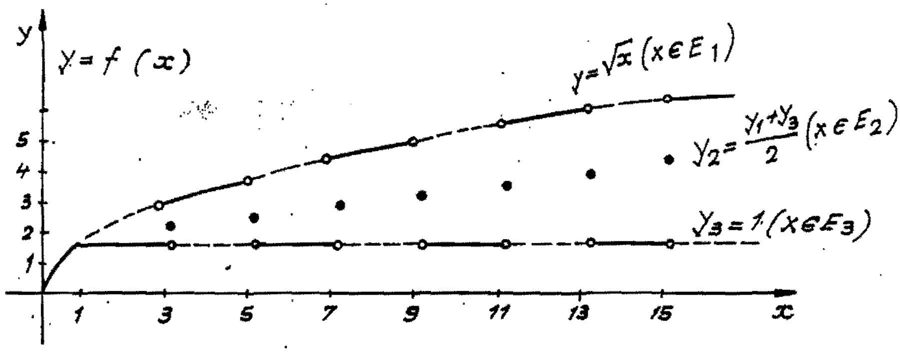
$$f((4k+1)-) = \lim_{x\to(4k+1)-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4k+1\\(x\in E_2)}} \sqrt{x} = \sqrt{4k+1};\ f((4k+1)+) = \lim_{x\to(4k+1)+} f(x)$$

$$= \lim_{\substack{x\to 4k+1\\(x\in E_3)}} 1 = 1,$$

$\Rightarrow f((4k+1)-) \neq f((4k+1)+)$, tj. i u tačkama $x=4k+1$ $(\in E_2, k\in N)$ funkcija ima prekid prve vrste. Dakle, u tačkama $x\in E_2$ funkcija ima prekid (prve vrste), te u tim tačkama nema izvod.
Primjeti da je

$$(\forall x\in E_2)\quad f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

i nacrtaj grafik funkcije.



(Napomena: Neispunjeni kružići označavaju tačke koje ne pripadaju grafiku funkcije).

b) Sad je $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(2^n + x^n)$ $(x > -2)$, i $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Kako je očito $2^n + x^n \equiv 2^n[1 + (\frac{x}{2})^n] \equiv x^n[1 + (\frac{x}{2})^{-n}]$, to se $f_n(x)$ može predstaviti na slijedeća dva načina:

$$\left.\begin{aligned} f_n(x) &= \ln 2 + \frac{1}{n}\ln\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right] \\ &= \ln x + \frac{1}{n}\ln\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\right], \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Vodeći računa o tome da je $(x > -2) \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = 0, \quad x \in (-2, 2)$$

$$= 1, \quad x = 2$$

$$= \infty, \quad x \in (2, +\infty),$$

te da je logaritamska funkcija $\ln t$ $(t > 0)$ neprekidna, polazeći od prve od formula (1) za $x \in (-2, 2)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \ln 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$$

$$= \ln 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left[1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$$

$$= \ln 2 + 0 \cdot \ln 1 = \ln 2,$$

tj. slično

za $x=2$: $\lim\limits_{n\to 0} f_n(x) = \ln 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left[1+\lim\limits_{0\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right] = \ln 2$;

za $x \in (2,+\infty)$, polazeći od druge formule (1)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \ln x + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left[1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\right]$$

$$= \ln x + 0 . \ln(1+0) = \ln x.$$

Prema tome je

$$f(x) = \begin{cases} \ln 2, & x \in (-2,2] \\ \ln x, & x \in (2,+\infty). \end{cases} \qquad (2)$$

Iz (2) je prema formalnim pravilima za diferenciranje

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2,2) \\ \frac{1}{x}, & x \in (2,+\infty). \end{cases} \qquad (3)$$

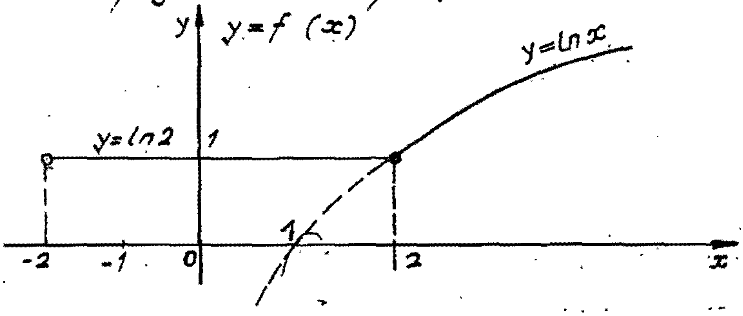
Za tačku $x=2$ je

$$f'_+(2) = \frac{1}{2} \neq f'_-(2) = 0,$$

te funkcija nema izvod u toj tački, mada je neprekidna u toj tački, što slijedi iz

$$f(2+) = \lim_{x\to 2+} \ln x = \ln 2 = f(2-) = f(2).$$

Nacrtaj grafik funkcije $y=f(x)$!



c) Kako je:

$$|2\sin x| < 1 \Leftrightarrow |\sin x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k^{(1)} = E^{(1)}$$

$$= 1 \Leftrightarrow |\sin x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{(6k \pm 1)\frac{\pi}{6} \,/\, k \in Z\right\} = E^{(3)}$$

$$> 1 \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k^{(2)} = E^{(2)}$$

gdje je $(Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\})$,

$E_0^{(1)} = (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $E_k^{(1)} = E_0^{(1)} + k\pi = ((6k-1)\frac{\pi}{6}, (6k+1)\frac{\pi}{6})$,

$E_0^{(2)} = (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, $E_k^{(2)} = E_0^{(1)} + k\pi = ((6k+1)\frac{\pi}{6}, (k+5)\frac{\pi}{6})$;

dobije se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$$

$$= x, \text{ za } x \in E^{(1)} \quad (\Leftarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ (x \in E^{(1)})}} (2\sin x)^{2n} = 0)$$

$$= \frac{x}{2}, \text{ za } x \in E^{(3)} \quad (\Leftarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ (x \in E^{(3)})}} (2\sin x)^{2n} = 1)$$

$$= 0, \text{ za } x \in E^{(2)} \quad (\Leftarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ (x\in E^{(2)})}} (2\sin x)^{2n} = \infty).$$

Dakle, je

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \left((6k-1)\frac{\pi}{6}; (6k+1)\frac{\pi}{6}\right) = E^{(1)} \\ \frac{x}{2}, & x \in \left\{ (6k\pm 1)\frac{\pi}{6} \mid k \in Z \right\} = E^{(3)} \\ 0, & x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left((6k\pm 1)\frac{\pi}{6}, (6k+5)\frac{\pi}{6}\right) = E^{(2)} \end{cases}$$

te slijedi

$$f'(x) \begin{cases} 1, & x \in E^{(1)} \\ 0, & x \in E^{(2)}, \end{cases}$$

dok u tačkama $x \in E^{(3)}$ funkcija nema izvod pošto je prekidna u tim tačkama!

Primjedba. Primjeti da se data funkcija može pretstaviti kao proizvod:

$$f(x) = x \cdot p(x),$$

gdje je $p(x)$ periodična funkcija sa osnovnim periodom $T = \pi$ koja je za $x \in [0, \pi]$ definisana na slijedeći način:

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi) \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \\ 0, & x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \end{cases}$$

$(p(x+\pi)=p(x)\quad,\quad \forall x\in R)$.
Iskoristiti tu osobinu, te nacrtati grafik funkcije $y=f(x)$.

§ 2.5. IZVODI VIŠEG REDA

278.1.* 1) Naći drugi izvod funkcija: ✓

1° $y=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$;

2° $y=-\frac{1}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$; ✓

3° Pokazati da funkcija $y=x+\sin 2x$ zadovoljava jednačinu $y''+4y-4x=0$.

Rješenje.

1° $y'=\frac{x}{2}(2\ln x-3)+\frac{1}{4}x^2\left(\frac{2}{x}\right)=x(\ln x-1)$,

$y''=(\ln x-1)+x\cdot\frac{1}{x}$, $y''=\ln x$.

2° $y'=-\frac{1}{9}\sin 3x-\frac{1}{9}x\cos 3x\cdot 3+\frac{2}{27}\sin 3x\cdot 3=$

$=\frac{1}{9}\sin 3x-\ \ \cos 3x$,

$y''=\frac{1}{9}\cos 3x\cdot 3-\cos 3x+x\cdot\sin 3x\cdot 3$,

$y''=3x\sin 3x$.

3° $y'=1+2\cos 2x$, $y''=-4\sin 2x$. Zamjenom jednačinu $y''+4y-4x=0$ dobit ćemo

$-4\sin 2x+4(x+\sin 2x)-4x\equiv 0$.

2) Naći treći izvod funkcija:

1° $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$,

$2^\circ \; y = sh^2 x$

Rješenje.

$1^\circ \; y' = \frac{\ln x}{x}, \quad y'' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}, \quad y'' = \frac{1-\ln x}{x^2},$

$$y''' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$$

$2^\circ \; y' = 2\,sh x \; ch x = sh 2x,$

$y'' = (y')' = 2\,ch\,2x,$

$y''' = (y'')' = 4\,sh\,2x.$

3) Nađi n-ti izvod funkcija:

$1^\circ \; y = e^{kx};$

$2^\circ \; y = x^k \sqrt{x}.$

Rješenje.

$1^\circ \; y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}; \; \ldots, \; y^{(n)} = k^n e^{kx},$

$$2^\circ \; y' = kx^{k-1}\sqrt{x} + x^k \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(2k+1)x^{k-1}\sqrt{x}}{2},$$

$$y'' = \frac{(2k-1)(2k+1)}{2^2}\, x^{k-2}\sqrt{x},$$

$$y''' = \frac{(2k-3)(2k-1)(2k+1)}{2^3}\, x^{k-3}\sqrt{x},$$

$$y^{(IV)} = \frac{(2k-5)(2k-3)(2k-1)(2k+1)}{2^4} x^{k-4}\sqrt{x},$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{[2(k-n)+1]\cdots(2k-3)\cdot(2k-1)(2k+1)}{2^n} x^{k-n}\sqrt{x}$$

za $k>n$;

$$y^{(n)} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-3)(2n-1)(2n+1)}{2^n}\sqrt{x} \quad \text{za}$$

$k=n$;

$y^{(n)}=0$ za $n>k$.

278.2. Dokazati slijedeće formule:

a) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (\forall \alpha \in R)$

$= n!, \; n=\alpha \in N;$

$= 0, \; n>\alpha \in N;$

b) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a>0); \; (e^x)^{(n)} = e^x;$

c) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right);$

$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right);$

d) $\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!\, b^n}{(a+bx)^{n+1}} \qquad \left(x \neq -\frac{a}{b}\right);$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{b^n}{(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}$;

$\left(x \neq \frac{-b}{a}\right)$

f) $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}\quad (u^{(0)}=u;\ v^{(0)}=v).$

Rješenje.

Date formule lako se provjeravaju indukcijom:

a) Pošto je $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

formula je tačna za $n=1$.

Pretpostavimo li da je formula tačna za neki prirodan broj n $(\forall\alpha\in R)$, tada na osnovu definicije viših izvoda i te pretpostavke slijedi:

$$(x^{\alpha})^{(n+1)}=\left[(x^{\alpha})^{(n)}\right]'=\left[\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\right]'$$

$$=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-(n+1)},$$

tj. formula je tačna i za $n+1$, te je na osnovu pokazanog, po principu potpune indukcije, tačne za $\forall n\in N$.

Ako je $n=\alpha$, tada je

$$(x^{n})^{(n)}=(n-1)\ldots(n-n+1)x^{0}$$
$$=n!,$$

te je očito

$$(x^{n})^{(n+k)}=0,\ \text{za } k=1,2,\ldots$$

b) Za $n=1$ formula je tačna: $(a^{x})'=a^{x}\ln a$. Iz pretpostavke da je tačna za neko $n(\in N)$ slijedi $(a^{x})^{(n+1)}=\left[(a^{x})^{(n)}\right]'=(a^{x}\ln^{n}a)'=a^{x}\ln a.\ \ln^{n}a$ ili tačno je i za $n+1$, tj. tačno je za $\forall n\in N$.

c) $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, tj. formula je tačna za $n=1$. Iz pretpostavke da je tačna za neko $n(\in N)$ (slijedi da je tačno i za $n+1$)

$$\Rightarrow (\sin x)^{(n+1)} = [(\sin x)^{(n)}]' = [\sin(x+n)\cdot\frac{\pi}{2})] =$$

$$= \sin[x+(n+1)\frac{\pi}{2}]$$

te je po p.m.i. tačna za $\forall n\in N$.

Drugu od formula (pod c)) sad lako dokazujemo polazeći od predhodnog rezultata i indentiteta $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}+x)$

$$\Rightarrow (\cos x)^{(n)} = [\sin(\frac{\pi}{2}+x)]^{(n)}$$

$$= \sin(\frac{\pi}{2}+x+n\frac{\pi}{2})$$

$$= \cos(x+n\frac{\pi}{2}),\ \text{š.t.d.}$$

Rezultati d), e), f) isto tako se lako provjeravaju p.m.i. (te se ostavlja studentu da ih provjeri).
Rezultat pod f) naziva se Leibnizovom formulom.

278.3. Za funkcije:

a) $y = 2+3x+5x^2-4x^3$: odredi y^{IV};

b) $y = F(x^2)$: odredi y''';

c) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}$: odredi y'';

d) $y = x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$: odredi y^{IV}.

Rješenje. a) Izlazi

$$y' = 3+10x-12x^2 \Rightarrow y'' = (y')' = 10-24x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''' = (y'')' = -24 \Rightarrow y^{IV} = 0.$$

b) kako je $y = F(u)$ gdje je $u = x^2 \Rightarrow$ (prema formuli za izvod složene funkcije)

$$y' = F'_u(u)u'_x = F'_{x^2}(x^2)\cdot 2x \quad (\Leftarrow u' = 2x);$$

$$\Rightarrow y'' = (F'_u(u)\cdot u'_x)' = F''_u(u)u'^2_x + F'_u \cdot u''_x \qquad (1)$$

$$= 4x^2 F''_{x^2}(x^2) + 2F'_{x^2}(x^2) \quad (\Leftarrow u''_x = 2);$$

$$\Rightarrow y''' = (4x^2F''_{x^2} + 2F'_{x^2})' = 4x^2 F'''_{x^2}\cdot 2x + 8x F''_{x^2} + 2F''_{x^2}\cdot$$

$$\cdot 2x$$

$$= 8x^3 F'''_{x^2} + 12x F''_{x^2}.$$

Ako se dosljedno koristi ideja o diferenciranju složene funkcije, tada polazeći od (1), izlazi

$$y''' = [F(u)]'''_x \equiv [F''_u(u)u'^2_x + F'_u(u)u''_x]'_x$$

$$= F'''_u \cdot u'^3_x + 3F''_u \cdot u'_x u''_x + F'_u \cdot u'''_x.$$

c) Ako stavimo $u = a + bx$, tada treba derivirati složenu funkciju $y = u^{-\frac{1}{3}}$ $(u = a + bx)$

$$\Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{3}b\,u^{-\frac{4}{3}} \quad (\Leftarrow u'_x = b,\ y'_u = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}});$$

$$\Rightarrow y''_x = (y'_x)' = -\frac{1}{3}b(u^{-\frac{4}{3}})'_x = -\frac{1}{3}b(-\frac{4}{3})u^{-\frac{7}{3}}b,$$

tj. $y''_x = \dfrac{4b^2}{9}(a+bx)^{-7/3}$.

d) Pošto je $(\text{Arsh}x)' = (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 2\sqrt{x^2+1},$$

$$\Rightarrow y'' = 2\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\; 2x = 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Rightarrow y''' = 2(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + 2x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$= 2(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} - 2x^2(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} = 2(x^2+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\Rightarrow y^{IV} = 2\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = \frac{-6x}{(x^2+1)^{5/2}}.$$

279. Odredi n-ti izvod funkcija

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$ $(a \neq 0)$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

c) $f(x) = e^{ax}\sin bx$, $(|a|+|b| \neq 0)$;

d) $f(x) = (x^2+x+1)\cdot\cos x$.

Rješenje: a) Razložimo datu funkciju na elementarne razlomke

$$\frac{1}{x^2-a} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \iff 1 \equiv (A+B)x + (A-B)a$$

$$\iff A+B = 0 \wedge A-B = \frac{1}{a} \iff A = \frac{1}{2a},\; B = -\frac{1}{2a}.$$

Dakle, je

$$f(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{1}{2a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

(Za posljednju jednakost vidi zadatak 278.2.d)).

b) $y=f(x)=\operatorname{arctg}x \Rightarrow \operatorname{tg}y=x$, te je

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Diferencirajmo y' još jednom po x (vodeći računa o tome da je y funkcija od x), dobije se

$$y''=\left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'$$

$$=\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2 y=\cos^2 y\,\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Na isti način, diferenciranjem po x još jednom, ima se $y'''=\left[-2\cos y\sin y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2 y\cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]y'$

$$=2\cos^3 y\cdot\cos\left(3y+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^3 y\,\sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Upoređujući y', y''' da se naslutiti formula

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

(prevesti u funkciju od x), koju je lako provjeriti matematičkom indukcijom.

c) Za $f(x)=e^{ax}\sin bx \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx \quad (|a|+|b|\neq 0)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\;e^{ax}\sin(bx+\varphi) \qquad (1)$$

gdje je φ određen iz uslova

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Uzastopnim diferenciranjem (iz (1)) lako se ustanovljava opšta formula

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$$

koju samo treba provjeriti matematičkom indukcijom.

d) Data funkcija može biti zapisana u obliku

$$f=u\cdot v;\ u=x^2+x+1,\ v=\cos x.$$

Kako je

$$u'=2x+1,\ u''=2,\ u^{(k)}=0\ (k>2);\ v^{(k)}=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

to je prema Leibnizovoj formuli (za $n\geq 2$)

$$f^{(n)}(x)=(x^2+x+1)\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+n(2x+1)\cdot\cos\left(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\,n(n-1)\cos\left(x+(n-2)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(x^2+x+1+n-n^2)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n(2x+1)$$

$$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Prema dobijenoj formuli je napr.:

$$f^{(5)}(x)=(19-x-x^2)\sin x+5(2x+1)\cos x$$

odredi f'' i $f^{(7)}$

280. odrediti n-ti izvod $y^{(n)}(0)$ funkcije $y=f(x)$ u tački $x=0$, ako je

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x^2-3x+1}$;

b) $f(x)=\operatorname{Arctg}x$;

c) $f(x)=\arcsin x$;

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)(1+x)}$.

Rješenje: a) Primjeti da se data funkcija može rastaviti na elementarne razlomke, tj. važi identitet

$$f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}.$$

Sad je: (vidi zadatak 278.2.d))

$$f^{(n)}(x)=\frac{3(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{2(-1)^n n!}{(x-\frac{1}{2})^{n+1}},$$

ili, za $x=0$,

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=(2^{n+2}-3)n!.$$

b) Kako je $y=\operatorname{Arctg}x=\operatorname{arctg}x+k\pi$, $k\in Z=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$; to je

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=(\operatorname{arctg}x)^{(n)}$$

$$=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin\left[n\cdot\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (1)$$

(Za poslednju jednakost viditi zadatak 279b)

Kako je za $x=0$: $y(0)=\mathrm{Actg}\,0=\mathrm{arctg}\,0+k\pi\ (k\in Z)$,

$$=>y^{(n)}(0)=(n-1)!\cos^n(k\pi)\sin[n\cdot(k\pi+\frac{\pi}{2})]$$

$$=(n-1)!\sin(nk\pi+n\frac{\pi}{2})\cos(nk\pi)$$

$$=(n-1)!\frac{1}{2}\cdot[\sin(2nk\pi+n\frac{\pi}{2})+\sin(n\frac{\pi}{2})]$$

$$=(n-1)!\sin(n\frac{\pi}{2}), \qquad (2)$$

gdje je gornji niz jednakosti dobijen na slijedeći način: prva iz (1) za $y(0)=k\pi$, druga na osnovu identiteta $\cos^n k\pi=\cos nk\pi$, treća prema adicionoj teoremi za sinus i četvrta zbog $\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$. Pošto je $\sin(n\frac{\pi}{2})=0$ za $n=2m$, a za $n=2m-1$ $\sin(\frac{n\pi}{2})$ $=\sin[(2m-1)\frac{\pi}{2}]=\sin(m\pi-\frac{\pi}{2})=(-1)^{m+1}(\forall m\in N)$, to iz (2) slijedi

$y^{(2m)}(0)=0$, $y^{(2m-1)}(0)=(2m-2)!!\,(-1)^{m+1}$ ($(\forall m\in N)$ tj.

$y''(0)=y^{IV}(0)=\ldots=y^{(2m)}=\ldots=0$

ili svi parni izvodi funkcije $\mathrm{Arctg}\,x$ (ili $\mathrm{arctg}\,x$) su jednaki nuli, dok se neparni izvodi računaju prema formuli

$$y^{(2m+1)}(0)=(2m)!\,(-1)^m, \qquad (3)$$

ili prema rekurentnoj formuli

$$y'(0)=-4,\ y''(0)=0,\ y^{(n+2)}(0)=-n(n+1)\,y^{(n)}(0),\ n\in N, \qquad (4)$$

što se lako provjerava.

c) Rez. $y^{2m}(0)=0, y^{(2m-1)}(0)=[(2m-1)!!]^2$, $(\forall m\in N)$.

d) Zapišimo zadanu funkciju u obliku

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

gdje je

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \text{ tj. } u^{(k)}(x)=\frac{(2k-1)!!}{2^k(1-x)^k\cdot\sqrt{1-x}}$$

(prema zadatku 278.2. e))

$$v(x)=x, \text{ tj. } v'(x)=1,\ v^{(k)}(x)=0 \text{ za } \geqslant 2.$$

Sad je, prema Leibmovoj formuli $(n>1)$

$$f^{(n)}(x)=u^{(n)}(x).v(x)+n\,u^{(n-1)}(x)\,v'(x)$$

$$=\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(1-x)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{(2n-1)x}{2(1-x)}+n\right),$$

tj. za $x=0$, se dobije

$$f^{(n)}(0)=\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}} \qquad (n>1).$$

e) Funkcija se predstavi kao zbir elementarnih razlomaka:

$$f(x)=\frac{2}{3}\,\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1},$$

te je

$$f^{(n)}(x)=\frac{2}{3}\,\frac{(-1)^n\,n!\,2^n}{(2x-1)^{n+1}}-\frac{1}{3}\,\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

tj. za $x=0$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{3}\,[2^{n+1}+(-1)^n].$$

§ 2.6. IZVODI PRVOG I VIŠEG REDA PARAMETARSKI ZADANE FUNKCIJE

281.* Odrediti vrijednost izvoda y'_x funkcije zadane jednačinama

$$x = 2\cos t - \cos 2t$$
$$y = 2\sin t - \sin 2t$$

za $t = \frac{\pi}{6}$.

Rješenje.

Funkcija $y(x)$ zadana je parametarskim jednačinama, pa izvod y'_x tražimo pomoću obrasca

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (x'_t \neq 0).$$

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2},$$

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}.$$

Sada možemo pisati

$$y'_x = \frac{4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}}{4\sin t\,\cos\frac{3t}{2}}, \quad y'_x = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}, \; y'_x = 1 \text{ za } t = \frac{\pi}{6}.$$

282. Odredi izvod y'_x slijedećih funkcija zadanih parametarski:

a) $x = \sin^2 t, \; y = \cos^2 t$;

b) $x = a\cos t, \; y = b\sin t, \; t \in [0, 2\pi]$;

c) $x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t)$;

d) $x = -1 + 2t - t^2, \; y = 2 - 3t + t^3$;

čemu je u slučaju d) ravno y'_x za $x=0$ i za $x=-1$, te u kojoj tački $M(x,y)$ je $y'(x)=0$?

Rješenje. Za parametarski zadane funkcije $x=x(t)$ i $y=y(t)$ je

$$y'_x=\frac{\dot y}{\dot x} \text{ (gdje je } \dot x = x'_t \neq 0 \text{ i } \dot y = y'_t). \quad (*)$$

Prema tome je

$$a)\ y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{-2\sin t\cos t}{2\cos t\sin t}=-1;$$

$$b)\ y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{b\cdot\cos t}{-a\cdot\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\ (t\neq 0;\pi);$$

$$c)\ y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\ (t\neq 2k\pi,\ k=0,1,2,\ldots).$$

d) Kako je

$$\dot x=2(1-t),\ \dot y=-3(1-t^2)$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{\dot y}{\dot x}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1-t}=-\frac{3}{2}(1+t)\ (t\neq 1); \qquad (1)$$

$$x=0 \Leftrightarrow -1+2t-t^2=-(1-t)^2=0, \text{ tj. } t=1,$$

te je za $x=0$: $y'_x(0)=y'_x|_{t=1}=-3$;

$$x=-1 \Leftrightarrow -1=-1+2t-t^2 \Leftrightarrow t=0 \vee t=2,$$

te je

$$\left.\begin{aligned} y'_x(-1) &= -\frac{3}{2}, \text{ za } t=0\ (x(0)=-1) \\ &= -\frac{9}{2}, \text{ za } t=2\ (x(2)=-1) \end{aligned}\right\};\qquad (2)$$

$$y'_x = 0 \Longleftrightarrow t=-1,$$

tj. $y'_x = 0$ u tački $M(-4,4)$.

Pitanje: Da li postoji y' u tački $x=0$ ili π ub), tj. za $x=2k\pi$ uc)?

Primjedba:

Kod izvođenja formule (1) za y'_x primjeti da se za $t=1$ ne može direktno primjeniti formula (*) pošto je $\dot{x}(1)=0$.

To dovodi u vezu sa primjedbom u zadatku 276. tj. važi

$$y'(a) = \lim_{x\to a} y'(x)$$

ako granična vrijednost na desnoj strani postoji, (tj. ako je funkcija neprekidna (i definisana) u okolini $[a-h, a+h]$ $(h>0)$ tačke $x=a$ i ima izvod za $x\in(a-h,a)\cup(a,a+h)$; za dokaz se koristi teorema o srednjoj vrijednosti).

U našem slučaju su $x=x(t)$ neprekidne funkcije u okolini tačke $t=1$ i imaju izvod u okolini tačke $t=1$, (tj. $x=x(1)=0$, $\dot{x}(1+)=0=x(1-)$).

$$\Rightarrow y'_-(0) = \lim_{x\to 0-} y'(x) = \lim_{t\to 1} y'[x(t)] = \lim_{t\to 1}\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

tj. u tački $x=0$ formula (1) daje lijevi izvod za krivu $y=y\ (x)$, pošto funkcije $y=y(x)$ nije definisana za $x>0$.

Rezultat dobijen u(2) $(x(0)=-1,\ x(2)=-1)$ znači da parametarske jednačine $x=x\ (t), y=y\ (t)$ definišu višeznačnu funkciju.

Zaista,
$x=-1+2t-t^2\ (t\in R) \Longleftrightarrow x=-(t-1)^2 \Longleftrightarrow t=\pm\sqrt{-x}+1, (x\leq 0)$,
što zamjenom u $y=y\ (t)$ daje:

$$y=2-3t+t^3=(t-1)^2\ (t+2) \Longleftrightarrow y=-x\left(\pm\sqrt{-x}+3\right)$$

tj.

$$(t\in R)\ \left.\begin{array}{l} x=-1+2t-t^2 \\ y=2-3t+t^3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1\ (x)=-x\sqrt{-x}-3x \\ y_2\ (x)=x\sqrt{-x}-3x \end{array}\right. (x\leq 0)$$

283. Odredi prvi izvod y'_x, ako je kriva zadana u polarnim koordinatama:
a) $r=a\varphi$ (Arhimedova spirala);
b) $r=a\ (1+\cos\varphi)$ (Kardioida);
c) $r=a\sin 2\varphi$ (lemniskata);

$$\text{gdje je } r=\sqrt{x^2+y^2},\quad tg\,\varphi=\frac{y}{x}. \qquad (*)$$

Rješenje. Ako je kriva zadana u polarnim koordinatama $r=r\ (\varphi)$ $(\varphi\in[\alpha,\beta])$, tada je lako preći na parametarske jednačine, pošto je.

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\varphi=r\ (\varphi)\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi=r\ (\varphi)\sin\varphi \end{array} (\varphi\in[\alpha,\beta])\right\} \qquad (1)$$

što predstavlja parametarske jednačine krive $y=y(x)$.

a) Kako su, prema (1), parametarske jednačine:

$$x=a\varphi\cos\varphi,\ y=a\varphi\sin\varphi \qquad (1)$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}=tg\,(\varphi+arctg\,\varphi). \qquad (2)$$

b) Parametarske jednačine su, prema (1)

$$y=r\sin\varphi=a\,(1+\cos\varphi)\sin\varphi=\frac{a}{2}\,(2\sin\varphi+\sin 2\varphi),$$

$$x=r\cos\varphi=a\,(1+\cos\varphi)\cos\varphi=\frac{a}{2}(2\cos\varphi+\cos 2\varphi+1),$$

gdje je $\varphi\in[0,2\pi)$;

$$\Rightarrow y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{\cos\varphi+\cos 2\varphi}{-(\sin\varphi+\sin 2\varphi)}=-\,ctg\,\frac{3\varphi}{2}\ (\varphi\neq 0;\ \frac{2\pi}{3}).$$

c) Prema (1), parametarske jednačine su

$$y=r\sin\varphi=a\sin 2\varphi\sin\varphi$$

$$x=r\cos\varphi=a\sin 2\varphi\cos\varphi$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{2\cos 2\varphi\sin\varphi+\sin 2\varphi\cos\varphi}{2\cos 2\varphi\cos\varphi-\sin 2\varphi\sin\varphi}$$

$$=\frac{tg\,\varphi+\frac{1}{2}\,tg\,2\varphi}{1-\frac{1}{2}\,tg\,2\varphi\,tg\,\varphi}$$

$$=tg\,[\varphi+arctg\,(\tfrac{1}{2}\,tg\,2\varphi)],$$

gdje je posljednja jednakost dobijena prema adicionoj teoremi za tanges pošto je

$tg\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}tg\,2\varphi\right)\right]=\frac{1}{2}tg\,2\varphi$, (tj. $tg(\operatorname{arctg} x)=$ $=x$; - primjeniti istovremeno, u opštem slučaju, ne važi jednakost $\operatorname{arctg}(tg\,\varphi)=\varphi$ već je $\operatorname{arctg}(tg\,\varphi)=\varphi-k\pi$

$\Leftarrow -\frac{\pi}{2}+k\pi<\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi$ za $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, što je

lako provjeriti vodeći računa o tome da je: $(\forall x\in R)$ $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$).

284. Neka je dat par neprekidnih funkcija

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

koje su definisane na intervalu (ili segmentu) $<a,b>$ i neka funkcija $x=x(t)$, na tom razmaku $<a,b>$, zadovoljava uslove za egzistenciju inverzne funkcije $t=x^{-1}(x)$ (tj. $x^{-1}(x(t))=t$ za $\forall t\in<a,b>$), tada jednačina (1) definišu neprekidnu funkciju $y=y(x)$ na razmaku $<a,b>$.

Za tako (parametarski) definisanu neprekidnu funkciju važe slijedeće tvrdnje:

Ako postoje uzastopni izvodi (po t)

$\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y},\dddot{x},\dddot{y},\ldots$, za $t\in<a,b>$ $\quad(\dot{x}\neq0)$,

tada postoje uzastopni izvodi funkcije $y=y(x)$ koji se računaju po formulama:

$$y'_x(x)=\frac{\dot{y}}{\dot{x}};\quad y''_x=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3};\quad y'''=\frac{\dot{x}^2\dddot{y}-\dot{x}\dot{y}\dddot{x}-3\dot{x}\ddot{x}\ddot{y}+3\ddot{x}^2\dot{y}}{\dot{x}^5}$$

Dokaz (uputstvo). Iskoristiti činjenicu da je $y=y(x^{-1}(x))$ slož. f-ja.

285. Pokazati, da funkcija $y=y(x)$ definisana sis-

temom jednačina

$$x = 2t + |t|, \; y = 5t^2 + 4t \cdot |t|$$

ima izvod u tački $x = x(0) = 0$, iako funkcija $x = x(t)$ nema izvod u tački $t = 0$.

Rješenje. Očito je

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t - t = t, & t<0 \\ &= 2t + t = 3t, & t>0 \\ &= 0 & ,t=0 \end{aligned}\right\}, \quad t \in R. \qquad (1)$$

Na isti način je

$$\left.\begin{aligned} y &= 5t^2 + 4t(-t) = t^2, & t<0 \\ &= 5t^2 + 4t \cdot t = 9t^2, & t>0 \\ &= 0 & t=0 \end{aligned}\right\}, \quad \forall t \in R. \qquad (2)$$

Iz (1) slijedi $\dot{x}(t) = 1$ za $t<0$; $\dot{x}(t) = 3$ za $t>0$, ili $\Rightarrow \dot{x}_-(0) = 1 \neq \dot{x}_+(0) = 3$, tj. ne postoji $\dot{x}(0)$.

Primjeti da je, prema (1), $x = x(t)$ strogo monotona funkcija, te ima inverznu funkciju, tj.

$$\left.\begin{aligned} t = x^{-1}(x) &= x, & x<0 \\ &= 0, & x=0 \\ &= \frac{x}{3}, & x>0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sad, zamjenom iz (3) u (2), slijedi

$$y = y\ (t) = y\left[x^{-1}(x)\right] = t^2 = x^2;\ t<0,\ \text{tj.}\ x<0,$$

$$=0 \qquad ;\ t=0,\ \text{tj.}\ x=0,$$

$$=9t^2 = x^2,\ t>0,\ \text{tj.}\ x>0,$$

tj.

$$y(x) = x^2,\ \forall x \in R.$$

Dakle, je

$$y'(x) = 2x,\ \forall x \in R;\ \text{tj.}\ y'(0)=0;$$

ili: funkcija $y=y(x)$ ($\Leftrightarrow x=x(t),\ y=y(t)$)

ima izvod $y'(0)$; (primjeti da $y=y(x)$ ima izvod bilo kog reda u tački $x=x(0)=0$: $y''(0)=2$; $y^{(n)}(0)=0,\ n>2$, iako funkcija $x=x(t)$ nema izvod u tački $t=0$).

Dovodeći to u vezu sa predhodnim zadatkom - primijeti da su navedeni uslovi za egzistenciju izvoda parametarski zadane funkcije, tj. da su uslovi pod kojima su izvedene formule za izvode parametarski zadane funkcije samo dovoljni, ali ne i potrebni.

286. Date su funkcije

$$x = 2t - t^2,\ y = t^2 - 1,\ t \in (-\infty, \infty). \qquad (1)$$

a) Naći razmake monotonosti funkcije $x=x(t)$, te na osnovu toga ustanoviti koliko funkcija $y=y(x)$ definišu jednačine (1); zatim odrediti analitički izraz za te funkcije.

b) Odrediti izvode $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ za tako definisane funkcije u onim tačkama u kojima svaki od izvoda postoji.

Rješenje. Kako je

$$(\forall t_1, t_2 \in R)\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = (t_2 - t_1)[2-(t_2+t_1)]$$

$$= \Delta t[(1-t_2)+(1-t_1)], \quad (\Delta t = t_2 - t_1),$$

to je očito

$\Delta x > 0 \Leftarrow \Delta t > 0, \forall t_1, t_2 \in (-\infty, 1],$

$\Delta x < 0 \Leftarrow \Delta t > 0, \forall t_1, t_2 \in [1, +\infty)$

tj. funkcija $x = x(t)$ je strogo monotono rastuća na razmaku $(-\infty, 1]$, dok je strogo monotono opadajuća na razmaku $[1, \infty)$. Dakle, funkcija $x = x(t)$ $(t \in R)$ nema inverznu funkciju, pošto nije strogo monotona, ali njeni strogo monotoni dijelovi:

$$x = x(t), \; t \in (-\infty, 1]; \quad x = x(t), \; t \in [1, \infty),$$

svaki posebno ima inverznu funkciju:

$$t = x_1^{-1}(x), \; x \in (-\infty, 1]; \quad (t = x_1^{-1}[x(t)] \in (-\infty, 1]);$$

$$t = x_2^{-1}(x), \; x \in (-\infty, 1], \quad (t = x_2^{-1}[x(t)] \in [1, +\infty).$$

Prema tome, parametarske jednačine (1) definišu dvije funkcije nezavisno promjenljive x, koje se dobiju eliminacijom parametra t iz jednačina (1), tj. kad se u jednačinu $y = y(t)$ izvrši smjena $t = x_1^{-1}(x)$ ili $t = x_2^{-1}(x)$.

Kako je $x=2t-t^2 \Leftrightarrow 1-x=(t-1)^2 \Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{1-x}$

to je
$$t=x_1^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x},\ E_x^{(1)}=(-\infty,1],\ E_t^{(1)}=(-\infty,1]$$
$$t=x_2^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x},\ E_x^{(2)}=(-\infty,1],\ E_t^{(2)}=[1,\infty)$$

što zamjenom u $y=y(t)$, daje

$$y=y_1(x)=y[x_1^{-1}(x)]$$
$$=1-x-2\sqrt{1-x}, \qquad x\in E_x^{(1)};$$

tj.
$$y=y_2(x)=y[x_2^{-1}(x)]$$
$$=1-x+2\sqrt{1-x}, \qquad x\in E_x^{(2)}\ (=E_x^{(1)}).$$

b) Iz (1) uzastopnim diferenciranjem po t, slijedi

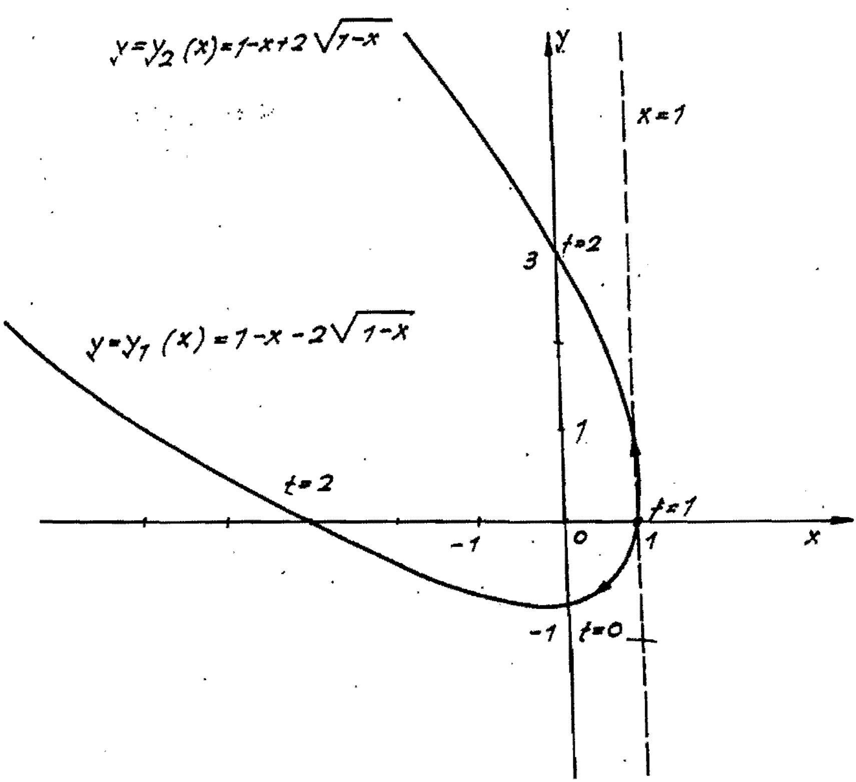
$$\dot{x}=2-2t,\quad \ddot{x}=-2,\quad \dddot{x}=0,$$
$$\dot{y}=2t,\quad \ddot{y}=2,\quad \dddot{y}=0.$$

Kako je $\dot{x}=2-2t=0 \Leftrightarrow t=1$, to je za $t\neq 1$, tj. u tačkama $x\neq x(1)=1$:

$$y'_x=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{t}{1-t};$$

$$y''_x=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}=\frac{1}{2(1-t)^3};$$

$$y'''_x=\frac{\dot{x}(\dot{x}\dddot{y}-\dot{y}\dddot{x})-3\ddot{x}(\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x})}{\dot{x}^5}=\frac{3}{4(1-t)^5}.$$



Za $t=1$, tj. u tački $x=x(1)$, funkcije $y=y_1(x)$ i $y=y_2(x)$ (vidi grafik) mogu da imaju samo lijevi izvod, pošto su obe definisane samo za $x\in(-\infty,1]$, tj. nisu definisane desno od tačke $x=1$.

Po definiciji lijevog izvoda, dobije se

$$[y_1(1)]'_- = \lim_{x\to 1-} \frac{y_1(x)-y_1(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{t\to 1-} \frac{y[x(t)]-y[x(1)]}{t-1}\,\frac{t-1}{x(t)-1} \quad (t<1)$$

$$= \lim_{t\to 1-} \frac{t^2-1}{t-1} \cdot \frac{t-1}{2t-t^2-1}$$

$$= \lim_{t\to 1-} \frac{t+1}{1-t} = +\infty;$$

tj.

$$[y_2(1)]'_- = \lim_{x\to 1-} \frac{y_2(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{t\to 1+} \frac{y[x(t)]-y[x(1)]}{x(t)-1}$$

$$= \lim_{t\to 1+} \frac{t+1}{1-t} = -\infty.$$

Viši izvodi $y''(1)$, $y'''(1)$ ne postoje, pošto ne postoji ni $y'(1)$.

287. Odrediti $y''_x(t)$ za krive zadane na slijedeći način:

a) $y = a(1-\cos t)$, $x = a(t-\sin t)$;

b) $y = \dfrac{1}{1-t}$, $x = \ln t$;

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \iff y = b\cdot\sin t,\ x = a\cdot\cos t\ (t\in[0,2\pi))$.

Rješenje. a) Uzastopnim diferenciranjem po t, dobije se: $\dot y = a\sin t$, $\ddot y = a\cos t$, tj. $\dot x = a(1-\cos t)$, $\ddot x = a\sin t$, te je

$$y''_x = \frac{\ddot y\dot x - \dot y\ddot x}{\dot x^3} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},\quad t\neq 2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

b) Sad je (funkcija je definisana za $t>0$, $t\neq 1$)

$$\dot y = \frac{1}{(1-t)^2},\ \ddot y = \frac{2}{(1-t)^3},\ \dot x = \frac{1}{t},\ \ddot x = -\frac{1}{t^2};$$

te je

$$y''_x = \frac{t^2+t}{(1-t)^3}\quad, t\in(0,1)\cup(1,\infty).$$

c) Ako se jednačina $y=b\sin t$, diferencira po x, smatrajući da je $t=x^{-1}(x)$ $(\Leftarrow x=x(t)=a\cos t)$, $\Rightarrow y'_x=b\cos t\cdot t'_x$. Diferenciranjem $x=x(t)=a\cos t$ po x, uz istu pretpostavku da je $t=x^{-1}(x)$, slijedi $1=-a\sin t\cdot t'_x=-\frac{1}{a\sin t}$, što zamjenom u prethodni rezultat daje

$$y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,\ (t\neq 0\wedge\pi).$$

Na sličan način, ponovnim diferenciranjem po x

$$\Rightarrow y''_x=(y'_x)'_x=\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_x$$

$$=-\frac{b}{a}(\operatorname{ctg} t)'_t\cdot t'_x$$

$$=-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a\sin t}\right)$$

$$=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t},\quad (t\neq 0\wedge\pi).$$

Primjedba: Koristeći ideju iz rješenja zadatka pod c), uradi ponovo zadatke pod a) i b).

288. Ispitati da li kriva (definisana parametarski)

$$x=t+\frac{1}{2t^2},\ y=\frac{1}{t}+\frac{t^2}{2}\qquad (1)$$

zadovoljava jednačinu

$$y''_x+x''_y=1.\qquad (2)$$

Rješenje. Prema formulama za izvod funkcije zadatke parametarski (vidi zadatak 284.), uz tvrdnju da jednačine (1) parametarski definišu bilo $y=y(x)$ ili $x=x(y)$, izlazi

$$y''_x + x''_y = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} + \frac{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3} = \frac{(\dot{y}^3-\dot{x}^3)(\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x})}{\dot{x}^3\dot{y}^3},$$

te se smjenom: $\dot{x}=1-\frac{1}{t^3}$, $\ddot{x}=\frac{3}{t^4}$, $\dot{y}=t-\frac{1}{t^2}$,

$\ddot{y}=1+\frac{2}{t^3}$, u poslednji izraz, nakon sredivanja, uvjeravano da $(1) \Rightarrow (2)$, š.t.d.

§ 2.7. DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJA *

Definicija *: Za funkciju $f(x)$ kazat ćemo da je diferencijabilna u tački $x=a$ ako se njen priraštaj može napisati u obliku

$$f(x)-f(a) = A(x-a)+\omega(x)(x-a)$$

gdje je A (konačan) realan broj, a funkcija $\omega(x)$ ima osobinu

$$\lim_{x\to a} \omega(x) = \omega(a) = 0.$$

289. Provjeriti da li funkcija: $y=\sin x$ $(y=|\sin x|)$ diferencijabilna u tački $x=\pi$.

Rješenje. Kako funkcija $y=\sin x$ ima konačan izvod u tački $x=\pi$: $y'(\pi)=\cos\pi=-1$, to je i diferencijabilna u toj tački, tj. prirast funkcije u tački $x=\pi$ može se pretstaviti u obliku:

$$y(x)-y(\pi)=\sin x-\sin\pi=(x-\pi)\cos\pi+(x-\pi)\cdot w(x)$$

gdje je $\lim\limits_{x\to\pi} w(x)=w(\pi)=0$, pošto je u ovom slučaju (provjeri!):

$$w(x)=\frac{\sin x-\sin\pi}{x-\pi}-\cos\pi,\quad (x\neq\pi)$$

$$=0\qquad\qquad ,\ (x=\pi).$$

Za funkciju $y=|\sin x|$, dovoljno je provjeriti da nema izvod u tački $x=\pi$ ($\Leftarrow (|\sin x|)'_-\big|_{x=\pi}=-1$ i $(|\sin x|)'_+\big|_{x=\pi}=+1$.) te prema tome nije ni diferencijabilna u $x=\pi$. (Tvrdnja, funkcija je diferencijabilna u tački $x=a \Leftrightarrow (\exists f'(a)),\ |f'(a)|<\infty$).

290*. Za funkciju $f(x)=\arccos 6x$ odrediti:

a) područje definisanosti,

b) skup tačaka u kojima je diferencijabilna,

c) skup tačaka u kojima nije diferencijabilna.

Rješenje (sami provjeriti).

(a) $E_1=\{x:\ |x|\le \frac{1}{6}\}$,

(b) $E_2=\{x:\ |x|<\frac{1}{6}\}$,

(c) $E_3=\{-\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\}$.

§ 2.8. DIFERENCIJAL, DEFINICIJA I PRIMJENA

Ako je x nezavisno promjenljiva, tj. ako je

$y=f(x)$, tada je (ako postoji) diferencijal funkcije $f(x)$ u tački $\hat{x}$ po definiciji jednak

$$dy=f'(\hat{x})\Delta x=f'(\hat{x})dx. \tag{4}$$

Ako sada uvedemo novu promjenljivu t, tako da je $x=\varphi(t)$, (gdje je φ diferencijabilna funkcija u tački $\hat{t}$ za koju je $\varphi(\hat{t})=\hat{x}$), tada je

$$y=\psi(t)=f[\varphi(t)],$$

odakle po teoremi o izvodu složene funkcije

$$\Rightarrow \psi'(t)=f'_{\varphi}[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t),$$

te je diferencijal u tački t

$$dy=\psi'(\hat{t})dt=f'_{\varphi}[\varphi(\hat{t})]\varphi'(\hat{t})dt.$$

Kako iz $x=\varphi(t)$ za $t=\hat{t} \Rightarrow \hat{x}=\varphi(\hat{t})$ i $dx=\varphi'(\hat{t})dt$, to je stvarno $dy=f'(\hat{x})dx$ kao kad bi x bila nezavisno promjenljiva (iako uvođenjem nove nezavisno promjenljive u opštem slučaju ne važi jednakost $dx=\Delta x$, jer je $dx=\varphi'(t)\Delta t\neq\Delta x$, gdje je nejednakost jasna već na osnovu definicije diferencijala).

291.2* 1) Naći priraštaj Δy i diferencijal dy funkcije $y=x^2-2x$ za proizvoljno x i Δx.

Rješenje.

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)-x^2+2x$$

$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x - x^2 + 2x = 2x\Delta x - 2\Delta x + \Delta x^2,$

(*) $\Delta y = 2(x-1)\Delta x + \Delta x^2$, $(\Delta y = 2(x-1)\Delta x + \omega(x)\Delta x, \omega(x) =$
$= \Delta x)$;

$dy = y'dx$, $dy = 2(x-1)dx$, $(dx = \Delta x)$

(**) $dy = 2(x-1)dx$.

Iz (*) i (**) slijedi

$\Delta y - dy = \Delta x^2$, $(\Delta y - dy = \omega(x)\Delta x)$.

Očigledno da je ova razlika beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na Δx.

Za primjer uzmimo da je $x=3$ i $\Delta x = 0{,}01$, tada je

$\Delta y = 2\cdot 2\cdot 0{,}01 + 0{,}01^2 = 0{,}04 + 0{,}0001$,

$\Delta y = 0{,}0401$;

$dy = 2\cdot 2\cdot 0{,}01$, $dy = 0{,}04$;

$\Delta y - dy = 0{,}0001$.

2) Izračunati prirast Δy i diferencijal dy funkcije $y = 2x^3 - x^2 + 3$.

Zatim naći vrijednost Δy i dy za $x=3$ i $\Delta x = 0{,}001$, kao i apsolutnu i relativnu grešku.

Rješenje

$\Delta y = (6x^2 - 2x)\Delta x + \omega(x)\Delta x$, $\omega(x) = (6x-1)\Delta x + 2\Delta x^2$;

$dy = (6x^2 - 2x)\Delta x$;

$\Delta y - dy = \omega(x)\Delta x$;

$\Delta y = 0{,}048017002$; $dy = 0{,}048$.

Apsolutna greška $|\Delta y - dy| = 0{,}000017002$,

a relativna greška $\dfrac{|\Delta y - dy|}{\Delta x} = 0{,}03$.

3) Koristeći formulu $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, za funkciju $f(x) = \ln x$, dobijemo:

$$\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{1}{x}\Delta x,$$

jer je $f'(x)=\frac{1}{x}$.
Za primjer uzmimo $x=2$ i $\Delta x=0{,}003$, tada je
$\ln 2{,}003=\ln(2+0{,}003)\approx \ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0{,}003$
$=0{,}69315+0{,}0015=0{,}69465.$

4) Izračunati približnu vrijednost površine kruga radiusa $r=3{,}02$ cm.

Rješenje.
Koristimo formulu za površinu kruga, tj. $P=\pi r^2$ ($(P_r'=2\pi r)$.
Uzet ćemo $r=3$ i $\Delta r=0{,}02$, tada je $\Delta P\approx dP=2\pi r\cdot$ $\cdot\Delta r=2\pi\cdot 3\cdot 0{,}02=0{,}12\pi$. $P(3{,}02)=P(3+0{,}02)\approx$ $\approx P(3)+P'(3)\,0{,}02$, $P(3{,}02)\approx 9\pi+0{,}12\pi=9{,}12\pi\,\mathrm{cm}^2$.

291.1.* Važe slijedeća osobina diferencijala:

$$\Delta y=dy+o(dy)\ (=o(\Delta x)),$$
$$(f(x+\Delta x)\approx f(x)f'(x)dx),$$

ako je $y'(x)=f'(x)\neq 0$, $|f'(x)|<\infty$, tj. $\Delta y\approx dy$ tad je Δx dovoljno malo.

292. Koristeći se osobinom $\Delta y\approx dy$, tj. aproksimirajući prirast funkcije diferencijalom izračunati vrijednost funkcije $y=\sin x$ za vrijednosti koje su veoma blizu $60°$, napr.
a) $60°01'$; b) $60°02'$; c) $60°03'$; (i.t.d....).
Rješenje. Kako je $y'(60°)=(\sin x)_{x=60°}=\cos 60°=\frac{1}{2}\neq 0$ to je u tački $x=60°=\frac{\pi}{3}$:

$$\Delta y\approx dy\left(x=\frac{\pi}{3}\right)=y'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x,$$

$$(f(x+\Delta x)=f(x)+\underline{f'(x)\Delta x}),$$

tj. kako je $1' = \pi/(180 \cdot 60)$, slijedi

a) $\sin 60°01' \approx \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 60} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 60}$,

b) $\sin 60°02' \approx \sin 60° + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{180 \cdot 60} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{180 \cdot 60}$,

c) $\sin 60°03' \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{3\pi}{180 \cdot 60}$; (itd...).

293. Ako je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna u tački $x = 0$ i ako je $f'(0) \neq 0$, tada važi:

$$\Delta y(0) = dy + o(dy) \quad (= 0(\Delta x))$$

tj. prirast funkcije može se nadomjestiti diferencijalom ili $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x \quad (x \approx \Delta x)$. (1)

Koristeći se tom osobinom, dokazati

a) $(1+x)^{\mu} \approx 1 + \mu x$, tj. $\sqrt{1,01} \approx 1 + \frac{1}{2}\, 0,01 = 1,005$;

b) $e^{x} \approx 1 + x$, tj. $e^{-0,1} \approx 1 - 0,1 = 0,9$;

c) $\ln(1+x) \approx x \quad (x \in (-1,1))$; tj. $\ln 1,01 \approx 0,01$;

d) $\sin x \approx x$, tj. $\sin 3' \approx \frac{3\pi}{180 \cdot 60} = 0,000872$;

e) $tg x \approx x$;

(gdje su date aproksimacije utoliko bolje ukoliko je x manje po apsolutnoj vrijednosti).

Rješenje. a) Ovdje iz $f(x) = (1+x)^{\mu} \Rightarrow f(0) = 1$, $f'(0) = \mu$ te je, prema (1)

$$f(x) \approx 1 + \mu x, \text{ š.t.d.}$$

b) $f(x)=e^{x} \Rightarrow f'(x)=e^{x}$, tj. $f(0)=1$, $f'(0)=1$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} e^{x} \approx 1+x$;

c) $f(x)=\ln(1+x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, tj. $f(0)=0$, $f'(0)=1$
ili $\ln(1+x) \approx x$;

d) $(\sin x)'=\cos x$; $\sin 0=0$, $(\sin x)'_{x=0}=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \sin x \approx x$;

e) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\operatorname{tg} 0=0$, $(\operatorname{tg} x)'_{x=0}=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \operatorname{tg} x \approx x$.

294. Dokazati $\sqrt[n]{a^n+x} \approx a+\dfrac{x}{na^{n-1}}$ $(a>0)$
gdje je $x=o(a)$. Pomoću te formule sračunati

a) $\sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[4]{80}$; c) $\sqrt[7]{100}$; d) $\sqrt[10]{1000}$,

Rješenje. Razmotrimo funkciju

$$f(x)=\sqrt[n]{a^n+x}=a\sqrt[n]{1+\frac{x}{a^n}} \quad (a>0).$$

Kako je

$$f'(x)=\frac{a}{n}\,\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{n-1}}}\cdot\frac{1}{a^n}=\frac{1}{na^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{n-1}}},$$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{na^{n-1}} \quad (f(0)=a).$$

sad je (vidi predhodni zadatak)

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

tj. $\sqrt[n]{a^n+x} = a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$, š.t.d.

Prema dokazanoj formuli je

a) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3+1} \approx 2 + \dfrac{1}{3\cdot 2^2} = 2.083\dot{3}$ (2,0800)

b) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4-1} \approx 3 - \dfrac{1}{4\cdot 3^3} = 2.9907$ (2,9907)

c) $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7-28} \approx 2 - \dfrac{28}{7\cdot 2^6} = 1,937^5$ (1,9310)

d) $\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10}-24} \approx 2 - \dfrac{24}{10\cdot 2^8} = 1,99^{54}$ ($1,99^{53}$)

(U zagradama je tačna vrijednost do na pet sigurnih cifara. Provjeri!).

295. Odrediti izvod funkcije
$f(x) = (1+x)^n \ln(1+x)$ po promjenjljivoj $t=(1+x)^n$.

Rješenje. Kako je $(t=(1+x)^n \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{n}}-1)$

$$f'_t(x) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{f'_x(x)}{t'_x},$$

$$\Rightarrow f'_t(x) = \frac{n(1+x)^{n-1}\ln(1+x) + (1+x)^n\cdot\frac{1}{1+x}}{n\cdot(1+x)^{n-1}}$$

$$= \ln(1+x) + \frac{1}{n}.$$

§ 2.9. DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

296. Ako funkcija $y=f(x)$ (definisana na $[a,b]$) ima konačan izvod u svakoj tački $x\in(a,b)$, tada

je (diferencijabilna u intervalu (a,b)) diferencijal te funkcije definisan u svakoj tački $x\in(a,b)$, tako da je $dy = df[x, x\in(a,b)] = f'(x)dx$.

Koristeći gornju definiciju diferencijala (prvog reda) i rekurentnu formulu za diferencijal višeg reda ($n\in N$)

$$(\forall n\in[2,p])\quad d^n y = d(d^{n-1}y) \qquad (1)$$

važi slijedeća formula za diferencijal n-tog reda

$$(\forall n\in[1,p])\ d^n y = f^{(n)}(x)dx^n,\ dx^n = (dx)^n; \qquad (2)$$

ako funkcija $y=f(x)$ ima izvod do p-tog reda ako funkcija ima izvod do p-tog reda, (za $x\in(a,b)$).
Dokaz (uputstvo). Iskoristiti metod mat. indukcije.

297. Kao što je dokazano forma diferencijala prvog reda invarijantna je u odnosu na smjenu promjenljivih. Dokaži da ta osobina ne važi za diferencijal n-tog reda ($n\geqslant 2$).

Rješenje. Lako se uvjeriti da osobina invarijantnosti forme diferencijala ne važi već za $n=2$. Zaista

$$d^2y = d^2(f(x)) = f''(x)dx^2; \qquad (1)$$

smjenom $x=\varphi(t)$, gdje je $\varphi(t)$ proizvoljna dva puta diferencijalna funkcija promjenljive t, imamo $y=f(x)=f[\varphi(t)]=\Psi(t)$, te je

$$d^2y = \Psi''_t(t)dt^2$$

$$=\{f[\varphi(t)]\}''_t\, dt^2$$

$$=\{f'_\varphi[\varphi(t)]\varphi'_t(t)\}'\cdot dt^2$$

$$=\{f''_\varphi[\varphi(t)]\varphi'^2_t(t)+f'_\varphi[\varphi(t)]\varphi''_t(t)\}\, dt^2,$$

tj.

$$d^2y=f''(x)\varphi'^2(t)\,dt^2+f'(x)\cdot\varphi''(t)\,dt^2. \qquad (2)$$

Iz $x=\varphi(t) \Rightarrow dx^2=\varphi'^2(t)\,dt^2$, tj. $d^2x=\varphi''(t)dt^2$, tj. iz (2)

$$\Rightarrow d^2y=f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x. \qquad (3)$$

Upoređujući (1) i (3) vidimo da forma drugog diferencijala nije invarijantna; pojavljuje se razlika $f'(x)d^2x$ ($\Leftarrow x=\varphi(t)$), što je identički jednako nuli samo ako je $\varphi(t)=at+b$, tj. drugi diferencijal, za razliku od prvog, je invarijantan samo u odnosu na linearnu transformaciju nezavisno promjenljive.

298. Odrediti diferencijale

a) d^3y za $y=\sin 2x$, tj. $d^3(\sin 2x)$;

b) $d^3(\sin^2 x)$ i $d^3(\cos^2 x)$.

Rješenje. a) Prema definiciji diferencijala je $[dy=y'_x\,dx,\ d^ny=d(d^{n-1}y)]$ $(n\geq 2)$,

$$\Rightarrow d(\sin 2x)=2\cos 2x\cdot dx \Rightarrow d^2(\sin 2x)=d(2\cos 2x\cdot dx)$$

$$\Rightarrow d^2(\sin 2x)=2(\cos 2x)'_x\,dx^2=-4\sin 2x\cdot dx^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^3(\sin 2x)=d(-4\sin 2x)\cdot dx^2=-8\cos 2x\cdot dx^3.$$

b) sad je

$d^3(\sin^2 x) = (\sin^2 x)'''_x\, dx^3$, tj.

$d^3(\sin^2 x) = -4\sin 2x \cdot dx^3 \ (\Leftarrow (\sin^2 x)''' = -4\sin 2x)$.

Pošto je: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow d(\cos^2 x) = -d(\sin^2 x) \Rightarrow$
$\Rightarrow d^2(\cos^2 x) = -d^2(\sin^2 x) \Rightarrow d^3(\cos^2 x) = -d^3(\sin^2 x) =$
$= 4\sin 2x\, dx^3$.

299. Dokazati identitete

$$x'y' = 1 \quad ; \qquad (1)$$
$$x''y'^n + y''x'^{3-n} = 0 \quad (n \in N); \qquad (2)$$

$$x'''y'^2 + y'''x'^2 + 3x''y'' = 0 \quad ; \qquad (3)$$

gdje je funkcija $y = f(x)$: definisana u sagmentu $[a,b]$; tri puta diferencijabilna funkcija u intervalu (a,b) $(\overset{Df}{\Leftrightarrow}$
$(\forall x \in (a,b))\ (\exists f'(x), f''(x), f'''(x)\ |f'''(x)| < \infty)$;
$f'(x) = y' \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$, a $x = f^{-1}(y)$ je inverzna funkcija funkcije f; $(x^{(n)} = x_y^{(n)},\ y^{(n)} = y_x^{(n)}\ \forall n \in N)$.

Rješenje. Prema definiciji diferencijala je: diferencijal funkcije $y = f(x)$ (u tački x)

$$dy = f'(x)\,dx = y'\,dx, \qquad (4)$$

tj. diferencijal funkcije $x = f^{-1}(y)$ (u tački $y = f(x)$)

$$dx = [f^{-1}(y)]'dy = x'\,dy. \qquad (*)$$

Zamjenom vrijednosti za dx iz $(*)$ u (4) dobije se $dy = y'(x'dy) = y'x'dy$. Pošto po predpostavci: $\forall x \in (a,b)$, $y' \neq 0$; to je $dy = y'dx \neq 0$ $(\Leftarrow dx \neq 0)$ te iz posljednje jednakosti slijedi da je jednakost (1) tačna za $\forall x \in (a,b)$.

Dokaz jednakosti (2):

Jednakost (2) dokazaćemo diferenciranjem jednakosti (1) po x (ili y), vodeći računa o tome da je $y' = \varphi(x)$ i $x' = \psi(y)$ $(\Leftarrow y = f(x)$ i $x = f^{-1}(y)$.

tj.
$$\frac{d}{dx}\left(y'^3 x''\right)+\frac{d}{dx}\left(y''\right)=0. \qquad (7)$$

Kako je $\frac{d}{dx}(y'')=y'''$ i

$$\frac{d}{dx}\left(y'^3 x''\right)=x''\cdot\frac{d}{dx}\left(y'^3\right)+y'^3\cdot\frac{dy}{dx}\,\frac{dx''}{dy}$$

$= x''\cdot 3y'^2\, y''+y'^3\cdot y'\cdot x'''$;

to se zamjenom ovih rezultata u (7), dobije

$x'''y'^4+y''+3x''y''y'^2=0$; odakle poslije množenja sa $x'^2 \left(=\frac{1}{y'^2} \Leftarrow (1) \text{ i } y'\neq 0\right)$ izlazi identitet (3), š.t.d.

$\boxed{300.}$ Odrediti diferencijal n-tog reda $d^n y$ gdje je

a) $y=x^3-5x+2 \qquad (n\in N)$;

b) $y=x\cos x \qquad (n\in N)$;

c) $y=e^u,\ u=u(x)$; za $n=1,2,3,4$;

d) $y=u^2,\ u=u(x)$; za $n=1,2,3,4$.

Rješenje. a) Kako je za $y=x^3-5x+2$,

$y'=3x^2-5$; $y''=6x$, $y'''=6$, $y^{(k)}=0$, $\forall k>3$ $(;\forall x\in R)$ to prema definiciji deferencijala $d^n y=y^{(n)}dx^n \Rightarrow dy=$
$=(3x^2-5)dx$; $d^2y=6x\,dx^2$; $d^3y=6dx^3$; $d^n y=0$ za $n\geqq 4$.

b) Sad je, prema Leibnitzovoj formuli

$(x\cos x)^{(n)}=x(\cos x)^{(n)}+nx'(\cos x)^{(n-1)}$

$=x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cdot\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$

$=x\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \quad (\forall n\in N)$;

te je prema definiciji diferencijala

$d^n(x\cos x)=(x\cos x)^{(n)}dx^n=\left[x\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n\cdot\right.$
$\left.\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (\forall n\in N)$;

c) Kako je forma diferencijala (prvog reda) invarijantna, Kako je $d(u \cdot v) = v du + u dv$, to je vodeći računa da se diferencijali mogu tretirati kao konačni prirasti "po tangenti", te da je izvod jednak količniku diferencijala funkcije i argumenta, te da iz pretpostavke $y' \neq 0$ slijedi $dy \neq 0$ za $\forall x \in (a,b)$(tj. sl. $dx \neq 0$):

$$\Rightarrow (x' \cdot y')'_x = \frac{d(x' \cdot y')}{dx} = \frac{y' dx' + x' dy'}{dx}$$

$$= y' \frac{dy}{dy} \cdot \frac{dx'}{dy} + x' \cdot \frac{dy'}{dx}$$

$$= y'^2 \cdot x'' + x' y''; \qquad (5)$$

gdje je u drugoj jednakosti iskorištena osobina da se sa diferencijalom može postupati kao sa konačnim prirastom, tako je

$\frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx'}{dy}$, pošto je $dy = f'(x) dx \neq 0$ prema pretpostavci u zadatku.

Prema (5) (i $(1)'_x = \frac{d1}{dx} = 0$) iz (1) diferenciranjem po $x \Rightarrow (x'y')'_x = 0$, tj.

$$y'^2 x'' + x' y'' = 0, \qquad (6)$$

odakle se poslije množenja sa y'^{n-2} ($= x'^{2-n}$ prema (1)) dobije identitet (2).

Dokaz identiteta (3) izvršit ćemo polazeći od (2), na sličan način kao što smo polazeći od (1) dokazali identitet (2):

Diferenciranjem (2) po x, slijedi (za $n = 3$)

$(y'^3 x'' + y'')'_x = 0$

neovisno od toga što je $u=u(x)$, imamo

$d(e^u)=(e^u)'_u\,du=e^u du$.

Polazeći od diferencijala prvog reda i služeći se rekurentnom formulom, dobijemo

$d^2e^u=d(de^u)=d(e^u du)=d(e^u)\cdot du+e^u d(du)$ $(\Leftarrow d(f.h)=$
$=hdf+fdh)=e^u du^2+e^u d^2u$ $(\Leftarrow d(du)=d^2u)$;

te je na isti način

$d^3e^u=d(d^2e^u)=d[e^u(du^2+d^2u)]=(de^u)\cdot(du^2+d^2u)+$
$+e^u d(du^2+d^2u)=e^u du\cdot(du^2+d^2u)+e^u[d(du^2)+d(d^2u)]=$
$=e^u(du^3+3dud^2u+d^3u)$;

ponovo na isti način je

$d^4e^u=d[e^u(du^3+3dud^2u+d^3u)]=(de^u)\cdot(du^3+3dud^2u+d^3u)+$
$+e^u d(du^3+3dud^2u+d^3u)]=e^u du\cdot(du^3+3dud^2u+d^3u)+$
$+e^u(3du^2d^2u+3(d^2u)^2+3dud^3u+d^4u)]$,

gdje je pri izvođenju zadnje jednakosti uzeto da važi (provjeri!);

$d[du^n]=d[(du)^n]=[(du)^n]'\,d(d\cdot u)=ndu^{n-1}\cdot d^2u$ $(\forall n\in N)$.

Dakle, je

$d^4e^u=e^u(du^4+6du^2d^2u+4dud^3u+3d^2u^2+d^4u)$, (gdje je $(d^2u)^2=d^2u^2$).

d) Sad je $du^2\neq d(u^2)$ za $y=u^2$; $d(u^2)=(u^2)'_u\cdot du=2udu$, te slijedi

$d^2(u^2)=d[d(u^2)]=d[2udu]=2d[udu]=2[du(du)+$
$+u\cdot d(du)]=2(du^2+ud^2u)\Rightarrow d^3(u^2)=d[2(du^2+ud^2u)]=$
$=2[d(du^2)+d(ud^2u)]=2[2dud^2u+du\cdot d^2u+ud(d^2u)]=$
$=2[3dud^2u+ud^3u]$; $\Rightarrow d^4(u^2)=d[2(3dud^2u+ud^3u)]=$
$=2[3d(dud^2u)+d(ud^3u)]=2\{3[d(du)d^2u+du\,d(d^2u)]+$
$+[du\cdot d^3u+ud(d^3u)]\}=2\{3[d^2u\,d^2u+dud^3u]+[dud^3u+$
$+ud^4u]\}=2(3d^2u^2+4dud^3u+ud^4u)$, $(d^2u^2=(d^2u)^2)$.

Primjedba: Provjeri da se $d^4(u^2)$ može dobiti na slijedeći način.

Prema Leibnitzovoj formuli je $(u^2)^{(4)}=(u\cdot u)^{(4)}=u^{(4)}\cdot u+4u'''u'+6u''u''+4u'u'''+uu^{(4)}=2(uu^{(4)}+4u'u'''+3u''^2)$.

Zato je

$d^4(u^2)=(u^2)^{(4)}dx^4=2(ud^4u+4dud^3u+3d^2u^2)$.

Na isti način provjeri da je $(\forall n\in N)$

$$d^{2n}(u^2)=2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}d^ku\,d^{2n-k}u+\binom{2n}{n}d^nu^n,$$

$$d^{2n+1}(u^2)=2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}d^ku\,d^{2n-k+1}u,\quad \text{gdje je } d^0u=u,$$

$d^nu^n=(d^nu)^n$.

301 Odrediti diferencijal n-tog reda funkcije $y=\sin^2x$.

Rješenje. Kako je

$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$, $y''=2\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$,

$y'''=4\cos(2x+\frac{\pi}{2})=2^2\sin(2x+2\frac{\pi}{2})$; $y^{(IV)}=2^3\sin(2x+3\frac{\pi}{2})$,

to je n-ti izvod funkcije

$y^{(n)}=(\sin^2x)^{(n)}=2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}]$,

te je diferencijal n-tog reda

$d^ny=y^{(n)}dx^n=2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}]\cdot dx^n$.

302. Ako su u, y, z diferencijabilne funkcije promjenljive x, takve da je

$$y=\frac{d}{dx}\left(u\frac{dy}{dx}\right),\quad z=\frac{d}{dx}\left(u\frac{dz}{dz}\right), \tag{1}$$

dokazati da je $df(x)=0$, gdje je

$$f(x)=u\left(y\frac{dz}{dx}-z\frac{dy}{dx}\right). \tag{2}$$

Rješenje. Iz (2) slijedi

$$f(x)=y\cdot\left(u\frac{dz}{dx}\right)-z\left(u\frac{dy}{dx}\right),$$

tj.

$$f'(x)=y\frac{d}{dx}\left(u\frac{dz}{dx}\right)-z\cdot\frac{d}{dx}\left(u\frac{dy}{dx}\right),$$

odakle je prema (1): $f'(x)=0$. Zato je
$df(x)=f'(x)\,dx=0$.

303. Izraziti x, y, y', y'', y''' pomoću t, z, z', z'', z''' ako je
$t=y'$, $z=xy'-y$; (1)
gdje $y'=\frac{dy}{dx}$, $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$, $y'''=\frac{d^3y}{dx^3}$, $z'=\frac{dz}{dt}$, $z''=\frac{d^2z}{dt^2}$,

$z'''=\frac{d^3z}{dt^3}$.

Rješenje. Diferenciranjem jednakosti (1) po t, primjenjujući pravilo o diferenciranju složene funkcije, tj. vodeći računa da je $z=z(t)$, $x=x(t)$, tj. $y=y(x(t))$, $y'=y'_x(x(t))$ itd., dobije se

$$1=y''\frac{dx}{dt},\quad z'=(y'+xy''-y')\frac{dx}{dt}=xy''\frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

Iz jednakosti (2) slijedi
$$x=z'. \qquad (3)$$
Diferenciranjem (3) po $t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=z''$, tj. na osnovu prve od jednakosti (2)
$$z''=\frac{1}{y''}. \qquad (4)$$

Diferenciraj li se (4) po $t \Rightarrow z'''=-\frac{y'''}{y''^2}\cdot\frac{dx}{dt}$, ili na osnovu (2)
$$z'''=-\frac{y'''}{y''^3}. \qquad (5)$$

Dakle je, (prema (1) - (5))

$x = z', \; y = xy' - z = z't - z, \; y' = t, \; y'' = \dfrac{1}{z''}, \; y''' = -\dfrac{z'''}{z''^3}.$

304. Koristeći se Leibnitzovom formulom za n-ti izvod proizvoda funkcija dokazati formulu

$$d^n(u \cdot v) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^{n-i}u \cdot d^i v \; (d^0 u = u, \; d^0 v = v). \qquad (1)$$

Rješenje. Polazeći od Leibnitzove formule za n-ti izvod

$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)} v^{(i)} \; (u^{(0)} = u, \; v^{(0)} = v)$ i nakon

množenja za $dx^n \, (= dx^{n-i} \cdot dx^i, \; \forall i \in N) \Rightarrow (uv)^{(n)} dx^n =$
$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)} dx^{n-i} v^{(i)} dx^i$

što je ekvivalentno sa formulom (1), koju je trebalo dokazati.

§ 2.10. IZVOD MATRICE I DETERMINANTE

Važe slijedeće formule:

$$\text{I.}\quad \frac{dA}{dx} = \left\| \frac{da_{ij}}{dx} \right\|_{m,n}$$

$$\text{II.}\quad \frac{d}{dx}(A+B) = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}$$

$$\text{III.}\quad \frac{d}{dx}(\alpha A) = \alpha\frac{dA}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}A$$

$$\frac{d}{dx}(cA) = c\frac{dA}{dx};$$

gdje je: A (tj. B) matrica čiji su elementi diferencijabilne funkcije promjenljive x (npr. $A = A(x)$ je matrica funkcija $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$); c je proizvoljna konstanta; $\alpha = \alpha(x)$ je diferencijabilna funkcija (definisana i diferencijabilna na istom razmaku na kome i funkcije $a_{ij}(x)$). Na analogan način definiše se i drugi, treći, itd. izvod matrice.

305.* Naći prvi izvod matrice

$$A = \left\| \begin{matrix} \cos x & x^2 \\ \sin x & x \end{matrix} \right\|.$$

Rješenje.

$$\frac{dA}{dx} = \left\| \begin{matrix} -\sin x & 2x \\ \cos x & 1 \end{matrix} \right\|.$$

306. Provjeriti slijedeću jednakost

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\|\begin{matrix} x^2e^{2x} & x^5 \\ \sqrt{x^2+1} & \arcsin\frac{x^2}{2} \\ 2^{3x} & \ln(1-x)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 4e^{2x}(x^2+2x+\frac{1}{2}) & 20x^3 \\ \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} & \frac{1+\frac{x^4}{4}}{\sqrt{(1-\frac{x^4}{4})^3}} \\ 9\cdot 2^{3x}\ln^2 2 & \frac{-1}{(1-x)^2}\end{matrix}\right\|$$

za $x\in(-\sqrt{2},1)$.

Rješenje. Provjeri: funkcija $\arcsin\frac{x^2}{2}$ definisana za $(\frac{x^2}{2})\leqslant 1$, tj. za $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, ima konačan prvi izvod (diferencijabilna je) i ima drugi izvod za $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; funkcija $\ln(1-x)$ ima drugi izvod za svako $x<1$, dok su ostali elementi matrice dva puta diferencijabilne funkcije za svako $x\in R$. Zato je data matrica dva puta diferencijabilna za $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap(-\infty,+1)=$ $=(-\sqrt{2},1)$.

Ako se izračuna $\frac{d^2a_{ij}}{dx^2}$ $(i=1,2,3;\quad j=1,2)$, lako je provjeriti da je data jednakost tačna.

Jasno, za matricu $A=\|a_{ij}\|_{m,n}$, važi

$$\frac{d^kA}{dx^k}=\left\|\frac{d^ka_{ij}}{dx^k}\right\|_{m,n}\qquad(\forall k\in N),$$

ako su elementi a_{ij} matrice A k-puta diferencijabilne funkcije na nekom razmaku (što nije teško provjeriti).

Ako su matrice A i B čiji su elementi diferencijabilne funkcije od x i ako su izvodljive naznačene matrične operacije, tada važi:

$$\text{I.}\quad \frac{d}{dx}(A.B)=\frac{dA}{dx}B+A\cdot\frac{dB}{dx};$$

$$\text{II.}\quad \frac{d}{dx}(A^n) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \frac{dA}{dx} A^{n-k-1} \qquad (\forall n \in N),$$

gdje je uvedena oznaka A^0 za jediničnu matricu E.

307. Provjeri da li je proizvod matrice i njenog izvoda komutativna operacija, te zatim odredi $\frac{d}{dx}A^2$:

a) $A = \begin{Vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Vmatrix}$; b) $A = \begin{Vmatrix} x^2+1 & 3x+2 \\ 3x+1 & x \end{Vmatrix}$.

Rješenje. a) Izlazi

$$A'_x = \begin{Vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{Vmatrix} \quad \left[= A\left(x+\frac{\pi}{2}\right). \text{ Provjeri!}\right]$$

te je

$$AA'_x = \begin{Vmatrix} -\sin 2x & \cos 2x \\ -\cos 2x & -\sin 2x \end{Vmatrix} = A'_x A \left[= A\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Sad je

$$(A^2)'_x = A'_x A + AA'_x = 2AA'_x = 2A\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Sad je

$$A'_x = \begin{Vmatrix} 2x & 3 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}, \text{ te je}$$

$$A'_x A = \begin{Vmatrix} 2x(x^2+1)+3(3x+1) & 2x(3x+2)+3\cdot x \\ 3(x^2+1)+1\cdot(3x+1) & 3(3x+2)+1\cdot x \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} 2x^3+11x+3 & 6x^2+7x \\ 3x^2+3x+4 & 10x+6 \end{Vmatrix},$$

itd.

$$A\cdot A'_x=\begin{Vmatrix}(x^2+1)\cdot 2x+(3x+2)\cdot 3 & (x^2+1)\cdot 3+(3x+2)\cdot 1\\ (3x+1)\cdot 2x+x\cdot 3 & (3x+1)\cdot 3+x\cdot 1\end{Vmatrix}$$

$$=\begin{Vmatrix}2x^3+11x+6 & 3x^2+3x+5\\ 6x^2+5x & 10x+6\end{Vmatrix}.$$

Dakle, $A'_x A \neq A\cdot A'_x$ i

$$(A^2)'_x=\begin{Vmatrix}4x^3+22x+9 & 9x^2+10x+5\\ 9x^2+8x+4 & 20x+12\end{Vmatrix}.$$

Primjedba. Provjeri da je za matricu A u a)

$$\frac{d}{dx}\left[A^n(x)\right]=n\cdot A\left(nx+\frac{\pi}{2}\right),$$

tj.

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[A^n(x)\right]=n^k A\left(nx+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad (k\in N).$$

308. Za matrice

$$A(x)=\begin{Vmatrix}\sin\alpha x & -\cos\alpha x\\ \cos\alpha x & \sin\alpha x\end{Vmatrix};\quad B(x)=\begin{Vmatrix}\cos\beta x & \sin\beta x\\ -\sin\beta x & \cos\beta x\end{Vmatrix}$$

Odrediti $(AB)'_x$; $(AB^{-1})'_x$; $(A^{-1}B)'_x$.

Rješenje. Očito je $\det A=\det B=1\ (\neq 0)$. Izlazi

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix}\sin\alpha x & \cos\alpha x\\ -\cos\alpha x & \sin\alpha x\end{Vmatrix};\quad B^{-1}=\begin{Vmatrix}\cos\beta x & -\sin\beta x\\ \sin\beta x & \cos\beta x\end{Vmatrix}$$

$$AB = \left\| \begin{matrix} \sin(\alpha+\beta)x & -\cos(\alpha+\beta)x \\ \cos(\alpha+\beta)x & \sin(\alpha+\beta)x \end{matrix} \right\| ;$$

$$AB^{-1} = \left\| \begin{matrix} \sin(\alpha-\beta)x & -\cos(\alpha-\beta)x \\ \cos(\alpha-\beta)x & \sin(\alpha-\beta)x \end{matrix} \right\| ;$$

$$A^{-1}B = \left\| \begin{matrix} -\sin(\alpha+\beta)x & \cos(\alpha+\beta)x \\ -\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)x \end{matrix} \right\| = -AB ;$$

ili

$$(AB)'_x = (\alpha+\beta)\cdot \left\| \begin{matrix} \cos(\alpha+\beta)x & \sin(\alpha+\beta)x \\ -\sin(\alpha+\beta)x & \cos(\alpha+\beta)x \end{matrix} \right\| ;$$

$$(AB^{-1})'_x = (\alpha-\beta)\cdot \left\| \begin{matrix} \cos(\alpha-\beta)x & \sin(\alpha-\beta)x \\ -\sin(\alpha-\beta)x & \cos(\alpha-\beta)x \end{matrix} \right\| ;$$

$$(A^{-1}B)'_x = (-AB)'_x = -(AB)'_x \,.$$

309. Formula za izvod determinante glasi

$$\frac{d}{dx}\det A = \sum_{v=1}^{n} (\det A)'_{v.} \left(= \sum_{v=1}^{n} (\det A)'_{.v}\right) \qquad (1)$$

gdje je A kvadratna matrica (funkcija) reda n, a $(\det A)'_{v.}$, (tj. $(\det A)'_{.v}$) je determinanta matrice koja se dobije iz matrice A kad se v-ta vrsta (kolona) matrice A zamjeni sa izvodom v-te vrste (kolone) matrice A, tj. formula (1) može se interpretirati na slijedeći način: izvod determinante jednak je zbiru determinanti, koje se dobiju iz originalne determinante, kad se samo jedna vrsta (kolona) orginalne determinante zamijeni izvodom te vrste (kolone). Provjeriti.

310. Odredi $F'(x)$ ako je

$$F(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ 1 & \sin x & \cos x \\ \cos x & 1 & \sin x \end{vmatrix}$$

Rješenje.

$$F'(x) = \begin{vmatrix} (\sin x)' & (\cos x)' & (1)' \\ 1 & \sin x & \cos x \\ \cos x & 1 & \sin x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ (1)' & (\sin x)' & (\cos x)' \\ \cos x & 1 & \sin x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ 1 & \sin x & \cos x \\ (\cos x)' & (1)' & (\sin x)' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ 1 & \sin x & \cos x \\ \cos x & 1 & \sin x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ \cos x & 1 & \sin x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ 1 & \sin x & \cos x \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{vmatrix}$$

$$= \cos x \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & \sin x \end{vmatrix} - (-\sin x) \begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} +$$

$$+ \cos x \begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} - (-\sin x) \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \cos x \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & \sin x \end{vmatrix} + (-\sin x) \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix},$$

gdje su svaka od tri determinante u prvoj jednakosti razvijene po elementima vrste u kojoj je jedan član nula.

Izlazi (nakon sređivanja)

$$F'(x) = 3\cos x \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & \sin x \end{vmatrix} + 3\sin x \begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$$

$$= 3\cos x\,(\sin^2 x - \cos x) + 3\sin x\,(\sin x - \cos^2 x)$$

$$= 3\left[\sin x \cos x\,(\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x)\right]$$

$$= 3\sin x \cos x\,(\sin x - \cos x)\cdot(1 + \sin x + \cos x).$$

311. Provjeriti identitet

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u''' & v''' & w''' \end{vmatrix},$$

gdje su u, v i w funkcije promjenljive x koje imaju treće izvode.

Rješenje. Prema formuli za izvod determinante, dobije se

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u' & v' & w' \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v & w \\ u'' & v'' & w'' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u''' & v''' & w''' \end{vmatrix},$$

tj. dati identitet je tačan, pošto su prve dvije determinante, na desnoj strani gornje jednakosti, jednake nuli jer imaju dvije jednake vrste.

Glava treća

OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA I NJIHOVE PRIMJENE NA ISPITIVANJE FUNKCIJA

§ 3.1. Rolle-ova teorema

312. Da li funkcija $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ u intervalu $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ ispunjava uslove Rolle-ove teoreme ?

Rješenje. 1^o Kako je za $\forall x \in \left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ (uzimajući samo $h<0$ za $x=\frac{1}{\pi}$ i $h>0$ za $x=\frac{1}{2\pi}$)

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)] = \lim_{h\to 0}\left[\sin\frac{1}{x+h} - \sin\frac{1}{x}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[2\cos\left(\frac{\frac{1}{x+h}+\frac{1}{x}}{2}\right).\sin\left(\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{2}\right)\right] = 2\lim_{h\to 0}\left[\cos\frac{2x+h}{2x(x+h)}\cdot\sin\frac{-h}{2x(x+h)}\right]$$

$$= -2\lim_{h\to 0}\left[\cos\frac{2x+h}{2x(x+h)}\cdot\sin\frac{h}{2x(x+h)}\right] = -2\cos\frac{2x}{2x^2}\cdot\sin\frac{0}{2x^2} = 0,$$

to zaključujemo da je data funkcija neprekidna na segmentu $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

2^o Prema prethodnoj transformaciji imamo za $\forall x \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = -2\lim_{h\to 0}\left[\cos\frac{2x+h}{2x(x+h)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2x(x+h)}\right)}{h}\right] =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}, \text{ tj.}$$

data funkcija ima izvod u intervalu $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

3^o Na krajevima datog segmenta vrijedi

$$f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0, \text{ tj.}$$

funkcija se anulira na krajevima segmenta.

Na osnovu 1^o, 2^o i 3^o zaključujemo da zadana funkcija ispunjava, u zadanom intervalu, uslove Rolle-ove teoreme.

Primijetimo da je $f'\left(\frac{2}{3\pi}\right) = 0$, a očigledno je

$$\frac{1}{2\pi} < \frac{2}{3\pi} < \frac{1}{\pi} .$$

Primjedba.

Ima li još tačaka (osim pomenute, koju obezbjedjuje Rolle-ova teorema), unutar datog segmenta, u kojima je tangenta grafike date funkcije paralelna x-osi? Odrediti sve intervale u kojima zadana funkcija ispunjava uslove Rolle-ove teoreme, zatim tačke u kojima je $f'(x) = 0$.

313 Za funkciju $f(x) = -x^3 + \frac{8}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}$ odrediti intervale u kojima važi Rolle-ova teorema.

Rješenje. Kako se data funkcija može da napiše u obliku

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2)(1-x),$$

to odmah imamo da se funkcija anulira na krajevima segmenata $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ i $[1,2]$.

Zadana funkcija je definisana i neprekidna na ovim segmentima (čak i ograničena!).

Takodje ona ima izvod u svakoj tački ovih segmenata i to:

$$f'(x) = -3x^2 + \frac{16}{3}x - 1.$$

314 Dokazati da grafik funkcije $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$ nema horizontalne tangente u $[1,3]$.

Dokaz. Grafik neke funkcije ima horizontalnu tangentu u onoj tački u kojoj se izvod anulira.

Kako je

$$f'(x) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{(x-2)^3}} \neq 0 \text{ za svako } x \ (\neq 2),$$

to zaključujemo da grafik date funkcije nema horizontalne tangente nigdje (pa naravno ni u datom intervalu).

Kad bi bili ispunjeni uslovi za primjenu Rolle-ove teoreme, onda bi morala biti neka tačka iz unutrašnjosti intervala u kojoj bi postojala horizontalna tangenta.

Funkcija je definisana i neprekidna za svako realno x. Na krajevima intervala je jednaka jedinici, tj.

$$f(1) = f(3) = 1.$$

Medjutim, funkcija nema izvod u tački $x = 2$, jer je u toj tački

$$f'_+(2) = +\infty, \quad f'_-(2) = -\infty.$$

Dakle, nisu ispunjeni uslovi za primjenu posljedice Rolle-ove teoreme.

315. Da li se medju nulama funkcije

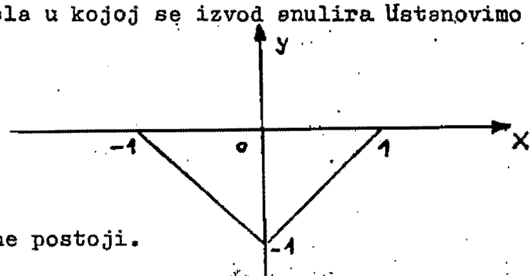
$$f(x) = |x| - 1 = \begin{cases} x-1, & \text{za } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x-1, & \text{za } -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

nalazi nula izvodne funkcije?

Rješenje: Data funkcija je neprekidna u intervalu $[-1,1]$ i zadovoljava uslov $f(-1) = f(1) = 0$. Donja medja ove funkcije je $m = f(0) = -1$. Medjutim, u tački $x = 0$ funkcija nema izvod, jer je

$$f'_+(0) = +1, \quad f'_-(0) = -1.$$

Dakle, za ovu funkciju ne važi Rolle-ova teorema pa ne mora postojati tačka unutar datog intervala u kojoj se izvod anulira. Ustanovimo



da takva tačka stvarno ne postoji.

Kako je

$$f'(x) = (|x|-1)' = \left(\sqrt{x^2}-1\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \neq 0, \text{ za } x \neq 0,$$

to se medju nulama date funkcije ne nalazi nula izvodne funkcije.

§ 3.2. LAGRANGE-ova FORMULA I CAUCHYEVA TEOREMA

316 Važi li formula o konačnom priraštaju (Lagrange-ova teorema) za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0. \end{cases}$$

na segmentu $[a,b]$, ako je $ab < 0$?

Rješenje. Pošto je $ab<0$, to $0 \in [a,b]$. Funkcija je neprekidna za svako realno x, čak i u tački x = 0, jer je

$$0 = f(0) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{jer je } |x \sin \tfrac{1}{x}| < |x| < \varepsilon)$$

Kad x teži nuli sa desne strane, tj. kad $\frac{1}{x} \to +\infty$, funkcija $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ teži nuli oscilirajući beskrajno mnogo puta izmedju pravih $y = x$ i $y = -x$. Desni izvod ove funkcije u tački x = 0 biće

$$f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to +0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \sin \frac{1}{x}.$$

Medjutim, funkcija $y = \sin \frac{1}{x}$ u tački x = 0 nema graničnu vrijednost, jer

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ za } x = \frac{1}{k\pi};$$

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = 1, \text{ za } x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = -1, \text{za } x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

itd.

Dakle, izraz $\sin \frac{1}{x}$ ima kao parcijalne granične vrijednosti sve brojeve intervala $[-1, +1]$ kad $x \to 0$, gdje je

$$\overline{\lim_{x \to +0}} \sin \frac{1}{x} = +1, \quad \underline{\lim_{x \to +0}} \sin \frac{1}{x} = -1,$$

što znači da ne postoji desni izvod ove funkcije u tački x = 0.

Isti je slučaj kad x teži nuli sa lijeve strane. Prema tome u tački $x = 0$ gornja funkcija nema izvod u tački $x = 0$, iako je neprekidna u toj tački. Na kraju zaključujemo da nisu ispunjeni uslovi za primjenu teoreme o srednjoj vrijednosti (Lag.teorema) na gornju f –u u intervalu $[a,b]$, jer funkcija nema izvod u tački

$$x = 0 \in (a,b).$$

Primijetiti da su uslovi ispunjeni na svakom intervalu oblika $[0,b]$.

317. Naći funkciju $\theta = \theta(x,h)$ takvu da je

$$f(x+h) - f(x) = h\, f'(x+\theta h) \quad (0<\theta<1), \text{ ako je}$$

$$f(x) = e^x.$$

Rješenje. S jedne strane je

$$f(x+h) - f(x) = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1), \text{ a s druge}$$

$$f'(x+\theta h) = e^{x+\theta h} \quad \text{pa primjenom}$$

Lagrange-ove teoreme (za čiju su primjenu uslovi ispunjeni): imamo:

$$e^x(e^h-1) = h\cdot e^{x+\theta\cdot h} \Longleftrightarrow e^h-1=h\cdot e^{\theta h} \Longleftrightarrow e^{\theta h} = \frac{e^h-1}{h} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \theta h = \ln\frac{e^h-1}{h} \Longleftrightarrow \theta = \frac{1}{h}\ln\frac{e^h-1}{h}.$$

Napomena. Vidimo da funkcija θ zavisi samo od priraštaja nezavisno promjenljive $h = \Delta x$. Kod nekih funkcija θ = const. ($y = ax^2+bx+c$), dok je opet kod drugih dosta komplikovana funkcija od x i priraštaja $h = \Delta x$.

Takodje, primijetimo da za $x = 0$, $h = x$ dobivamo izraz oblika

$$f(0+x) - f(0) = e^x - e^0 = x\cdot f'(0+\theta\cdot x) = x\cdot e^{\theta x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^x = 1 + x\,e^{\theta x} > 1 + x, \text{ jer je za } x>0,\ e^{\theta x} > 1.$$

Tako smo došli do nejednakosti

$$e^x > 1+x \quad \text{za} \quad x > 0 \quad (\text{i } x \leq -1),$$

što znači da graf eksponencijalne funkcije za pozitivne vrijednosti x leži iznad pravca $y = 1 + x$.
Šta je za $-1 < x \leq 0$?

318. Primjenom teoreme o srednjoj vrijednosti naći približnu vrijednost, tačnu na četiri decimale od

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1{,}003567.$$

Rješenje. Primijenimo li Lagrange-ovu teoremu na funkciju $y = \operatorname{arctg}x$, izlazi

$$\operatorname{arctg}(x+h) = \operatorname{arctg}x + h \cdot \frac{1}{1+(x+\theta h)^2}.$$

Otuda za $x = 1$, $h = 0{,}003567$ imamo

$$\operatorname{arctg} 1{,}003567 = \operatorname{arctg} 1 + 0{,}003567 \cdot \frac{1}{1+(1+\theta\cdot 0{,}003567)^2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{arctg} 1{,}003567 \begin{cases} < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}003567 & \text{za } \theta = 0 \\ > \dfrac{\pi}{2} + 0{,}003567 \cdot \dfrac{1}{1+1{,}003567} & \text{za } \theta = 1, \text{ tj.} \end{cases}$$

$$0{,}787175 < \operatorname{arctg} 1{,}003567 < 0{,}787181.$$

Dakle, približna vrijednost od $\operatorname{arctg} 1{,}003567$, tačna na četiri decimale, je $0{,}7871$.

Napomenimo da je funkcija $y = \operatorname{arctg}x$ ispunjavala uslove Lagrange-ove teoreme na segmentu $[1;\ 1{,}003567]$.

319. Odrediti tačku, na luku AB grafika funkcije

$$y = f(x) = \begin{vmatrix} \ln(x+1) & 2 & 2 \\ 3 & x & 1 \\ 3x & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

u kojoj je tangenta paralelna tetivi AB, gdje je $A(0, f(0))$; $B(1, f(1))$.

Rješenje. Data funkcija je definisana za $x + 1 > 0$, tj.

za $-1 < x < +\infty$, neprekidna na cijelom definicionom području i ima izvod u $(-1, +\infty)$ (tim prije ona je neprekidna i ima izvod na segmentu $[0,1]$). Prema tome ona zadovoljava uslove za primjenu Lagrange-ove formule.

Kako je

$$f'(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+1} & 0 & 0 \\ 3 & x & 1 \\ 3x & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ln(x+1) & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \ln(x+1) & 2 & 2 \\ 3 & x & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x+1} - 6x + 6 - 6x = \frac{1}{x+1} - 12x + 6 ;$$

$$f(0) = \begin{vmatrix} \ln 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$f(1) = \begin{vmatrix} \ln 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \ln 2 - 6$$

to imamo (prema Lagrang. formuli)

$$\left\{ \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(\xi),\ (0 < \xi < 1) \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln 2 = \frac{1}{\xi+1} - 12\xi + 6 \Longleftrightarrow (\xi+1)\ln 2 = 1 - 12\xi(\xi+1) +$$

$$+6(\xi+1) \quad \Longleftrightarrow \quad 12\xi^2 + (6 + \ln 2)\xi + \ln 2 - 7 = 0.$$

Pošto je diskriminanta posljednje kvadratne jednačine:

$$D = b^2 - 4ac = 372 + \ln^2 2 - 36 \ln 2 > 0,$$

to postoje dvije tačke u kojima je tangenta paralelna tetivi AB.

320. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & \text{za} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{za} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Odrediti medjuvrijednost ξ formule o konačnom priraštaju za funkciju f (x) na segmentu $[0,2]$.

Rješenje. Funkcija $f(x)$ je definisana i neprekidna na segmentu $[a,b]$. Ova funkcija ima izvod u svakoj tački intervala $(0,2)$, pa za nju vrijedi formula o konačnom priraštaju, tj.

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(\xi), \quad (0 < \xi < 2).$$

Odredimo tačku ξ iz posljednje jednakosti:

Kako je

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{za} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{za} \quad 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{3}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{2}, \quad \text{to imamo:}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2-0} = \begin{cases} -\xi & \text{za} \quad 0 < \xi < 1 \\ -\dfrac{1}{\xi^2} & \text{za} \quad 1 < \xi < 2. \end{cases}$$

Otuda

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \xi_2 = \sqrt{2}.$$

321. Dokazati da se funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

i

$$g(x) = \operatorname{arctg} x$$

razlikuju za konstantu u oblasti $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Dokaz. Prema posljedici Lagrange-ove teoreme, dvije funkcije će se razlikovati za konstantu ako imaju jednake izvode.

Prema tome dovoljno je provjeriti da je

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{za} \quad \forall x \neq 1.$$

Stvarno,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = g'(x).$$

322. Neka je $y = f(x)$ neprekidna funkcija u nekoj okolini tačke a, koja ima izvod u svakoj tački te okoline (izuzev, možda, u tački a), tada će izvod u tački a postojati ukoliko postoji

$$\lim_{h \to 0} f'(a+\theta h), \quad (0 < \theta < 1), \ \theta = \theta(a,h) \text{ i, osim}$$

toga, vrijediće:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} f'(a+\theta h).$$

Dokazati.

Dokaz. Posmatrajmo intervale $[a-k, a]$ i $[a, a+h]$. Na svakom od ovih intervala funkcija ispunjava uslove Lagrange-ove teoreme, te mora vrijediti

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1, \ h > 0 \quad (1)$$

$$\frac{f(a) - f(a-k)}{k} = \frac{f(a-k) - f(a)}{-k} = f'(a-\theta k), \quad 0<\theta<1, \ k > 0 \quad (2)$$

Ukoliko postoji izvod u tački a, tada, prelazeći u relacijama (1) i (2) na graničnu vrijednost, imamo:

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0+} f'(a+\theta h)$$

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{-k\to 0-} \frac{f(a-k)-f(a)}{-k} =$$

$$= \lim_{-k\to 0-} f'(a-\theta k) = \lim_{h\to 0-} f'(a+\theta h)\,, \quad \text{(zamijenili smo}$$

$-k$ sa h).

Otuda

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} f'(a+\theta h),\ 0 < \Theta < 1,\ \theta = \Theta\ (a,h).$$

Takodje, ako postoji granična vrijednost

$$\lim_{h\to 0} f'(a+\theta h),$$

tada imamo

$$\lim_{h\to 0+} f'(a+\theta h) = \lim_{h\to 0-} f\ (a+\theta h)\ ,\ \text{tj.}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ , \text{ odnosno}$$

$$f'_+(a) = f'_-(a),$$

odakle slijedi da postoji izvod $f'(a)$.

Napomena. Iz jednakosti

$$\lim_{h\to 0} f'\ (x+\theta h) = f'(x)$$

ne slijedi i

$$\lim_{h\to 0} f'\ (x+h) = f'(x),$$

tj. da je izvod $f'(x)$ neprekidan, jer, kad $h \to 0$ preko svih vrijednosti, θh ne mora težiti nuli preko svih vrijednosti. Tako, naprimjer, funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ima izvod $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} f'(\theta h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{h}}{h} = 0,$

koji je prekidan u tački $x = 0$, jer $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ ne postoji.

Takodje napomenimo (iz prethodnog slijedi) da, ukoliko postoji izvod i njegova granična vrijednost u tački a i u koliko funkcija zadovoljava uslove ovog zadatka, vrijedi $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.

323 Neka je $f(x) = x^2$ i $\varphi(x) = x$.

Dokazati da funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ ispunjavaju uslove, u intervalu $[-1,1]$, pod kojima važi Cauchyeva teorema. Zatim odrediti medjuvrijednost ξ iz odgovarajuće Cauchyeve formule.

Rješenje. 1° Funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ su neprekidne na cijelom intervalu $(-\infty, +\infty)$, a tim prije i na segmentu $[-1,1]$.

2° U intervalu $(-1,1)$ imaju izvode $f'(x) = 2x$ i $\varphi'(x) = 1$.

3° U svakoj tački $x \in (-1,1)$ je $\varphi'(x) = 1 \neq 0$ i konačan, dok je $f'(x) = 2x \neq 0$ za $x \neq 0$, a $f'(0)=0$ i uvijek konačan. No dovoljno je da je u svakoj tački $x \in (-1,1)$ $f'(x) \neq 0$ i konačan ili $\varphi'(x) \neq 0$ i konačan, a to je ispunjeno.

4° $\varphi(-1) = -1 \neq \varphi(1) = 1$.

Na osnovu 1°, 2°, 3° i 4° zaključujemo da važi Cauchyeva formula, tj.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{\varphi(1) - \varphi(-1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Otuda

$$\frac{1-1}{1-(-1)}=\frac{2\xi}{1}, \text{ tj. } \xi=0, \quad (-1<\xi<1).$$

324. Provjeriti da li za funkciju

$$f(x)=|x|$$

važi Rolle-ove teorema u intervalu $[-1,1]$.

Rezultat. Ne važi.

325. Dokazati da parabola ima svojstvo da je apscisa tačke, u kojoj je tangenta paralelna s tetivom AB, sredina intervala $[a,b]$; gdje je a-apscisa tačke A, a b-apscisa tačke B.

326. Provjeriti da li funkcije $f(x)=\sqrt[3]{x}$ i $\varphi(x)=\sqrt{1-x}$ ispunjavaju uslove, u intervalu $[-1,1]$, za primjenu Cauchyeve formule.

Rezultat. Ispunjavaju.

§ 3.3. ODREDJIVANJE NEODREDJENIH OBLIKA ILI IZRAZA (PRAVILO L'HOSPITALOVO)

U zadacima od 327 – 345. Odrediti granične vrijednosti:

327. $$\lim_{x\to a}\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}, \quad (a>0,\ \alpha\neq 0).$$

Rješenje. Funkcija

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}$$ za $x=a$, javlja se u obliku $"\frac{0}{0}"$.

Stoga je vrijednost ove funkcije u tački $x=a$

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to a}x^{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}.$$

328. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Rješenje: Pošto funkcije $f(x) = \sin x$ i $\varphi(x) = x$ ispunjavaju uslove Lopitalove teoreme, to je

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

329. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x \ln \frac{x-1}{x+1})$, (= „$\infty\cdot 0$").

Rješenje. $$\lim_{x\to +\infty} (x \ln \frac{x-1}{x+1}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x-1)-\ln(x+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2}{x^2-1} = -2.$$

330. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{1-\cos(\sqrt{x-\sin x})}$.

Rješenje. Kako je $\frac{e^h-1}{h} \to 1 \; (h\to 0)$, tj. $\boxed{e^h - 1 \sim h}$ $(h\to 0)$, zatim (zbog $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$)

$1-\cos\sqrt{x-\sin x} = 2\sin^2(\frac{1}{2}\sqrt{x-\sin x})$, $\sin h \sim h \; (h\to 0)$

to imamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{1-\cos(\sqrt{x-\sin x})} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2(\frac{1}{2}\sqrt{x-\sin x})^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} 12\cdot\frac{x}{\sin x} = 12.$$

331. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Rješenje. Ako bi primijenili Lopitalovo pravilo imali bi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}.$$

Medjutim, desna strana posljednje jednakosti nema smisla, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$. No, granična vrijednost zadanog izraza ipak postoji, jer je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(x\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 0\cdot 1 = 0.$$

332. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, („$\frac{\infty}{\infty}$").

Rješenje. Ako primijenimo Lapitalovo pravilo imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Prema tome i u ovom slučaju ne može se Lapitalovim pravilom odrediti granična vrijednost, dok se može odrediti primitivnim putem i ta granična vrijednost iznosi 1.

333. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin\sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Rješenje, $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin\sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}\cdot\cos x}{2\sqrt{\sin x}\,\sqrt{1-\sin x}\cdot 2(1-x)} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{1}\cdot 2\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

334. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(x+1)\cdot x^2}{x(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}+1} = 2$$

335. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$

Rješenje. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{n!} = \infty$.

336. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Rješenje. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{\sin^2\pi x}\cdot\pi} =$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sin^2\pi x\,\left(-2\cos^2\frac{\pi x}{2}+\pi-\pi x\right)}{-2(1-x)\cos^2\frac{\pi x}{2}\cdot\pi} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{4\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\cancel{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,\left(-2\cos^2\frac{\pi x}{2}+\pi-\pi x\right)}{-2\pi(1-x)\,\cancel{\cos^2\frac{\pi x}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x\to1} \frac{2\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(-2\cos^2\frac{\pi x}{2}+\pi-\pi x\right)+\sin^2\frac{\pi x}{2}\left(+4\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\pi\right)}{1} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi}{1} = -2.$$

337. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Rješenje. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin x - \pi}{2\cos x} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 2x\cos x}{-2\sin x} = -1.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$, („$\infty^0$").

Rješenje. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\operatorname{tg}x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-\operatorname{tg}x.\ln x)} = e^0 = 1,$

jer je

$$\lim_{x\to 0} (-\operatorname{tg}x.\ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln x}{\operatorname{ctg}x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0.$$

339. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ („1^∞").

Rješenje. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+x)\right]} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}} = e^2.$$

340. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$, („0^0").

Rješenje. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\cdot\ln x} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(x.\ln x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)} =$$

$$= e^0 = 1.$$

341. $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $(\text{,}\infty^{\infty}\text{"})$.

Rješenje. $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot \ln \mathrm{ctg}x\right)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln \mathrm{ctg}x}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-x}{\cos x\cdot \sin x}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\cos^2 x-\sin^2 x}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

342. $\lim\limits_{x\to -a} (x+a)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$,

Rješenje. $\lim\limits_{x\to -a} (x+a)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) =$

$$= \lim_{x\to -a}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x+a}} = \lim_{x\to -a}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\frac{-a}{x^2}}{-\frac{1}{(x+a)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to -a}\frac{a(x+a)^2}{x^2+ax} = \lim_{x\to -a}\frac{a(x+a)^2}{x(x+a)} = 0.$$

343. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{3x^4-x^6} - \frac{1}{x^3\,\mathrm{arctg}x}\right)$, $(\text{,}\infty-\infty\text{"})$.

Rješenje.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{3x^4-x^6} - \frac{1}{x^3\,\mathrm{arctg}x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{arctg}x-3x+x^3}{(3x^4-x^6)\,\mathrm{arctg}x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{1+x^2}-3+3x^2}{(12x^3-6x^5)\,\mathrm{arctg}x+(3x^4-x^6)\cdot\frac{1}{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3-3-3x^2+3x^2+3x^4}{(1+x^2)\cdot x^3\cdot(12-6x^2)\,\mathrm{arctg}x+x^3(3x-x^3)} = \dots = \frac{1}{5}.$$

344. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

Rješenje.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{L}, \text{ gdje je}$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\pi/2 - \operatorname{arctg}x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \dots = -1 .$$

345. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}x.$

Rješenje. Primjenom Lopitalova pravila ne može se naći tražena granična vrijednost, jer ako se stavi $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$, količnici derivacija imaju opet taj oblik ili recipročni, koji za $x\to+\infty$ vodi do $\frac{\infty}{\infty}$; ali, jer je $\operatorname{th}x = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$, vidi se da je za $x\to\infty$

$\lim \operatorname{th}x = 1.$

346. Provjeriti sljedeće zadatke:

1° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \frac{1}{a}$, gdje je $a > 0$;

2° $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$;

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{th}x)^x = 1$;

4° $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}$;

5° $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

6° $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos x}{x - \sin x} = 3;$

7° $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\log x - 1} = \dfrac{\sqrt{e}}{2};$

8° $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{e^{x} - e^{-x} - 2x} = -1;$

9° $\lim\limits_{x\to 0} \left(\left(\dfrac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right) = e^{-\frac{1}{6}};$

10° $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}};$

11° $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}} = \dfrac{mn}{n-m};$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^{x}} = 0;$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right] = -\dfrac{1}{6}.$

§ 3.4. ISPITIVANJE MONOTONOSTI FUNKCIJA PRIMJENOM IZVODA

347. Odrediti intervale monotonosti funkcije $f(x) = x^2 - \ln x^2$.

Rješenje. Funkcija je definisana za svako realno $x \neq 0$. Njen izvod ima oblik

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2\,\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x}$$

$$f'(x) > 0 \iff (-1 < x < 0 \wedge 1 < x < +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \iff (-\infty < x < -1 \wedge 0 < x < 1).$$

Prema tome funkcija strogo raste u intervalima $-1 < x < 0$ i $1 < x < +\infty$, dok strogo opada u intervalima

$$-\infty < x < -1 \quad \text{i} \quad 0 < x < 1.$$

348. Dokazati da je funkcija

$$f(x) = x^3 - 5$$

strogo rastuća u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Dokaz. Gornja funkcija je definisana za svako realno x, a njen izvod je pozitivan ($f'(x) = 3x^2$) u svakoj tački $x \neq 0$. Ako se tačkom $x = 0$ razdijeli interval $(-\infty, +\infty)$ u dva djela, f-a raste u svakom djelu, pa prolazi svakom tačkom, pa i ishodištem, rastući.

349. Ispitati rašćenje i opadanje funkcije

$$f(x) = x - \sin x.$$

Rješenje. Funkcija je definisana za svako realno i konačno x. Njen izvod ima oblik

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

No, $1 - \cos x \geq 0$ za svako x, pa je data funkcija neopadajuća u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Medjutim, $1-\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, pa funkcija raste u intervalima

$(k\pi, (k+1)\pi)$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

350. Dokazati da je

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

Dokaz.

1° Neka je

$$f(x) = \ln(1+x) - x,$$

tada je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Uzimajući u obzir da je $x > 0$, slijedi da je

$$f'(x) < 0, \text{ tj.}$$

funkcija opada (strogo) u intervalu $(0, +\infty)$, a kako je još

$$f(0) = 0,$$

to je funkcija $f(x)$ opadajuće na segmentu $[0, +\infty)$.

Otuda

$$f(x) = \ln(1+x) - x < f(0) = 0 \quad \text{za} \quad x > 0, \text{ tj.}$$

$$\ln(1+x) < x, \text{ za } x > 0,$$

2° Stavimo

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x); \; g(0) = 0.$$

Kako je

$$g'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0 \quad \text{za} \quad x > 0,$$

to je

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) < g(0) = 0, \text{ tj.}$$

$x < \ln(1-x) < \frac{x^2}{2} - x$ $(x<0)$ (V_{o1}, A)

$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ $(x>0)$ (V_{o1}, B)

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \quad \text{za} \quad x > 0.$$

Primjedba. Dokazati, pomoću Lagrange-ove teoreme, nejednakost

$$\ln x < x-1, \text{ za } x > 1.$$

351. Dokazati Bernulijevu nejednakost

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \{1,2,3,\ldots\}, \quad x \geq -1.$$

Neka je

$$f(x) = (1+x)^n - nx - 1, \text{ za } x \geq -1,$$

tada slijedi

$$f'(x) = n \cdot (1+x)^{n-1} - n = n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right].$$

Kako je

$$f'(x) \begin{cases} = 0, & x = 0 \\ < 0, & -1 \leq x < 0 \\ > 0, & x > 0, \end{cases}$$

to imamo

$$f(0) = \min_{x \geq -1} f(x), \text{ tj. } (f(0) = 0)$$

$$f(x) \geq 0, \quad \text{za} \quad x \geq -1, \quad \text{ili}$$

$$(1+x)^n - nx - 1 \geq 0, \quad x \geq -1,$$

što je i trebalo dokazati.

§ 3.5. EKSTREMI FUNKCIJA

352. Odrediti najveću i najmanju vrijednost funkcije

$$f = \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x}, \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Rješenje. Pošto je funkcija diferencijabilna to ćemo se poslužiti pravilom za dobijanje lokalnih ekstrema diferencijabilnih funkcija. Zato odredimo najpre stacionarne tačke rješenjem jednačine

$$f'(x) = 0.$$

No, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = 0 \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{1+x^2} = 0.$

Pošto zadnja jednakost nije ispunjena nikad, to ne postoje stacionarne tačke ove funkcije, pa samim tim ne postoje lokalni ekstremi. Medjutim, najveću i najmanju vrijednost funkcija uzima na krajevima intervala $[0,1]$ i to:

$$f_{\min} = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0, \; f_{\max} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}, \left(f(0) = \frac{\pi}{4}, f(1) = 0\right).$$

353. Proučiti karakter ekstremuma funkcije

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x.$$

Rješenje. Funkcija je definisana za svako realno x. Pošto je periodična sa periodom $T = 2\pi$ dovoljno je ispitati njene ekstreme u intervalu $[0, 2\pi]$.

Obzirom da je diferencijabilna, to su stacionarne tačke rješenja jednačine $f'(x) = 0$, tj.

$$2\cos x - 2\sin 2x = 0 \Longleftrightarrow \cos x\,(1-2\sin x) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\cos x = 0 \text{ ili } 1-2\sin x = 0) \Leftrightarrow \left(\cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots\right)$$

Primijenićemo drugi izvod za utvrdjivanje karaktera ekstrema date funkcije. Kako je

$$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x, \text{ to je:}$$

$$f''(\frac{\pi}{2}) = 2>0 \Rightarrow y_{min} = f(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad ;$$
$$f''(\frac{3\pi}{2}) = 6>0 \Rightarrow y_{min} = f(\frac{3\pi}{2}) = -3 \quad ;$$
$$f''(\frac{\pi}{6}) = -3<0 \Rightarrow y_{max} = f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2} \quad ;$$
$$f''(\frac{5\pi}{6}) = -3<0 \Rightarrow y_{max} = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}.$$

Iz gore izračunatih vrijednosti lokalnih ekstremuma vidi se da je u intervalu $0 \leq x \leq 2\pi$ apoolutni maksimum $y_{max} = f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}$, a apsolutni minimum

$$y_{min} = f(\frac{3\pi}{2}) = -3.$$

Ima li smisla govoriti o vrijednosti funkcije na krajevima oblasti definisanosti ove f-e?

354. Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije

$$f(x) = a^x \sin x, \quad (a>1).$$

Rješenje. Funkcija je definisana za $x \in (-\infty\ +\infty)$. Stacionirane tačke su rješenja jednačine $f'(x) = 0$, tj.

$$(1) \qquad a^x(\ln a \sin x + \cos x) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\ln a} \Longleftrightarrow \quad (\cos x \neq 0),$$
$$\Longleftrightarrow x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a} + m\pi \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = a^x(\ln a \cos x - \sin x) + a^x \ln a\,(\ln a \sin x + \cos x) =$$
$$= a^x(2\ln a \cos x - \sin x + \ln^2 a \sin x),$$

No, u stacionarnim tačkama će biti, zbog (1),

$$f''(x) = a^x(\ln a \cos x - \sin x)_m \stackrel{(1)}{=} a^x(\ln a \cos x_m + \frac{\cos x_m}{\ln a}) =$$
$$= a^x(\ln a + \frac{1}{\ln a}) \cdot \cos x_m$$

Dalje, $(a^x > 0$ za svako x, $a>1) \Rightarrow \ln a > 0 \Rightarrow \ln a + \frac{1}{\ln a} > 0$.

Otuda vidimo da znak drugog izvoda u stacionarnim tačkama zavisi od znaka kosinusa u tim tačkama. Dakle,

$$f''(x_{st}) > 0 \Longleftrightarrow \cos(x_{st.}) > 0 \Longleftrightarrow \cos(-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a} + m\pi) > 0,$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Medjutim,

$$\cos(-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}+m\pi)=\cos(m\pi)\cdot\cos(-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a})=$$

$$=(-1)^m\cdot\cos(-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}),$$ pa za $m=2k$

(zbog $-\frac{\pi}{2}<-\operatorname{arctg}(\frac{1}{\ln a})<0 \Rightarrow$

$\cos(-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a})>0)$ imamo da je

$f''(x_{2k})>0$, dok za $m=2k+1$, $f''(x_{2k+1})<0$.

Otuda funkcija ima lokalne minimume u tačkama

$$x_{2k}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}+2k\pi,\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\dots);$$

a lokalne maksimume u tačkama

$$x_{2k+1}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}+(2k+1)\pi,\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\dots).$$

$$y_{min}=a^{x_{2k}}\sin x_{2k}=a^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}+2k\pi}\cdot\sin(-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a})$$

$$=a^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}+2k\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}},$$

$$y_{max}=a^{x_{2k+1}}\cdot\sin x_{2k}=a^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}+(2K+1)\pi}\sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a})$$

$$=a^{-\operatorname{arctg}\frac{1}{\ln a}+(2K+1)\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}.$$

355. Odrediti minimum funkcije

$$f(x)=\max\{2|x|,\ |1+x|\}$$

Rješenje. Označimo sa

$g(x)=2|x|$, $h(x)=|1+x|$ pa ćemo dobiti

$$g(x)=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ -2x, & x<0\end{cases},\qquad h(x)=\begin{cases}1+x, & x\geqslant -1\\ -1-x, & x<-1.\end{cases}$$

Ako nacrtamo grafike ovih dviju funkcija, vidimo da je minimalna vrijednost funkcije $f(x)$ u onoj tački x u kojoj je

$$-2x = x+1\ ,\ \text{tj. u tački } x=-\frac{1}{3}$$

$$y_{min.} = f\left(-\frac{1}{3}\right)=\max\left\{2\left|-\frac{1}{3}\right|,\ \left|1-\frac{1}{3}\right|\right\}=\frac{2}{3}.$$

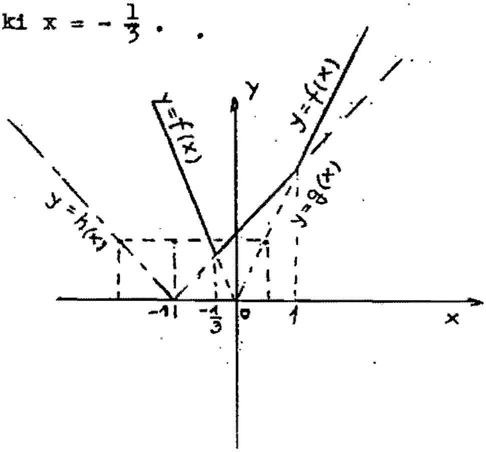
Primijetimo da funkcija $f(x)$ nije diferencijabilna u tački $x=-\frac{1}{3}$, jer je

$$f'_+\left(-\frac{1}{3}\right)\ \lim_{x\to-\frac{1}{3}+}\frac{f(x)-f(-\frac{1}{3})}{x+\frac{1}{3}}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}+}\left(\frac{1+x-\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{3}+}\frac{x+\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}=1,$$

$$f'_-\left(-\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to-\frac{1}{3}-}\frac{f(x)-f(-\frac{1}{3})}{x-\frac{-1}{3}}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}-}\left(\frac{-2x-\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}}\right)=-2\ ,\ \text{tj.}$$

$f'_+(-\frac{1}{3})\neq f'_-(-\frac{1}{3})$, pa ne postoji izvod funkcije $f(x)$ u tački $x=-\frac{1}{3}$.



Napominjemo, da je $f'_-(-\frac{1}{3})<0$, a $f_+(-\frac{1}{3})>0$, pa se i po tome može zaključiti da funkcija ima lokalni strog minimum u tački $x=-\frac{1}{3}$.

356. Naći najveći član niza

$$\sqrt[n]{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Rješenje. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}, \qquad (x > 0).$$

Kako je otuda

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}, \text{ to imamo}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}.\ln x}.\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Pošto prvi izvod u tački $x = e$ mijenja znak od + na − , to će u tački $x = e$ funkcija imati maksimum.

Kako je

$$2 < e < 3;$$
$$1{,}41 \approx \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44,$$

to je najveći član datog niza član

$$a_3 = \sqrt[3]{3}.$$

357. Naći uspravni valjak maksimalnog volumena čija je površina P.

Rješenje. Označimo sa x radius valjka, a visinu sa y: tada je:

$$(1)\ P = 2\pi(x^2+xy) \Rightarrow y = \frac{P-2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{P}{x} - 2\pi x\right);$$

$$V = \pi x^2 y \overset{(1)}{=} \frac{\pi x^2}{2\pi}\left(\frac{P}{x} - 2\pi x\right) = \frac{Px}{2} - \pi x^3, \quad (x > 0).$$

Kako je

$$\frac{dV}{dx} = \frac{P}{2} - 3\pi x^2, \quad \text{to}$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{P}{2} - 3\pi x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

Medjutim, zbog $x > 0$, mora biti $x = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

Drugi izvod funkcije je

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -6\pi x .$$

Pošto je $x > 0$ $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$, to će volumen valjka biti maksimalan za $x = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$.

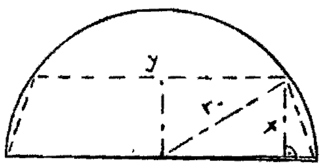
Visina traženog valjka je:

$$y = \frac{P-2\pi x^2}{2\pi x} \; ; \quad y = \frac{P-2\pi\frac{P}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}} = \frac{\frac{2P}{3}}{2\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{P}{6\pi}} .$$

Otuda $y = 2x$, tj. radi se o valjku čiji je osni presjek kvadrat.

358. U polukrug je upisan trapez čija je veća osnovica prečnik kruga. Odrediti trapez maksimalne površine.

Rješenje. Označimo sa x visinu trapeza, a gornju osnovicu sa y, pa imamo:



$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{2r+y}{2} \cdot x \\ \frac{y^2}{4} &= r^2 - x^2 \end{aligned}\right] \Rightarrow P = \frac{2r+2\sqrt{r^2-x^2}}{2} \cdot x = rx + x\sqrt{r^2-x^2} .$$

Potražimo stacionarne tačke funkcije $P(x)$:

$$\frac{dP}{dx} = r + \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} \cdot (-2x) \cdot x + \sqrt{r^2-x^2} , \text{ tj.}$$

$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} . \qquad \text{Otuda } P'(x) = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow r\sqrt{r^2-x^2} + r^2-2x^2 = 0 \Leftrightarrow r\sqrt{r^2-x^2} = 2x^2-r^2 \,|^2 \Rightarrow$$

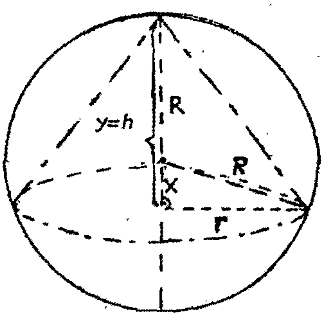
$$\Rightarrow r^4-r^2x^2 = 4x^4-4r^2x^2 + r^4 \Leftrightarrow 4x^4-3r^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x^2-3r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{(\text{pošto } x>0),\ 4x^2-3r^2 = 0\right\} \Leftrightarrow x = \frac{r}{2}\sqrt{3}\,.$$

Pošto izvod $P'(x)$ u tački $x = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ mijenja znak od + na − , to će površina trapeza biti maksimalna za $x = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Gornja osnovica traženog trapeza je $y = 2\cdot\sqrt{r^2-x^2} = r$, ($r$ = radius kružnice).

359. U datu loptu upisati konus najveće zapremine.

Rješenje. Označimo sa r poluprečnik baze konusa, sa R-poluprečnik date lopte, sa x - rastojanje izmedju centra lopte i centra baze konusa, sa y - visinu konusa, pa ćemo imati:



$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{r^2\pi}{3}\cdot y \\ y = R + x \\ r^2 = R^2-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}[(R^2-x^2)(R+x)], x>0.$$

Kako je

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left[R^2-x^2+(R+x)\cdot(-2x)\right], \text{ to}$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow R^2-x^2-2Rx-2x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2R\pm\sqrt{4R^2+12R^2}}{6},\ x>0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{R}{3}\,.$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{\pi}{3}(-2x-2R-4x) = -\frac{\pi}{3}(6x+2R),\ x>0 \Rightarrow$$

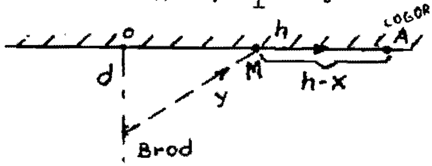
$\frac{d^2V(x)}{dx^2} < 0$, pa će volumen traženog konusa biti maksimalan za $x = \frac{R}{3}$.

Poluprečnik traženog konusa je $r = \sqrt{R^2-x^2} = \sqrt{R^2-\frac{R^2}{9}} = \frac{R}{3}\sqrt{8} =$ $= \frac{2R}{3}\sqrt{2}$, dok je visina

$$h = y = R + x = R + \frac{R}{3} = \frac{4}{3}R.$$

360. Brod je usidren na rastojanju d km od najbliže tačke na obali. Sa broda treba poslati glasnika u logor, koji se nalazi na obali, a on je udaljen od tačke na obali koja je najbliža brodu h km. Ako je brzina veslanja V_1 km/sat, a hodanja V_2 km/sat, koja je tačka na obali, gdje se glasnik mora iskrcati, pa da bi najbrže došao do logora.

Rješenje. Označimo sa T vrijeme za koje će glasnik stići od broda do logora, t_1-vrijeme za koje će se moći iskrcati na obalu, t_2 - vrijeme za koje će stići od mjesta iskrcavanja do logora, x - rastojanje izmedju tačke na obali, koja je najbliža brodu i tačke iskrcavanja.



Na osnovu prethodnog imamo:

$$T(x) = t_1+t_2 = \frac{y}{V_1} + \frac{h-x}{V_2} = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{V_1} + \frac{h-x}{V_2} .$$

Ova funkcija ima stacionarne tačke:

$$T'(x) = \frac{1}{V_1} \cdot \frac{1}{2} (d^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{-1}{V_2} = 0 \iff$$

$$\sqrt{x^2+d^2} = \frac{V_2}{V_1} \cdot x \,\Big|^2 \Rightarrow x^2+d^2-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right) = d^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{V_1^2 \cdot d^2}{V_2^2 - V_1^2}} .$$

Ako je $V_2 > V_1$, onda postoji realno rješenje

$$x_{st.} = \frac{V_1 \cdot d}{\sqrt{V_2^2-V_1^2}} .$$

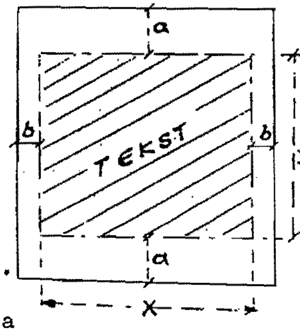
Pošto prvi izvod mijenja znak sa - na +, to će biti minimalno vrijeme, ako se glasnik iskrca u tački M : OM = $x_{st.}$

361. Neka na stranicama neke knjige treba štampati tekst površine S, ali tako da je gornje i donje polje širine a cm, a lijevo i desno b cm. Koje su najekonomičnije dimenzije papira (kojeg treba utrošiti za štampanje takve knjige?

Rješenje. Označimo širinu teksta sa x, a visinu sa y,

P - površinu papira (ukupnu),

P_1 - površinu koja otpada na slobodna polja papira, pa je

Sl. 

$$\left.\begin{aligned} P &= S + P_1 \\ S &= x \cdot y \\ P_1 &= 2(2b+x) \cdot a + 2by \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$P_1 = 2a(2b+x) + 2b \cdot S \cdot \frac{1}{x} \;.$$

Otuda

$$P_{(x)} = S + 2a(2b+x) + 2b \cdot S \cdot \frac{1}{x} \;,$$ a izvod ove funkcije je

$$\frac{dP(x)}{dx} = 2a - \frac{2bS}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{bS}{a} \overset{x>o}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\frac{bS}{a}} \;.$$

Kako je

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2bS \cdot \frac{-2x}{x^4} = \frac{4bS}{x^3} \;,$$

to je $\left(x > o \Rightarrow\right) \frac{d^2P}{dx^2} > 0$; funkcija P(x) ima minimum u tački $x = \sqrt{\frac{bS}{a}}$, pa će najekonomičnije dimenzije papira biti:

$$\sqrt{\frac{bS}{a}} + 2b, \quad i \quad \sqrt{\frac{bS}{a}} + 2a.$$

362. Na krivoj $y = \ln x$ naći tačku najbližu tački O(o,o).

Rješenje. Označimo sa M tačku na krivoj $y = \ln x$, tada su njene koordinate $M(x, \ln x)$; a najkraće (traženo) rastojanje

$$OM = d = \sqrt{x^2 + \ln^2 x} \;.$$

Izvod funkcije d(x) je:

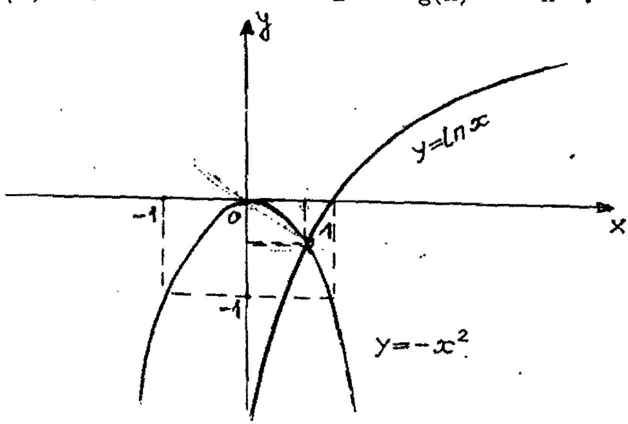
$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+\ln^2 x}} \cdot \left(2x+\frac{2}{x}\ln x\right) = \frac{x^2+\ln x}{x\sqrt{x^2+\ln^2 x}}$$

$$d'(x) = 0 \iff x^2 + \ln x = 0.$$

Medjutim, posljednju jednačinu ne možemo riješiti tačno, nego pribjegavamo približnim metodama.

Ostavlja se čitaocu da riješi posljednju transcedentnu jednačinu i time odredi tačku M $(x, \ln x)$ /iskoristiti neku od numeričkih metoda/.

Napomenimo da se rješenje nalazi u intervalu $(0,1)$, što je očigledno ako se nacrtaju krive
$f(x) = \ln x$ i $g(x) = -x^2$.



§ 3.6. TANGENTA I NORMALA KRIVE U RAVNI – GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA IZVODA –

363. Naći koeficijent tangente krive

$$x = \frac{2t}{t+2}$$

$$y = \frac{t}{t-1}\quad, \text{ gdje je } t \text{ realan parametar,}$$

u tački (1,2).

Rješenje. $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{t-1-t}{(t-1)^2}}{\frac{2(t+2)-2t}{(t+2)^2}} = \frac{-(t+2)^2}{4(t-1)^2}\ ;$$

tački (1,2) odgovara vrijednost parametra

$$\left(1 = \frac{2t}{t+2}\ ,\quad 2 = \frac{t}{t-1}\right) \Longleftrightarrow t = 2\ .$$

Otuda

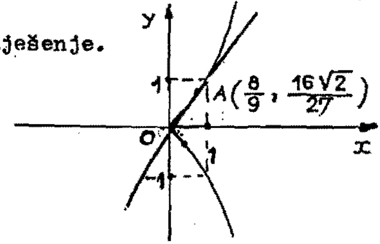
$$y'_{t=2} = \frac{-(2+2)^2}{4(2-1)^2} = \frac{-16}{4} = -4.$$

364. Data je kriva

$$x = t^2\ ,\quad y = t^3.$$

Pokazati da je tangenta krive povučena u tački za $t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ istovremeno i normala krive.

Rješenje.



Nadjimo koeficijent smjera tangente u tački $A\left(\frac{8}{9}\ ,\ \frac{16\sqrt{2}}{27}\right)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2dt}{2tdt} = \frac{3}{2}\,t\ , \text{ pa je}$$

$$k = y'_A = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}\ .$$

Neka je B tačka na krivoj u kojoj normala ima koeficijent smijera $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tada imamo

$$k_1 = y'_B = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{3}{2}\,t_B = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ , \text{ tj. } t_B = -\frac{\sqrt{2}}{3}\ , \text{ pa tačka B}$$

ima koordinate

$$x_B = \frac{2}{9}\,, \quad y_B = \frac{-2\sqrt{2}}{27} \quad .$$

Da bi pokazali da je tangenta u tački A u isto vrijeme normala na krivu u tački B, dovoljno je pokazati da vrijedi $k_{AB} = k$.

Stavimo: $$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{27}}{\frac{2}{9} - \frac{8}{9}} = \sqrt{2} = k\ .$$

365. Dokazati da se krive

$$y^2 = 2\,m\,(x - a)$$

$$y = e^{\frac{b-x}{m}}$$

sijeku pod pravim uglom.

Rješenje. Dovoljno je pokazati da je u presječnoj tački (x_o, y_o) izvod jedne funkcije jednak suprotnoj recipročnoj vrijednosti izvoda druge funkcije, tj.

$$y_1'(x_o) = -\frac{1}{y_2'(x_o)}\,, \quad \text{gdje je}$$

$$y_1 = \sqrt{2m(x-a)}\,, \qquad y_2 = e^{\frac{b-x}{m}}$$

Presječna tačka se dobije izjednačavajući ordinate;

(1) $$\sqrt{2m(x_o-a)} = e^{\frac{b-x_o}{m}}\,, \quad \text{ali}$$

nama nije potrebna eksplicitna vrijednost presječne tačke (apscise x_o), jer

$$\left(y_1' = \frac{m}{\sqrt{2m(x-a)}}\,, \quad y_2' = -\frac{1}{m}\cdot e^{\frac{b-x}{m}} \right) \xrightarrow{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad y_1'(x_o) = -\frac{1}{y_2'(x_o)} \quad .$$

366. Dokazati da sve normale krive

$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \quad (a > o)$$

prolaze kroz jednu fiksnu tačku.

Rješenje. Kako je

$$\frac{dx}{dt} = \dots = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2};$$

$$\frac{dy}{dt} = \dots = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}; \text{ to je } y' = \frac{dy}{dx} = \dots = \frac{-2t}{1-t^2}.$$

Otuda jednačina normale glasi:

$$Y - \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{at}\left(x - \frac{2at}{1+t^2}\right), \text{ odnosno}$$

$$(*)\ Y = \frac{1-t^2}{2t}\, x.$$

Iz jednačine (*) vidimo da sve normale(čije se jednačine dobiju dajući parametru t razne vrijednosti) prolaze kroz koordinatni početak (fiksnu tačku).

Te normale obrazuju pramen. Nije teško primijetiti (sabirajući i kvadrirajući date parametarske jednačine dobije se jednačina kružnice) da data kriva predstavlja kružnicu.

367. Za koje se vrijednosti parametra λ mogu povući tangente na krivu

$$y = (x + \lambda)e^x$$

iz koordinatnog početka?

Rješenje. Kako je

$$y' = e^x + (x+\lambda).e^x = e^x(x+\lambda+1),$$

to jednačina tangente na krivu, koja prolazi kroz O(o,o), ima oblik:

$$Y - y = e^x(x+\lambda+1)\ (X-x),$$

a pošto mora prolaziti kroz tačku O (o,o), mora vrijediti

$$0-(x+\lambda)e^x = e^x(x+\lambda+1)\ (0-x),\ tj.$$

$$(1)\quad x^2+\lambda x-\lambda = 0.$$

Da bi jednačina (1) imala realna rješenja mora biti diskriminanta $D \geqslant 0$, tj.

$$\lambda^2 + 4\lambda \geqslant 0 \iff \lambda(\lambda+4) \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \{(\lambda \leqslant 0 \wedge \lambda+4 \leqslant 0) \vee (\lambda \geqslant 0 \wedge \lambda+4 \geqslant 0)\} \iff$$

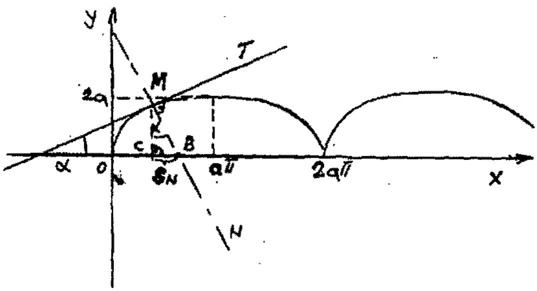
$$\iff (\lambda \leqslant -4 \vee \lambda \geqslant 0) \iff \lambda \in (-\infty,-4] \cup [0,+\infty).$$

368. Na cikloidi

$$x = a(t-\sin t)$$
$$y = a(1-\cos t)$$

naći tačku M čija će ordinata sa subnormalom i normalom činiti trougao maksimalne površine.

Rješenje. Cikloida je ravna kriva koju opisuje fiksirana tačka M, nepokretno povezana sa kružnicom koja se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj pravoj. Ako je tačka M smještena na kružnici, dobijamo običnu cikloidu (koju ćemo mi, inače, posmatrati), ako je unutra - skraćenu, ako je van kružnice - produženu.



Površina traženog trougla je

$$P = \frac{S_N \cdot y_M}{2}, \text{ a}$$

$$\frac{S_N}{y_M} = |\operatorname{tg}\alpha| = |y'| = \left|\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right| = \frac{|\sin t|}{1-\cos t},$$

pa imamo

$$P = \frac{y_M^2 \cdot |y'|}{2} = \frac{1}{2} a^2(1-\cos t)|\sin t| \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{a^2}{2}(\sin^2 t+\cos t-\cos^2 t)\cdot \operatorname{sgn}(\sin t).$$

Stacionarne tačke funkcije P(t) su za $\frac{dP}{dt} = 0$, tj.

$$\frac{1}{2}a^2(\sin^2 t + \cos t - \cos^2 t) = 0, \text{ odnosno}$$

$$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\cos t)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow$$

$$(\cos t = 1 \ \wedge \ \cos t = -\frac{1}{2}) \Rightarrow (t = 2k\pi, \ t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$t = \frac{4\pi}{3} + 2\,k\pi, \ k = 0, \pm 1, \dots).$$

Provjerimo da li se radi o ekstremu funkcije $P(t)$ u ovim tačkama.

Pošto je

$$\frac{d^2P(t)}{dt^2} = \frac{a^2}{2}\ (2\sin t\cos t - \sin t + 2\cos t\sin t)\cdot \operatorname{sign}(\sin t),$$

to

$$\frac{d^2P(0)}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2P(\frac{2\pi}{3})}{dt^2} < 0, \qquad \frac{d^2P(\frac{4\pi}{3})}{dt^2} < 0.$$

Odatle zaključujemo da funkcija uzima maksimalnu vrijednost za $t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, i $t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $k = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$

Na kraju koordinate tačke M su:

$$x_M = a\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y_M = a \cdot \frac{3}{2}.$$

369. Na elipsi odrediti tačku u kojoj radius vektor i normala čine najveći ugao.

Rezultat. $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

§ 3.7. KONKAVNOST I KONVEKSNOST - PREVOJNE TAČKE

370. Ispitati konkavnost, konveksnost i prevojne tačke krive linije $y = \sin x$.

Rješenje. Sinusoida $y = \sin x$ je konkavna prema pozitivnom smjeru y-ose u svakoj tački gdje je $y'' = -\sin x > 0$, dakle, naprimjer (pošto je funkcija periodična s periodom 2π) izmedju π i 2π; $tg\alpha$ raste od vrijednosti -1 u $x=\pi$ preko vrijednosti 0 do vrijednosti $+1$ u tački $x = 2\pi$; ona je konveksna svugdje gdje je $-\sin x < 0$, dakle naprimjer izmedju 0 i π gdje $tg\alpha$ (koeficijent smjera tangente na sinusoidu) pada od $+1$ preko 0 do -1.

U tačkama $0, \pi, 2\pi$ prelazi krivulja iz konkavnosti na konveksnost ili obrnuto Prema tome funkcija $y = \sin x$ ima prevojne tačke za $x_k = k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Napomenimo, da u tačkama

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

funkcija ima maksimum i da je u tim tačkama konveksna, dok u tačkama

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

funkcija (data) ima minimum (u tim tačkama je takodje konkavna).

371. Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke krivih linija

$y = x^{\frac{5}{3}}$, $y = x^{\frac{8}{3}}$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^6$, $y = \log \cos x$.

Rješenje. 1^o Kod funkcije $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ imamo:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = \frac{10}{9} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

Ako prvi izvod izjednačimo s nulom, dobijamo da je

$$x_o = 0.$$

Drugi izvod, i svi sljedeći izvodi, zbog negativnog eksponenta, ne postoje u tački $x_o = 0$.

Za $x > 0$, $f''(x) > 0$ pa je grafik za $x > 0$ konkavan, dok je za $x < 0$ ($f''(x) < 0$ za $x < 0$) grafik konveksan prema +y-osi. Iako drugi izvod u $x = 0$ ne postoji, možemo zaključiti da je tačka $x = 0$ prevojna tačka, jer drugi izvod u toj tački mijenja znak.

2° Za funkciju $f(x) = x^{\frac{8}{3}}$ je

$$f'(x) = \frac{8}{3}\, x^{\frac{5}{3}} ,$$

$$f''(x) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} ,$$

$$f'''(x) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

Vidimo da je u tački $x_o = 0$: $f'(o) = 0$, $f''(o) = 0$, ali $f'''(o)$, kao i svi sljedeći izvodi, u tački $x_o = 0$ ne postoje (jer u njima figuriše x sa negativnim eksponentom). Da bi ispitali karakter (prirodu) tačke $x_o = 0$, uzimamo dvije vrijednosti: $-\mathcal{E}$ i $+\mathcal{E}$ u okolini tačke $x_o = 0$, pa ispitajmo znak prvog i drugog izvoda:

$$f''(-\mathcal{E}) = f''(\mathcal{E}) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \mathcal{E}^{\frac{2}{3}} > 0 \Rightarrow \text{da tačka } x_o = 0$$

nije prevojna tačka;

$$f'(-\mathcal{E}) = \frac{8}{3} \sqrt[3]{-\mathcal{E}^5} < 0, \quad f'(+\mathcal{E}) = \frac{8}{3} \sqrt[3]{+\mathcal{E}^5} > 0 ;$$

dakle, prvi izvod prolazeći kroz nulu, mijenja znak: sa negativnih vrijednosti prelazi na pozitivne, pa funkcija ima u tački $x_o = 0$ minimum.

Pošto je drugi izvod uvijek nenegativan to je grafik funkcije $y = x^{\frac{8}{3}}$ konkavan, jer je $f''(x) = 0$ samo za $x = 0$ (a ne u intervalu).

3° Funkcija $y = x^3$ ima izvode:

$$y' = 3\,x^2$$
$$y'' = 6\,x$$

$$y''' = 6$$
$$y^{(4)} = 0;$$

a njihova vrijednost u tački $x_o = 0$ je:

$$f'(o) = 0$$
$$f''(o) = 0$$
$$f'''(o) = 6 > 0.$$

Dakle, u tački $x_o = 0$ ne postoji ni konkavnost ni konveksnost, već samo prevojna tačka.

Za $x > 0$, $f''(x) > 0$; funkcija je konkavna, dok je za $x < 0$, $f''(x) < 0$, funkcija konveksna.

4^o Kod funkcije $f(x) = x^4$ imaćemo:

$$f'(x) = 4\,x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$
$$f'''(x) = 24x$$
$$f^{(4)}(x) = 24,$$

a u tački $x_o = 0$,

$$f'(o) = f''(o) = f'''(o) = 0,\; f^{(4)}(o) = 24 > 0.$$

Odatle vidimo da u tački $x_o = 0$ funkcija ima minimum, jer je prva od derivacija koja se ne poništava u $x_o = 0$ parnoga reda i > 0 (da je bila < 0, funkcija bi imala maksimum, a da je bila neparnog reda, funkcija bi imala prevojnu tačku).

Grafik funkcije je uvijek konkavan, jer je

$f''(x) \geqslant 0$ za svako x, a $f''(x) = 0$ samo u jednoj tački, (a ne u nekom intervalu).

5^o Za funkciju $y = x^5$ imaćemo:

$$f'(x) = 5\,x^4,$$
$$f''(x) = 20\,x^3,$$
$$f'''(x) = 60\,x^2,$$
$$f^{(4)} = 120\,x,$$
$$f^{(5)} = 120\,.$$

Grafik funkcije je konkavan za $x > 0$, jer je za $x > 0$, $f''(x) > 0$, dok je konveksan za $x < 0$ ($f''(x) < 0$ za $x < 0$).

Da bi našli ekstreme funkcije treba riješiti jednačinu

$$f'(x) = 0,$$

(jer funkcija nema tačaka u kojima nema prve derivacije niti tačaka u kojima je prva derivacija beskonačna, a na krajevima definicionog područja ne uzima konačnu vrijednost).

No, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x_0 = 0$, a u toj tački je

$$f'(o) = f''(o) = f'''(o) = f^{(4)}(o) = 0 \neq f^{(5)}(o) = 12o > 0.$$

Dakle, u tački $x_0 = 0$ je prevojna tačka.

6° Funkcija $f(x) = x^6$ ima izvode:

$$f'(x) = 6x^5,$$

$$f''(x) = 3o\ x^4, \quad f'''(x) = 120\ x^3, \quad f^{(4)} = 360\ x^2,$$

$$f^{(5)} = 720\ x, \quad f^{(6)}(x) = 720, \quad f^{(7)}(x) = \ldots = 0$$

Pošto je u tački $x_0 = 0$; $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(5)}(0) = 0 \neq f^{(6)}(0) = 720 > 0$

to je u toj tački funkcija konkavna prema +y-osi (tu funkcija ima takodje minimum).

Grafik je uvijek konkavan, jer je za svako x , $f''(x) \geqslant 0$ (a $f''(x) = 0$ samo za $x = 0$).

7° Kod funkcije $f(x) = \log \cos x$ imaćemo:

$$f'(x) = -\mathrm{tg}x, \quad f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x},$$

pa je za

$$x_0 = 0:$$

$$f'(o) = o, \quad f''(o) = -1 < 0.$$

Prema tome ova funkcija je u tački $x_0 = 0$ konveksna prema + y -osi (tu funkcija ima maksimum). Ova funkcija nema prevojnih tačaka, jer je $f''(x) \neq 0$ za svako realno x (drugi izvod nikad ne mijenja znak).

Inače funkcija je konveksna prema + y-osi, jer je za svako x, iz definicionog područja funkcije $f(x)$, $f''(x) < 0$.

372. Kakva je priroda tačke x_0, za koju vrijedi:

1° $f'(x_0) = 0$;

2° za $x = x_0$ funkcija $f(x)$ nema ni minimum ni maksimum?

Rješenje. Iz uslova 1° i 2° slijedi da su svi parni izvodi funkcije $f(x)$, u tački $x = x_0$, jednaki nuli. Ako je neki od neparnih izvoda $\neq 0$, onda je u tački $x = x_0$ prevojna tačka. (Naravno, da ova dva prethodna zaključka vrijede ako data funkcija ima izvode višeg reda u tački $x = x_0$).

Na kraju, ako su svi izvodi višega reda $= 0$ u tački $x = x_0$, onda je tu riječ o funkciji $y = \text{const}$! *Ali ne uvijek; npr. f-a $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot e^{-1/x^2}$ za $x \neq 0$, a $f(0) = 0$, ima sve izvode $= 0$ u $x = x_0 = 0$, a ipak je $x_0 = 0$ prevojna tačka, a f-a nije konstanta).*

373. Kako će glasiti uslov $f''(x) = 0$ za prevojnu tačku krive linije koja je data u parametarskom obliku?

Rješenje. Neka je kriva linija data izrazima:

$$x = f_1(t)$$
$$y = f_2(t),$$

tada je njen drugi izvod dat izrazom

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f_1'(t) \cdot f_2''(t) - f_2'(t) \cdot f_1''(t)}{[f_1'(t)]^3}$$

Dakle, potreban uslov za prevojnu tačku je:

$$\frac{f_1'(t) \cdot f_2''(t) - f_2'(t) \cdot f_1''(t)}{(f_1'(t))^3} = 0$$

374 Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke kod cikloide:

$$y = a(1-\cos t)$$
$$x = a(t-\sin t).$$

Rješenje. Kako je

$$f'(x) = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)},$$

$$f''(x) = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2}, \text{ jer}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t\,dt}{a(1-\cos t)dt}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{[y''(t)\,.\,x'(t)]dt^3 - [x''(t).y'(t)]dt^3}{[x'(t)\,dt]^3},$$

to cikloida ima maksimume za:

$$t = (2k+1)\pi, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

jer je u tim tačkama

$$f''(x) < 0.$$

Prema tome u okolini svih tih tačaka cikloida je konveksna prema +y-osi. Preciznije, cikloida je konveksna prema osi +y u intervalima: $(-2a\pi, 0)$; $(0, 2a\pi)$; $(-4a\pi, -2a\pi)$; $(2a\pi, 4a\pi)$; ... ; dakle, u vim intervalima, na čijim krajevima funkcija ima vrijednost nulu. Inače, cikloida nije nikad konkavna.

Napomenimo da se minimumi ove funkcije ne mogu dobiti rješavanjem jednačine

$$f'(x) = 0.$$

Zato treba ispitati vrijednosti funkcije na krajevima definicionog područja i istražiti tačke u kojima funkcija nema izvoda, ili izvod nije konačan. Odmah vidimo da prvi izvod u tačkama $t = 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ ne postoji, ali postoji beskonačan lijevi i desni izvod $f'_-(2ak\pi) = -\infty$, $f'_+(2ak\pi) = +\infty$), pa funkcija ima lokalne (stroge) minimume u tačkama

$$x = 0, \pm 2a\pi, \pm 4a\pi, \ldots$$

375. Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke funkcije

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & (x \neq 0) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Rješenje. Funkcija je neprekidna u tački $x = 0$, jer je $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$, a njen izvod

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

je prekidan u tački $x = 0$ zbog $\cos\frac{1}{x}$. Prema definiciji izvoda u tački $x = 0$, biće

$$f'(o) = \lim_{x\to o} \frac{f(x) - f(o)}{x} = \lim_{x\to o} \frac{x^2.\sin \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to o} x.\sin \frac{1}{x} = 0, \ (\text{jer } |x.\sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \varepsilon\ ),$$

tj. $f'(o) = 0$. Dakle funkcija je diferencijabilna (ima konačan izvod) u tački $x = o$, iako je njen izvod $f'(x)$ prekidan u toj tački, jer $f'(x)$ ne teži odredjenoj graničnoj vrijednosti kad $x \to o$, tj. $f'(o) = 0$, a $\lim_{x\to o} f'(x)$ ne postoji.

Kako vidimo rješenje jednačine

$$f'(x) = 0,$$

je $x = 0$, ali ma u kakvom malom intervalu oko tačke $x_o = 0$ data funkcija ima beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih vrijednosti.

Prema tome, ma u kako malom intervalu oko tačke $x_o = 0$ ne mogu se primijeniti definicije konkavnosti, konveksnosti i prevojne tačke, tj. u tom intervalu funkcija je beskonačno mnogo puta konkavna i konveksna i ima beskonačno mnogo prevojnih tačaka, pa ma kako uzeli malen interval oko tačke $x_o = 0$.

Primjedba. 1^o Provjeriti ima li jednačina

$$f'(x) = 0$$

i drugih rješenja osim $x_o = 0$?

2^o Naći ekstreme funkcije $f(x)$ (diskutovati!).

3^o Provjeriti (ispitati) rješenja jednačine

$$f''(x) = 0$$

i zatim izvesti zaključak o karakteru takvih rješenja.

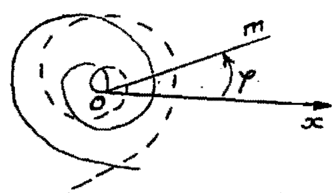
4^o Šta je sa konveksnošću i konkavnošću u cijelom definicionom području funkcije $f(x)$?

5^o Skicirati grafik funkcije $f(x)$, kao i funkcija $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x.\sin\frac{1}{x}$.

376. Ispitati konkavnost i konveksnost prema polu kod Arhimedove, hiperboličke i logaritamske spirale.

Rješenje. 1^o Arhimedova spirala je kriva koju opisuje tačka krećući se ravnomjerno (jednako) po pravoj koja se, opet, ravnomjerno (jednako) obrće oko jedne svoje tačke. Ako se proizvoljna tačka O prave o kojoj je riječ uzme za pol, a zadata prava sa izabranim smijerom na njoj za polarnu os, jednačina Arhimedove spirale u polarnom koordinatnom sistemu će imati oblik: $\rho = a\varphi$, gdje je $\underline{a}$ konstanta. Arhimedova spirala ima dvije grane od kojih jedna odgovara vrijednostima $\varphi > 0$, a druga vrijednostima $\varphi < 0$.

Rastojanje izmedju dva susjedna navoja duž radius-vektora je konstantno i jednako razlici $a\cdot(\varphi + 2\pi) - a\varphi = 2\pi a$.



$$\rho'(\varphi) = a, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a\varphi}, \left(\frac{1}{\rho}\right)' = -\frac{1}{a\varphi^2}$$

$$\rho''(\varphi) = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{2}{a\varphi^3},$$

otuda

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right] =$$

$$= \frac{1}{a\varphi}\left[\frac{1}{a\varphi} + \frac{2}{a\varphi^3}\right] = \frac{1}{a^2\varphi^2}\left[1 + \frac{2}{\varphi^2}\right] > 0.$$

Dakle, Arhimedova spirala je konkavna prema polu.

2° Kod hiperboličke spirale

$$\rho = \frac{a}{\varphi}$$

imaćemo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi}{a}, \left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{1}{a}, \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0,$$

pa je izraz (uslov za konkavnost)

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right] = \frac{\varphi}{a}\left[\frac{\varphi}{a} + 0\right] = \frac{\varphi^2}{a^2} > 0 \quad \text{i otuda je}$$

kriva konkavna prema polu.

3° Kod logaritamske spirale

$$\rho = a \cdot e^{k\varphi} \qquad (a > 0, \quad k > 0)$$

imaćemo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a \cdot e^{k\varphi}} = \frac{1}{a} \cdot e^{-k\varphi}, \left(\frac{1}{\rho}\right)' = -\frac{k}{a} \cdot e^{-k\varphi},$$

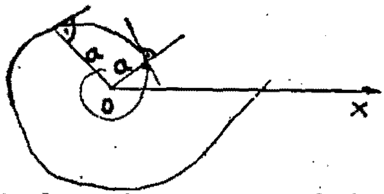
$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{k^2}{a} \cdot e^{-k\varphi}, \text{ pa je}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]=\frac{1}{a}\cdot e^{-k\varphi}\left[\frac{1}{a}\cdot e^{-k\varphi}+\frac{k^2}{a}\cdot e^{-k\varphi}\right]>0$$

za $-\infty < \varphi < +\infty$.

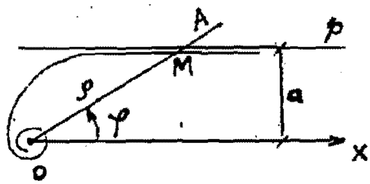
Dakle luk krive je konkavan prema polu.

Logaritamska spirala ima oblik:



Hiperbolička spirala je kriva u ravni koju opisuje tačka M kad se kreće po polupravoj OA koja se obrće, i to tako da je rastojanje tačke M od centra obrtanja O obrnuto proporcionalno uglu obrtanja $\rho = \frac{a}{\varphi}$, gdje je a rastojanje pola O od neke prave p - asimptote hiperboličke spirale; ta asimptota je paralelna s polarnom osi x.

Ako se zavisnost izmedju ρ i φ izrazi pomoću Dekartovih koordinata (u obliku: y = a:x), grafik ove zavisnosti će biti hiperbola. Odatle i potiče naziv hiperbolička spirala.



§ 3.8 ISPITIVANJE TOKA I KONSTRUKCIJA GRAFIKA FUNKCIJA

377. - Ispitati precizno tok funkcije

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

i nacrtati njen grafik.

Riješenje:

1^o Funkcija je definisana i neprekidna u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

2^o Kako je

$$f(x) = x^3-6x^2+9x-4 = x^2(x-4) -2x(x-4) + x-4 =$$

$= (x-4)\ (x^2-2x+1) = (x-4)\ (x-1)^2,$

izlazi da funkcija ima dvostruku nulu $x = 1$ i nulu $x = 4$. Pošto je uvijek $(x-1)^2 \geq 0$, znak funkcije zavisi samo od faktora $x - 4$: za $x < 4$, $f(x) < 0$, a za $x > 4$, $f(x) > 0$.

3° Funkcija nije ni parna ni neparna. Grafik funkcije se proteže u beskonačnost, jer ako se funkcija napiše u obliku

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right),$$

vidi se da $f(x) \to +\infty$ kad $x \to +\infty$ i $f(x) \to -\infty$ kad $x \to -\infty$.

4° Prvi i drugi izvod funkcije imaju oblik:

$$f'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)\ (x-3),$$

$$f''(x) = 6x-12 = 6(x-2).$$

Stacionarne tačke za $f(x)$ jesu korijeni jednačine $f'(x) = 0$, tj.

$$3(x-1)\ (x-3) = 0.$$

Odavde sleduju dva rješenja:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3,$$

koja predstavljaju apscise stacionarnih tačaka.

Stacionarne tačke izvodne funkcije $f'(x)$ su korjeni jednačine

$$f''(x) = 0; \text{ tj. } 6(x-2) = 0.$$

Rješenje ove jednačine je $x = 2$.

Ispitajmo intervale monotonosti funkcije $f(x)$. Stacionarnim tačkama $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$ podijeljena je oblast definisanosti funkcije na sljedeća tri intervala:

$$(-\infty, 1), (1,3), (3, +\infty).$$

Ispitajmo znak izvoda funkcije $f(x)$, tj. znak izraza

$$f'(x) = 3(x-1)\ (x-3):$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \{[(x-1>0)\wedge(x-3>0)] \vee [(x-1<0)\wedge(x-3<0)]\}$$
$$\Leftrightarrow \{[x>3]\vee[x<1]\} \Leftrightarrow \{x\in(-\infty,\ 1) \vee\ x\in(3,+\infty)\}$$
$$\Leftrightarrow\ x\in(-\infty,\ 1)\cup(3,\ +\infty),$$
$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \{[(x-1>0)\wedge(x-3<0)]\ \vee\ [(x-1<0)\wedge(x-3)>0]\}$$
$$\Leftrightarrow\ x\in(1,3).$$

Prema tome funkcija raste u intervalima $(-\infty,\ 1)$ i $(3,\ +\infty)$, a u intervalu $(1,3)$ opada.

U stacionarnoj tački $x_1 = 1$ mijenja se karakter monotonosti funkcije tako da ona iz raščenja prelaži u opadanje, te tačka $x_1 = 1$ predstavlja tačku lokalnog (relativnog) maksimuma. Ovaj maksimum ima vrijednost

$$y_{max} = f\ (1) = 0.$$

U stacionarnoj tački $x_2 = 3$ mijenja se karakter monotonosti funkcije tako da ona iz opadanja prelazi u raščenje, te u $x_2 = 3$ funkcija $f\ (x)$ ima lokalni minimum. Ovaj minimum ima vrijednost

$$y_{min} = f\ (3) = -\ 4.$$

5° Pošto je $f''(x)<0$ za $x<2$, izlazi da je grafik funkcije $f\ (x)$ konveksan u intervalu $(-\infty,\ 2)$. Slično, zbog $f''(x)>0$ za $x>2$, slijedi da je grafik funkcije konkavan u intervalu $(2,\ +\infty)$.

Dakle, vidimo da funkcija $y = f\ (x)$ u $x = 2$ mijenja konveksnost (što je dovoljan uslov za prevojnu tačku) pa zaključujemo da grafik ima prevojnu tačku $M(2,\ -\ 2)$

6° Pošto je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f\ (x) = \pm\ \infty\ ,\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f\ (x)}{x} = +\infty\ ,$$

to kriva nema horizontalnih i kosih asimptota. Takodje kriva nema ni vertikalnih asimptota, jer je neprekidna u cijelom intervalu $(-\infty,\ +\infty)$ (funkcija poprima konačnu i odredjenu vrijednost za svako realno x).

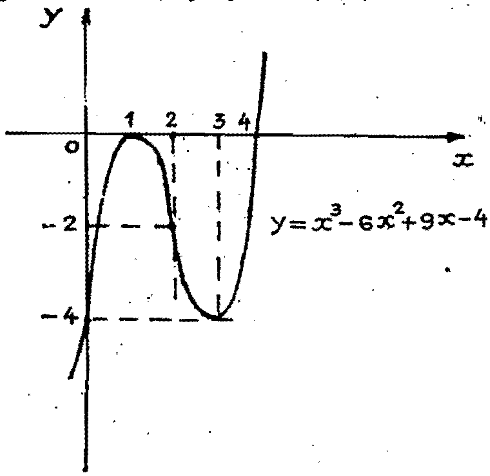
7^0 Grafik siječe y-osu u tački

$$y = -4 \Leftrightarrow (x = 0 \land y = x^3-6x^2+9x-4).$$

Tablica nadjenih podataka izgleda ovako:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−3	−	0	+
$f''(x)$	−	$-6<0$	−	0	+	$6>0$	+
$f(x)$	raste ↗	0 max.	opada ↘	(prevoj.t) −2	opada ↘	−4 min.	raste ↗

Skica grafika funkcije $y = f(x)$ prikazana je na slici:



378. - Ispitati tok funkcije i nacrtati krivu liniju $y = f(x)$ ako je $f(x) = x^6-3x^4+3x^2$.

Rješenje.

1^0 Funkcija je definisana i neprekidna u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

2^0 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^4-3x^2+3) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \lor x^4-3x^2+3 = 0) \Leftrightarrow x=0.$

Prema tome funkcija $f(x)$ ima dvostruku nulu $x_{1,2} = 0$. Kako je $x^4-3x^2+3>0$ i $x^2\geq 0$, to je funkcija uvijek nenegativna, tj. $f(x)\geq 0$ za svako x.

3^0 $f'(x) = 6x^5-12x^3+6x = x(6x^4-12x^2+6)$,

$f''(x) = 30x^4-36x^2+6 = 6(5x^4-6x^2+1)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x^4-2x^2+1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x^4-2x^2+1 = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1)$,

tj. funkcija $f'(x)$ ima stacionarne tačke sa apscisama $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ i $x_3 = -1$.

Ispitajmo karakter stacionarnih tačaka i intervale monotonosti funkcije $f(x)$. Stacionarnim tačkama podijeljena je oblast definisanosti funkcije $f(x)$ na sljedeće intervale:

$$(-\infty, -1),\ (-1,0),\ (0,1) \text{ i } (1,+\infty).$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x(x^4-2x^2+1) > 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)^2 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{x > 0 \wedge (x^2-1)^2 > 0\} \Leftrightarrow \{x > 0 \wedge x \neq 1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (1, +\infty);$$

sličnim rezonovanjem dobiva se

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1,0).$$

Prema tome funkcija $f(x)$ raste u intervalu $(0, +\infty)$, a opada u intervalu $(-\infty, 0)$; dakle u tački $x_1 = 0$ (stacionarnoj tački) mijenja se karakter monotonosti tako da funkcija $f(x)$ prelazi iz opadanja u rašćenje, te tačka $x_1 = 0$ predstavlja tačku lokalnog minimuma čija je vrijednost

$$y_{min} = f(0) = 0.$$

U preostalim stacionarnim tačkama ne mijenja se znak prvog izvoda, pa tu funkcija nema extrema.

Primijetimo da je $f''(0) = 6 > 0$, $f''(-1) = f''(+1) = 0$, tj. da je u stacionarnim tačkama $x_2 = -1$ i $x_3 = 1$ zadovoljen potreban uslov za prevojne tačke.

Provjerimo da li je u tim tačkama zadovoljen i dovoljan uslov, tj. da u tim tačkama drugi izvod mijenja znak (mijenja karakter konveksnosti i konkavnosti).

4^{o} Pošto funkcija ima, u cijelom definicionom području, drugi izvod, to se prevojne tačke nalaze, ako ih ima, medju rješenjima jednačine

$$f''(x) = 0, \text{ tj.}$$
$$5x^4 - 6x^2 + 1 = 0,$$

odakle je

$$(x^2)_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{10} \Rightarrow$$
$$x_{1/2}^2 = 1 \text{ i } x_{3,4}^2 = \frac{1}{5}, \text{ tj.}$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ x_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Prevojna tačka će biti sigurno ona tačka za koju drugi izvod, pri prolazu kroz tu tačku, mijenja znak. Zato ustanovimo znak drugog izvoda (karakter konveksnosti).

Kako je

$$f''(x) = 30x^4-36x^2+6 = 6(5x^4-6x^2+1) =$$
$$= 30(x+1)\left(x+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(x-1),$$

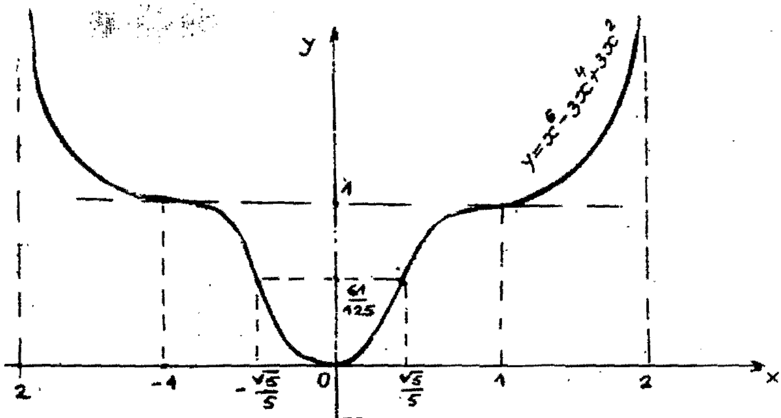
te, pomoću tabele, dobivamo

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$x+\frac{\sqrt{5}}{5}$	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$x-\frac{\sqrt{5}}{5}$	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

Pošto drugi izvod mijenja znak u stacionarnim tačkama izvodne funkcije $f'(x)$ (primijetimo da su dvije stacionarne tačke izvodne funkcije u isto vrijeme stacionarne tačke funkcije $f(x)$), to su sve četiri tačke prevojne tačke (apscise prevojnih tačaka krive $y = f(x)$).

Nadjimo vrijednost funkcije u svima karakterističnim tačkama:

$f(0) = 0,\ f(-1) = 1,\ f(1) = 1,\ f\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{61}{125} = f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$



Sl.

5° Kriva $y = x^6-3x^4+3x^2$ nema asimptota (obrazloženje isto kao u prethodnom zadatku).

6° Primijetimo, da je data detaljna analiza, iako se rad mogao za polovinu smanjiti zbog $f(-x) = f(x)$.

379. Nacrtati grafik funkcije $y = f(x)$ i ispitati njenu varijaciju, ako je

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}.$$

Rješenje.

1° Funkcija je definisana i neprekidna za svako realno x.

2° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}} = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1)$

$f(x) \geqslant 0$ jer je $x^{\frac{2}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2} =$

$= \sqrt[3]{x^2(1-x)^2} = \sqrt[3]{[x(1-x)]^2} = \sqrt[3]{(x-x^2)^2} \geqslant 0$ za svako x.

3° $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-1) =$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{x^{2/3}}{(1-x)^{1/3}}\right) = \ldots = \frac{2}{3}\cdot\frac{1-2x}{x^{1/3}\cdot(1-x)^{1/3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-2 \cdot x^{1/3} \cdot (1-x)^{1/3} - (1-2x)\left[\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-x)^{1/3} - \frac{1}{3}\, x^{1/3} \cdot (1-x)^{-2/3}\right]}{x^{2/3}\ (1-x)^{2/3}}$$

$$= \ldots = -\frac{2}{9}\ \frac{2x + 1 - 2x^2}{x^{4/3} \cdot (1-x)^{4/3}} \ ;$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \ ,$$

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \ .$$

Prvi i drugi izvod funkcije $y = f(x)$ su neprekidni za svako x izuzev za $x = 0$ i $x = 1$.

Ponašanje krive u okolini ovih tačaka (tj. tačaka prekida prvog izvoda) ispitaćemo tražeći lijeve i desne granične vrijednosti izvodne funkcije $f'(x)$ u tim tačkama, jer se može desiti da pomenute granične vrijednosti ne postoje, a da ipak izvodi postoje, kao što je slučaj sa funkcijom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \ , & x \neq 0 \\ 0 \ , & x = 0. \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^{2/3} \cdot (1-x)^{2/3}}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{x}} = -\infty ,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ldots = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{x}} = +\infty ,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^{2/3} \cdot (1-x)^{2/3} - 0}{x - 1} =$$

$$= -\lim_{x \to 1-} \frac{x^{2/3}}{(1-x)^{1/3}} = -\infty ,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x^{2/3} \cdot (1-x)^{2/3}}{x - 1} = \ldots = +\infty ,$$

odakle slijedi, da grafik funkcije $y = f(x)$ ima šiljak u tačkama $x = 0$ i $x = 1$. Takodje u tim tačkama funkcija ima ekstrem i to minimum (lokalni), jer je lijevi izvod negativan $(-\infty)$, a desni pozitivan $(+\infty)$.

Medjutim, funkcija $y = f(x)$ ima ekstrem i u stacionarnoj tački $x = \frac{1}{2}$ i to lokalni maksimum, jer je

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{2\frac{1}{2} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{4/3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5/3}} < 0 .$$

Prekidnim tačkama prvog izvoda $f'(x)$, tj. tačkama $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ i stacionarnom tačkom $x_3 = \frac{1}{2}$, definiciono područje funkcije $y = f(x)$ podijeljeno je na sljedeće četiri intervala:

$$(-\infty, 0),\ \left(0, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ i } (1, +\infty).$$

Znak prvog i drugog izvoda ispitaćemo tabelarno.

x	$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$\left(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$
$x^{1/3}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(1-x)^{1/3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$1-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	prekid	$+$	0	$-$	prekid	$+$	$+$	$+$
$x^{4/3}$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(1-x)^{4/3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	prekid	$-$	$-$	$-$	prekid	$-$	0	$+$

Na osnovu ove tabele dolazimo do slijedećih zaključaka:

-Prvi izvod mijenja znak u prekidnim tačkama i u stacionarnoj tački $x = \frac{1}{2}$ (u tački $x = \frac{1}{2}$ funkcija ima maksimum

$$y_{max} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4/3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} .$$

-Funkcija opada u intervalima $(-\infty,0)$ i $(\frac{1}{2},1)$, a raste u intervalima $(0, \frac{1}{2})$ i $(1,+\infty)$.

-Kriva $y = f(x)$ je konkavna naviše u intervalima $(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$ i $(\frac{1+3}{2}, +\infty)$, a konveksna naviše u intervalima $(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0)$, $(0,1)$ i $(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$.

-U tačkama $x = 0$ i $x=1$ (tačkama prekida prvog i drugog izvoda) prvi izvod mijenja znak (funkcija ima minimume $y_{min} = f(0) = f(1) = 0$), dok drugi izvod ne mijenja znak, te zbog toga pomenute tačke nisu prevojne tačke. Medjutim u stacionarnim tačkama izvodne funkcije $f'(x)$ drugi izvod mijenja znak, pa kriva ima prevojne tačke sa apscisama $x_{1,2}=\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4° Kriva $y = f(x)$ nema vertikalnih asimptota, jer je funkcija $y = f(x)$ neprekidna za svako realno x (tim prije uzima, za svako konačno x, konačnu vrijednost).

Kako je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

to kriva nema ni horizontalnih asimptata.

Potražimo kose asimptate:

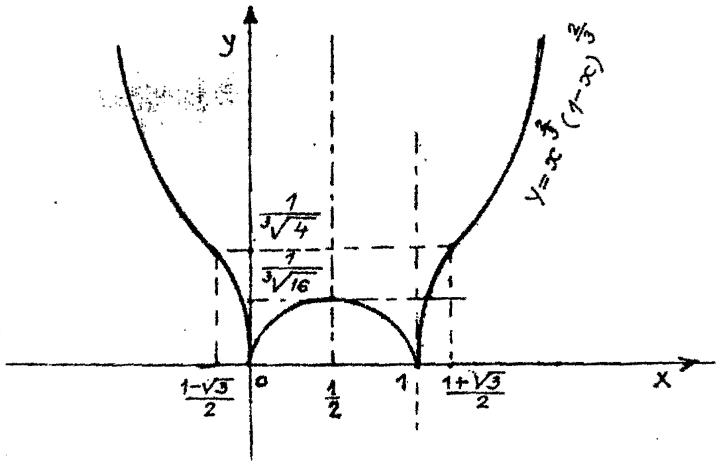
Pošto je

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)^2}}{x} = \lim_{x \to \pm} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 2 + x} = \pm\infty ,$$

izlazi da kriva $y = f(x)$ nema ni kosih asimptota.

Na osnovu prethodnih podataka o funkciji $y = f(x)$ možemo skicirati grafik te funkcije:



5° Vrijednost funkcije u karakterističnim tačkama:

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ su respektivno:

$$f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}=\left(\frac{-2}{4}\right)^{2/3}=\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{16}},$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}};$$

$$\left(\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<\frac{3}{4},\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{16}}<\frac{1}{2}\right).$$

Primijetimo da je grafik funkcije simetričan u odnosu na pravu $x=\frac{1}{2}$, jer je $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$, $\forall x\in E_x=R$.

* 380. Ispitati tok funkcije $y=\frac{x^3}{3-x^2}$

i nacrtati njen grafik.

Rješenje. 1° Funkcija je definisana i neprekidna za svako realno i konačno $x \neq \pm\sqrt{3}$.

2° Primijetimo da je

$$f(x) = - f(x), \text{ za svako } x \neq \pm\sqrt{3},$$

tj. funkcija je neparna, pa je njen grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak.

3° Funkcija ima trostruku nulu $x = 0$

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{x^3}{3-x^2} > 0 \Longleftrightarrow \left\{(x^3 > 0 \wedge 3-x^2 > 0) \vee (x^3 < 0 \wedge 3 - x^2 < 0)\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{(x > 0 \wedge x^2 < 3) \vee (x < 0 \wedge x^2 > 3)\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{(0 < x < \sqrt{3}) \vee (-\infty < x < -\sqrt{3})\right\},$$

a onda, očigledno,

$$f(x) < 0 \quad \text{za} \quad x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

4° Relacije

$$f'(x) = \frac{3x^2(3-x^2) + x^3 \cdot (2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2\,(9-x^2)}{(3-x^2)^2},$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee x = -3 \vee x = 3),$$

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \left\{\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2} > 0\right\} \Longleftrightarrow \left\{(x \neq 0 \wedge -3 < x < 3) \wedge x \neq \pm\sqrt{3}\right.$$

$$\Longleftrightarrow x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3),$$

a

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty),$$

impliciraju da prvi izvod mijenja znak samo u stacionarnim tačkama $x_2 = -3$ i $x_3 = 3$, i u tački $x = -3$ prelazi iz opadanja u rašćenje (funkcija tu ima lokalni minimum

$$y_{min} = f(-3) = \frac{-27}{3-9} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\ ), \text{ a u tački } x = 3$$

iz rašćenja prelazi u opadanje, pa funkcija ima tu maksimum

$$y_{max} = f(3) = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}.$$

5° Drugi izvod funkcije ima oblik

$$f''(x) = \frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)\ (3-x^2)\cdot 2\cdot(-2x)}{(3-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(3-x^2)^2(18x-4x^3)+4x^3\ (9-x^2)\ (3-x^2)}{(3-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x\ [(3-x^2)\ (9-2x^2)+2x^2\ (9-x^2)]}{(3-x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x\ (27-6x^2-9x^2+2x^4+18x^2-2x^4)}{(3-x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x(27+3x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{2x}{(3-x^2)^3} > 0 \iff$$

$$\iff \{(x>0 \wedge -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) \vee (x<0 \wedge 3-x^2<0)\} \iff$$

$$\iff x \in (0, \sqrt{3}) \cup (-\infty, -\sqrt{3}),$$

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty),$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0.$$

Prema tome drugi izvod mijenja znak u tački $x = 0$, tj. grafik iz konveksnosti prelazi u konkavnost naviše, pa zaključujemo da kriva $y = f(x)$ ima prevojnu tačku M (0,0).

6° Vertikalne asimptote su $x = \pm\sqrt{3}$, dok horizontalne ne postoje, jer ne postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

Kako je

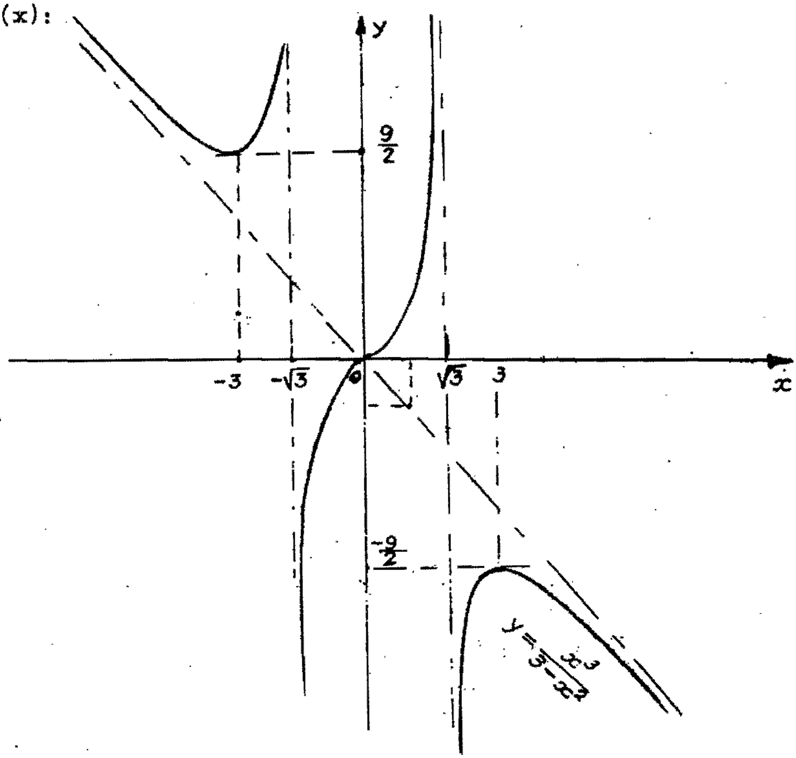
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{3-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\frac{3}{x} - x} = 0,$$

to kriva $y = f(x)$ ima kosu asimptotu $y = -x$.

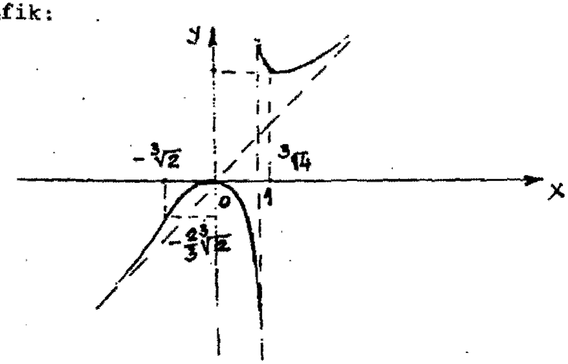
Koristeći nadjene podatke možemo skicirati grafik date funkcije $y = f(x)$:



381.- Nacrtati grafik funkcije $y = \frac{x^4}{x^3-1}$.

Rezultat. - Oblast definisanosti funkcije: $x \neq 1$.
Nula funkcije: $x = 0$. Asimptote: $x = 1$ i $y = x$.
Maksimum $y = 0$ za $x = 0$, minimum $y = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{4}$ za $x = \sqrt[3]{4}$. Prevojna tačka : $x = \sqrt[3]{-2}$, $y = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{2}$.

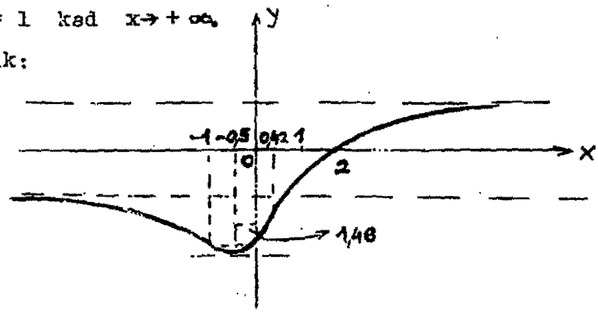
Grafik:



382. Ispitati tok funkcije i nacrtati krivu liniju $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

Rezultat.- Oblast definisanosti funkcije: svako x.
Nula funkcije: $y = 0$ za $x = 2$. Minimum $y = -\sqrt{5} \approx -2,24$ za $x = -0,5$. Prevojne tačke: $x_1 = -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1,18$; $y_1 \approx -2,06$ i $x_2 = \frac{\sqrt{41}-3}{8} \approx 0,42$; $y_2 \approx -1,46$. Asimptote: $y = -1$ kad $x \to -\infty$ i $y = 1$ kad $x \to +\infty$.

Grafik:

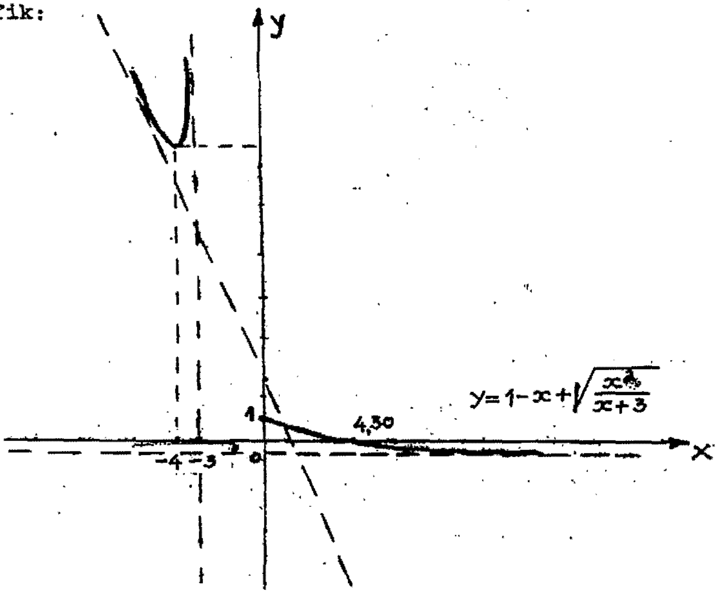


383. Nacrtati grafik funkcije:

$$f(x) = 1-x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

Rezultat. Oblast definisanosti funkcije: $x \geq 0$ i $x < -3$.
Nula funkcije: $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4{,}3o$. Minimum $y = 13$ za $x = -4$; krajnji maksimum $y = 1$ za $x = 0$. Grafik je svuda konkavan.
Asimptote: $y = \frac{5}{2} - 2x$ pri $x \to -\infty$; $y = -\frac{1}{2}$ pri $x \to +\infty$; $x = -3$ za $x \to -3-0$.

Grafik:



Sl.

384. Ispitati tok funkcije $y = \frac{1}{x(1-\ln x)}$ i nacrtati njen grafik.

Rješenje.- Funkcija je definisana za $x>0$ i $1 - \ln x \neq 0$, tj. za $x \in (0,e) \cup (e, +\infty)$. Nula nema, a $f(x)>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{(x>0 \land 1 - \ln x>0) \lor (x<0 \land 1 - \ln x<0)\} \Leftrightarrow x \in (0,e),$$

otuda $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (e, +\infty)$.

Kako je

$$f'(x) = -\frac{1-\ln x + x\cdot\frac{-1}{x}}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2},$$

$$f''(x) = \frac{x^2\cdot\frac{1}{x}(1-\ln x)^2-\ln x\left[(1-\ln x)\cdot 2x^2\cdot\frac{-1}{x}+2x(1-\ln x)^2\right]}{x^4(1-\ln x)^4} =$$

$$= \frac{x(1-\ln x)^2+2x\ln x-2x\ln^2 x-2x(1-\ln x)^2\ln x}{x^4(1-\ln x)^4} =$$

$$= \frac{2\ln^2 x - \ln x + 1}{x^3(1-\ln x)^3},$$

to

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1,\ x \neq e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

tj. funkcija ima minimum za $x_0 = 1$ i to

$$y_{min} = f(x_0) = 1,$$

jer prvi izvod mijenja znak, u tački $x = 1$, sa minus na plus, tj. funkcija opada u intervalu $(0,1)$, a onda raste od 1 do $+\infty$ u intervalu $(1,e)$; u tački $x = e$ funkcija ima prekid drugoga reda (funkcija pravi skok sa $+\infty$ na $-\infty$), pa opet raste od $-\infty$ do nule u intervalu $(e, +\infty)$.

Pošto je

$f''(x) \neq 0$ za svako x iz oblasti definisanosti funkcije $f(x)$, a drugi izvod postoji u svakoj tački u kojoj je funkcija definisana, to možemo zaključiti da grafik funkcije nema prevojnih tačaka.

Grafik funkcije $f(x)$ je konkavan u intervalu $(0,e)$, a konveksan u intervalu $(e,+\infty)$; jer je

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^3(1-\ln x)^3 > 0 \text{ (jer je } 2\ln^2 x - \ln x + 1 > 0$$

za svako $x > 0) \Leftrightarrow (1-\ln x > 0$, jer je $x > 0$ zbog D.P.$) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e;$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > e.$$

Pošto je

$$\lim_{x \to e_+} f(x) = +\infty ,$$

i

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x} \overset{*}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

(* - primijenili smo Lopitalovo pravilo jer su ispunjeni uslovi za njegovu primjenu - $\frac{\infty}{\infty}$),

to zaključujemo da grafik funkcije $f(x)$ ima za asimptote (vertikalne) prave: $x = 0$ i $x = e$.

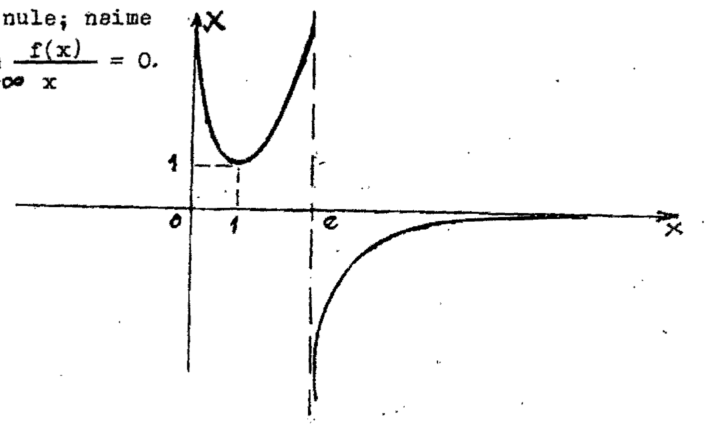
Horizontalna asimptota je prava $y = 0$, tj. x - osa, jer je

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x \ln x (\frac{1}{\ln x} - 1)} \right) = 0$$

Kosih asimptota nema, jer ne postoji konačna granična vrijednost različita od nule; naime

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Grafik:



385.* – Nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x.$$

Rješenje. – Funkcija je definisana za svako realno i konačno x. Nije ni parna ni neparna. Funkcija je periodična sa periodom 2π, te ju je dovoljno ispitati na segmentu $[0,2\pi]$.

Nule funkcije: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x - \sin^2 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, ali otpada rješenje

$\sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (>1), jer $|\sin x| \leq 1$ za svako x, te ostaje $\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \frac{-0{,}73}{2} = -0{,}365 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = +\arcsin 0{,}365 + \pi \approx 21^\circ + 180^\circ = 201^\circ; \\ x_2 = 2\pi - \arcsin 0{,}365 \approx 2 \cdot 180^\circ - 21^\circ = 339^\circ. \end{cases}$$

5 Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} > 0$$

$$\Rightarrow (0 < x < x_1 \vee x_2 < x < 2\pi);$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x_1 < x < x_2.$$

6 Kako je

$$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - \sin 2x) =$$

$$= 2\cos x\,(1 - 2\sin x),$$

$$f''(x) = -2\sin x(1-2\sin x) - 4\cos^2 x =$$

$$= -2\sin x + 4\sin^2 x - 4\cos^2 x =$$

$$= -2\sin x + 4\sin^2 x - 4(1-\sin^2 x) =$$

$$= 8\sin^2 x - 2\sin x - 4 =$$

$$= 2(4\sin^2 x - \sin x - 2),$$

to izlazi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1-2\sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x = 0 \vee 1-2\sin x = 0) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{6}, x_4 = \frac{5\pi}{6}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \left(\left|\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right| < 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin x)_1 \approx 0{,}84 \quad i \quad (\sin x_2) \approx -0{,}6, \text{ tj.}$$

$$x_3 \approx 57^\circ,\ x_4 \approx \pi - 57^\circ = 123^\circ,\ x_5 \approx \pi + 37^\circ = 217^\circ \text{ i } x_6 \approx 323^\circ.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow [\sin x < (\sin x)_2 \vee \sin x > \sin x_1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1 \leq \sin x < -0{,}6 \quad \vee \quad 0{,}84 < \sin x \leq 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (270^\circ \leq x < 323^\circ \vee 217^\circ < x \leq 270^\circ) \vee (57^\circ < x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < x < 123^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (57^\circ, 123^\circ) \cup (217^\circ, 323^\circ);$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow (0 \leq x < 57^\circ \vee 123^\circ < x < 217^\circ \vee 323^\circ < x \leq 360^\circ).$$

Na osnovu znaka drugog izvoda sigurni smo slijedeće zaključiti (s tim što su izračunate samo približne vrijednosti krajeva intervala):

1° Drugi izvod mijenja znak u sve četiri svoje nule, tj. u nulama funkcije $f''(x)$ funkcija $f(x)$ ima prevojne tačke.

2° $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 \Rightarrow y_{max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$,

$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0 \Rightarrow y_{max} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$,

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow y_{min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 > 0 \Rightarrow y_{min} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3.$

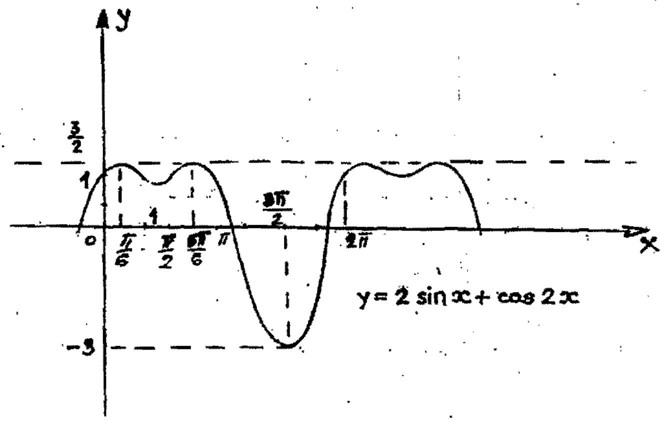
3^o Grafik funkcije je konkavan u intervalima (x_3, x_4) i (x_5, x_6), a konveksan u intervalima $[0, x_3)$, (x_4, x_5) i $(x_6, 360^o]$.

Asimptote: pošto je funkcija ograničena to ne postoje vertikalne asimptote, a kako još ne postoje granične vrijednosti

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

(jer ne postoji $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$), to grafik nema ni horizontalnih niti kosih asimptota.

Ispitali smo tok funkcije f(x) u intervalu $[0, 2\pi]$, a na osnovu periodičnosti potpun grafik se dobija sukcesivnim pomjeranjima (u pozitivnom i negativnom smjeru) za veličinu perioda djela njenog grafika konstruisanog za segment $0 \leq x < 2\pi$ dužine 2π.



386 Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$$

Rješenje. 1^o Funkcija je definisana u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

2^o Nema simetrije grafika, niti je funkcija periodična.

3^o Funkcija je neprekidna na cijelom definicionom području.

4^o Nule funkcije: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (8x^3 = 27x^2) \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \frac{27}{8})$.

Znak funkcije: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(8x-27) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{27}{8}$;
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2(8x - 27) < 0 \Leftrightarrow (x < \frac{27}{8} \wedge x \neq 0)$.

5^o Tačke ekstremuma i intervali monotonosti funkcije:

$$f'(x) = 2 - 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2(1 - x^{-\frac{1}{3}}) ;$$

dakle funkcija ima izvod u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, a u tački $x = 0$ biće

$$\lim_{x \to 0_+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0_-} f'(x) = +\infty.$$

/da li smo sigurni zaključiti da je

$$f'_+(0) = -\infty, \; f'_-(0) = +\infty \;?/$$

Po definiciji lijevog i desnog izvoda u tački $x = 0$ imamo:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0_+} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = -\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = +\infty,$$

t.j. $f'(0)$ ne postoji (ni konačan ni beskonačan), te je tačka $M(0,0)$ povratna taka grafika funkcije $f(x)$, osim toga u toj tački funkcija ima lokalni maksimum.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^{1/3}} = 0 \Leftrightarrow x = 1 .$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x^{1/3}} > 0\right) \Rightarrow \frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}} > 0$$

$\Leftrightarrow (x>1 \vee x<0)$; $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Prema tome funkcija $f(x)$ raste u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(1, +\infty)$, a opada u intervalu $(0,1)$; otuda funkcija $f(x)$ ima minimum za $x = 1$ i to: $y_{min} = -1$.

6° Prevojne tačke i konveksnost (konkavnost):

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{-1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{za svako} \quad x \neq 0,$$

pa je grafik funkcije konkavan i nema prevojnih tačaka.

7° Asimptote:

– Vertikalnih nema, jer je funkcija neprekidna u cijelom intervalu $(-\infty, +\infty)$;

– horizontalna asimptota ne postoji; jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = \pm\infty.$$

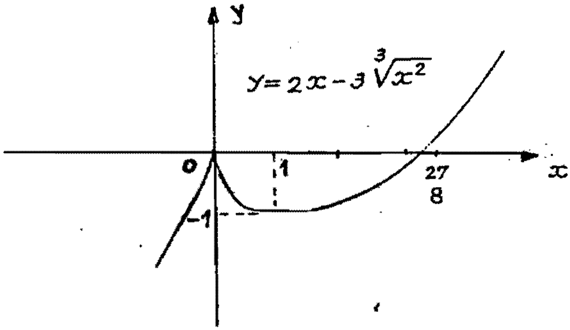
– pošto je

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) = 2;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-3\sqrt[3]{x^2}\right) = -\infty,$$

to zaključujemo da grafik funkcije $f(x)$ nema ni kosih asimptota.

8° Grafik funkcije $f(x)$ nema više nekih značajnih osobina (karakterističnih), te možemo ga nacrtati na osnovu naprijed navedenih karakterističnih tačaka:



387. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

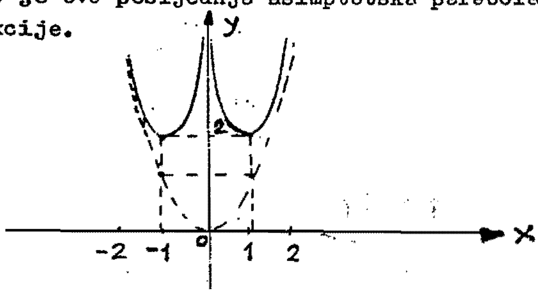
$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

Rezultat. Definisana u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$. Funkcija je parna (grafik simetričan u odnosu na y-osu). Maksimuma nema; za $x = \pm 1$ minimum $y = 2$. Grafik nema prevojnih tačaka; grafik je konkavan. Asimptota je $x = 0$. Pošto je

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1,$$

te funkcija $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ asimptotski teži ka funkciji $g(x) = x^2$, pa je ova posljednja asimptotska parabola za grafik date funkcije.

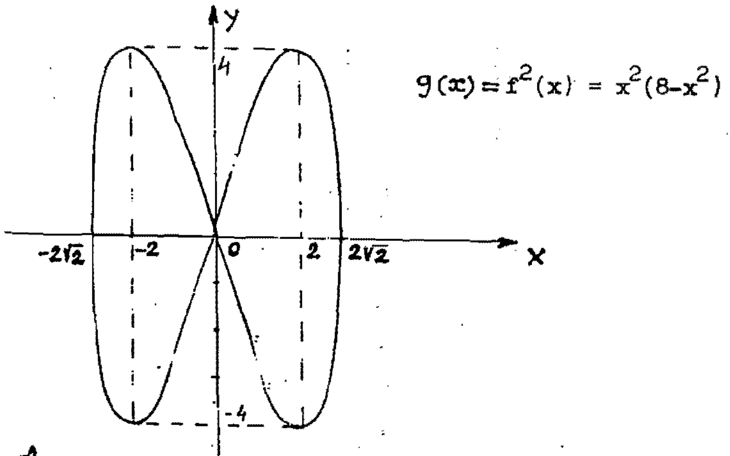
Grafik



388.-Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$g(x) = f^2(x) = x^2(8-x^2).$$

Rezultat. Definisana je u intervalu $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$. Dijagram funkcije siječe koordinatne ose u tačkama $(-2\sqrt{2},0)$, $(0,0)$ i $(2\sqrt{2},0)$. Pošto je funkcija parna i dvoznačna, dijagram funkcije je simetričan u odnosu na x-osu i koordinatni početak. Ima ekstremne vrijednosti u tačkama $(-2, \pm 4)$ i $(2, \pm 4)$, jer je dvoznačna. Prevojna tačka grafika $(0,0)$.



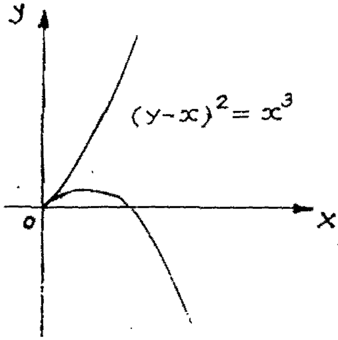
389.- Ispitati varijaciju funkcije $y = f(x)$ i nacrtati njen grafik ako je

$$(y-x)^2 = x^3.$$

Rezultat. Definisana je u intervalu $[0, +\infty)$. Nule funkcije su $x = 0$ i $x = 1$. Povratna tačka je $(0,0)$ u kojoj tangente zaklapa ugao od $45°$. Asimptota nema.

Ekstremna vrijednost funkcije (maksimum) je

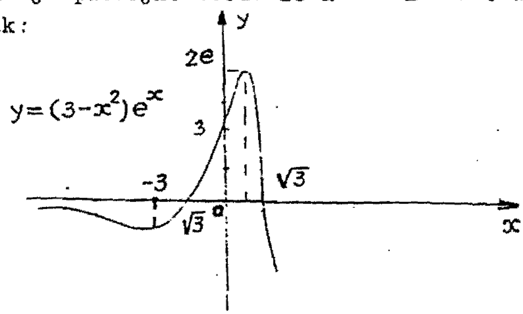
$$y = \frac{4}{27} \quad \text{za} \quad x = \frac{4}{9}.$$ Grafik:



390. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = (3 - x^2)\, e^x.$$

Rezultat. Definisana je za sve vrijednosti promjenljive x. Nule funkcije su $x = \pm\sqrt{3}$. Za $x = 1$ postiže maksimum $y = 2e$ a za $x = -3$ minimum $y = -6e^{-3}$. Diagram funkcije ima dvije prevojne tačke za $x = -2 \pm \sqrt{5}$. Asimptota je $y = 0$.
Grafik:



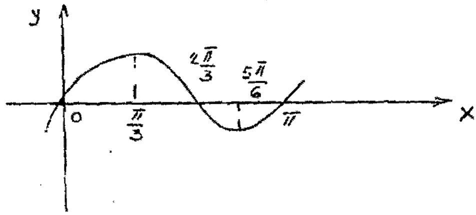
391. Ispitati tok i nacrtati dijagram funkcije

$$y = \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Rezultat. Koristeći trigonometrijski identitet

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)$ data funkcija se transformiše na oblik $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Poslije transformacije vidi se da je data funkcija periodična sa osnovnim periodom $T = \pi$. Nule funkcije su $x = k\pi$ i $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Funkcija postiže maksimum $y = \frac{3}{4}$ za $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, a za $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ postiže minimum $y = -\frac{1}{4}$.

Grafik:



392.- Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = (x-a)\, e^{1/x}, \text{ a realan parametar.}$$

Rješenje.- 1° Oblast definisanosti: $x \neq 0$. Ponašanje funkcije na krajevima definisanosti (ujedno na krajevima neprekidnosti, jer je ova funkcija neprekidna ondje gdje je i definisana):

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (x-a)e^{1/x} = \lim_{\alpha\to 0} (-\alpha - a)e^{-1/\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{-\alpha - a}{e^{1/\alpha}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (x-a)e^{1/x} = \lim_{\alpha\to 0} (\alpha - a)e^{1/\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{1/\alpha}}{\frac{1}{\alpha - a}} = \begin{cases} +\infty & \text{za } a \leq 0 \\ -\infty & \text{za } a > 0. \end{cases}$$

Dakle, grafik funkcije $f(x)$ ima vertikalnu asimptotu $x = 0$ kod $x \to 0_+$;

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty .$$

2° Nule i znak funkcije:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = a,$$
$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow (x > a \wedge x \neq 0),$$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x < a \wedge x \neq 0).$

3^{o} Tačke ekstremuma i intervali monotonosti:

$$f'(x) = e^{1/x} + (x-a)e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = (x^2 - x + a) \cdot \frac{e^{1/x}}{x^2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + a = 0 \Leftrightarrow \left(x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2},\ a \leqslant \frac{1}{4}\right), \text{ tj.}$$

funkcija nema stacionarnih tačaka ako je $a > \frac{1}{4}$.

Zato ćemo i razlikovati više slučajeva:

I. $a > \frac{1}{4}$ (dakle $a > 0$) $\Rightarrow f'(x) > 0$ za svako $x \neq 0$, tj. funkcija stalno raste (dakle, nema ekstremuma).

II. $a = \frac{1}{4} \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$ za svako $x \neq 0$, tj. prvi izvod ne mijenja znak u stacionarnoj tački $x = \frac{1}{2}$, pa tu nema ekstrema, već bi mogla biti prevojna tačka, ali treba provjeriti da li drugi izvod mijenja znak u toj tački.

III. $a < \frac{1}{4} \Rightarrow f'(x) > 0$ za $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, +\infty\right)$, i $f'(x) < 0$ za $x \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$; tj. funkcija ima maksimum za $x = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$, a minimum za $x = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$; max. postoji za $a \neq 0$.

Primijetimo da je

$$a < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} \text{ za } 0 < a < \frac{1}{4}. \text{ Naime, } \left(a < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, 0 < a < \frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a - 1 < -\sqrt{1-4a} \Leftrightarrow 1-4a < 1-4a + 4a^2 \Leftrightarrow 0 < 4a^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a^2 > 0$, što je tačno zbog $a > 0$ (dovoljno bi bilo da je $a \neq 0$).

4^{o} Prevojne tačke i konkavnost (konveksnost):

$$y'' = (2x-1) \cdot \frac{e^{1/x}}{x^2} + (x^2 - x + a) \cdot \frac{-e^{1/x}(1+2x)}{x^4} =$$

$$= \frac{e^{1/x}}{x^4}(2x^3 - x^2 - x^2 + x - a - 2x^3 + 2x^2 - 2ax) =$$

$$= \frac{e^{1/x}}{x^4}(x-2ax - a) \Longrightarrow$$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2ax - a = 0 \wedge x \neq 0) \Leftrightarrow \{x(1-2a) = a \wedge$$

$$x \neq 0\} \Leftrightarrow x = \frac{a}{1-2a} \quad \text{za } a \neq 0 \text{ i } a \neq \frac{1}{2},$$

tj. grafik funkcije nema prevojnih tačaka za $a = 0$ ili za $a = \frac{1}{2}$.

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow (x - 2ax - a > 0 \wedge x \neq 0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{(x > \frac{a}{1-2a} \text{ za } a \neq 0 \text{ i } a < \frac{1}{2}) \wedge (x < \frac{a}{1-2a},\ a > \frac{1}{2}\right\}.$$

$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow (x - 2a\,x - a < 0 \wedge x \neq 0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{(x < \frac{a}{1-2a};\ a \neq 0 \wedge a < \frac{1}{2}) \wedge (x > \frac{a}{1-2a};\ \text{za } a \neq 0 \wedge a > \frac{1}{2}\right\}.$$

Dakle, grafik funkcije $f(x)$ ima prevojnu tačku sa apscisom $x = \frac{a}{1-2a}$; za $a \neq 0$ i $a \neq \frac{1}{2}$.

5^0 Asimptote:

Već smo saznali da je prava $x = 0$ vertikalna asimptota kod $x \to 0_+$.

Pošto je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, to kriva $y = f(x)$ nema horizontalnih asimptota.

Međutim, postoji asimptota $y = mx+n$;

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-a)e^{1/x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (1 - \frac{a}{x})e^{1/x} = 1,$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - ax\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[(x-a)e^{1/x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[x\,(e^{1/x} - 1) - ae^{1/x}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} - ae^{1/x}\right] = 1 - a,$$

$$\text{jer je } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} ae^{1/x} = a \cdot 1 = a;$$

– Primijenili smo Lopitalovo pravilo, jer su ispunjeni uslovi za njegovu primjenu.

Dakle kosa asimptota ima jednačinu

$$y = x + 1 - a.$$

Položaj asimptote prema datoj krivoj, kao medjusobni odnos karakterističnih tačaka:

I. $\{a < 0,\ x > 0 \quad (\Rightarrow x > a)\} \Rightarrow f(x) > x - a + 1$, tj. kriva je iznad asimptote za $x > 0$, jer

$$\left.\begin{array}{l} e^{1/x} > 1 + \dfrac{1}{x}, \quad (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x-a}, \quad (a < 0 < x) \end{array}\right\} \Rightarrow e^{1/x} > 1 + \frac{1}{x-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-a)e^{1/x} > (x-a)\left(1 + \frac{1}{x-a}\right) = x - a + 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} (a < 0,\ x < a) \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x-a} \\ e^{1/x} > 1 + \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = (x-a)e^{1/x} < x - a + 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} a < x < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x-a} > 0 \\ x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e^{1/x} < 1 + \frac{1}{x-a} \Rightarrow f(x) < x - a + 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{II. } a = 0 \Rightarrow (f(x) = xe^{1/x}, \text{ asimptota: } y = x + 1) \\ \hspace{6cm} x > 0 \\ \hspace{6cm} e^{1/x} > 1 + \frac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = xe^{1/x} > x + 1 \quad \text{za } x > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{1/x} > 1 + \frac{1}{x}, \; x \neq 0 \\ x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = xe^{1/x} < x + 1.$$

U ovom slučaju funkcija ima od ekstrema samo minimumu za $x = 1$ i to

$$y_{min} = e;$$

dok prevojne tačke ne postoje (iako u $x = 0$ grafik mijenja konveksnost), za $x < 0$, $f''(x) < 0$, tj. kriva je konveksna, dok za $x > 0$, $f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3} > 0$, tj. kriva je konkavna.

Naime, tačka $x = 0$ nije prevojna, niti je tu maksimum jer tu funkcija ima prekid (koje vrste ?), a nije ni definisana u toj tački.

$$\text{III.} \quad (0 < a < \tfrac{1}{4}, \; x < 0) \Rightarrow f(x) < x - a + 1, \text{ tj.}$$

kriva je ispod asimptote.

Za $x > 0$ dovoljno je primijetiti da se prevojna tačka nalazi između tačke minimuma i tačke maksimuma i da su sve tri te tačke iznad asimptote. Naime, nećemo tražiti tačku presjeka asimptote sa krivom, jer pri tom treba riješiti transcedentnu jednačinu. Da je tačna predposljednja tvrdnja vidi se iz relacija

$$\frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2} < \frac{a}{1-2a} < \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2},$$

jer

$$1-4a < (1-2a)^2 = 1-4a + 4a^2 \Rightarrow$$

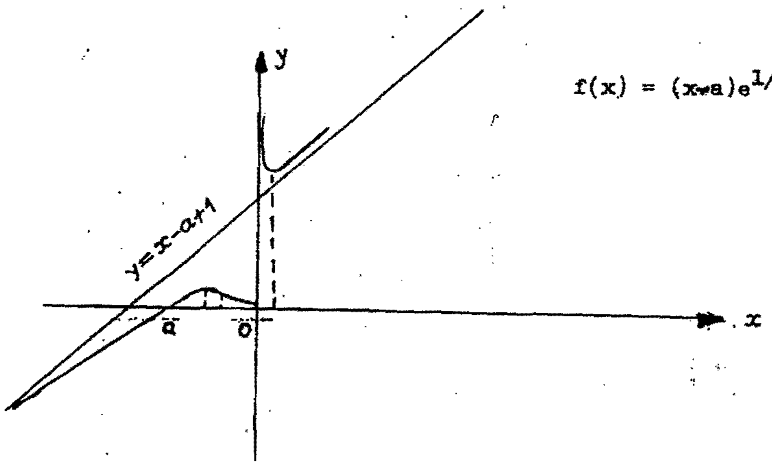
$$\Rightarrow 1-4a < (1-2a)\cdot\sqrt{1-4a} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2} < \dfrac{a}{1-2a}, \\ \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2} > \dfrac{a}{1-2a} \end{cases}$$

IV $a = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$ - apscisa prevojne tačke,

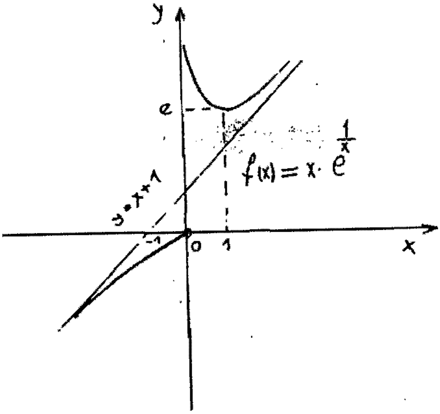
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) e^{1/2} = \dfrac{\sqrt{e}}{4} < \dfrac{5}{4}$ (vrijednost ordinate tačke na asimptoti sa apscisom $x = \dfrac{1}{2}$).

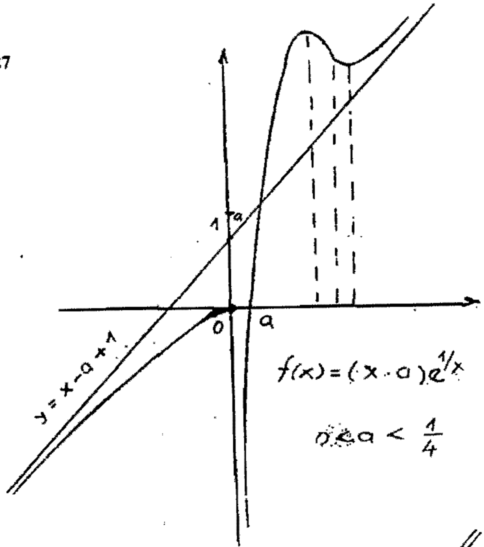
Prema tome prevojna tačka je iznad asimptote.

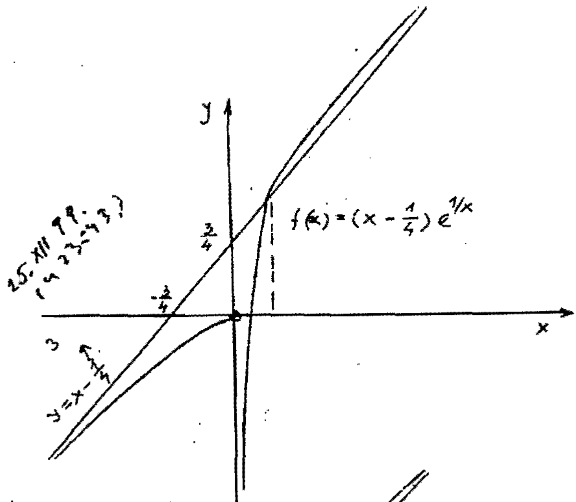
V $a > \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left\{ x = \dfrac{a}{1-2a} < 0 \text{ za } a > \dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{a}{1-2a} > a\right.$ za $\left.\dfrac{1}{4} < a < \dfrac{1}{2}\right\}$.

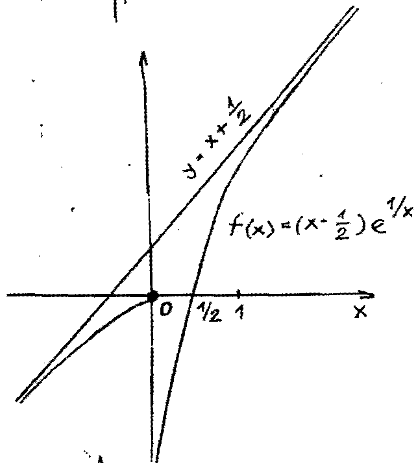


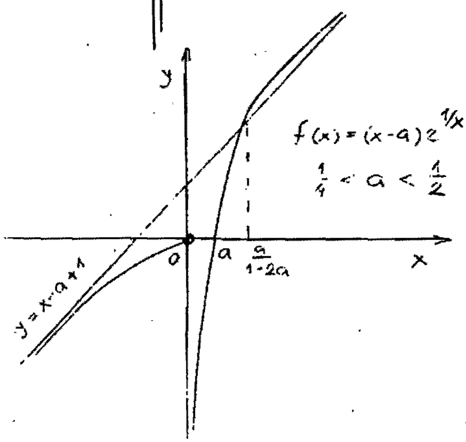
$f(x) = (x-a)e^{1/x},\ a < 0$

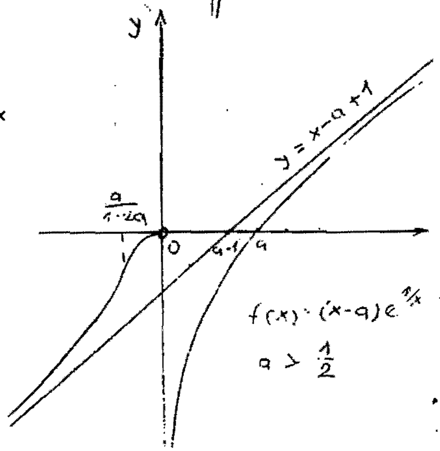

y
e
$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$
y = x + 1
-1
0
1
x


1 - a
0
a
y = x - a + 1
$f(x) = (x - a)e^{1/x}$
$0 < a < \frac{1}{4}$


y
$f(x) = (x - \frac{1}{4})e^{1/x}$
$\frac{3}{4}$
$-\frac{3}{4}$
x
$y = x - \frac{1}{4}$


$y = x + \frac{1}{2}$
$f(x) = (x - \frac{1}{2})e^{1/x}$
0
1/2
1
x


y
$f(x) = (x - a)e^{1/x}$
$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$
y = x - a + 1
0
a
$\frac{a}{1-2a}$
x


y
y = x - a + 1
$\frac{a}{1-2a}$
0
a - 1
a
$f(x) = (x - a)e^{1/x}$
$a > \frac{1}{2}$

393. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$y = f(x^2) \quad \text{ako je}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}.$$

Rješenje. Data funkcija ima oblik ($x = u^2$) $g(x) = f(x^2) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

1° Definiciono područje: $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$; prekidi u tačkama $x = -1$ i $x = 1$.

2° Funkcija je parna (simetrija u odnosu na y - osu).

3° $$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} < \frac{\pi}{2};$$

4° $$\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} \begin{cases} < 0, & -1 < x < 1 \\ > 0, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty). \end{cases}$$

5° $$\lim_{x \to 1-} \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to 1+} \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}.$$

6° Rašćenje i opadanje:

$$\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \operatorname{arctg}\frac{x^2-1+2}{x^2-1} = \operatorname{arctg}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right);$$

maximum za $x = 0$ i to $y_{max} = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Za $x \in [0,1)$ funkcija strogo opada od $-\dfrac{\pi}{4}$ do $-\dfrac{\pi}{2}$;

a za $x \in (1,+\infty)$ funkcija strogo opada od $\dfrac{\pi}{2}$ do $\dfrac{\pi}{4}$;

$$y = \frac{\pi}{4} \text{ je asimptota za } x \to \pm\infty.$$

7° Granični položaj lijeve i desne tangente kad x raste prema 1 i kad x opada prema 1.

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{-4x}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{x^4+1}\cdot 2x \begin{cases} < 0, & (x>0, x\neq 1) \\ = 0, & (x=0) \\ > 0, & (x<0, x\neq -1) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-} g'(x) = -1, \quad \lim_{x\to 1+} g'(x) = -1,$$

Jednačine tangente: $y + \frac{\pi}{2} = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1 - \frac{\pi}{2}$ –

– granični položaj lijeve tangente ili kad $x\to 1-$; dok je granični položaj desne tangente $(x\to 1+)$:

$$y - \frac{\pi}{2} = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

8° Konkavnost i konveksnost:

$$g''(x) = \frac{-2(x^4+1)+8x^4}{(x^4+1)^2} = \frac{2(3x^4-1)}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}x^2-1)(x^2\sqrt{3}+1)}{(x^4+1)^2} = \frac{2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)(x^2\cdot\sqrt{3}+1)}{(x^4+1)^2}$$

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & x < -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\ (x\neq -1), \text{ kriva konkavna,} \\ = 0, & x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \text{ prevojna tačka} \\ < 0, & -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \text{ kriva konveksna} \\ = 0, & x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \text{ prevojna tačka} \\ > 0, & x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\ (x\neq 1) \text{ – kriva konkavna} \end{cases}$$

Primijetimo da je

$$\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x^2 & \text{za } -1<x<1 \\ 3\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x^2 & \text{za } x\ (-\infty,-1)\cup(1,+\infty). \end{cases}$$

Stvarno, za $|x|<1$ imamo:

$$\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} = -\operatorname{arctg}\frac{1+x^2}{1-x^2} = -\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x^2)}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x^2)} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}x^2\right)\right] = -\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}x^2,$$

a za $|x|>1$, $\left(x = \frac{1}{y},\ |y| < 1\right) \Rightarrow$

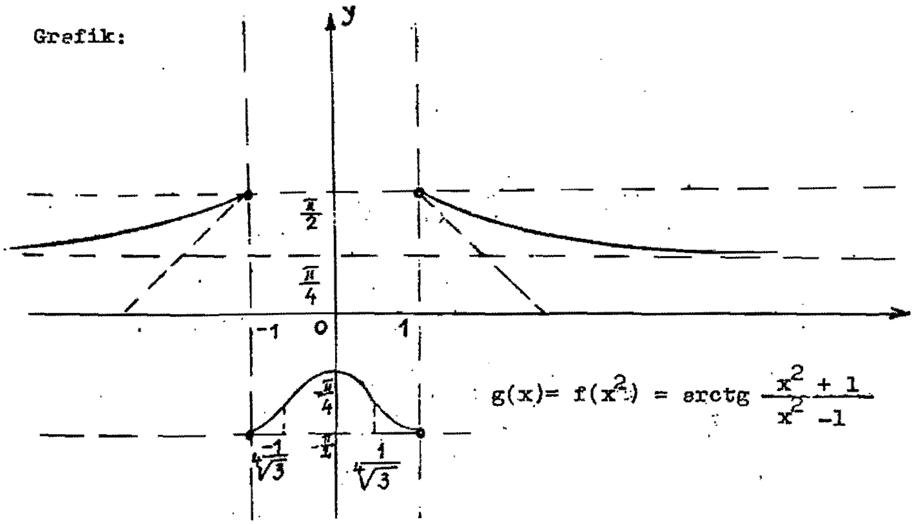
$$\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{y^2}+1}{\frac{1}{y^2}-1} = \operatorname{arctg}\frac{1+y^2}{1-y^2} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg} x^2, \text{ jer}$$

$$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}x,$$

$$\operatorname{arctg}x^2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Grafik:



Ovo je zadatak i rješenje akademika Dr. Mahmuda Bajraktarevića, redovnog profesora PMF-a u Sarajevu.

394. Naći grafik krive

$$x^4 - 2x^2 = y^3\,(x-1).$$

Rješenje.

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^4 - 2x^2}{x - 1}} \Longrightarrow \text{Definiciono područje: } x \neq 1.$$

Nule funkcije: $x^2(x^2-2) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

Znak. funkcije:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x^2-2)}{x-1}} \begin{cases} <0, & -\infty < x < -\sqrt{2} \\ =0, & x = -\sqrt{2} \\ >0, & -\sqrt{2} < x < 0 \\ =0, & x = 0 \\ >0, & 0 < x < 1 \\ \to +\infty, & x \to 1- \\ \to -\infty, & x \to 1+ \\ <0, & 1 < x < \sqrt{2} \\ =0, & x = \sqrt{2} \\ >0, & \sqrt{2} < x < +\infty . \end{cases}$$

$$f(0) = y_{min} = 0$$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^2-2}{x(x-1)}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y-ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^4-2x^2}{x-1}} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4-2x^2} - \sqrt[3]{x^4-x^3}}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2-2} - \sqrt[3]{x^2-x}\right)}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\left[(x^2-2) - (x^2-x)\right]}{\sqrt[3]{x-1}\left[\sqrt[3]{(x^2-2)^2} + \sqrt[3]{(x^2-2)(x^2-x)} + \sqrt[3]{(x^2-x)^2}\right]} = \frac{1}{3},$$

$$y = ax+b \Rightarrow y = x + \frac{1}{3} \quad (x\to\pm\infty) \equiv \text{kosa asimptota.}$$

Položaj krive prema asimptotama:

$$\sqrt[3]{\frac{x^4-2x^2}{x-1}} = x + \frac{1}{3} \quad \Big|^3$$

$$\frac{x^4-2x^2}{x-1} = x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27} \quad \Big| \cdot (x-1)$$

$$x^4-2x^2 = x^4 + x^3 + \frac{x}{3} + \frac{x}{27} - (x^3+x^2) - \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}\Big|\cdot 27$$

$$-54x^2 = 9x^2 + x - 27x^2 - 9x - 1$$

$$36x^2 - 8x - 1 = 0$$

$$x_{4,5} = \frac{4 \pm \sqrt{16+36}}{36} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{18}$$, nije važno koliko je y.

Gdje je asimptota iznad, a gdje ispod krive ?

U zećemo $\sqrt[3]{\dfrac{x^4-2x^2}{x-1}} < x + \dfrac{1}{3}$

$$\frac{x^4-2x^2}{x-1} < x^3+x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{27} \;/\cdot(x-1),\; x>1$$

$$36x^2 - 8x - 1 > 0,$$

za $x > x_4$ kriva je ispod asimptote $(x>1)$, dok za $x < 1$ imamo:

$$36x^2 - x - 1 < 0, \quad x_5 = \frac{2-\sqrt{13}}{8} < x < x_4.$$

Priroda tačke $O(o,o)$:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_+} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0_+} \sqrt[3]{\frac{x^2-2}{x(x-1)}} = +\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} \sqrt[3]{\frac{x^2-2}{x(x-1)}} = -\infty;$$

Znači tačka $x = 0$ je zaista šiljak

Priroda tačke $x=\sqrt{2}$:

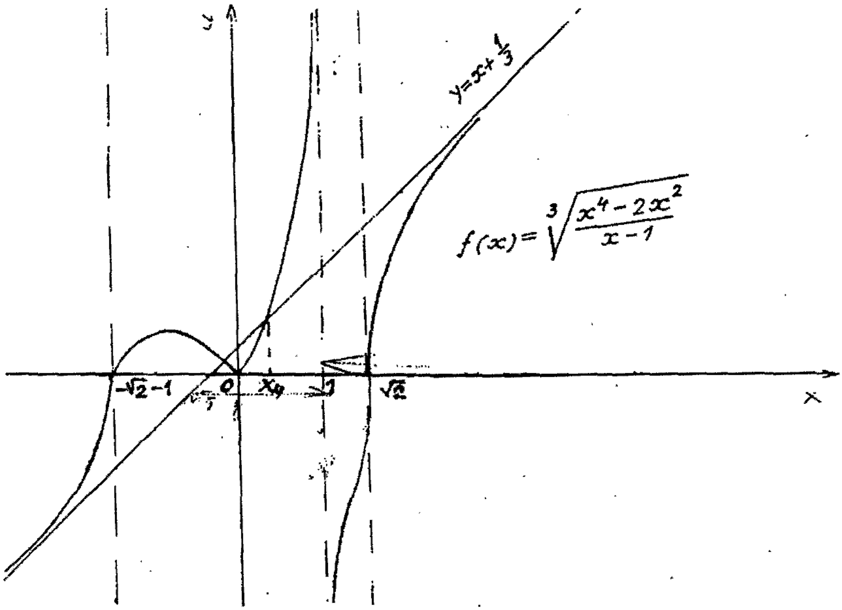
$$f'_+(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}+} \frac{y}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}_+} \sqrt[3]{\frac{x^2(x-\sqrt{2})\;(x+\sqrt{2})}{(x-1)\;(x-\sqrt{2})^3}} = +\infty,$$

$$f'_-(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}-} \sqrt[3]{\frac{x^2\;(x+\sqrt{2})}{(x-1)(x-\sqrt{2})^2}} = +\infty,$$

dakle, prava linija $x = \sqrt{2}$ je tangenta, usmjerena prema gore.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^4-2x^2}{x-1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(4x^3-4x)(x-1)-x^4+2x^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-2)}} \cdot \frac{3x^3-4x^2-2x+4}{(x-1)^{4/3}} .$$



Ovo je zadatak i rješenje akademika Dr. Mahmuda Bajraktarevića, redovnog profesora PMF-a u Sarajevu.

$\boxed{395}$ Na luku $\widehat{AB}$ čija je jednačina data u vidu

$$x = t^2-1, \quad y = t^3;$$

(a) naći tačku C u kojoj je tangenta paralelna sa tetivom $\overline{AB}$, ako je u tački A $t = 1$, a u B $t = 3$.

(b) Uzmemo li, da je $y = f(x)$, ispitati i nacrtati funkciju $\frac{f(x)}{x}$.

Rješenje:

(a) Koeficijent tetive $\overline{AB}$ je

$$\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)} = \frac{27-1}{9-1-(1-1)} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}.$$

Za odredjivanje ξ koristimo Cauchy-eovu teoremu, tj.

$$\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)} = \frac{y'(\xi)}{x'(\xi)}; \quad \frac{13}{4} = \frac{3\xi^2}{2\xi}, \quad \frac{13}{6} = \xi$$

$$\Longrightarrow \quad 2 < \xi < 3,$$

$$C\left(\left(\frac{13}{6}\right)^2 - 1, \left(\frac{13}{6}\right)^3\right).$$

(b) Iz $x = t^2-1$ i $y = t^3$ slijedi $t = \sqrt{x+1}$, $y = (x+1)\sqrt{x+1}$.

(Mogu se uzeti dvije grane $y = (x+1)\sqrt{x+1}$, $y = -(x+1)\sqrt{x+1}$).

Funkcija $\frac{f(x)}{x}$ je $\frac{(x+1)\cdot\sqrt{x+1}}{x} = \varphi(x)$.

1. Definiciono područje $E = \{x \in \mathbb{R}: x \in [-1,0) \wedge x \in (0,+\infty)\}$
2. $\varphi(-1+0) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0_-}\varphi(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0_+}\varphi(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x) = +\infty$.
4. Asimptote: $x = 0$ je vertikalna asimptota.

   Kose asimptote: $y = ax + b$.

   $$a = \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)\cdot\sqrt{x+1}}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{nema kosih asimptota.}$$

5. Ekstremne vrijednosti.

$$\varphi'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1} + \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}\right)\cdot x - (x+1)\cdot\sqrt{x+1}}{x^2},$$

$$\varphi'(x) = \frac{[2(x+1) + x+1] \cdot x - 2(x+1)\cdot(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}}.$$

$$\varphi'(x) = \frac{(x+1)\ (x-2)}{2x^2\cdot\sqrt{x+1}}.$$

$\varphi'(x) = 0$, $x + 1 \neq 0$ otpada; $x - 2 = 0$, $x = 2$.

$$\lim_{x\to -1+} \varphi'(x) = \lim \frac{(x-2)\cdot\sqrt{x+1}}{2\cdot x^2} = 0.$$

$$\varphi''(x) = \frac{[(x-2) + (x+1)]\cdot 2x^2\cdot\sqrt{x+1} - (x+1)(x-2)\cdot\left[4x\cdot\sqrt{x+1} + \frac{2\cdot x^2}{2\cdot\sqrt{x+1}}\right]}{4x^4\cdot(x+1)}.$$

$$\varphi''(x) = \frac{2x^2(2x-1)(x+1) - (x+1)(x-2)\cdot[4x(x+1) + x^2]}{4x^4(x+1)\cdot\sqrt{x+1}},$$

$$\varphi''(x) = \frac{x(x+1)\cdot[2x(2x-1) - (x-2)(3x+4)]}{4x^4(x+1)\cdot\sqrt{x+1}},$$

$$\varphi''(x) = \frac{[-x^2 + 4x + 8]}{4x^3\sqrt{x+1}}, \qquad x^2-4x-8=0 \Rightarrow x=2+2\cdot\sqrt{3}$$

je apscisa prevojne tačke grafika funkcije $\varphi(x)$.

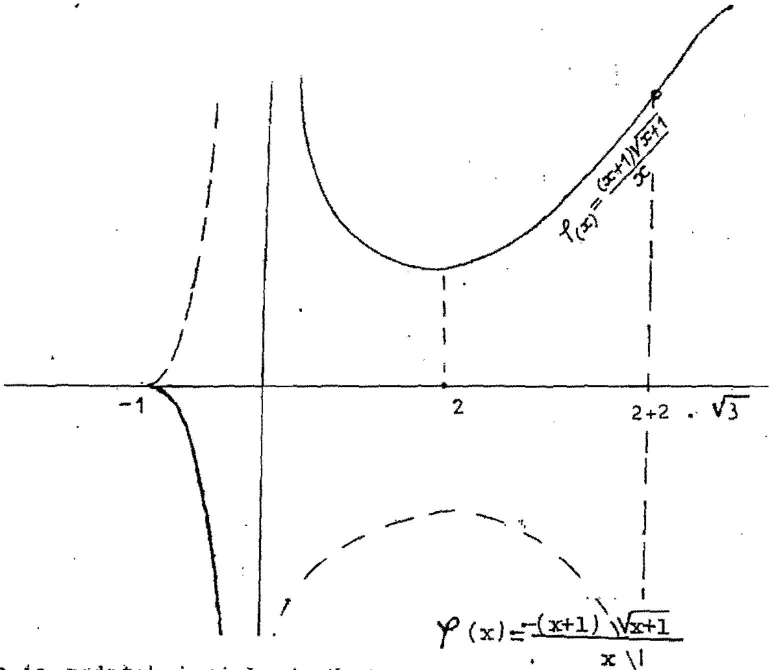
$\varphi'(x) = 0$ za $x = 2$; $\varphi''(2) > 0$. Znači u $x = 2$ funkcija $\varphi(x)$ ima minimum; $\varphi(2) = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$.

U tački $x = -1$ imamo $\varphi'(-1) = 0$.

$\varphi'(x) < 0$ za $0 < x < 2$, $\varphi''(x) > 0$ za $0 < x < 2(1+\sqrt{3}) \Rightarrow \varphi(x)$ je konkavna.

$\varphi'(x) > 0$ za $2 < x < +\infty$,

$\varphi'(x) < 0$ za $-1 < x < 0$; $\varphi''(x) > 0$ za $-1 < x < 0 \Rightarrow \varphi(x)$ je konkavna; $\varphi''(x) < 0$ za $2(1+\sqrt{3}) < x < +\infty \Rightarrow \varphi(x)$ je konveksna.



Ovo je zadatak i rješenje V. Dragićevića.

396. Ispitati tok krive linije $x = (1-t^2)\,t$, $y = (1-t^2)^2 t$. – Naći implicitni oblik.

Rješenje. – Stavimo

$$x = f_1(t) = (1-t^2)\cdot t$$
$$y = f_2(t) = (1-t^2)^2\cdot t.$$

Funkcija $f_1(t)$ definisana je za svako t. Za $t = 0$ biće $f_1(t) = 0$; za $t \to -\infty$, $x \to +\infty$; za $t \to +\infty$, $x \to -\infty$; za $t = \pm 1$, $x = 0$.

Prvi izvod funkcije, tj. $f_1'(t) = 1-3t^2$, biće:
$f_1'(t) = 0$ za $t = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$; $f_1'(t) < 0$ za $1-3t^2 < 0$, tj. za $t^2 > \frac{1}{3}$, tj. za $t > \frac{\sqrt{3}}{3}$ i za $t < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$f_1'(t) > 0$ za $1-3t^2 > 0$, tj. za $t^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$

Zatim je

$$f_1''(t) = -6t, \text{ pa je } f_1''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0, \; f_1''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0.$$

Dalje je:

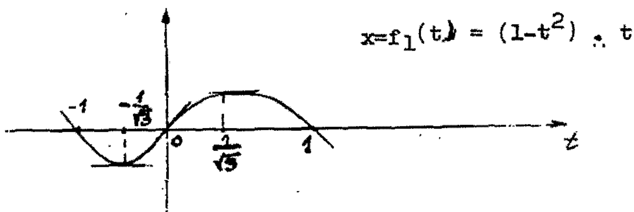
$$f_1\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}; \quad f_1''(0) = 0, \text{ (prevojna tačka)}.$$

Na osnovu ovih podataka sastavimo tablicu:

Tablica I

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$f_1'(t)$		$-$	-2	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-2	$-$	
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	Min. $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Max. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Pomoću ove tablice približno ćemo konstruisati krivu $f_1(t)$



Funkcija $f_2(t) = (1-t^2)^2 \cdot t$ definisana je za svako t.
Za $t = 0$ biće $f_2(t) = 0$; za $t \to -\infty$ biće $y \to -\infty$; za $t \to +\infty$, $y \to +\infty$; za $t = \pm 1$, $y = 0$. Prvi izvod $f_2'(t) = 5t^4 - 6t^2 + 1$. Iz $f_2'(t) = 0$ slijedi: $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $t_4 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; nadjene vrijednosti ispitaćemo pomoću

drugoga izvoda $f_2''(t) = 20t^3-12\,t$, pa je:

$$f_2''(-1) < 0, \quad f_2''\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) > 0, \quad f_2''\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) < 0 \quad \text{i} \quad f_2''(1) > 0.$$

Dalje je

$$f_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{16}{25\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad f_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{16}{25\sqrt{5}}.$$

Najzad:

$$f_2'(t) > 0 \text{ za } t < -1; \quad f_2'(t) < 0 \text{ za } -1 < t < -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$f_2'(t) > 0 \text{ za } -\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad f_2'(t) < 0 \text{ za } \frac{\sqrt{5}}{5} < x < 1$$

$$\text{i } f_2'(t) > 0 \text{ za } t > 1.$$

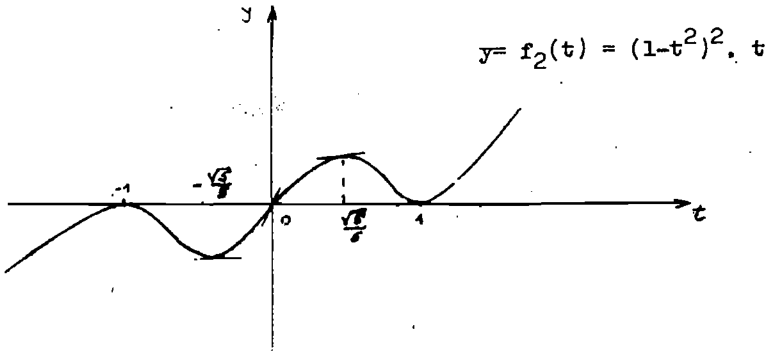
Na osnovu ovih podataka napravimo tablicu:

Tablica II

t	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{5}}{5}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{5}$		1		$+\infty$
$f_2'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	Max 0	↘	Min $-\frac{16}{25\sqrt{5}}$	↗	Prev tač. 0	↗	Max $\frac{16}{25\sqrt{5}}$	↘	Min 0	↗	$+\infty$

Ovdje smo još pokazali da ima prevojnih tačaka, jer iz $f_2''(t) = 0$ slijedi: $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{5}$ i $t_3 = -\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{5}$, pa je u ovim tačkama $f_2'''(t) \neq 0$.

Na osnovu ovih podataka nacrtajmo datu funkciju $y = f_2(t)$:



Na osnovu ovih dviju tablica načinićemo zajedničku tablicu; u ovu tablicu unijećemo vrijednosti parametra t.

Tablica III

t	-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
x	0	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$-\frac{4}{5\sqrt{5}}$	↗	0	↗	$\frac{4}{5\sqrt{5}}$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0
y	0	↘	$-\frac{4}{9\sqrt{3}}$	↘	$-\frac{16}{25\sqrt{5}}$	↗	0	↗	$\frac{16}{25\sqrt{5}}$	↘	$\frac{4}{9\sqrt{3}}$	↘	0
Tačke na krivoj	O		M_1		M_2		O		M_3		M_4		O

U koordinatnom sistemu XOy uzeli smo još nekoliko tačaka: M_1, M_2, M_3 i M_4.

Uzmimo još u obzir i ponašanje prvog izvoda, tj. nadjimo

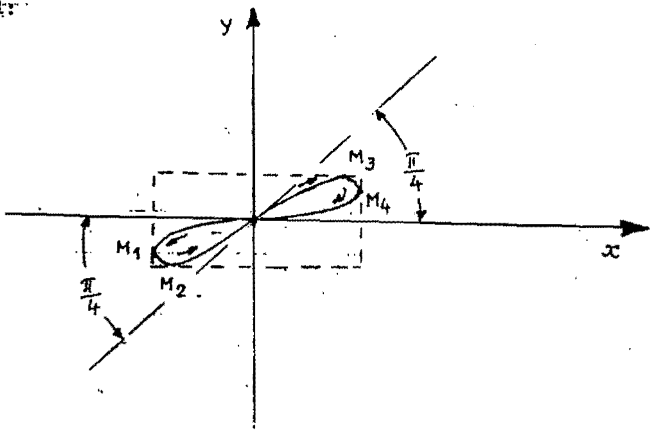
$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2'(t)}{f_1'(t)} = \frac{5t^4-6t^2+1}{1-3t^2}.$$

U tački O(o,o), za t=o biće $\frac{dy}{dx} = 1$, za $t = \pm 1$ biće $\frac{dy}{dx} = 0$; ovo znači da u tački O (o,o) (koja je tačka samopresjeka) postoje dvije tangente: jedna je x-osa, a druga je nagnuta prema x-osi za $\frac{\pi}{4}$.

U tačkama M_1 i M_4 tangenta je upravna na x-osu, jer tu $\frac{dy}{dx} \to +\infty$; u tačkama M_2 i M_3 tangenta je paralelna sa x-osom, jer je tu $\frac{dy}{dx} = 0$. Tačka O(o,o) je dvostruko prevojna tačka, što se vidi iz toka funkcije u tablici III; sem toga tu je $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Na osnovu izloženog, a iz tablice III čitamo x i y polaze od nule, pa x i y opadaju do tačke M_1, od M_1 do M_2 x raste, y opada; u tački M_2 funkcija ima minimum, jer je tu $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$; od M_2 do M_3(kroz O) x raste, y raste, i u M_3 funkcija dostiže maksimum, jer je tu $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Od M_3 do M_4 x raste, y opada.

Od M_4 do O(o,o) x opada i y opada. Prema tome kriva ima slijedeći izgled:



Sl.

Implicitni oblik jednačine krive dobićemo ovako:

iz $x = (1-t^2).t$, $y = (1-t^2)^2.t$

slijedi: $1-t^2 = \frac{x}{t}$, $1 - t^2 = \sqrt{\frac{y}{t}}$,

odakle je: $\frac{x}{t} = \sqrt{\frac{y}{t}}$, odnosno $t = \frac{x^2}{y}$, pa je $x = (1- \frac{x^4}{y^2}).\frac{x^2}{y}$,

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y}\right. = \frac{xy^2}{y^2-x^4} \Longleftrightarrow x^2y^2-x^6=xy^3 \Longleftrightarrow y^3-xy^2+x^5 = 0.$

397. Nacrtati grafik funkcije: $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

Rješenje. Definiciono područje za x : $t \neq 1$, za y : $t \neq \pm 1$. x=o kada je t = 0, y=0 kada je t = 0. $x \to \infty$ kada $t \to \infty$ i kada $t \to 1+$. $y \to \infty$ kada $t \to 1$ i kada $t \to -1$.

Horizontalna asimptota: y=0, jer $y = \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^2-1} = 0$.

Vertikalne asimptote: $x = -\frac{1}{2}$ $(y \to \infty$ kada $t \to -1)$.

Kose asimptote: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y-ax) = \lim_{t\to 1} \left(\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{t-1} \right) =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t}{t-1} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{2} \right) = \lim_{t\to 1} \frac{t(2-t^2-t)}{(t-1).2.(t+1)} =$$

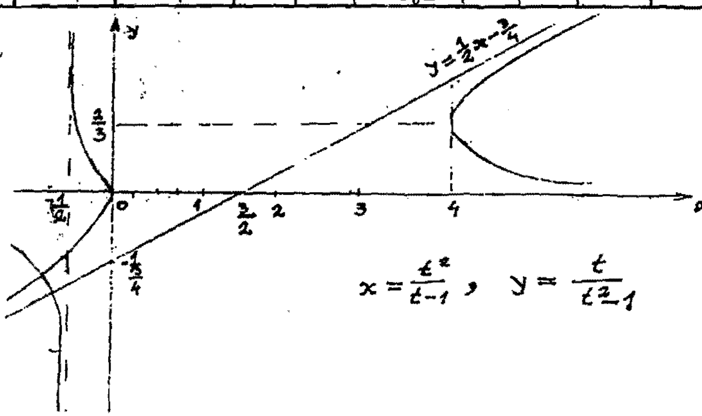
$$= \lim_{t\to 1} \frac{2-3t^2-2t}{4t} = -\frac{3}{4};$$

dakle kosa asimptota ima jednačinu: $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

$$\dot{y} = \frac{t^2-1-t.(2t)}{(t^2-1)^2} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}, \quad \dot{x} = \frac{2t.(t-1)-t^2}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2},$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-(1+t^2)}{(t+1)^2.t.(t-2)},$$ jer je funkcija definisana samo za $t \neq \pm 1$.

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$\dot{x}$		$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	0	$-$	prekid	$-$	0	$+$	
$\dot{y}$	.	$-$	prekid	$-$	-1	$-$	prekid	$-$	-3	$-$	
x	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ $+\infty$ skok	↘	4	↗	$+\infty$
y	0	↘	$-\infty$ $+\infty$ skok	↘	0	↘	$-\infty$ $+\infty$ skok	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
y'		$-$	prekid	$-$	∞	$+$	ne postoji	$+$	∞	$-$	



398. - Nacrtati grafik krive $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

Rješenje. Ako se stavi $y = xt$ dobijaju se parametarske jednačine te krive (tzv. Dekartov list):

$$x = \frac{3at}{1+t^3}\,, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}\,.$$

Polarna jednačina ima oblik:

$$r = 3\cdot\frac{a\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}\,.$$

Definiciono područje: $t \neq -1$.

Kako x i y ulaze u datu jednačinu simetrično, kriva je simetrična u odnosu na bisektrisu 1. i 3. kvadranta.

Nule : $x = 0$ za $t = 0$, $y = 0$ za $t = 0$.

$x \to \infty$ i $y \to \infty$ kada $t \to -1$.

Vertikalnih i horizontalnih asimptota nema.

Kose asimptote: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to -1}\frac{\frac{3at^2}{1+t^3}}{\frac{3at}{1+t^3}} = -1,$$

$$n = \lim_{t\to -1}(y-ax) = \lim_{t\to -1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}\right) =$$

$$= 3a\lim_{t\to -1}\frac{t+t^2}{1+t^3} = 3a\lim_{t\to -1}\frac{1+2t}{3t^2} = -a\,;$$

dakle, $y = -x-a$.

Rješenje i opadanje:

$$\dot{x} = 3a\,\frac{1+t^3-t.3t^2}{(1+t^3)^2} = 3a\,.\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,,$$

$$\dot{y} = 3a\,\frac{2t(1+t^3)-t^2.3t^2}{(1+t^3)^2} = 3at\,.\,\frac{2-t^3}{(1+t^3)^2},$$

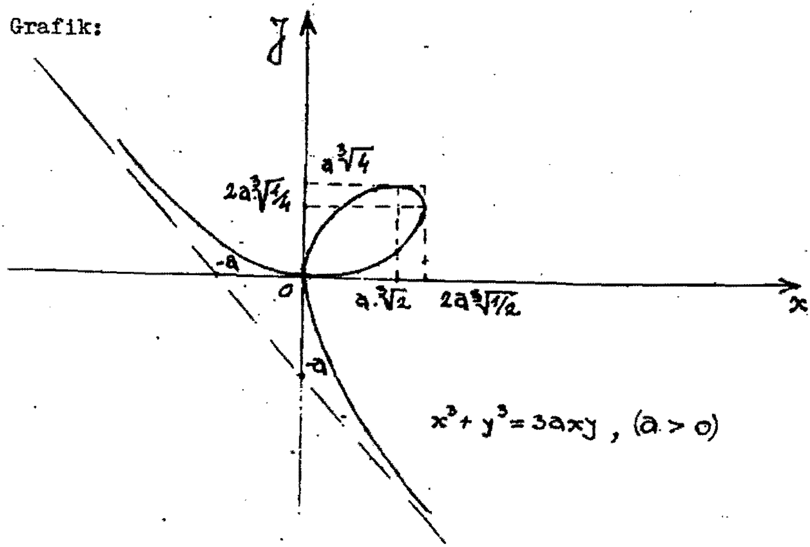
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}, \text{ jer je } t \neq -1.$$

t	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$\dot{x}$	0	+	ne postoji	+	$3a$	+	0	−	−	−	0
$\dot{y}$	0	−	ne postoji	−	0	+	+	+	0	−	0
x	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$2a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	↘	$a\sqrt[3]{2}$	↘	0
y	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↗	$2a\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	↗	$a\sqrt[3]{4}$	↘	0
y'	$-\infty$	−		−	0	+	∞	−	0	+	$+\infty$

Koordinatni početak je dvostruka tačka date krive. Koordinatne osi $x=0$ i $y=0$ su tangente na krivu u njegovoj dvostrukoj tački. Kriva siječe samu sebe u koordinatnom početku pod pravim uglom.

Napomena. Dekartov list je prvi put spomenut kao kriva koja ima odredjeno svojstvo, u Dekartovom pismu Fermau 1868. god. Oblik ove krive je ustanovio Roberval. Konačan oblik krive zajedno s njenim asimptotama je bio odredjen koncem XVII vjeka (Pojgens i Bernuli).

Grafik:



399.- Nacrtati grafik funkcije $\rho = f(\theta)$, ako je $\rho = a + b\cos\theta$ $(0 < a \leq b)$

Rješenje. Definiciono područje:

$$\rho \geq 0 \Longrightarrow a + b\cos\theta \geq 0 \Longleftrightarrow \cos\theta \geq -\frac{a}{b} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |\theta| \leq \arccos\left(-\frac{a}{b}\right).$$

Kriva je simetrična u odnosu na polarnu os jer je $f(\theta) = f(-\theta)$.

Funkcija ima maksimum za

$\cos\theta = 1$, tj. za $\theta = 0$ i to

$$\rho_{max} = a + b.$$

Tačke minimuma: $(\rho = 0)$ $\theta = \pm \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$.

Kriva je zatvorena.

Poteg ne može neograničeno rasti; te kriva nema tačaka u beskonačnosti, te nema ni asimptota. Grafik dva puta prolazi kroz pol.

Kako je

$$\rho' = -b\sin\theta,$$

to se za ugao izmedju tangente i potega u tački dodira dobija

$$tg\nu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a + b\cos\theta}{-b\sin\theta}.$$

Odavde je $tg\nu = 0$ za $a + b\cos\theta = 0$, tj. za $\theta = \pm\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$.

Iz izraza za $tg\nu$, kad $\theta \to 0$, nalazimo da je $\nu = \frac{\pi}{2}$. To znači da je tangenta na krivu u tački A (0, a+b) upravna na polarnoj osi.

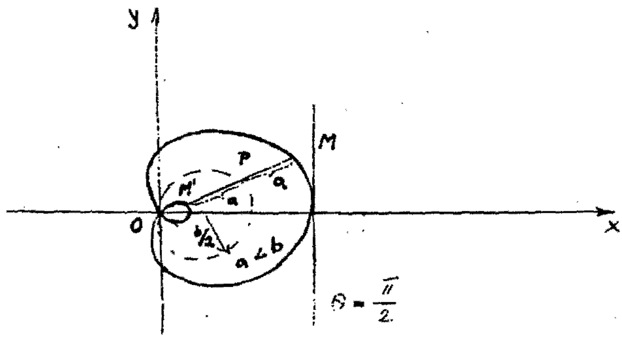
Napomena. Kriva spada u porodicu krivih koje se nazivaju Paskalov puž. To je ravna kriva definisana kao geometrijsko mjesto tačaka M i M' koje leže na datoj pravoj i na utvrdjenom rastojanju a od presjeka P ove prave i date kružnice

(polupre čnika $R = \frac{b}{2}$), kad se prava obrće oko neke tačke O na kružnici.

U pravouglim koordinatama (provjeriti!) jednačina Paskalovog puža ima oblik:

$$x^2 + y^2 - bx)^2 - a^2 (x^2+y^2) = 0.$$

Ova kriva ima oblik (za $0 < a < b$):



Ako je a = b, ova se kriva degeneriše u kardioidu, tj. petlja Paskalovog puža (puna linija unutar datog kruga) steže se u tačku.

400. Nacrtati krivu $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$, $(a > 0)$.

Rezultat. Oblast definisanosti funkcije:

$|\varphi| < \frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}$; period $\frac{2\pi}{3}$. Minimum $r = a$ za $\varphi = 0$ i $\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$. Asimptote:

$\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ i $\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$.

401. Nacrtati krivu $\varphi = \arccos\left(\frac{r-1}{r^2}\right)$.

Rezultat. Oblast definisanosti: $r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$.

Krajnji maksimum $\varphi = \pi$ za $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; minimum $\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx$

$\approx 75^\circ 30'$ za $r = 2$. Asimptota $r\cos\varphi = 1$ za $r \to +\infty$.

§ 3.9. KRIVINA KRIVIH U RAVNI – KRUG KRIVINE I EVOLUTA

402. Naći krivinu, radijus i centar krivine hiperbole

$$xy = 1$$

u tački M (1,1).

Rješenje. Za datu hiperbolu je

$$y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y'' = \frac{2}{x^3}$$

te se, prema obrascima, za krivinu i radijus krivine nalazi njihove vrijednost u proizvoljnoj tački hiperbole:

$$R = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+\frac{1}{x^4})^{3/2}}{\frac{2}{|x^3|}}, \quad k = \frac{1}{R}$$

U tački M(1,1) radijus krivine i krivina imaju vrijednost respektivno:

$$R = \frac{(1+1)^{3/2}}{2} = 2^{1/2}, \quad k = \frac{1}{R} = \frac{1}{2^{1/2}} = 2^{-\frac{1}{2}}.$$

Centar krivine hiperbole (centar kruga krivine – oskulatornog kruga), u proizvoljnoj tački hiperbole, ima koordinate

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{-\frac{1}{x^2}(1+\frac{1}{x^4})}{\frac{2}{x^3}} = x + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x^3}),$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{1}{x} + \frac{1+\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{x}),$$

a u datoj tački M (1,1) biće:

$$\xi = 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1}) = 2$$

$$\eta = 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1}) = 2.$$

403. Odrediti radijus krivine krive

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

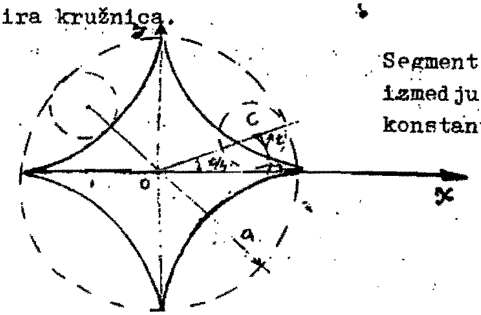
Rješenje. Data kriva naziva se astroidom. Kriva, koju opisuje proizvoljna tačka kruga C (r) kad se on kliza, po nepokretnom krugu poluprečnika a, i to po unutrašnjoj strani ovog kruga, naziva se hipocikloidom. U zavisnosti od odnosa poluprečnika nepokretne i pokretne kružnice dobijaju se različiti vidovi hipocikloida: astroida ($r = \frac{a}{4}$), cikloida i dr. Ako je poluprečnik pokretne kružnice jednak polovini radijusa nepokretne kružnice ($r = \frac{a}{2}$), hipocikloida se degeneriše u duž - prečnik nepokretne kružnice. Ovo se svojstvo koristi ponekad u konstruisanju zupčastih prenosa kad treba kružno kretanje pretvoriti u pravolinijsko (kod štamparskih mašina), i u nekim satnim mehanizmima.

Parametarske jednačine hipocikloide imaju oblik:

$$x = (a-r)\cos\varphi + r\cos\left[(a-r)\frac{\varphi}{r}\right],$$

$$y = (a-r)\sin\varphi - r\sin\left[(a-r)\frac{\varphi}{r}\right],$$

gdje je a - radijus nepokretne kružnice, r - radijus pokretne kružnice, φ - ugao koji odgovara luku izmedju tačaka dodira kružnica.



Segment tangente na astroidu izmedju koordinatnih osa ima konstantnu dužinu a.

Kako je
$$x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} \cdot y' = 0,$$

$$-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}} \cdot (y')^2 + y^{-\frac{1}{3}} \cdot y'' = 0,$$

odnosno

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3},$$

$$y'' = \dots = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}},$$

izlazi

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{\left(1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}\right)^{3/2}}{\frac{1}{3} \cdot a^{2/3} \cdot x^{-4/3} \cdot |y^{-1/3}|} = \ldots =$$

$$= \frac{3 \cdot |a|}{a^{2/3} \cdot |x| \cdot x^{-4/3} \cdot |y^{-1/3}|} = 3\,|a\,x\,y|^{1/3} .$$

404.-Odrediti krivinu evolvente kruga

$$x = a\,(\cos t + t \sin t),$$

$$y = a\,(\sin t - t \cos t).$$

Rješenje. Kako je

$$\dot{x} = at \cos t,$$
$$\dot{y} = at \sin t,$$
$$\ddot{x} = a\,(\cos t - t \sin t),$$
$$\ddot{y} = a\,(\sin t + t \cos t)$$

to koristeći obrazac za krivinu krive datu jednačinama u parametarskom obliku

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}},$$

dobijamo

$$K = \ldots = \frac{|a^2 t\,(t \cos^2 t + t \sin^2 t)|}{(a^2 t^2)^{3/2}} = \frac{1}{at} .$$

405.- Izračunati krivinu kod cikloide

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t)$$

i dokazati da je poluprečnik krivine dvaput toliki kolika je normalna duž. Izračunati specijalno radijus krivine za $t = 0, \pi, 2\pi$ i upotrebiti za približnu konstrukciju cikloide.

Rješenje. Uzimajući u obzir relacije

$$\dot{x} = a\,(1 - \cos t), \qquad \ddot{x} = a \sin t,$$
$$\dot{y} = a \sin t, \qquad \ddot{y} = a \cos t,$$

dobivamo

$$K = \frac{|a(1-\cos t) \cdot a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t|}{\left[(a - a \cos t)^2 + (a \sin t)^2\right]^{3/2}} = \dots =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{2(1-\cos t)}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot ay}}, \quad R = \frac{1}{K} = 2\cdot\sqrt{2ay} =$$

$$= 2a\cdot\sqrt{2(1 - \cos t)}.$$

Normalnu duž (dužinu normale) kod cikloide dobićemo kad u opštoj formuli za normalnu duž

$$N = \left| y\cdot\sqrt{1 + y'^2} \right|$$

zamijenimo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} .$$

Tako dobivamo

$$N = \left| y\cdot\sqrt{1 + y'^2} \right| = |y|\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} =$$

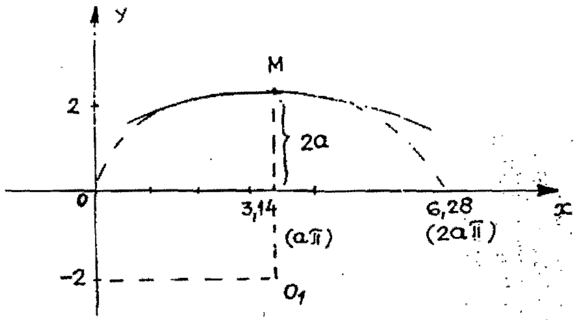
$$= \sqrt{y^2 \cdot \frac{(1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{(1-\cos t)^2}} = \sqrt{2\cdot ay}.$$

Poredjenjem izraza za R i N vidimo da je kod cikloide $R = 2N$.

Specijalno, za $t = 0, \pi, 2\pi$ biće radijus krivine:

$$R_0 = 0, \quad R_\pi = 4a, \quad R_{2\pi} = 0.$$

Koristeći ove vrijednosti približno ćemo konstruisati cikloidu ovako. Na osnovu jednačina cikloide nanosimo vrijednosti x za $t = 0, \pi, 2\pi$, tj. nanosimo vrijednosti $x = 0$, $a\pi$, $2a\pi$; veličinu a uzećemo $a = 1$ cm.



U tački $x = a\pi$ podignuta je normala na x-osovinu i nanešena odgovarajuća vrijednost ordinate y; dakle, nanešena je vrijednost $y = 2a = 2$ cm (tolika je i normalna duž N cikloide za $x = a\pi$). Tako je dobivena tačka M. Ako na normalu u tački $x = a$ nanesemo $MO_1 = 4a = 4$ cm dobićemo u tački O_1 sre - dište kruga krivine koji prolazi kroz tačku M na cikloidi. Iz tačke O_1 opisali smo dio kruga kroz tačku M, a ostalo (isprekidano) nacrtali pomoću krivuljara. Pri ovome, vodili smo računa da je u tačkama $x = 0$ i $x = 2a\pi$ $y' = \infty$, tj. da tangenta na cikloidu u tim tačkama stoji uspravno na x-osovinu. (Jer,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right),$$

pa ako $t \to 0$, $y' \to \infty$).

406. - Na krivoj $y = \ln x$ naći tačku, u kojoj krivina dostiže maksimalnu vrijednost.

Rješenje. Pošto mora biti $x > 0$ (zbog D.P.), to je

$$K = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \left|\frac{-x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}\right| = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} .$$

Stacionarna tačka funkcije $K(x)$ dobije se rješavanjem jednačine $K'(x) = 0$, tj.

$$\left(x^2+1\right)^{1/2} \cdot \frac{1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Longleftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \text{ jer mora biti } x > 0.$$

Pošto znak prvog izvoda $K'(x) = \dfrac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$

zavisi samo od znaka izraza

$$1 - 2x^2 ,$$

to je

$$K'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1-2x^2 > 0 \Longleftrightarrow \left[x^2 < \frac{1}{2},\ (x>0)\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

$$K'(x) < 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Dakle, u tački $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ funkcija $K'(x)$ mijenja znak sa plus na minus, pa u tački $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ funkcija $K(x)$ postiže maksimalnu vrijednost

$$K_{max} = K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2}} = \frac{2}{3^{3/2}} .$$

Prema tome tačka M, na krivoj $y = \ln x$, ima koordinate

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$y = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \ln 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\ln 2}{2} .$$

407. Naći poluprečnik krivine elipse u tački u kojoj se odsječak tangente, koji leži izmedju koordinatnih osa, polovi.

Rješenje. Neka je jednačina elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

tada jednačina njene tangente u tački $M_o(x_o, y_o)$ glasi:

$$y-y_o = -\frac{b^2x_o}{a^2y_o}\cdot(x - x_o).$$

Tangenta siječe koordinatne ose u tačkama $M_1(2x_o, 0)$ i $M_2(0, 2y_o)$, jer mora biti $\overline{M_oM_1} = \overline{M_oM_2}$ (prema uslovu zadatka). Otuda

$$y = 0, \quad x = 2x_o$$

$$y - y_o = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}(x - x_o)$$

implicira $y_o^2 = \frac{b^2}{a^2} x_o^2$, što, uvrštavanjem u jednačinu elipse, daje

$$x_o = \frac{a}{\sqrt{2}}, \; y_o = \frac{b}{\sqrt{2}} .$$

Nadjimo krivinu u tački $M_o\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

Kako je

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}, \text{ to}$$

$$y_o' = \ldots = -\frac{b}{a}, \quad y_o'' = \ldots = -\frac{2\sqrt{2}\cdot b}{a^2},$$

i konačno

$$R = \frac{\left(1+y_o'^2\right)^{3/2}}{|y_o''|} = \frac{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{3/2}}{\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot b}{a^2}} = \frac{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot ab} .$$

408.- Naći koordinate centra oskulatorne kružnice elipse u proizvoljnoj tački.

Rješenje. Neka su

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametarske jednačine elipse, tada vrijedi

$$\dot{x} = -a\sin t, \quad \ddot{x} = -a\cos t,$$

$$\dot{y} = b\cos t, \quad \ddot{y} = -b\sin t,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{\dot{x}} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{-1}{\sin^2 t}\cdot\frac{-1}{a\sin t} =$$

$$y'' = \frac{-b}{a^2 \sin^3 t}.$$

Koordinate centra kruga krivine, prema obrascima

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

imaju vrijednost:

$$\xi = a\cos t + \frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\cdot\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}^2 t\right)\cdot\frac{-a^2\sin^3 t}{b}$$

$$= a\cos t - a\cos t\sin^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t;$$

$$\eta = b\sin t + \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{ctg}^2 t}{-\frac{b}{a^2\sin^3 t}} = \ldots = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

Pošto se radi o proizvoljnoj tački na elipsi, to ove koordinate predstavljaju ujedno parametarske jednačine evolute elipse. Ova evoluta je astroida, čija je jednačina u pravouglom koordinatnom sistemu

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = c^{4/3}, \text{ gdje je } c^2 = a^2 - b^2.$$

409. Dokazati da je kod krivih linija $\rho^n = a^n \cdot \sin(n\varphi)$ (sinusne spirale) polarna normala $(n + 1)$ puta tolika koliki je poluprečnik krivine. Na osnovu toga dati konstrukciju kruga krivine.

Rješenje. Kod sinusne spirale

$$\rho^n = a^n \cdot \sin(n\varphi),$$

imaćemo $\rho = a \cdot \sqrt[n]{\sin n\varphi}$.

$$\rho' = a\cdot\frac{1}{n}(\sin n\varphi)^{\frac{1-n}{n}}\cos n\varphi\cdot n,$$

odakle je $\rho' = a\,\dfrac{(\sin n\varphi)^{\frac{1}{n}}\cos n\varphi}{\sin n\varphi}$, odnosno

$$\rho' = \rho\cos n\varphi/\sin n\varphi,$$

$$\rho''=a(\sin n\varphi)^{\frac{1}{n}}\cot g^2 n\varphi - a(\sin n\varphi)^{\frac{1}{n}}\frac{n}{\sin^2 n\varphi}, \text{ tj.}$$

$$\rho''=\rho \operatorname{ctg}^2 n\varphi - \rho\cdot\frac{n}{\sin^2 n\varphi}.$$

Prema obrascu za poluprečnik krivine, krive date jednačinom u polarnim koordinatama,

$$R=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|},$$

imamo

$$R=\frac{(\rho^2+\rho^2\operatorname{ctg}^2 n\varphi)^{3/2}}{\left|\rho^2+2\rho^2\operatorname{ctg}^2 n\varphi-\rho\cdot\left(\rho\operatorname{ctg}^2 n\varphi-\frac{\rho\cdot n}{\sin^2 n\varphi}\right)\right|}=$$

$$=\ldots=\frac{1}{1+n}\cdot\frac{\rho}{|\sin n\varphi|}.$$

Polarnu normalu dobijamo iz relacije

$$N=\sqrt{\rho^2+\rho'^2};$$

i ako ovdje zamijenimo ρ'; dobićemo

$$N=\sqrt{\frac{\rho^2}{\sin^2 n\varphi}}=\frac{\rho}{|\sin n\varphi|}.$$

Dakle, stvarno je

$$R=\frac{N}{n+1}.$$

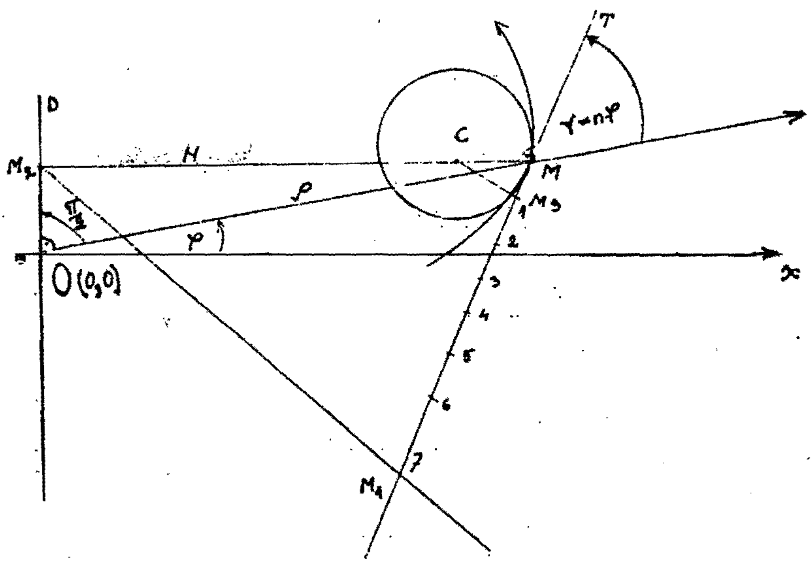
Na osnovu izloženog možemo konstruisati krug krivine na ovaj način. Sjetimo se da je

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\rho}{\rho'}, \quad \text{odakle je} \quad \rho'=\rho\operatorname{ctg}\vartheta.$$

Imali smo $\rho'=\rho\operatorname{ctg} n\varphi$, pa je

$$\operatorname{cotg}\vartheta=\operatorname{ctg} n\varphi, \text{ tj. } \vartheta=n\varphi+K\pi;\ K=0,\pm 1,\ldots$$

Na osnovu ove relacije možemo konstruisati tangentu kod sinusne spirale.



Postupak. Neka je spirala orijentisana kao na slici i neka je M tačka na spirali (dobivena po formuli $\rho^{M} = a^{n} \sin(n\varphi)$ za dati ugao φ). Tada na poteg ρ tačke M treba podići normalu OD u tački O(o,o).

Na osnovu formule $\gamma = n\varphi$ konstruisana je tangenta T (na slici je uzeto $\gamma = 6\varphi$. Normala MM_2 na tangentu u tački M predstavlja polarnu normalnu duž N.

Prema formuli $R = \frac{N}{n+1}$, s obzirom da smo uzeli n = 6 biće $R = \frac{N}{7}$.

Normalnu duž N podijelićemo na (n+1) djelova prema poznatom načinu iz planimetrije (na slici je podijeljena na sedam djelova): povucimo u proizvoljnom pravcu pravu; za ovo možemo koristiti i tangentu T i na nju nanijeti sedam jednakih djelova proizvoljne veličine. Kraj sedmog podioka spojićemo sa tačkom M_2. Prava iz tačke M_3 (kraja prvog podioka) paralelna sa pravom M_1M_2 daće središte C kruga krivine za tačku M.

410. Gdje je kod kruga središte krivine i šta mu je evoluta? Ista pitanja za pravu.

Rješenje. – Nije teško primijetiti da je kod kruga krivina konstantna; $K = \frac{1}{R}$, R - poluprečnik kruga, što znači da se krug krivine kod kruga (kružnice) poklapa sa samim krugom, tj. krug je sam sebi krug krivine.

Odatle slijedi da je kod kruga evoluta (geometrijsko mjesto centara krugova krivine) jedna tačka i to centar posmatranog kruga.

Kod prave je krivina konstantna i jednaka nuli. Odmah izlazi, obzirom na $R = \frac{1}{K}$, da je poluprečnik krivine beskonačan. Prema tome, prava nema evolutu.

411. - Kako stoji stvar sa središtem krivine u prevojnoj tački, i uopšte u tački u kojoj je krivina nula?

Rješenje. - Pošto u prevojnoj tački, ukoliko postoji drugi izvod, mora biti $y'' = 0$ (naime, u prevojnoj tački drugi izvod mora mijenjati znak, a u samoj prevojnoj tački drugi izvod ne mora postojati), to je krivina, u toj tački, jednaka nuli, pa je poluprečnik kruga krivine beskonačan.

Uopšte, u tački u kojoj je krivina nula, krug krivine degeneriše u tangentu (pa je središte krivine u beskonačnosti).

412. - Cikloida $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ima evolutu $\xi = a(t + \sin t)$, $\eta = -a(1 - \cos t)$. Stavi li se ovdje $t = u + \pi$, $\xi = x + a\pi$, $\eta = y - 2a$, biće

$x = a(u - \sin u)$, $y = a(1 - \cos u)$.

Odatle izlazi: evoluta cikloide je ovoj kongruentna cikloida. Kako evoluta leži prema evolventi?

Rješenje. - Ako u jednačinama evolute cikloide stavimo $t = u + \pi$, time nećemo promijeniti oblik evolute, jer tada ćemo dobiti:

$$\xi = a[u+\pi + \sin(u+\pi)] = a(u - \sin u) + a\pi,$$

$$\eta = -a[1 - \cos(u+\pi)] = -a - a\cos u = a(1 - \cos u) - 2a.$$

Posljednje dvije jednačine, poredjene sa jednačinama cikloide, pokazuju da je evoluta cikloida i to kongruentna datoj cikloidi. Naime, adiciona konstanta $a\pi$ pokazuje da jednu granu evolvente treba pomaknuti desno od koordinatnog početka, dok adiciona konstanta $-2a$ kazuje da istu granu evolvente treba spustiti ispod x-ose, pa da se tim dvostrukim pomjeranjem grane evolvente dobije grana evolute.

413. Naći evolutu kardioide $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

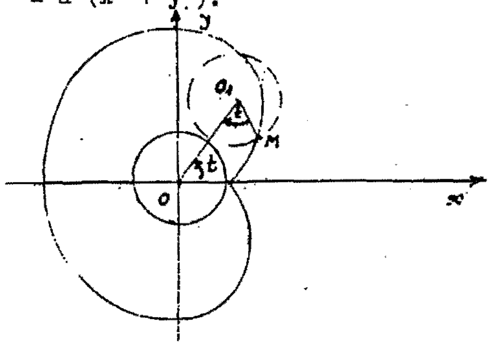
Rješenje. - Kardioida je kriva u ravni koju opisuje tačka kruga poluprečnika O_1M, jednakog b, koji se kotrlja bez klizanja po nepokretnom krugu istog poluprečnika, pri čemu se krugovi dodiruju spolja.

Jednačina kardioide u polarnom koordinatnom sistemu je:

$$\rho = 2b(1+\cos\varphi) = a(1+\cos\psi) = a[1+\cos(\varphi+\pi)]$$
$$= a(1-\cos\varphi),$$

a u Dekartovom sistemu (provjeriti!):

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$



Kod kardioide $\rho = a(1-\cos\varphi)$ biće:

$$x = a(\cos\varphi - \cos^2\varphi), \quad y = a(\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi),$$
$$\dot{x} = -a(\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi), \quad \dot{y} = a(\cos\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$
$$\ddot{x} = -a(\cos\varphi - 2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi), \quad \ddot{y} = -a(\cos\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi).$$

Odavde dobijamo: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}$,

$$dx^2+dy^2 = 2a^2(1-\cos\varphi)d\varphi^2$$
$$dxd^2y-dyd^2x = 3a^2(1-\cos\varphi)d\varphi^3 \qquad \frac{dx^2+dy^2}{dxd^2y-dyd^2x} = \frac{2}{3d\varphi}.$$

Dakle, parametarske jednačine evolute kardioide u pravouglom koordinatnom sistemu su:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{(dx^2+dy^2).dy}{dxd^2y-dyd^2x} = \dots = \frac{a}{3}\left[\cos\varphi(1+\cos\varphi)-2\right],$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{(dx^2+dy^2)dx}{dxd^2y-dyd^2x} = a\sin\varphi - a\sin\varphi\cos\varphi -$$

$$-\frac{2a(\sin\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi)}{3} = \frac{a}{3}\cdot\sin\varphi(1+\cos\varphi).$$

414.- Odrediti poluprečnik krivine kod cikloide $x = a\cdot(t-\sin t)$, $y = a\cdot(1-\cos t)$ za $t = 0$ i $t = \pi$, pa tako izračunati dužinu luka cikloide. Zašto se ne može ići od $t = 0$ do $t = 2\pi$?

Rješenje. - Nadjimo najprije poluprečnike krivine kod cikloide za $t = 0$ i $t = \pi$. Prema formuli

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{|dxd^2y-dyd^2x|}$$

i relacijama

$$dx^2+dy^2 = a^2(1-\cos t)^2\,dt^2,$$

$$dxd^2y-dyd^2x = a\cos t\,dt^2(a\,dt-a\cos t\,dt)-a^2\sin^2 t\,dt^3 =$$

$$= a^2(\cos t-1)dt^3,$$

imamo

$$R = \frac{a^3(1-\cos t)^3dt^3}{a^2(1-\cos t)dt^3} = a\,(1-\cos t)^2$$

Za $t = 0$, biće $R_1 = 0$, za $t = \pi$, biće $R_2 = 4a$.
Prema tome, dužina luka evolute od $t = 0$ do $t = \pi$ biće jednaka $R_2 - R_1 = 4a$. Imajući u vidu da je evoluta cikloide ovoj kongruentna cikloida, izlazi da će i kod date cikloide dužina luka od $t = 0$ do $t = \pi$ biti jednaka $4a$.

Ne može se odjednom računati dužina luka od $t=0$ do $t=2\pi$ zato što u tom intervalu poluprečnici krivine ne variraju uvijek u istom smislu; naime od $t=0$ do $t=\pi$ oni variraju od 0 do $4a$, a od $t=\pi$ do $t=2\pi$ oni variraju od $4a$ do 0. Da je to tako, uvjerićemo se time što ćemo provjeriti da je funkcija $R(t) = a\cdot$

$(1-\cos t)^2$ rastuća na segmentima $[0+2k\pi,\ \pi+2k\pi]$, a opadajuća na segmentima $[\pi+2k\pi,\ 2\pi+2k\pi]$; $k=0, \pm 1, \ldots$

Stvarno,

$$R'(t) = 2a(1-\cos t)\cdot \sin t,$$

$$R'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \sin t \geq 0 \Leftrightarrow 0+2k\pi \leq t \leq \pi + 2k\pi\,.$$

$$R'(t) \leq 0 \Leftrightarrow \sin t \leq 0 \Leftrightarrow \pi+2k\pi \leq t \leq 2\pi + 2k\pi\,,$$

a

$$R'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 + 2k\pi\ ,\ k = 0, \pm 1, \ldots$$

415. Pomoću radijusa krivine kružne evolvente izračunati dužinu luka kod kruga, ako luk odgovara centralnom uglu veličine $\frac{\pi}{2}$.

Rezultat (uputstvo). - Poluprečnici krivine kružne evolvente

$$x = a(\cos t + t \sin t),\ y = a(\sin t - t \cos t)$$

za $t=0$ i $t=\frac{\pi}{2}$ su respektivno: $R_1 = 0$, $R_2 = \frac{a\pi}{2}$, pa otuda dužina luka evolute, tj. kruga od $t=0$ do $t = \frac{a\pi}{2}$.

416. Sastaviti jednačinu evolute za

a) traktrisu $x = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$;

b) logaritamsku spiralu:

$$r = ae^{m\varphi}.$$

Rezultat. - a) Evoluta je lančanica

$$\eta = a \cdot \mathrm{ch}\,\frac{\xi}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\xi/a} + e^{-\xi/a}\right).$$

Oblik ove krive ima lanac ili kakva bilo druga savitljiva nerastegljiva (materijalna) nit (konac) čiji su krajevi učvršćeni u dvjema tačkama, a rastojanje izmedju tih tačaka je manje od dužine niti.

Provjeriti da je poluprečnik krivine lančanice

$$R = a\ \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\,.$$

b) Logaritamska spirala:

$$\rho = m\cdot a\cdot e^{m(\varphi-\pi/2)}.$$

Glava četvrta

TAYLOROVA FORMULA I NEKE NJENE PRIMJENE

§ 4.1. TAYLOROVA FORMULA

417.

Odrediti Taylorov polinom $Tn(x)$ za funkciju f, definisanu sa $f(x) = e^x$, u okolini tačke $x=a$ $(\in R)$. Zatim odgovoriti na pitanja:

a) Da li, za svaku tačku $x=a$ $(\in R)$, postoji (može da se odredi) Taylorov polinom $Tn(x)$ koji „dobro aproksimira" datu funkciju; da li od Taylorovih polinoma date funkcije f, u okolini tačke $x=a$, postoji polinom koji je najvećeg stepena (reda)?

b) Procijeniti grešku aproksimacije $e^x \approx Tn(x)$ za $x \in (a-h,\ a+h)$, $(n > 0)$. Koristiti i Lagrangeov i Cauchyev oblik za ostatak $Rn(x) = f(x) - Tn(x)$.

c) Odrediti red No Taylorovog polinoma tako da je:

$$(\forall x \in (a-h,\ a+h)) \left| R_n(x) \right| < \varepsilon .$$

Uraditi zadatak ako je dato

$a=1$, $h=1$, $n=3$, $\varepsilon=10^{-3}$.

Rješenje. Kako je za $\forall k\in N$ $y^{(k)}=(e^x)^{(k)}=e^x \Longrightarrow y^{(k)}(a) = e^a$

to je

$$T_n(x)=y(a)+\frac{y'(a)}{1!}(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= e^a\left[1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}\right] \qquad (1)$$

gdje je n-red Taylorovog polinoma $T_n(x)$ bilo koji prirodan broj, pošto funkcija $y=e^x$ ima izvod bilo kog reda u tački $x=a$ $(y^{(n)}(a)=e^a)$.

a) Polinom $T_n(x)$ dobro aproksimira funkciju $y=e^x$ u nekoj okolini tačke $x=a$, ako je $y^{(n)}(a)=e^a \neq \infty$, što je tačno za $\forall a\in(-\infty,\infty)$. Tada je prema Peaneu $R_n(x)=o\left\{(x-a)^n\right\}$.

Kako je $y^{(n)}(a)=e^a \neq\infty$ za svaki prirodan broj n to jasno ne postoji $T_n(x)$ koji je najvećeg stepena, (pošto ne postoji ni najveći prirodan broj).

b) Prema Lagrangeu (za $a-h \leqslant x \leqslant a+h$ i dato $n\in N$) je

$$\left|R_n^L(x)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad (\xi=a+\theta(x-a);\ 0<\theta<1)$$

$$=\frac{\left|e^{a+\theta(x-a)}\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

$$<\frac{e^{a+h}}{(n+1)!}h^{n+1}, \qquad (2)$$

pošto je

$|x-a|\leqslant h(>0)$, tj. $\forall x\in(a-h,a+h)$, $e^{\xi}<e^{a+h}$ (ako je $\theta=1$).

Prema Cauchyu

$$\left|R_n^C(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{n!}(1-\theta)^n|x-a|^{n+1} \quad (\xi=a+\theta(x-a);\ 0<\theta<1)$$

$$\leqslant\frac{e^{a+h}}{n!}h^{n+1}$$

tj. očito je da je bolja procjena greške dobijena po Lagrangeu.

c) Prema procjeni greške datoj formulom (2), treba da je

$$\frac{e^{a+h}}{(n+1)!}\, h^{n+1} < \varepsilon \qquad \left(\overset{(2)}{\Longrightarrow} |R_n| < \varepsilon\right).$$

te je red polinoma, za koji je greška pri aproksimaciji $e^x \approx T_n(x)$, za $\forall x \in (a-h, a+h)$, manja od ε, rješenje nejednačine

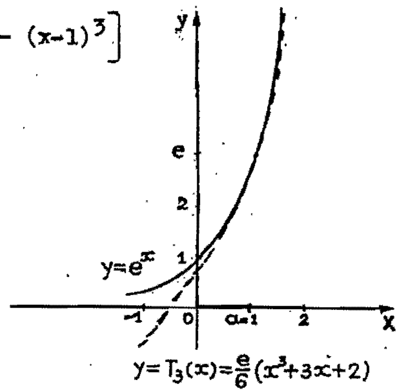
$$\frac{(n+1)!}{h^{n+1}} > \frac{e^{a+h}}{\varepsilon} \iff n > N_0(\varepsilon, a, h). \tag{3}$$

Posebno za $a=1$, $h=1$, $n=3$, $\varepsilon = 10^{-3}$

a) $T_3(x) = e\left[1 + (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3\right]$

$= \frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2)$

Na slici je pretstavljen grafik funkcija e^x i $T_3(x)$.



b) Procjena greške, prema (2), daje

$|R_3^L(x)| < \frac{e^2}{4!} \cdot 1^4 \approx 0,31,$

tj. greška pri aproksimaciji $e^x \approx T_3(x)$ za $x \in (0,2)$ po apsolutnoj vrijednosti manja je od 0,31.

c) Prema (3) treba da je $(2 < e < 3)$

$$\frac{(n+1)!}{1^{n+1}} > \frac{e^2}{10^{-3}} \iff (n+1)! > 9.10^3$$

te kako je $7! = 5040 < 9.10^3 < 8!$, to je sigurno za $n \geqslant 8 = N_0$ greška pri aproksimaciji $e^x \approx T_n(x)$ po apsolutnoj vrijednosti manja od $\varepsilon = 10^{-3}$.

Primjedba. Primjeti da je, u rezultatu pod c), zbog zaokruživanja naviše (uzeto je e=3) za dobijeni rezultat $n \geq N_0 = 8$ traženi zahtijev ispunjen, ali nije isključeno da je traženi zahtijev (da se greška aproksimacije učini manjom od $\varepsilon = 10^{-3}$) ispunjen i za neke vrijednosti $n<8$, što nije od značaja, pošto je cilj zadatka da pokaže da se za $\forall \varepsilon>0$ može odrediti N_o tako da je za $n>N_o$ $|R_n(x)| = | e^x-T_n(x)|<\varepsilon$, pri čemu nije značajno koliko je tačno N_o, već da N_o postoji, tj. da se uvijek može odabrati Taylorov polinom koji na zadovoljavajući (unaprijed zahtijevani) način aproksimira funkciju e^x u nekoj okolini tačke $x=a(=1)$.

418.

Provjeriti približne formule

a) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) = \sum_{k=o}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$

b) $\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n})$

c) $\cos x=\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+o(x^{2n+1})$

d) $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$ $(|x| \quad 1)$

e) $\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$ $(|x|<1)$

f) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2n})$ $(|x|<1)$

Rješenje. Date približne formule pretstavljaju razvoj datih funkcija po Taylorovoj formuli za $a=o$ sa ostatkom u Peanovoj formi.

a) Za $f(x)=e^x \Longrightarrow f^{(k)}(x)=e^x$ za $k=1,2,\ldots$. Tako je $f(o)=1$, $f^{(k)}(o)=1$ za $k=1,2,\ldots,n$, te je po Maclaurinovoj formuli sa ostatkom u Peanovoj formi (jer je $f^{(n)}(o)=1\neq\infty$)

$$f(x)=f(o)+\frac{f'(o)}{1!}x+\frac{f'(o)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(o)}{n!}x^n+o(x^n), \qquad (1)$$

tj.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

b) Za $f(x)=\sin x \Longrightarrow f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$ te je $f(o)=o$, $f^{(2m)}(o)=\sin m\pi=o$, $f^{(2m-1)}(o)=\sin(m\pi-\frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1}$ za $m=1,2,\ldots$.

Dakle, stavili se u formulu (1) $2n$ umjesto n, dobije se

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$$

c) Analogno, za $f(x)=\cos x$

$f^{(k)}(x)=\cos(x+k\frac{\pi}{2})$; $f(o)=1$, $f^{(2m)}(o)=(-1)^m$, $f^{(2m-1)}(o)=0$; $m=1,2,\ldots$.

Dakle, iz (1) transkripcijom $n \to 2n+1$

$$\Longrightarrow \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$

d) Za $f(x)=\ln(1+x) \Longrightarrow f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, tj. $f(o)=o$,

$f^{(k)}(o)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ za $k=1,2,\ldots,n$, te je prema (1)

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$$

e) Ovaj rezultat može se dobiti analogno sa prethodnim, ili ako u posljednjem rezultatu x zamjenimo sa $-x$

$$\Longrightarrow \ln(1-x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(-x)^k}{k}+o(x^n)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$$

f) Ako u rezultatima iz e) i f) izvršimo transkripciju $n \to 2n$, slijedi

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{x^k}{k}+o(x^{2n})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k-2}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k-1}\frac{x^{2k}}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{2k}+o(x^{2n})$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2n}),$$

gdje je u predzadnjoj od niza jednakosti iskorištena osobina $\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$, što je direktna posljedica komutativnosti i asocijativnosti sabiranja.

419.

Za funkcije iz prethodnog zadatka odrediti ostatak (u Lagrangeovom i Cauchyevom obliku), tj. odrediti $R_n(x) = f(x)-T_n(x)$.

Rješenje. Ako funkcija f ima neprekidan (n+1)-vi izvod u nekoj okolini tačke x=a, što implicira tvrdnju da je funkcija neprekidna (i ograničena) i ima neprekidne (i ograničene) sve izvode do zaključno n-tog reda u istoj okolini tačke x=a, tada se ostatak $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ pri razvoju funkcije f u Taylorov polinom T_n (n-tog reda) u tački x=a može pretstaviti i u Lagrageovom

$$R_n^L(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ ;\quad \xi=a+\theta(x-a),\ \theta\in(o,1); \qquad (1)$$

i u Cauchyevom obliku

$$R_n^C(x)=\frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}\ ;\quad \eta=a+\theta(x-a),\theta\in(o,1) \qquad (2)$$

Jasno, ne radi se o istom parametru θ u formulama (1) i (2).

a) Za $f(x)=e^x$ je $f^{(n+1)}(x)=e^x$ što je neprekidna funkcija u okolini svake tačke $x=a\in R$, te se funkcija e^x u okolini svake tačke $x=a\in R$ može aproksimirati Taylorovim polinomom reda $n(\in N)$ uz grešku aproksimacije datu prema (1) i (2).

Posebno za a=o, slijedi

$$R_n^L(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}\ ;\ R_n^C(x)=\frac{1}{n!}(1-\theta)^n\cdot e^{\theta x}x^{n+1},\ \theta\in(o,1).$$

Na sličan način

b) Za f(x)=sinx u tački x=o(=a)

$$R_{2n}^L(x)=\frac{1}{(2n+1)!}\sin^{(2n+1)}\xi\cdot(x-a)^{2n+1}\quad(\leftarrow \sin^{(2n+1)}\xi=(-1)^n\cos\xi)$$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n\cos(\theta x)\cdot x^{2n+1}\ ;$$

tj.

$$R_{2n}^C(x)=\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\cos(\theta x)\ (1-\theta)^{2n}\ x^{2n+1}.$$

c) Za $\cos x$ je $\cos^{(2n+1)} o=o$, $\cos^{(2n+2)} x=(-1)^{n+1}\cos x$, te je

$$R^L_{2n+1}(x)=\frac{1}{(2n+2)!}(-1)^{n+1}\cos(\theta x)x^{2n+2}$$

$$R^C_{2n+1}(x)=\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^{n+1}\cos(\theta x).(1-\theta)^{2n+1}.x^{2n+2}.$$

d) Za $f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, što je neprekidna

funkcija za svako $x>-1$, tj. neprekidna je u okolini svake tačke $x=a>-1$ (koja isključuje tačke $x\leqslant -1$), tj. data funkcija se u nekoj okolini tačke $x=a(\in R,\ a>-1)$ može aproksimirati Taylorovim polinomom n-tog reda (vidi prethodni zadatak), a ostatak se može procjeniti prema (1) i (2), tj. za $a=o$ je

$$R^L_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\ \frac{x^{n+1}}{(1+\theta_1 x)^{n+1}}\ ;\ R^C_n(x)=(-1)^n(1-\theta_2)^n\ \frac{x^{n+1}}{(1+\theta_2 x)^{n+1}}(o<\theta_{1,2}<1).$$

e) Za $f(x)=\ln(1-x)\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=\frac{-n!}{(1-x)^{n+1}}$, što je neprekidna funkcija u okolini svake tačke
$x=a(\in R,\ a<1)$ koja isključuje tačke $x>1$, te je za $a=o\ (<1)$

$$R^L_n(x)=\frac{-1}{n+1}\ \frac{x^{n+1}}{(1-\theta_1 x)^{n+1}}\ ;\ R^C_n(x)=-(1-\theta_2)^n\ \frac{x^{n+1}}{(1-\theta_2 x)^{n+1}}\ (o<\theta_{1,2}<1).$$

f) Za $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)\quad(-1<x<1)$ je

$$f^{(k)}(x)=\ln^{(k)}(1+x)-\ln^{(k)}(1-x)$$

$$=(k-1)!\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(1+x)^k}+\frac{1}{(1-x)^k}\right]\ ;$$

te je

$$f^{(2n)}(o)=(2n-1)!\ (-1+1)=o,\ \text{tj.}$$

$$f^{(2n+1)}(\xi)=(2n)!\ \frac{(1+\theta x)^{2n+1}+(1-\theta x)^{2n+1}}{(1-\theta^2x^2)^{2n+1}} \qquad (3)$$

Dakle, pri razvoju funkcije $\ln\frac{1+x}{1-x}$ u Taylorov polinom po stepenima od x do (2n-1)-vog stepena (uporedi sa prethodnim zadatkom), vodeći računa da je $f^{(2n)}(o)=o$, izlazi

$$R_{2n}^{L}(x)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(1+\theta_1 x)^{2n+1}+(1-\theta_1 x)^{2n+1}}{(1-\theta_1^2\ x^2)^{2n+1}}\ x^{2n+1}\ ;$$

$$(o<\theta_{1,2}<1)$$

$$R_{2n}^{C}(x)=(1-\theta_2)^{2n}\cdot\frac{(1+\theta_2 x)^{2n+1}+(1-\theta_2 x)^{2n+1}}{(1-\theta_2^2\ x^2)^{2n+1}}\ x^{2n+1}\ .$$

420.

Funkciju $f(x)=\mathrm{tg}x$ razviti po cijelim pozitivnim stepenima od x do člana x^3.

Rješenje. Za $f(x)=\mathrm{tg}x \quad (f(o)=o)$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}^2x+1\ ,\quad \text{tj. } f'(o)=1\ ;$$

$$\Rightarrow f''(x)=2\mathrm{tg}x.\ \frac{1}{\cos^2 x}=2(\mathrm{tg}^3x+\mathrm{tg}x)\ ,\quad \text{tj. } f''(o)=o\ ;$$

$$\Rightarrow f'''(x)=2(3\mathrm{tg}^2x+1)\ \frac{1}{\cos^2 x}=2(3\mathrm{t}^4x+4\mathrm{tg}^2x+1),\ \text{tj. } f'''(o)=2\ ;$$

$$\Rightarrow f^{(IV)}(x)=2.(12\mathrm{tg}^3x+8\mathrm{tg}x)\ \frac{1}{\cos^2 x}=8(3\mathrm{tg}^3x+2\mathrm{tg}x)(\mathrm{tg}^2x+1),$$

tj. $f^{(IV)}(x)=8(3\mathrm{tg}^5x+5\mathrm{tg}^3x+2\mathrm{tg}x)$.

Zato, prema

$$f(x)=f(o)+\frac{f'(o)}{1!}x+\frac{f''(o)}{2!}x^2+\frac{f'''(o)}{3!}x^3+R_3(x),$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+R_3\ (x),$$

gdje je ostatak moguće pretstaviti u Peanovom obliku $R_3(x)=o(x^3)$, pošto je treći izvod funkcije $\mathrm{tg}x$ ograničen u tački $x=o$; sem toga, pošto je $f^{(IV)}(x)$ neprekidna funkcija u okolini tačke $x=o$, to je ostatak moguće odrediti na pr. prema Lagrangeovoj formuli, tj.

$$R_3(x)=\frac{\mathrm{tg}^{(IV)}\theta x}{4!}\ x^4=\frac{1}{3}(3\mathrm{tg}^5\theta x+5\mathrm{tg}^3\theta x+2\mathrm{tg}\theta x)x^4, \qquad (1)$$

gdje je $o<\theta<1$.

Primjedba: Primjeti da iz (1) slijedi $R_3(x) = o(x^4)$, pošto je $tg\theta x \sim x$ $(x \to o)$. Sem toga taj rezultat izlazi iz $tg^{(IV)}o=o$, tj. ako se funkcija tgx razvije po Taylorovoj formuli do četvrtog reda, te se onda traži ostatak $R_4(x)$. Uporedi to sa zadatkom 178. b) i c).

421.

Funkciju $\sqrt[k]{1+x}$ razviti po Macklaurinovoj formuli do a) prvog, b) drugog, c) trećeg stepena (od x).

Rješenje. Kako je $y=(1+x)^{\frac{1}{k}} \Longrightarrow y^{(i)}= \frac{1}{k}(\frac{1}{k} -1)\ldots(\frac{1}{k} -i+1)(1+x)^{\frac{1}{k}-i}$

$$y^{(i)}=(-1)^{i-1} \frac{(k-1)(2k-1)\ldots[(i-1)k-1]}{k^i} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{(1+x)^{ki-1}}} .$$

Dakle, funkcija se može razviti po Macklaurinovoj formuli, pošto ima izvod bilo kog reda, koji je neprekidna funkcija u okolini tačke $x=o$ $(x > -1)$.

Tako je po Taylorovoj formuli, redom, za $n=1,2,3$:

a) $$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k} x - \frac{k-1}{2k^2} \frac{1}{\sqrt[k]{(1+\theta_1 x)^{2k-1}}} x^2$$

b) $$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k} x - \frac{k-1}{2k^2} x^2 + \frac{(k-1)(2k-1)}{6k^3} \frac{1}{\sqrt[k]{(1+\theta_2 x)^{3k-1}}} x^3$$

c) $$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k} x- \frac{k-1}{2k^2} x^2+ \frac{(k-1)(2k-1)}{6k^3}x^3 - \frac{(k-1)(2k-1)(3k-1)}{24 \cdot k^4} \frac{1}{\sqrt[k]{(1+\theta_3 x)^{4k-1}}} x^4,$$

gdje je $0< \theta_i < 1$ $(i=1,2,3$; a ostatak je odredjen u Lagrageovom obliku).

422.

Provjeriti razvoje

a) $\mathrm{sh}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$; $\mathrm{ch}x= \sum_{k=o}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$;

b) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k} +$
$+ o(x^{2n+1})$ (1)

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k} +$
$+ o(x^{2n+1})$ (2)

c) $\sqrt[3]{\sin x^3} = x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o\,(x^{13})$

Rješenje. Date rezultate nije teško provjeriti. Tako na pr. rezultati u b) pretstavljaju razvoje odgovarajućih funkcija po Macklaurinovoj formuli.

Za provjeravanje rezultata pod b) poći od identiteta

$\sin^2 x = \frac{1}{2}\,(1-\cos 2x)\;; \qquad \cos^2 x = 1-\sin^2 x.$ (3)

te, polazeći od rezultata u zadatku 418.c), umjesto x u razvoju za $\cos x$ staviti $2x$, dobije se

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} \iff (1),$$

što zamjenom u drugi od identiteta (3) daje (2), š.t.d.

§ 4.2. PRIMJENA TAYLOROVE FORMULE

423.

a) Pokazati da Taylorov polinom funkcije $f(x)=e^x$ u tački $x=0$ (vidi zadatke 418 i 419):

$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ (1)

dobro aproksimira datu funkciju za svako realno x, tj. da je za $\forall\varepsilon>0$, moguće odrediti N (koje zavisi od x i ε) tako da je

$|R_n(x)| = |e^x - T_n(x)| < \varepsilon \Leftarrow n > N.$ (2)

Na taj način vrijednosti od e^x (za $\forall x\in R$) mogu se sa potrebnom tečnošću sračunati prema (1), tako da je (prema (2))

$T_n(x)-\varepsilon < e^x < T_n(x)+\varepsilon$ samo ako se uzme dovoljno veliko n.

Dokazati!

Koristeći se rezultatom pod a) sračunati na četiri tačne decimale:

b) broj e (i dokazati da je e iracionalan broj);

c) broj $e^{1/2}$.

Rješenje. a) Prema rezultatu u zadatku 418. a) i 419. a) je

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0<\theta<1; \tag{3}$$

gdje je $R_n(x) = e^x - T_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\theta x}$.

Zbog: $0<\theta<1$ i $e<3$, dobije se

$$0<R_n(x)<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot 3^x, \text{ za } x>0; \quad 0<|R_n(x)|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ za } x<0. \tag{4}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, to je prema (4) za $\forall x\in R$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{5}$$

Iz (5) opet, u smislu definicije granične vrijednosti, slijedi da se ostatak $R_n(x)$ može učiniti po volji malenim, ako se uzme n dovoljno veliko. To znači da se polinom (1) može upotrebiti za računanje vrijednosti e^x za svako x; samo, jasno, za veće vrijednosti x treba uzeti veću vrijednost za n, ako se želi postići potrebna tačnost.

b) Za x=1, iz (1), slijedi

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}, \tag{6}$$

gdje je greška $R_n(1) = \dfrac{1}{(n+1)!}\,e^{\theta} < \dfrac{3}{(n+1)!}$ $(\Leftarrow e<3)$

Prema zahtijevu u zadatku treba da je rezultat tačan na četiri decimale, tj. da je $R_n(1) < 0{,}00005$, što je ispunjeno ako je

$$\frac{3}{(n+1)!} < 5\cdot 10^{-5} \Longleftrightarrow (n+1)! > \frac{3}{5}\cdot 10^5 = 6{,}10^4.$$

Pošto je $8! = 40\,320$, a $9! = 362880$, to je posljednja nejednakost ispunjena za n=8.

Prema tome je

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{8!}:$$

$$\approx 2+0,5+0,16667+0,04167+0,00833+$$
$$+\ 0,00139+0,00020+0,00002,\ \text{tj.}$$

$$e \approx 2,71828,$$

gdje je posljednji rezultat tačan na četiri decimale.

Tvrdnju da je e iracionalan dokazaćemo svodjenjem na protivriječnost, tj. pretpostavimo da je e racionalan: onda je $e=\frac{p}{q}$ gdje su p i q cijeli brojevi.

Sad, pošto formula (6) važi za svako $n\in N$, važi i za $n>q$, te se zamjenom $e=\frac{p}{q}$ iz (6) nakon množenja sa n! dobije

$$n!\,\frac{p}{q}=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\dots+\frac{n!}{n!}+\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

Kako je $n>q$, to je lijeva strana $n!\,\frac{p}{q}$ gornje jednakosti cijeli broj; na desnoj strani su isto tako svi sabirci, (sem zadnjeg), očito cijeli brojevi, dok za zadnji sabirak vrijedi $(0<\theta<1)$

$$0<\frac{e^{\theta}}{n+1}<\frac{3}{n+1}<1 \quad , \quad (\Leftarrow n>2),$$

tj. zadnji sabirak nije cijeli broj. Dakle, pretpostavka da je e racionalan broj svela se na protivriječnost, te je e iracionalan broj, š.t.d.

c) Pri aproksimaciji $e^{\frac{1}{2}}$ Taylorovim polinomom (1), greška je $R_n(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\,e^{\theta/2}$, te da bi bilo $R_n(\frac{1}{2})<0,00005$ dovoljno je da je $\frac{2}{2^{n+1}(n+1)!}<0,00005$ $\left(\Leftarrow e^{\frac{\theta}{2}}<e^{\frac{1}{2}}<4^{\frac{1}{2}}=2\right)$, odakle slijedi

$$(n+1)!\ 2^{n}>2.10^{4}.$$

Posljednja nejednakost ispunjena je za n=5, pošto je

$6!\ .\ 2^{5}=720\ .\ 32>7.10^{2}.3.10=2,1.10^{4}.$

Dakle, prema (1) je za n=5

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}2!}+\frac{1}{2^{3}.3!}+\frac{1}{2^{4}4!}+\frac{2}{2^{5}5!}=1,64866\ ;$$

gdje je rezultat tačan na četiri decimale.

424.

Analogno kao u prethodnom zadatku može se dokazati

a) $\sin x = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\theta x$, (1)

gdje je $\theta \in (0,1)$ i

$(\forall x \in R)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)\ |R_n(x)| < \varepsilon \Leftarrow n > N.$ (2)

Koristeći se tim rezultatom sračunati $\sin 9^\circ$ sa tačnošću do 10^{-5}, tj. odrediti n tako da je

$|R_n| = |\sin 9^\circ - T_n(9^\circ)| < 10^{-5}$; (3)

b) $\cos = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\theta x$, (4)

gdje je $\theta \in (0,1)$ i

$(\forall x \in R)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)\ |R_n(x)| < \varepsilon \Leftarrow n > N.$ (5)

Rješenje. a) Za dokaz formule (1) vidi zadatke 418. b) i 419. b). Sad je za $\forall x \in R$:

$$0 < |R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \quad (\text{kad } n \to \infty),$$

te, u smislu definicije granične vrijednosti, zaista važi (2), tj. Taylorov polinom (1) može da posluži kao aproksimacija funkcije $\sin x$ sa dovoljnom, unaprijed zahtijevanom tačnošću (ε) samo ako se uzme n dovoljno veliko.

Pošto je $9^\circ = \frac{\pi}{20} < \frac{2}{10}$ $(\Leftarrow 3 < \pi < 4)$, to je uslov (3) ispunjen ako je

$$|R_n| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{2^{2n+1}}{10^{2n+1}} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-5},$$

što je ispunjeno za $n=3$, pa je (uz uslov (3))

$$\sin 9^\circ \approx T_3\left(\frac{\pi}{20}\right) = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi^3}{20^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{20^5 \cdot 5!} = 0{,}156433\ldots$$

b) Dokaz se izvodi analogno sa prethodnim a polazeći od rezultata dobijenih u zadacima 418. c) i 419. c).

Primjedba: Formule (1) ili (4) mogu da posluže za računanje vrijednosti funkcija sinx ili cosx sa unaprijed zadanom tačnošću. Jasno, za $45^o < x < 90^o$, bolje je uzeti prvo u obzir da je $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ ili $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, jer je očito da za aproksimaciju treba uzeti utoliko manje članova ukoliko je x manje.

U prethodna tri zadatka korišten je rezultat

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \to 0, \quad \text{kad } n \to \infty \qquad (x > 0). \tag{*}$$

Da dokažemo (*) primjetimo da je

$$0 < a_{k+1} = \frac{x}{k+1} a_k < a_k \iff k > x-1, \text{ ili za (neko } k_o)$$

$k \geqslant k_o > x-1$ je $0 < a_{k+1} < a_k \leqslant a_{k_o}$, tj. dati niz je monotono opadajući i ograničen, te je i konvergentan. Zato je

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \cdot \alpha = 0,$$

š.t.d.

425.

Za polinom stepena n

$$P_n(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad , (a_n \neq 0); \tag{1}$$

važi

$$P_n(x) = P_n(x_o) + \frac{x-x_o}{1!} P_n'(x_o) + \frac{(x-x_o)^2}{2!} P_n''(x_o) + \ldots + \frac{(x-x_o)^n}{n!} P_n^{(n)}(x_o). \tag{2}$$

Koristeći se tim rezultatom riješiti zadatke

a) Izračunati vrijednost funkcije

$y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 6$ u tački $x=1,1$ i $x=0,9$;

b) Odrediti polinom četvrtog stepena $P_4(x)$ znajući da je

$P_4(1) = -1$, $P_4'(1) = -8$, $P_4''(1) = -2$, $P_4'''(1) = 6$, $P_4^{(4)}(1) = 24$

Rješenje. Za polinom (1) je

$P_n'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}$,

$P_n''(x) = 2.1.a_2+3.2.a_3x+\ldots n(n-1)a_nx^{n-2}$,

$P_n'''(x) = 3.2.1.a_3+4.3.2.a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$,

– –

$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.a_n$,

$P_n^{(n+1)}(x) = 0$,

te se pri razvoju po Taylorovoj formuli u tački $x=x_0$ dobije (1), pošto je $R_n(x)=\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}P_n^{(n+1)}(\xi) \equiv 0 \;(\Leftarrow (\forall \xi\in R)P_n^{(n+1)}(\xi) \equiv 0)$.

a) Pošto se vrijednosti 1,1 i o,9 nalaze u okolini tačke $x=1$ to ćemo u okolini te tačke dati polinom razviti po Taylorovoj formuli. Za $y=x^4-3x^3+2x^2-7x+6$ je $y(1)= -1$; $y'= 4x^3-9x^2+4x-7$, tj. $y'(1)= -8$; $y''= 12x^2-18x+4$, $y''(1)= -2$; $y'''= 24x-18$, $y'''(1)= 6$; $y^{(IV)}= 24$; $(y^{(V)} \equiv 0)$. Zato je

$$y = y(1)+y'(1)\,\frac{x-1}{1!}+y''(1)\,\frac{(x-1)^2}{2!}+ y'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!}+y^{(IV)}(1)\,\frac{(x-1)^4}{4!}$$

$$= -1-8(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3+(x-1)^4.$$

Sad je

$y(1,1)= -1-8.o,1-(o,1)^2+(o,1)^3+(o,1)^4= -1,8o89$, tj.

$y(o,9)= -1-8(-o,1)-(-o,1)^2+(-o,1)^3+(-o,1)^4 = -o,1991$.

b) Traženi polinom četvrtog reda, prema (2), je

$$P_4(x)= P_4(1)+P_4'(1)\,\frac{x-1}{1!}+ P_4''(1)\,\frac{(x-1)^2}{2!}+P_4'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!}+P_4^{(4)}(1)\,\frac{(x-1)^4}{4!}$$

$$= -1-8(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3+(x-1)^4$$

$$= 6 - 7x + 2x^2 - 3x^3 + x^4.$$

426.

Dokazati formulu

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r \quad ; \qquad (1)$$

$(n \geq 2,\ a > o,\ x > o)$, gdje je $o < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

Zatim, na osnovu formule (1) izračunati

a) $\sqrt[3]{3o}$; b) $\sqrt[5]{25o}$ i procjeniti grešku.

Rješenje. Razmotrimo funkciju

$$f(x) = \sqrt[n]{a^n + x} \qquad (a > o).$$

Izlazi $f(o) = a$, tj.

$$f'(x) = \frac{1}{n}(a^n+x)^{\frac{1}{n}-1} \Rightarrow f'(o) = \frac{1}{na^{n-1}} \quad , \text{ tj.}$$

$$f''(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)(a^n+x)^{\frac{1}{n}-2} = -\frac{n-1}{n^2}\ \frac{1}{\sqrt[n]{(a^n+x)^{2n-1}}} .$$

Kako drugi izvod $f''(x)$ postoji u (svakoj) okolini tačke $x=o$ (koja isključuje tačku $x=-a^n$), to se data funkcija može u okolini tačke $x=o$ razviti po Taylorovoj formuli, tako da je

$$f(x) = f(o) + f'(o) \cdot x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 \quad , \quad 0 < \theta < 1 ;$$

ili

$$\sqrt[n]{a^n+x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r \quad , \quad \text{š.t.d.,}$$

gdje je za $x > 0$ $(\Rightarrow a^n+x > a^n)$

$$0 < r < \frac{n-1}{n^2}\ \frac{x^2}{a^{2n-1}} \quad , \quad \text{š.t.d..}$$

a) $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{3^3+3} \overset{(1)}{=} 3+\frac{3}{3 \cdot 3^2} - r = 3{,}10\dot{1} - r$; $\quad o < r < \frac{1}{3^5}$;

b) $\sqrt[5]{25o} = \sqrt[5]{3^5+7} \overset{(1)}{=} 3+\frac{7}{5 \cdot 3^4} - r = 3{,}017 - r$; $\quad o < r < \frac{98}{5^2 \cdot 3^9}$.

427

Razviti po Maclaurinovoj formuli funkciju

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \quad , \quad x \neq 0 \\ &= 0 \quad , \quad x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Rješenje. Pošto je

$$\lim_{x\to o} f(x) = \lim_{x\to o} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0),$$

to je data funkcija neprekdina i u $x=0$, tj. neprekidna je za svako x.

Njen prvi izvod je

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad , \quad x \neq 0, \quad \text{tj.}$$

$$f'(o) = \lim_{\Delta x\to o} \frac{\Delta f(o)}{\Delta x} = \lim_{x\to o} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{u}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{1}{2ue^{u^2}} = 0,$$

sem toga je

$$\lim_{x\to o} f'(x) = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{2u^3}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{3u}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{3}{2ue^{u^2}} = 0 = f'(0) \, ,$$

tj. i prvi izvod je neprekidna funkcija za $x=0$ (i za $\forall x \in R$).

Analogno nalazimo da je drugi izvod:

$$\left.\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \quad , \quad x \neq 0 \\ &= 0 \quad , \quad x = 0 \end{aligned}\right\} , \tag{2}$$

takodje neprekidna funkcija. Jasno, da se to pokaže nije potrebno posebno potražiti $f''(o)$, već je dovoljno staviti $f''(o) = \lim\limits_{x\to o} f''(x) = o$, što je posljedica, kao što je ranije dokazano, Lagrangeove tnoreme o srednjoj vrijednosti, koju ova funkcija, a i njen izvod zadovoljavaju.

Da se nadju slijedeći izvodi $f'''(o)$, $f^{(IV)}(o)$, itd., ako postoje, može se iskoristiti matematička indukcija:

Usvoji li se induktivna pretpostavka da je za neko $n \in N$:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

gdje je $P_n(\frac{1}{x})$ polinom po $\frac{1}{x}$ (ovdje je n samo indeks, a ne i stepen polinoma), tada je

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]'_x = P_n(\tfrac{1}{x}) \cdot (e^{-\frac{1}{x^2}})'_x + e^{-\frac{1}{x^2}}\left[P_n(\tfrac{1}{x})\right]'_x$$

$$= \left[P_n(\tfrac{1}{x}) \cdot \frac{2}{x^3} - P'_n(\tfrac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}\right] e^{-\frac{1}{x^2}} \quad , (x \neq 0),$$

tj.

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)\, e^{-\frac{1}{x^2}} \quad , \quad x \neq 0,$$

gdje je $P_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot \frac{2}{x^3} - P'_n(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}$, očito, isto tako polinom po $\frac{1}{x}$ (pošto je zbir dva polinoma; - primjeti da je $P_{n+1}(\frac{1}{x})$ polinom stepena $N+3$, ako je $P_n(\frac{1}{x})$ polinom stepena N, te na osnovu toga zaključi da je $P_n(\frac{1}{x})$ polinom stepena $3n$, jer je $P_1(x) = 2(\frac{1}{x})^3$ stepena 3).

Dakle, prva od jednakosti (3) (ona za $x \neq 0$) je po principu matematičke indukcije tačna za svako $n \in N$, pošto je tačna za $n=1$ (i $n=2$), a i iz pretpostavke da je tačna za neko $n (\in N)$ slijedi da je tačna i za $n + 1$.

Kako je za svako $k \in N$ ($\frac{1}{x} = u$, tj. $u \to \pm\infty$, kad $x \to 0$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{u^k}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{ku^{k-1}}{2ue^{u^2}} =$$

$$= \lim_{u\to\pm\infty} \frac{ku^{k-2}}{2e^{u^2}} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{k(k-2)u^{k-4}}{2.2e^{u^2}} = \ldots \text{ itd.},$$

tj. primjenom 'Hospitaleova pravila $\left[\frac{k}{2}\right]$ - puta dobije se

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad \text{za} \quad \forall k \in N. \qquad (4)$$

Sada je (na osnovu induktivne pretpostavke (3))

$$f^{(n+1)}(o) = \lim_{x\to o} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(o)}{x}$$

$$= \lim_{x\to o} \frac{1}{x} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}},$$

te kako je $P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=o}^{3n} a_k \cdot \frac{1}{x^k}$,

$$\Longrightarrow f^{(n+1)}(o) = \lim_{x\to o} \sum_{k=o}^{3n} a_k \frac{1}{x^{k+1}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \sum_{k=o}^{3n} a_k \lim_{x\to o} \frac{1}{x^{k+1}} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

tj. prema (4)

$$f^{(n+1)}(o) = o \qquad (\Longleftarrow f^{(n)}(o) = o). \tag{5}$$

Dakle, prema (5), po principu potpune indukcije druga jednakost u (3): $f^{(n)}(o)=o$, tačna je za svako $n\in N$ (tj. (3) je tačno za svako n, pošto je ranije dokazano da je tačna prva jednakost u (3)).

To znači da funkcija f ima izvod bilo kog reda u tački x=o, tj. da je $f^{(n)}(o)=o$ za $\forall n\in N$. Zato se data funkcija može razviti u Maclaurinov polinom do bilo kog reda n, ali je

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(o) . x^k + R_n(x), \quad f^{(o)}(o) = f(o) = o,$$

tj.

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = R_n(x) \quad (=o(x^n)) \Longleftarrow f^{(k)}(o) = o, \qquad \forall k\in N.$$

Nameće se zaključak: iako funkcija (1) ima ograničen i neprekidan izvod bilo kog reda u tački x=o, njen razvoj u Maclaurinov polinom ne daje nikakvu "mjeru" o ponašanju funkcije u okolini tačke x=o, pošto su izvodi date funkcije jednaki nuli u toj tački.

Dovedi to u vezu sa:

$(\exists f'(a)\neq o)\ |f'(a)| < \infty \implies \Delta f(a) = df(x,a) + o(\Delta x)$,
tj. da se priraštaj funkcije $\Delta f(a)=f(x)-f(a)$ može aproksimirati diferencijalom u tački $x=a$, ako funkcija ima konačan izvod različit od nule u toj tački; tj. primjeti da Macklaurinova formula u ovom slučaju interpretirana u obliku

$$f(x)-f(o) = \Delta f(o) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x,o)}{k!} x^k + o(x^n)$$

ne daje nikakvu mjeru o prirastu funkcije u okolini tačke $x=o$.

428.

Ispitaj prirodu tačke $x=o$ za slijedeće funkcije

a) $f(x) = x^n$, $(n\in N)$;

b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(o) = 0$;

c) $f(x) = 1 + x^{8/3}$.

d) $f(x) = x^3 + x + 1$;

e) $f(x) = 2 + x + x^{8/3}$.

Rješenje. a) Za $n=1$: $f(x)=x \implies f'(x)=1$, tj. $f'(x) > o \quad \forall x\in R$ te funkcije f monotono raste, te je $x=o$ obična tačka kroz koju funkcija prolazi rastući (izuzev što je $x=o$ nula funkcije).

Za $n=2$ $f(x)=x^2 \implies f'(x)=2x$, tj. $f'(o)=o$, tj. $x=o$ je stacionarna tačka. Da odredimo prirodu te stacionarne tačke, dovoljno je naći (-što je posljedica kriterijuma koji daje Taylorova formula) prvi viši izvod, ako viši izvodi postoje, koji se ne poništava u toj tački.

U ovom slučaju prvi naredni izvod

$$f''(x) = 2 > 0$$

te je za funkciju $f(x) = x^2$ tačka $x=o$ tačka minimuma, jer je prvi izvod koji se ne poništava u toj tački 2-gog (tj. parnog reda).

Posmatra li se najopštiji slučaj $f(x)=x^n$ $(n \geq 2)$ slijedi:

$f'(x) = nx^{n-1} = 0 \quad \Leftarrow \quad x = 0$, tj.

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} = 0 \quad \Leftarrow \quad x = 0 \quad (n > 2)$, tj.

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} = 0 \Leftarrow \quad x = 0 \quad (n > 3)$, tj.

$f^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2x = 0 \Leftarrow x = 0$, tj.

$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 > 0$, za $\forall x \in R$;

te je na osnovu prve, od niza implikacija, tačka $x=o$ stacionarna tačka, dok svi viši izvodi postoje (u okolini tačke $x=o$) i jednaki su nuli u tački $x=o$, do zaključno izvoda $(n-1)$-vog reda, tj.

$f'(o) = f''(o) = \ldots = f^{(n-1)}(o) = o$

dok se n-ti izvod ne poništava, tj. $f^{(n)}(o) > o$; zato je, prema Taylorovoj formuli

$$(\forall x \in R)\ f(x) - f(o) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n = x^n \qquad (o < \theta < 1) \quad *$$

tj.

$$(\forall x \in R)\ f(x) - f(o) > o \Leftarrow n = 2k \qquad (k \in N),$$

ili funkcija ima minimum u tački $x=o$ (prema definiciji minimuma funkcije) ako je n-paran broj, tj. funkcije $x^2, x^4, x^8, \ldots, x^{2k}$ imaju minimum u tački $x=o$.

Slično se dokazuje (kao i u opštem slučaju - pozivajući se na Taylorovu formulu) da je za funkcije

$$x^3,\ x^5,\ x^7,\ \ldots,\ x^{2k-1} \qquad (k \in N)$$

tačka $x=o$ prevojna tačka.

b) Za funkciju $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ dokazano je ranije (vidi prethodni zadatak) da je

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq o), \quad f'(o) = o$$

tj. tačka $x=o$ je stacionarna tačka funkcije.

Pošto je u ovom slučaju (za $\forall n \in N$) $f^{(n)}(o) = o$, tj. postoji izvod bilo kog reda u tački $x=o$, ali se svi poništavaju u tački $x=o$, to pomenuti kriterijum, izveden na osnovu Taylorove formule,

---

* Da li je potrebno potezati Taylorovu formulu?

ne može da posluži za otkrivanje prirode (stacionarne) tačke $x=o$. Priroda stacionarne tačke $x=o$ otkriva se na osnovu ispitivanja znaka prvog izvoda:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \begin{array}{lcl} < o & \Leftarrow & x < o \\ > o & \Leftarrow & x > o \end{array}$$

tj. $x=o$ je tačka minimuma funkcije.

c) Sad je $f(x) = 1+x^{8/3}$ te se dobije

$$f'(x) = \frac{8}{3} x^{5/3} = o \quad \Leftarrow x = o \text{ , tj.}$$

$$f''(x) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} x^{2/3} = o \Leftarrow x = o \text{ , tj.}$$

$$f'''(x) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} \quad (x \neq o), \; f_+'''(o) = +\infty \neq f_-'''(o) = -\infty \; .$$

Dakle, u ovom slučaju ponovo se ne može ispitati priroda stacionarne tačke $x=o$ ($\Longleftrightarrow f'(o) = o$), pošto je $f''(o) = o$, dok $f'''(o)$ ne postoji. Jasno, $x=o$ je tačka minimuma, pošto prvi izvod mijenja zank u tački $x=o$: $f'(x) < o$ za $x < o$; $f'(x) > o$ za $x > o$ ($f'(o) = o$).

d) Za $f(x)=x^3+x+1$ je $f'(x)=3x^2+1 \neq o$ za $x=o$, tj. $x=o$ nije stacionarna tačka. Sad je

$$f''(x) = 6x = o \quad \Leftarrow \quad x = o \text{ , tj.}$$

$$f'''(x) = 6 \text{ za } \forall x \in R, \text{ tj. } f'''(o) > o$$

te, u smislu kriterijuma koji daje Taylorova formula, na osnovu zadnja dva rezultata (ili u opštem slučaju: $f''(a)=o$, $f'''(a)= = f^{(4)}(a) = \ldots = f^{(2k)}(a) = o$ i $f^{2k+1}(a) \neq o$ slijedi da je $x=a$ prevojna tačka) slijedi da je $x=o$ prevojna tačka.

e) Za $f(x)=2+x+x^{8/3}$ važe implikacije

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{3} x^{5/3} \neq o \quad \Leftarrow \quad x = o \; ; \qquad (1)$$

$$f''(x) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} x^{2/3} = o \quad \Leftarrow \quad x = o \; ; \qquad (2)$$

$$f'''(x) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad f_+'''(o) = +\infty \neq f_-'''(o) = -\infty \; ; \qquad (3).$$

odakle slijedi: iz (1) $x=o$ nije stacionarna tačka; iz (2) $x=o$ bi mogla biti prevojna tačka; iz (3) slijedi da ne postoji $f'''(o)$, tj. da ne može da se primjeni kriterijum za prevojnu tačku koji je posljedica Taylorove formule.

Dakle, ostaje da se ispita znak drugog izvoda u okolini tačke $x=o$: kako je $f''(x) = \frac{4o}{9}\sqrt[3]{x^2} > o$ ($\forall x \neq o$), to tačka $x=o$ nije prevojna tačka (mada je $f''(o)=o$).

Primjedba: Na osnovu gornjeg, očito je da su uslovi

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(2n-1)}(a)=o \text{ i } f^{(2n)}(a) \neq o$$

(za max. $f^{(2n)}(a) < o$, za min. $f^{(2n)}(a) > o$) – za ekstremum u tački $x=a$; tj. za prevojnu tačku:

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(2n)}(a) = o \quad \text{i} \quad f^{(2n+1)}(a) \neq o$$

dovoljni, ali ne i potrebni.

429.

Napisati razlaganje slijedećih funkcija po potencijama od x.

a) $f(x) = e^{\sin x}$ do x^3 ;

b) $f(x) = \ln \cos x$, do x^6, (za koje x će važiti dobijeni razvoj);

c) $f(x) = \sin(\sin x)$ do člana x^4.

Rješenje. a) Prema formuli za razlaganje funkcije e^u, po potencijama od u do člana u^3 (vidi zadatak 418. a)

$$\Rightarrow e^{\sin x} = 1+\sin x+ \frac{1}{2} \sin^2 x+ \frac{1}{6} \sin^3 x+o(\sin^3 x) \,, \qquad (1)$$

te kako je na isti način (prema 418. b)

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o\,(x^4) \,, \qquad (2)$$

a sem toga je $\sin x \sim x$, tj. $o(\sin^3 x) = o(x^3)$, to vodeći računa o tome, nakon zamjene vrijednosti za $\sin x$ iz (2) u (1), dobije se

$$e^{\sin x}=1+\left[x- \frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]+ \frac{1}{2} \left[x- \frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]^2+ \frac{1}{6}\left[x- \frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^3).$$

Iz posljednjeg rezultata, vodeći računa o tome da je $o(x^4) + o(x^8)+o(x^{16})+o(x^3)=o(x^3)$, (tj. $\left[o(x^n)\right]^m = o(x^{nm})$; $n,m > o$), nakon sredjivanja izlazi (pošto iščezava član x^3):

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o\,(x^3). \qquad (3)$$

b) Vodeći računa da je $\ln\cos x = \ln\left[1+(\cos x-1)\right]$, prema rezultatima iz zadataka 418. d. i c., slično kao naviše, dobije se

$$\ln\cos x=\ln\left[1+(\cos x-1)\right]=\cos x-1-\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+o(x^6) \; ; \qquad (4)$$

pošto je $o\left\{(\cos x-1)^3\right\}=o(\sin^6 x)=o(x^6)$; tj. (prema 177.d.)

$$\cos x-1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+o(x^7) \quad , \text{ tj.}$$

$$(\cos x-1)^2=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6+o(x^7) \text{ i } (\cos x-1)^3=-\frac{1}{8}x^6+o(x^7),$$

to se smijenom u (4), nakon sredjivanja, dobije

$$\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)$$

c) Slično kao u a) i b), ima se

$$\sin(\sin x) = \sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^4), \text{ tj.}$$

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4) ,$$

ili

$$\begin{aligned}\sin\sin x &= x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)\\ &= x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}\left[x^3+o(x^5)\right]^3+o(x^4)\\ &= x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\end{aligned}$$

430.

Koristeći se rezultatima iz prethodnog zadatka odrediti $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; ako je

$$f(x)=\left[\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4\right)}{\cos x}\right]^{\frac{1}{x^3\left[x-\sin(\sin x)\right]}}$$

Rješenje. Nakon logaritmiranja se dobije (prema 429. b) i c))

$$\ln f(x)=\frac{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\ln\cos x}{x^3\left[x-\sin(\sin x)\right]} \qquad (1)$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)\right]}{x^3\left[x-(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}$$

$$=\frac{\frac{1}{45}x^6+o(x^6)}{\frac{1}{3}x^6+o(x^6)} ,$$

odakle slijedi

$$\lim_{x\to o} \ln f(x) = \lim_{x\to o} \frac{\frac{1}{45}x^6}{\frac{1}{3}x^6} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} \quad , \quad \text{tj.}$$

$$\lim_{x\to o} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to o} \ln f(x)} = \sqrt[15]{e} \ .$$

Primjedba: Pokušaj da se zadatak riješi, polazeći na primjer od (1), korištenjem L'Hospitaleove pravila, zahtijeva da se pravilo šest puta uzastopno primjeni.

Za vježbu zadatak uraditi na taj način i izvući pouku o korisnosti predloženog pristupa (tj. korištenja Taylorove formule) za neke klase zadataka ove vrste.

G l a v a   p e t a

INTEGRALNI RAČUN REALNIH FUNKCIJA JEDNE REALNE VARIJABLE

NEODREDJENI INTEGRAL

§ 5.1. OSNOVNE OSOBINE NEODREDJENOG INTEGRALA – TABLIČNI INTEGRALI –

431.

– Polazeći od definicije neodredjenog integrala kao skupa primitivnih funkcija date (podintegralne funkcije) dokazati slijedeće osobine neodredjenog integrala.

a) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$;   b) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

c) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$; $a = \text{const} \neq 0$;

d) $\int \left[f(x)+g(x)\right] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$$\int \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} C_i \int f_i(x)dx, \quad \sum_{i=1}^{n} |C_i| \neq 0.$$

Rješenje.– Neka je $f(x)$ funkcija definisana na razmaku $\langle a,b\rangle$ i neka je P_f skup primitivnih funkcija funkcije f, tada je

$$F \in P_f \overset{Df.}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in \langle a,b\rangle)\ F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Jasno, moguće je $P_f=\emptyset$, tj. funkcija f nema nijednu primitivnu funkciju.

Lako je, polazeći od definicije (1) primitivne funkcije i koristeći Lagrangeu-ovu teoremu o srednjoj vrijednosti, (vidi "Uvod u analizu", D.Mihajlović), dokazati tvrdnju

$$P_f \neq \emptyset \Longleftrightarrow (\exists F \in P_f) P_f = \left\{F(x)+C \mid C = \text{const}\right\} = F(x) + C, \tag{2}$$

tj. ako (i samo ako) funkcija f ima bar jednu primitivnu funkciju F, tada je $F(x) + C \in P_f$ gdje je C proizvoljna konstanta, tj. u (2) izraz $F(x) + C$ označava skup P_f primitivnih funkcija, (gdje je $P_f \ni F$ – primitivna funkcija funkcije f i C je proizvoljna konstanta).

Sad je prema definiciji neodredjenog integrala

$$\left.\begin{aligned} \int f(x)dx &\overset{Df.}{=} P_f \\ &= F(x) + C \qquad (\Longleftarrow F \in P_f) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

gdje druga od jednakosti (3), prema (2), važi ako (i samo ako) $P_f \neq \emptyset$.

a) Ako $P_f \neq \emptyset$, tj. ako postoji funkcija F tako da je $F'(x) = f(x)$ (za svako x iz oblasti definisanosti funkcije f), tada je prema (3)

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

te slijedi

$$d\left[\int f(x)dx\right] = d\left[F(x) + C\right] = F'(x)dx$$

tj. zbog

$$F'(x) = f(x)$$

$$\Longrightarrow d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx\ , \quad \text{š.t.d.}$$

Jasno, gornja tvrdnja ima smisla samo ako je $P_f \neq \emptyset$. U isto vrijeme primijeti, da bi u smislu definicije (3) desne strane zadnje jednakosti trebala da bude $\{f(x)dx\}$ umjesto $f(x)dx$, tj. diferencijal neodredjenog integrala ($\Longleftarrow P_f \neq \emptyset$) je jednočlan skup čiji je jedini element podintegralni diferencijal.

c) U smislu definicije (3) neodredjenog integrala, treba dokazati jednakost skupova.

$$P_{af} = aP_f \ \left(= \left\{aF \mid F \in P_f \neq \emptyset\right\}\right), \ a \neq 0.$$

Lako se provjerava niz ekvivalencija

$$F \in P_{af} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} F'(x) = af(x) \Longleftrightarrow \left[\frac{F(x)}{a}\right]' = f(x) \ \wedge a \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{F(x)}{a} \in P_f \ \wedge a \neq 0 \Longleftrightarrow F(x) \in aP_f$$

gdje niz implikacija s desna ulijevo važi za svako a dok niz implikacija slijeva udesno važi očito samo za $a \neq 0$.

Dakle, je

$$(\forall a \neq 0) \ \ P_{af} = P_f\ ,$$

inače je očito $P_{0 \cdot f} = P_0 = \{const\} \supset 0 \cdot P_f = \{0\}$ $(\vee\ \emptyset)$, što je i trebalo dokazati.

Tvrdnje pod b) i d) provjeriti na isti način (ili vidi "Uvod u analizu" D.Mihajlović).

432.

-Provjeriti rezultate

a) $\int x dx = \frac{1}{2}x^2+C$; $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3+C$; $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$, $(n\neq -1)$; $\int(5-3x+5x^2+7x^3)dx = 5x - \frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{4}x^4 + C$.

b) $\int(2+5x)^2 dx = 4x+10x^2+\frac{25}{3}x^3+C = \frac{1}{15}(2+5x)^3 + C_1$;

$\int u(x)u'(x)dx = \frac{1}{2}(u(x))^2 + C$;

$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C \Leftarrow F'(x) = f(x)$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$; $\int \sqrt[n]{x^m}\, dx = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{n+m}}+C,(m,n\in N)$.

Rješenje.- Za provjeravanje gornjih rezultata može da posluži tvrdnja b) iz prethodnog zadatka.

a) Prema zadatku 431. b) za $n\neq -1$ je

$$d\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}(x^{n+1})'_x\, dx = x^n dx\ , \quad \text{tj.}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Za $n = -1$ je $x^{-1}\cdot dx = d(\ln|x|) \Longrightarrow \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

b) Ako je $F'(x) = f(x)$ tada je prema definiciji diferencijala

$$d(F(u(x))) = F'_u\, u'_x\, dx = f(u)\, u'_x\, dx$$

te je prema 431. b) zadnji rezultat pod b) tačan.

Provjeriti na isti način ostale rezultate.

433.

-Provjeriti rezultat

$$\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C\ ;\quad u(x)\neq 0 \qquad (1)$$

te na osnovu toga izračunati integrale

a) $\int\frac{3}{4+2x}dx$; b) $\int\frac{xdx}{x^2+1}$.

Rješenje.- Kako je $(u(x)\neq 0)$

$$\ln|u(x)| = \ln u(x)\ ,\quad u(x)>0,$$
$$= \ln(-u(x)),\quad u(x)<0;$$

$\Longrightarrow d(\ln u) = \frac{1}{u} u'_x\, dx$, tj. $d(\ln(-u)) = \frac{1}{-u}(-u)'_x dx = \frac{u'_x}{u}\, dx$

ili $d\cdot(\ln|u|) = \frac{u'_x}{u}\, dx$

to je (1) tačno, prema zadatku 431. b).

a) Sad je $4+2x = 2(2+x)$ i $d(2+x) = dx$, te je

$$\int \frac{3}{4+2x}\, dx = \int \frac{3}{2} \frac{dx}{2+x} = \frac{3}{2}\int \frac{d(2+x)}{2+x} = \frac{3}{2} \ln|2+x| + C.$$

b) Na isti način, prema (1), je

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C,$$

gdje je korištena osobina $d(x^2+1) = 2x\,dx$ i $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, $a \neq 0$.

§ 5.2. INTEGRACIJA METODOM ZAMJENE

U sljedećim integralima pogodnom smjenom preći na novu nezavisno promjenljivu te zatim odrediti date integrale:

434. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}$ $(k>0)$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

Rješenje.- a) Smjenom:

$$x = kt, \quad dx = k\,dt \quad \left(t = \frac{x}{k}\right) \;;$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{k\,dt}{\sqrt{k^2-k^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$$

$$= \arcsin \frac{x}{k} + C \qquad \left(\Longleftarrow t = \frac{x}{k}\right);$$

$$= -\arccos \frac{x}{k} + C_1 \qquad \left(\Longleftarrow \arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}\right).$$

II način: Smjenom

$$x = k\sin u \Longrightarrow k^2-x^2 = k^2\cos^2 u \;; \quad dx = k\cos u\,du$$

$$\Longrightarrow J = \int \frac{k\cos u\,du}{\sqrt{k^2\cos^2 u}} = \int du = u + C,$$

te vraćanjem na staru promjenljivu $u = \arcsin \frac{x}{k}$

$$\Longrightarrow J = \arcsin \frac{x}{k} + C.$$

b) Kako je: $5+4x-x^2 \equiv 3^2-(x-2)^2$, to uvodjenjem smjene:

$$x-2 = 3t \Longrightarrow dx = 3dt, \quad \text{tj. } t = \frac{x-3}{2}, \quad \text{te}$$

$$\Longrightarrow J = \int \frac{3dt}{\sqrt{3^2-3^2t^2}} = \arcsin t + C$$

$$= \arcsin \frac{x-3}{2} + C \qquad (\Longleftarrow t = \frac{x-3}{2}).$$

434.1.

Izračunati isti integral uvodeći smjenu $x-2 = 3\sin t$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (a>0).$$

Rješenje.- Dati integral može da se uprosti uvodjenjem bilo koje od tri smjene: $x = a\operatorname{tg}u$; $x = \frac{a}{u}$, $x = a\operatorname{sh}u$.

I. način: Smjenom: $x = a\operatorname{tg}u \Longrightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 u}\,du$, tj.

$$\sqrt{x^2+a^2} = a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u} = \frac{a}{\cos u}, \quad \text{te}$$

$$\Longrightarrow J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\,du}{\cos^2 u}\cdot\frac{\cos^2 u}{a^2\sin^2 u}\cdot\frac{\cos u}{a}$$

$$= \int \frac{\cos u\,du}{a^2\sin^2 u} = \frac{1}{a^2}\int(\sin u)^{-2}d(\sin u)$$

$$= \frac{1}{a^2}\,\frac{(\sin u)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin u} + C.$$

Pošto je $\sin u = \frac{\operatorname{tg}u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\quad (\Longleftarrow x = a\operatorname{tg}u)$,

to se povratkom na staru promjenljivu konačno dobije

$$J = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$$

II. način.

$$J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{u^2}+a^2}}\left(-\frac{du}{a}\right)$$

$$= -\frac{\varepsilon_1}{a^2}\int\frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\varepsilon_1}{a^2}\int\frac{d(u^2+1)}{2\sqrt{u^2+1}}$$

$$= -\frac{\varepsilon_1}{a^2}\sqrt{u^2+1} + C = -\frac{\varepsilon_1}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+1} + C$$

$$= -\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdot \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$$

gdje je $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn} u$, tj. $\varepsilon_1 = 1$ za $u > 0$, $\varepsilon_1 = -1$ za $u < 0$ i isto tako $\varepsilon_2 = \operatorname{sgn} x = \pm 1$ već prema tome da li je $x >$ ili $x < 0$ $(\Leftarrow (\forall x \in R)\ \sqrt{x^2} = |x| = x \operatorname{sgn} x)$. S druge strane, pošto je $xu = a > 0$, to je $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \operatorname{sgn} u \cdot \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}(ux) = 1$, te je

$$J = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$$

III. način. Ako se uvede smjena

$x = a\operatorname{sh} u \Longrightarrow dx = a\operatorname{ch} u\,du$, tj. $\sqrt{x^2+a^2} = a\operatorname{ch} u$, tada je

$$J = \int \frac{a\operatorname{ch} u\,du}{a^2\operatorname{sh}^2 u \cdot a\operatorname{ch} u} = \frac{1}{a^2}\int\frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{cth} u + C$$

$$= -\frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} = -\frac{1}{a^2}\frac{a\operatorname{ch} u}{a\operatorname{sh} u} = -\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 u + a^2}}{a\operatorname{sh} u},$$

te vraćanjem na staru promjenljivu

$$\Longrightarrow J = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}.$$

434.2.
Provjeriti slijedeće rezultate:

$$\int\frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k} + C;$$

$$\int\frac{dx}{k^2-x^2} = \frac{1}{2k}\ln C\,\frac{k+x}{k-x};$$

uvodeći smjenu $x = kt$ integrali se svode na tablične

434.3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int\frac{dt}{t} = \ln|1+\ln x| + C;$

koristeći smjenu

$$1+\ln x = t, \quad \frac{1}{x}dx = dt;$$

434.4. $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x-3}dx = \ln C(x^2+x-3),$

staviti: $x^2+x-3=t \Longrightarrow (2x+1)dx = dt$;

434.5.

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin x - \sqrt{1-x^2}+C,$$

stavljajući u drugom integralu: $1-x^2 = t^2$, $xdx = -tdt$;

434.6. $$\int\frac{dx}{2^x} = -\frac{1}{2^x\ln 2} + C \qquad (2^x = t) \quad ;$$

434.7. $$\int\frac{\cos x dx}{a^2+b^2\sin x} = \frac{1}{b^2}\ln C(a^2+b^2\sin x) \qquad (b \neq 0)$$

uvodeći smjenu: $a^2+b^2\sin x = t \Longrightarrow \cos x dx = \frac{1}{b^2}\,dt$;

434.8. $$\int\sin^3 x dx = \int(1-\cos^2 x)\sin x dx$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C\;,$$

uvodeći smjenu $\cos x = t \Longrightarrow \sin x dx = -dt$;

434.9.

$$J = \int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \int\frac{dx/\cos^2 x}{a^2 tg^2 x+b^2}$$

$$= \int\frac{dt}{a^2t^2+b^2} \qquad (\Longleftarrow t = tgx)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2+(b/a)^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{b/a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{b/a} + C$$

$$= \frac{1}{ab}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a\,tgx}{b} + C \qquad (ab \neq 0) \;;$$

434.10. $$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dt}{t} \qquad (\Longleftarrow t = tg\,\frac{x}{2})$$

$$= \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C \;;$$

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C$$

gdje se posljednji integral smjenom $x + \frac{\pi}{2} = t$, svodi na prethodni;

434.11. $\int \frac{dx}{shx} = \ln \left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C = \ln \left|th\,\frac{x}{2}\right| + C$,

$$\int \frac{dx}{chx} = 2\ \mathrm{arctg}\ e^x + C$$

koristiti smjenu $e^x = t \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

435.-Odrediti

$$J = \int \frac{x^9 dx}{(1 + x^5)^3} .$$

Rješenje.- Smjenom $1+x^5=t$ slijedi $5x^4dx=dt$, tj. $x^9dx=x^5.x^4dx= =(t-1)\cdot \frac{1}{5}\,dt$.

Dakle, je

$$J = \frac{1}{5} \int \frac{t-1}{t^3}\,dt = \frac{1}{5} \int t^{-2}dt - \frac{1}{5} \int t^{-3}dt$$

$$= \frac{1}{5}\ \frac{1}{-1}\ t^{-1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{-2}\ t^{-2} + C = \frac{1-2t}{10t^2} + C$$

te vraćanjem na staru promjenljivu

$$\Longrightarrow J = - \frac{2x^5 + 1}{10(1+x^5)2} + C$$

§ 5.3. PARCIJALNA INTEGRACIJA

436.
-Metodom parcijalne integracije

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad , \qquad (1)$$

odrediti integral

$$I = \int x\ \mathrm{arctg} x dx .$$

Rješenje.- Stavi li se

$$u = \mathrm{arctg} x \ , \quad dv = xdx,$$

tada je

$$du = \frac{dx}{1+x^2} , \qquad v = \int xdx = \frac{x^2}{2} ,$$

te prema (1) slijedi

$$I = \frac{1}{2}\ x^2 \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

437.

$$\int \sin(\ln x)\, dx$$

Rješenje.- U ovom slučaju za

$$u = \sin(\ln x),\ dv = dx \Longrightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \frac{dx}{x},\quad v = x$$

$$\Longrightarrow I = uv - \int v du = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$
$$= x\sin(\ln x) - I_1. \qquad (1)$$

Da se odredi integral $I_1 = \int \cos(\ln x) dx$ treba još jednom primijeniti parcijalnu integraciju. Stavi li se $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx \Longrightarrow du = -\sin(\ln x) \frac{dx}{x}$, $v = x$, te je

$$I_1 = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx, \quad \text{tj.}$$
$$I_1 = x\cos(\ln x) + I. \qquad (2)$$

Zamjenom iz (2) u (1)

$$\Longrightarrow I = x\sin(\ln x) - x\cos(s\ln x) - I$$

tj. $$I = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x)$$

Primjedba: Primjeti da je na osnovu (1) i (2) odredjen i integral $I_1 = \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x)$,

438.

-Naći integrale

$$A = \int e^{ax} \cos bx\, dx, \quad B = \int e^{ax} \sin bx\, dx, \quad (a \neq 0).$$

Rješenje.- Ako se u integral A stavi

$u = \cos bx$, $dv = e^{ax} dx \Longrightarrow du = -b\sin bx\, dx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$;

tada je prema metodu parcijalne integracije

$$A = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} B. \qquad (1)$$

Slično, primjenjujući parcijalnu integraciju na integral B, izlazi

$$B = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} A. \qquad (2)$$

Riješavanjem jednačina (1) i (2) po A i B, dobije se

$$A = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx),$$

$$B = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$$

439

–Parcijalnom integracijom, ili nekako drukčije, provjeriti rezultate:

a) $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$;

b) $\int x^m \ln x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C, \quad (m \neq -1)$,

$= (\frac{\ln x}{2})^2 + C \qquad (m = -1)$

c) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$;

d) $I = \int e^{\arcsin x}dx = \frac{1}{2}e^{\arcsin x}(x + \sqrt{1-x^2}) + C$,

$J = \int e^{\arcsin x}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}e^{\arcsin x}(x - \sqrt{1-x^2}) + C$;

e) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \frac{x+1}{2(1+x^2)^{1/2}}e^{\operatorname{arctg} x} + C.$

Rješenje.– Svi rezultati mogu da se provjere parcijalnom integracijom, ako se uzme da je

a) $u = \operatorname{arctg} x,\ dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2},\quad v = x$;

b) Za $m \neq -1$: $u = \ln x,\ dv = x^m dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$,

za $m = -1$ smjenom $\ln x = t$ (tj. $\frac{dx}{x} = dt$) dobije se tablični integral, (rezultat pod c.) dobije se iz b) za m=0);

d) Za integral I:

$u = e^{\arcsin x},\ dv = dx \Rightarrow du = e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v = x$;

za integral J:

$u_1 = e^{\arcsin x},\ dv_1 = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow du_1 = du,\quad v_1 = -\sqrt{1-x^2}$,

slično kao u zadatku 438., dobiju se, nakon primjene parcijalne integracije, dvije jednačine

$$I = xe^{\arcsin x} - J\ ,\quad J = -e^{\arcsin x}\sqrt{1-x^2} + I$$

čijim se rješavanjem po I i J dobije dati rezultat;

e) U ovom slučaju treba dva puta uzastopno primijeniti parcijalnu integraciju, stavljajući oba puta $u = e^{\operatorname{arctg} x}$; pri prvoj parcijalnoj integraciji treba izračunati integral

$$v = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

koristeći smjenu $x = \operatorname{tg} t$ (ili $x = \operatorname{sh} t$);

Provjeriti da se smjenom $\operatorname{arctg} x = t$ integral u e) svodi na $\int e^t \cos t\,dt$, koji se može odrediti kako je to uradjeno u zadatku 197., - uraditi na taj način ovaj zadatak.

440.

-Koristeći se parcijalnom integracijom provjeri slijedeće rezultate:

a) $$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$= x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

b) $$\int x(\operatorname{arctg} x)^2dx = \frac{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x)^2}{2} - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Rješenje.- a) Sabiranjem rezultata

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

koji je očit, i rezultata parcijalne integracije

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

dobije se traženi rezultat.

b) Staviti $u = (\operatorname{arctg} x)^2$ i primjeniti parcijalnu integraciju.

§ 5.4. INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

Kao što je poznato sa predavanja (vidi "Elemente analize...", D.Mihajlović), integracija racionalnih funkcija svodi se u opštem slučaju na odredjivanje rastavljanja racionalne funkcije na zbir elementarnih racionalnih funkcija (polinoma i elementarnih razlomaka) i njihovu integraciju.

441.

-S gornjim u vezi važno je provjeriti rezultate *

a) $\int (x^2-x+1)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$,

$\int (x^5-2x+3)dx = \frac{x^6}{6} - x^2 + 3x + C$,

$\int \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, x^{n-k} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{n-k+1}\, x^{n-k+1}$;

Ivica 24.6.99. (dl.)

b) $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = - \frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$, $\quad n \neq 1$

$= \ln |x-a| + C$, $\quad n = 1$

c) $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+k^2}$

$= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{k} + C$, $\quad k^2 = -D = q-(\frac{p}{2})^2$;

$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\, dx = \ln(x^2+px+q) + C$, $\quad (D < 0)$.

441.1.

Provjeriti rezultate:

a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$;

b) $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}\, dx$

$= \frac{1}{2} \ln |x^2-x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}$

$= \frac{1}{2} \ln |x^2-x-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C$;

c) $\int \frac{10x^4-17x^3-24x^2+16x-14}{2x-5} dx = \int (5x^3+4x^2-2x+3+\frac{1}{2x+5})dx =$

$= \frac{5}{4} x^4 + \frac{4}{3} x^3 - x^2 + 3x + \frac{1}{2} \ln|2x+5| + C$,

---

* Za integral $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n}$ viditi dio 5.8. Integracija pomoću rekurentnih formula.

U slijedećim zadacima rastaviti racionalnu funkciju na elementarne razlomke te izvršiti integraciju:

442. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

Rješenje.- Kako je nazivnik

$Q(x) = x^2-a^2 = (x-a)\ (x+a) = 0 \Longleftrightarrow x = a \quad \vee\ x = -a$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \Longleftrightarrow 1 = A\ (x+a) + B\ (x-a)\ ,$

te je po principu identiteta polinoma

$1 = Aa - Ba,\ 0 = A + B \Longleftrightarrow (A,B) = (\frac{1}{2a}\ ,\ -\frac{1}{2a})$

tj. $J = \frac{1}{2a} \int (\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})dx = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

443. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\, dx.$

Rješenje.- Ako najprije izvršimo dijeljenje:

$(x^5+x^4-8):(x^3-4x) = x^2+x+4+ \frac{4x^2 - 16x-8}{x^3 - 4x}$ + 24.06 1999 F. Jasmina

$$\Longrightarrow J = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4I_1\ , \qquad (1)$$

gdje je

$$I_1 = \int \frac{x^2-4x-2}{x(x-2)(x+2)}\, dx.$$

Sad je

$$\frac{x^2-4x-2}{x(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}\ ,$$

odakle se metodom neodredjenih koeficijenata dobije

$$A = \frac{1}{2}\ ,\quad B = -\frac{3}{4}\ ,\quad C = \frac{5}{4}\ ,\quad \text{pa je}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x+2} + C_1\ , \qquad (2)$$

+ −

te je konačno prema (1)

$J = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{5}{4}\ln|x+2| + C.$ 24.06.1999.

2 3 + 5 −

Jasmina Fatk...

444. $\int \frac{3x+1}{(x+2)^2}\, dx.$

Rješenje.- Rastavljanjem na elementarne razlomke dobije se

$$\frac{3x+1}{(x+2)^2} \equiv \frac{-5}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}\,, \tag{1}$$

što se može provjeriti ili metodom neodredjenih koeficijenata ili polazeći od identiteta: $3x+1 \equiv 3x+6-5 \equiv 3(x+2)-5$.

Sad je, prema (1),

$$J = \frac{5}{x+2} + \ln|x+2|^3 + C.$$

445. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx.$

Rješenje.- Sad je

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3} \equiv \frac{2}{x} + \frac{-2}{x+1} + \frac{-2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}\,,$$

$$\Rightarrow J = 2\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x+1} - 2\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \int\frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$= \ln\frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + C.$$

446. $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx.$

Rješenje.- Kako je

$$x^4+x = x(x^3+1) = x(x+1)(x^2-x+1)\,,$$

gdje kvadratni faktor x^2-x+1 ne može dalje da se rastavi (na realne linearne faktore, pošto su mu korijeni kompleksni);

$$\Rightarrow \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Kx+L}{x^2-x+1}.$$

odakle se poredjenjem koeficijenata dobije

$A = 1$, $B = -2$, $K = 2$, $L = 0$, tj.

$$J = \int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x+1} + 2\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1} \tag{1}$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

bez $\frac{1}{2}$

Da se odredi posljednji integral u (1) iskoristiti identitete

$$x \equiv \frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}, \quad x^2-x+1 \equiv (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}.$$

447.

-Proslijediti rezultat

$$\int\frac{(x+1)dx}{x^3(x^2+1)^2} = -2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^3}+\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx+\int\frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ln(x^2+1) - \text{arctg}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

gdje prva jednakost dobijena rastavljanjem racionalne funkcije na elementarne razlomke, a druga prema:

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x|, \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}, \int\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}, \int\frac{2x-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int\frac{dx}{x^2+1} = \ln(x^2+1)-\text{arctg}x, \quad \text{te}$$

$$\int\frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Ostaje da se još, parcijalnom integracijom ili smjenom $x=\text{tg}t$ ($\Longrightarrow \frac{1}{x^2+1} = \cos^2 t$, $dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$), provjeri rezultat

$$2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \text{arctg}x.$$

Stoga je

$$\int\frac{(x+1)dx}{x^3(x^2+1)^2} = \ln\frac{x^2+1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}\text{arctg}x - \frac{x+1}{2(x^2+1)} + C$$

$$= \frac{3x^3+2x^2+2x+1}{2x^2(x^2+1)} + \ln\frac{x^2+1}{x^2} - \frac{3}{2}\text{arctg}x + C.$$

448.

$$J = \int\frac{dx}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$$

Rješenje.- Proslijedi faktorizaciju

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1 \equiv (x^2+1)^2+2x(x^2+1)$$
$$\equiv (x^2+1)(x^2+1+2x)$$
$$\equiv (x^2+1)(x+1)^2,$$

te na osnovu toga provjeri

$$\frac{1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} \equiv \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}\ , \text{ tj.}$$

$$J = \frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} + C.$$

449.

-Provjeriti slijedeće rezultate

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x-3x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2-3x}\right| + C,$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)^3} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|^3 + \frac{3}{x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} + C\ ;$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{(1-x)^2} + C\ ;$

d) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{(1-x)^2} + C\ ;$

e) $\displaystyle\int\frac{x^3+2x-1}{x^4-5x^2+4}\,dx = \frac{1}{12}\ln\frac{|x-2|^{11}\,|x+2|^{13}}{(x-1)^4(x+1)^8} + C\ ;$

f) $\displaystyle\int\frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx = \frac{x^2}{3} + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\ ;$

g) $\displaystyle\int\frac{2x^2dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathrm{arctg}x + C\ ;$

h) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-a^2x} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{|x^2-a^2|}{x^2}\ .$

§ 5.5. INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA

450.

-U slijedećim primjerima treba odrediti integrale, kad je podintegralna funkcija oblika

$$f(x) = R(x, \sqrt[n]{ax+b}) \ \ \vee\ f(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right);\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

gdje je R-racionalna funkcija:

a) $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$; b) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$; c) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$;

d) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$; e) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx.$

Rješenje.- Već prema tome kojeg su (od dva naznačena) tipa podintegralne funkcije uvodi se smijena

$$t^n = ax+b \quad \vee \; t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad ;$$

a) U ovom slučaju se smijenom

$$2x+1=t^2 \Longrightarrow dx=t\,dt, \quad (x-1= \tfrac{1}{2}(t^2-3)),$$

dati integral svodi na integral racionalne funkcije

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-3}{t}\,t\,dt = \frac{t^3}{6} - \frac{3}{2}\,t + C$$

$$= \frac{(x-4)\sqrt{2x+1}}{3} + C\,,$$

gdje se posljednja jednakost dobija vraćanjem na staru promjenjljivu $t=\sqrt{2x+1}$.

b) Sad smjenom

$$\frac{x+1}{x} = t^2 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{t^2-1}\,, \quad \text{tj.}$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt\,, \quad \text{tj.}$$

$$\Longrightarrow I = -2\int (t^2-1)^2 t \cdot \frac{t}{(t^2-1)^2}\,dt = -2\int t^2 dt$$

$$= -\frac{2}{3}\,t^3 + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3} + C.$$

c) Dati integral se smjenom $\frac{x-1}{x+1} = t^2$ svodi na

$$J = -4\int \frac{t^4+t^2}{(t^2-1)^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\right| + \frac{(x-2)(x+1)}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

d) U ovom slučaju, smjenom

$$x=t^{12} \Longrightarrow dx=12t^{11}dt \quad (\sqrt{x}=t^6,\ \sqrt[3]{x}=t^4,\ \sqrt[4]{x}=t^3),$$

(gdje je 12 najmanji sadržatelj za brojeve: 2, 3, 4),

$$\Longrightarrow J = 12\int \frac{t^3}{t^4+t^6}\,t^{11}dt = 12\int \frac{t^{10}}{t^2+1}\,dt$$

$$= 12\int\left(t^8-t^6+t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 12\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\operatorname{arctg}t\right)+C,$$

te se povratkom na staru promjenljivu dobije

$$J=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}+\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}-4\sqrt[4]{x}+12\cdot\sqrt[12]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}+C.$$

$-12\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}$

25.06.1999.

F. Jamnina

e) Nakon smjene

$$x=t^2 \Longrightarrow dx=2tdt$$

$$\Longrightarrow J=\int\frac{t\cdot 2tdt}{t^2-1}=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C \qquad (\Longleftarrow \sqrt{x}=t).$$

451.

-Provjeriti rezultate

a) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{3+2x}}=\frac{2}{7}(x-2)\sqrt[4]{(3+2x)^3}+C$;

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}=\ln(1+\sqrt{x})^2+C$;

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln(1+\sqrt[6]{1+x})+C$;

d) $\displaystyle\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=2\int\sqrt{1+u}\cdot udu \qquad (u=\sqrt{x})$

$\displaystyle\quad=\frac{4}{15}\sqrt{1+\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})(3x+6\sqrt{x}-2)+C.$

$(3\sqrt{x}-2)$ 25.6.'99.

F. Jamnina

452.

-Znajući da se integral tipa

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

gdje je R-racionalna funkcija, može slijedećom smijenom

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t+x\sqrt{a} \quad , \quad (a>0)$$
$$= xt+\sqrt{c} \quad , \quad (c>0)$$
$$= t(x-x_0) \quad , \quad (x_0\text{-jednostruki korijen trinoma } ax^2+bx+c),$$

svesti na integral racionalne funkcije po novoj promjenljivoj t; odrediti integrale:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$; b) $\int \frac{8\ dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\int \frac{dx}{3x+\sqrt{5+8x-4x^2}}$

Rješenje.- a) Pošto je $a=1>0$ uvedimo smjenu

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x+t, \quad x= \frac{t^2-3}{2-2t}, \quad \sqrt{x^2+2x+3} = \frac{2t-t^2-3}{2-2t}$$

$$dx = 2\,\frac{2t-t^2-3}{(2-2t)^2}\,dt,$$

dt 25.X.'99. F. Jasmina

$$\Longrightarrow J = 2\int \frac{dx}{t^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C$$

gdje je $t = \sqrt{x^2+2x+3} - x$.

Riješiti isti zadatak uvodeći smjenu

$$\sqrt{x^2+2x+3} = xt+\sqrt{3} \qquad (\Leftarrow c=3>0).$$

b) Opet je $a=1>0$, te smjenom

$$\sqrt{x^2-1} = 1\cdot x+t, \quad x= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+1}{t}, \quad \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2t}\,(t^2-1), \text{ tj.}$$

$$dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2}\,dt .$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t} - \int\frac{dt}{t^3}\right) = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{4t^2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}-x\right| + \frac{1}{4(\sqrt{x^2-1}-x)^2} + C.$$

c) Sad je $5+8x-4x^2=4(\frac{5}{2}-x)(x+\frac{1}{2})$,

te se može provesti smjena

$$\sqrt{5+8x-4x^2} = t\left(\frac{5}{2}-x\right), \text{ tj}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{2}\cdot\frac{5t^2-4}{t^2+4}, \quad dx = \frac{24t\,dt}{(t^2+4)^2},$$

što uvrštavanjem i sredjivanjem svodi dati integral na integral racionalne funkcije:

$$J = 16\int\frac{t\,dt}{(5t^2+8t-4)(t^2+4)} .$$

Ostaje da se provjeri rezultat

$$J = \frac{1}{39}\left(5\ln|5t-2| + 13\ln|t+2| - \frac{125}{7}\ln(t^2+4) + 12\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right) + C,$$

gdje je $t = 2\sqrt{5+8x-4x^2}\,/\,(5-2x)$.

211.1 Provjeriti $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2-2x}} = \frac{\sqrt{ax^2-2x}}{x} + C.$

Rješenje.- Izlazi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2-2x}} = m\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a-\frac{2}{x}}} \qquad (\Leftarrow \sqrt{x^2} = |x| = x\operatorname{sgn}x = mx\ ,\ \text{tj. } m=1 \text{ za } x>0,\ m=-1 \text{ za } x<0)$$

$$= -m\int \frac{dt}{\sqrt{a-2t}} \qquad (\Leftarrow t = \frac{1}{x})$$

$$= m\sqrt{a-2t} + C \qquad (\Leftarrow x = \frac{1}{t})$$

$$= m\sqrt{a-\frac{2}{x}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{ax^2-2x}}{x} + C,$$

gdje je pri prelasku na zadnju jednakost ponovo iskorištena osobina $\sqrt{x^2}=mx$ i $m=+1$ za $x>0$, $m=-1$ za $x>0$.

§ 5.6. INTEGRACIJA BINOMNOG DIFERENCIJALA

453.
-Izračunati slijedeće integrale

a) $\int x^{3/2}(1+x^{1/2})^2dx$; b) $\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx$;

c) $\int x^4(1-x^2)^{-3/2}dx.$

Rješenje.- Binomni diferencijal $x^m(a+bx^n)^p$ može se integraliti * ako i samo ako je jedan od tri broja

$$p,\ \frac{m+1}{n}\ ,\quad p+\frac{m+1}{n}\ -\ \text{cio broj.}$$

a) U ovom slučaju je $p=2$ - cio broj, te poslije razvoja binoma po binomnoj formuli postaje

$$\int x^{3/2}(1+x^{1/2})^2dx = \int(x^{3/2}+2x^2+x^{5/2})dx = \frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{7}x^{7/2}+C.$$

---

* Integraliti u konačnom obliku preko elementarnih funkcija.

b) Kako je $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{m+1}{n}=2$.

Prema tome treba uvesti smjenu

$1+x^{1/4}=t^3 \Longrightarrow x=(t^3-1)^4, \quad dx=12t^2(t^3-1)^3,$

te se dobije

$$J=12\int(t^6-t^3)dt=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C.$$

c) Sad: $m=4$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{m+1}{n}+p=1$, tj. cio broj.

Stoga, ako se uvede smjena

$$\frac{1-x^2}{x^2}=x^{-2}-1=Z^2 \Longrightarrow x^2=\frac{1}{Z^2+1}, \quad xdx=\frac{-ZdZ}{(Z^2+1)^2}$$

dobiće se

$$\int x^4(1-x^2)^{-3/2}dx=-\int\frac{dZ}{Z^2(Z^2+1)^2},$$ tj. integral racionalne funkcije.

Provjeriti da je

$$\int\frac{dZ}{Z^2(Z^2+1)^2}=-\frac{1}{Z}-\frac{1}{2}\frac{Z}{1+Z^2}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg} Z+C,$$

i vraćajući se na staru promjenljivu naći rješenje postavljenog zadatka.

454.

-Provjeriti rezultate

a) $\int x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$;

b) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C$;

c) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}=\frac{3x^3+2}{2x\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}+C$

Rješenje.- Primjeti da je u slučaju

a) $\frac{m+1}{n}=2$, b) $\frac{m+1}{n}=2$, c) $\frac{m+1}{n}+p=-2$,

te uvodeći odgovarajuću smjenu, svesti integrale na integrale racionalne funkcije, itd...

455.
-Odrediti $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Rješenje.- U ovom slučaju je $m=4$, $n=3$, $p=-\frac{1}{2}$, te je

$\frac{m+1}{n}=\frac{5}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{7}{6}$;

te kako nijedan od uslova integrabilnosti nije ispunjen, to se gornji integral ne može predstaviti preko konačno mnogo elementarnih funkcija.

§ 5.7. INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Integral

$$\int R\,(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{1}$$

gdje je $R(x,y)$ racionalna funkcija promjenljivih x i y, jednom od slijedećih smijena, može da se svede na integral racionalne funkcije (po promjenljivoj t):

1°. $x=2\,\mathrm{arctg}\,t \Longrightarrow t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$;

2°. Ako je $R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, pogodna je smjena $\cos x=t$;

3°. Za $R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$, smjena $\sin x=t$;

4°. Za $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ u (1) je najpogodnije uvesti smjenu $\mathrm{tg}x=t$.

456
-Odrediti slijedeće integrale

a) $\int \sin^2 x dx$; $\int \cos^2 x dx$, $\int \cos 2x dx$, $\int \sin ax dx$;

b) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; c) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$; d) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$

e) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; f) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

Rješenje.- a) Koristeći identitete

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\Longrightarrow \int \sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C,\qquad \text{tj.}$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}\cos 2x + C ;$$

II. način. Uz oznake $A = \int \cos^2 x dx$, $B = \int \sin^2 x dx$

$$\Rightarrow A + B = \int(\cos^2 x + \sin^2 x)dx = x + C_1$$

$$A - B = \int(\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_2$$

odakle je

$$2A = x + \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 + C_2,\quad 2B = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 + C_2$$

što je ekvivalentno sa gornjim rezultatom.

b) Primijetimo da podintegralna funkcija mijenja znak kad $\cos x$ zamijenimo sa $-\cos x$, te prema 3^o uvodimo smjenu $\sin x = t$, tada je

$$J = \int \sin^2 x \cos^3 x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx$$

$$= \int (t^2 - t^4)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C ;$$

c) Sad je $R(-\sin x, \cos x) = -\sin^5 x/\cos^4 x = -R(\sin x, \cos x)$, te je prema 2^o pogodna smjena $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$, tj.

$$\Rightarrow \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2 \sin x dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} - t + C = -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

d) Za $J = \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$ ima se slučaj 4^o, te je pogodno uvesti smjenu

$$x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow t = \operatorname{tg} x,\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt,\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

te je

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^2} + C$$

$$= \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

e) U ovom slučaju moguće je podintegralnu funkciju pretstaviti kao linearnu kombinaciju triginometrijskih funkcija višestrukih uglova

$$\sin^2 x\cos^4 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x(1+\cos 2x)$$
$$= \frac{1}{8}\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(\sin 2x)'_x + \frac{1}{16}(1-\cos 4x),\ \text{tj.}$$

$$\Longrightarrow J = \int\sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$$

Uraditi ovaj zadatak uvodeći smjenu $x = \operatorname{arctg} t$.

457 $$J = \int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$$

Rješenje.- Uvodeći smjenu

$x=2\operatorname{arctg} t \Longrightarrow \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\Longrightarrow J = \int\frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{2-t} + C = \frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

458 $$I = \int\operatorname{tg}^5 x\,dx.$$

Rješenje-. Smjenom $\operatorname{tg}x = t \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, tj.

$$I = \int\frac{t^5dt}{1+t^2} = \int\left(t^3-t+\frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x-2) - \ln|\cos x| + C.$$

459

-Odrediti primitivne funkcije funkcija

a) $\cos^4 x\sin^2 x$, $\cos^2 x\sin^4 x$;

b) $\sin^8 x$; c) $\cos^6 x$.

Rješenje.- a) Kako je

$$\cos^4 x\sin^2 x+\cos^2 x\sin^4 x = \sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot 1$$
$$= \frac{1}{8}(1-\cos 4x),\ \text{tj.}$$
$$\cos^4 x\sin^2 x-\cos^2 x\sin^4 x = \sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\cos 2x$$
$$= \frac{1}{8}\sin^2 2x(\sin 2x)'_x\ ;$$

to za integrale $A = \int \cos^4 x \sin^2 x dx$, $B = \int \cos^2 x \sin^4 x dx$ važe jednakosti

$$A + B = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C' ;$$
$$A - B = \frac{1}{24} \sin^3 2x + C'' ;$$

odakle slijedi:

$$A = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C_1, \quad (C_1 = \frac{1}{2} (C' + C'')) ;$$
$$B = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C_2, \quad (C_2 = \frac{1}{2} (C' - C'')) .$$

b) $\int \sin^8 x dx = \frac{1}{128} (35x - 28\sin 2x + 7\sin 4x - \frac{4}{3} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 8x) + C.$

c) $\int \cos^6 x dx = \frac{1}{32} (10x + \frac{15}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x) + C$

460
$$J = \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} .$$

Rješenje.- Smjenom $t = \cos x$, slijedi

$$J = \int \frac{dx}{\sin x (2\cos^2 x - 1)} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| \qquad (\Leftarrow t = \cos x).$$

461
$$I = \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx.$$

Rješenje.- Smjenom $t = \operatorname{tg} x \Longrightarrow \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x} = \frac{3t+2}{2t+3}$, $dt = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{(3t+2)dt}{(2t+3)(1+t^2)} = -\frac{10}{13} \int \frac{dt}{2t+3} + \frac{1}{13} \int \frac{5t+12}{1+t^2} \cdot dt$$
$$= \frac{5}{13} \ln |2t+3| + \frac{5}{13} \ln \sqrt{1+t^2} + \frac{12}{13} \operatorname{arctg} t + C$$
$$= \frac{12}{13} x - \frac{5}{13} \ln |2\sin x + 3\cos x| + C.$$

II. način. Brojilac podintegralne funkcije može da se napiše kao linearna kombinacija imenioca i njegovog izvoda, tj.

$$3\sin x + 2\cos x \equiv A(2\sin x + 3\cos x) + B(2\sin x + 3\cos x)'_x$$
$$\equiv (2A - 3B)\sin x + (3A + 2B)\cos x$$

ili

$$\left.\begin{array}{l} 2A - 3B = 3 \\ 3A + 2B = 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (A,B) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right).$$

Sad je

$$I = \frac{12}{13}\int dx - \frac{5}{13}\int \frac{d(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}$$

$$= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + C.$$

462.

-Odrediti integrale

$$T_1 = \int \frac{\sin x dx}{a\cos x+b\sin x}, \quad T_2 = \int \frac{\cos x dx}{a\cos x+b\sin x}.$$

Rješenje.- Koristeći adicioni teorem provjeriti da je

$$bT_1+aT_2 = x+C_1; \quad -aT_1+bT_2 = \ln|a\cos x+b\sin x| + C_2, \qquad (1)$$

Tada je, prema (1),

$$T_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|) + C',$$

$$T_2 = \frac{1}{a^2+b^2}(ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|) + C''.$$

463.

-Dokazati da je za $D = AC - B^2 > 0$

$$\int \frac{dx}{A\cos^2 x+2B\sin x\cos x+C\sin^2 x} = \frac{1}{D^{1/2}}\operatorname{arctg}\frac{A\operatorname{tg}x+B}{D^{1/2}} + ct.$$

Rješenje. Uvesti smjenu $t = \operatorname{tg}x$.

464.

-Provjeriti rezultate

a) $\int \sin 3x\sin(5x-1)dx = \frac{1}{4}\sin(2x-1) - \frac{1}{16}\sin(8x-1)$;

b) $\int \sin(2x-\pi)\cos x dx = \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x$;

c) $\int \cos x\cos(x+\frac{\pi}{4})dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\cos^2 x dx - \frac{\sqrt{2}}{2}\int\cos x\sin x dx =$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}(\sin 2x+\cos 2x+2x)$.

d) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x dx = \frac{1}{4}(x+\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x)$

Rješenje.- Iskoristiti adicionu teoremu za sinus i cosinus:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b;$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$

tj. posljedice adicione teoreme

$$2\sin u\sin v = \cos(u-v)-\cos(u+v),$$
$$2\cos u\cos v = \cos(u-v)+\cos(u+v),$$
$$2\sin u\cos v = \sin(u+v)+\sin(u-v).$$

Integralna konstanta je ispuštena radi kraćeg zapisivanja.

§ 5.8. INTEGRACIJA POMOĆU REKURENTNIH FORMULA – RAZNI ZADACI –

465.

–Odrediti rekurentnu formulu za integral

$$I_n = \int \sin^n x dx \qquad (n \geqslant 2), \tag{1}$$

te na osnovu toga sračunati I_2 i I_4, te I_3 i I_5.

Rješenje.– Stavimo $I_n = \int \sin^{n-1}x\sin x dx$, te uvedimo smjenu

$$u = \sin^{n-1}x \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx,$$
$$dv = \sin x dx \Leftarrow v = -\cos x.$$

Dakle, je

$$\begin{aligned} I_n &= -\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x dx \\ &= -\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx \\ &= -\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\, I_{n-2} -(n-1)\, I_n , \end{aligned} \tag{*}$$

tj. izlazi

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} , \tag{2}$$

što predstavlja traženu rekurentnu formulu za integral (1).

Kako je $I_0 = \int dx = x$, $I_1 = \int \sin x dx = -\cos x$,

to je prema (2):

$$I_2 = -\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2} I_0 = -\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}x + C_2 ;$$

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x + \frac{3}{4} I_2 \\ &= -\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x - \frac{3}{8}\cos x\sin x + \frac{3}{8}x + C_4 ; \end{aligned}$$

te na isti način

$$I_3 = -\frac{1}{3}\cos x\sin^2 x + \frac{2}{3} I_1 = -\frac{1}{3}\cos x\sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x + C_3 .$$

Na taj način, polazeći od rekurentnih formula za integral (1):

$I_0 = x+C_0$, $I_1 = -\cos x+C_1$, $I_n = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ (3)

može da se izračuna I_{2k+1} kad se izračuna I_{2k-1} (polazeći od I_1), tj. I_{2k} kad se izračuna I_{2k-2} (polazeći od I_0), za svako $k\in N$.

Primjedba: Da li, polazeći od (*), može da se izvede rekurentna formula za integral (1), ako je n cijeli negativan broj, tada je (*) dovoljno riješiti po I_{n-2} i izvršiti transkripciju $n \longrightarrow n+2$. Dobije se

$$I_n = \frac{1}{n+1}\cos x\sin^{n+1}x + \frac{n+2}{n+1}I_{n+2} \qquad (n<0,\ n\neq -1) \tag{4}$$

Na osnovu te formule je napr.:

$$I_{-2} = \int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\cos x\sin^{-1}x = -\mathrm{ctg}x.$$

Znajući da je $I_{-1} = \int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$, polazeći od formule (4), dokazati

$$I_{-3} = \int\frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| .$$

Na isti način, polazeći od $I_{-2} = -\mathrm{ctg}x$, dokazati da je

$$I_{-4} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3}\mathrm{ctg}x.$$

466.

-Odrediti rekurentnu formulu za integral

$$J_n = \int x^n e^{ax}\,dx$$

te na osnovu toga izračunati integrale

a) J_1, J_2, J_3 i J_4.

b) $\int(x^4+2x+1)\,e^{2x}\,dx$.

Rješenje.- Primjenom parcijalne integracije

$$u = x^n \Longrightarrow du = nx^{n-1},$$

$$dv = e^{ax}dx \Longleftarrow v = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax},$$

dobije se

$$J_n = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}J_{n-1} . \tag{1}$$

a) Očito je $J_0 = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a} e^{ax}$, te je prema (1)

$$J_1 = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a} J_0 = e^{ax}(\frac{1}{a} x - \frac{1}{a^2}),$$

$$J_2 = \frac{1}{a} x^2e^{ax} - \frac{2}{a} J_1 = e^{ax}(\frac{1}{a} x^2 - \frac{2}{a^2} x + \frac{2}{a^3}),$$

$$J_3 = \frac{1}{a} x^3e^{ax} - \frac{3}{a} J_2 = e^{ax}(\frac{1}{a} x^3 - \frac{3}{a^2} x^2 + \frac{6}{a^3} x - \frac{6}{a^4}),$$

$$J_4 = \frac{1}{a} x^4e^{ax} - \frac{4}{a} J_3 = e^{ax}(\frac{1}{a} x^4 - \frac{4}{a^2} x^3 + \frac{12}{a^3} x^2 - \frac{24}{a^4} x + \frac{24}{a^5}).$$

Ako se procedura nastavi, dobije se

$$J_n = e^{ax} (\frac{1}{a} x^n - \frac{n}{a^2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^3} x^{n-2} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}})$$

$$= e^{ax} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}},$$

što nije teško provjeriti indukcijom.

b) $I = \int (x^4+2x+1)e^{2x} = J_4 + 2J_1 + J_0$ (za $a = 2$)

tj. $I = e^{2x}(\frac{1}{2} x^4 - x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4}) + 2e^{2x}(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} e^{2x}$

$$= e^{2x}(\frac{1}{2} x^4 - x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{4}).$$

Primjedba. Može se dokazati da je

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax} \left[\frac{1}{a} P(x) - \frac{1}{a^2} P'(x) + \dots + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} P^{(n)}(x)\right],$$

gdje je $P(x)$ polinom stepena n. Dokazati tu tvrdnju i na osnovu toga provjeriti gornji rezultat za I.

467

Odrediti rekurentne formule za integral $A_n = \int tg^n x dx$, zatim dokazati da za svako $k \in N$ važe formule:

$$A_{2k} = (-1)^k x + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k+r} \frac{tg^{2r-1} x}{2r-1} , \qquad (1)$$

$$A_{2k-1} = (-1)^k \ln |\cos x| + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{k+r} \frac{tg^{2r} x}{2r} . \qquad (2)$$

Rješenje.- Za n=0 i n=1 je

$$A_o = \int dx = x\ ; \quad A_1 = \int \operatorname{tg}x\,dx = -\ln|\cos x| \ . \tag{3}$$

Zatim je

$$A_n = \int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x(1+\operatorname{tg}^2 x-1)dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x(d(\operatorname{tg}x)-1)dx, \quad \text{tj.}$$

$$A_n = \frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1} - A_{n-2}\ . \tag{4}$$

Formule (3) i formula (4) predstavljaju tražene rekurentne formule za integral A_n.

Formule (1) i (2) direktno se dokazuju pomoću rekurentnih formula (3) i (4). Tako je napr.

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x \qquad (\Longleftarrow(1))\ ,$$

$$\int \operatorname{tg}^6 x\,dx = -x + \operatorname{tg}x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x \qquad (\Longleftarrow(2))\ .$$

Odrediti za vježbu A_9 i A_{12} .

468.

-Izvesti rekurentnu formulu za integral

$$J_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n/2}} \quad (n=2k-1,\ k\in N;\quad a\neq 0).$$

Rješenje.- Provjeriti rezultat

$$J_n = \frac{1}{(n-2)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{n/2-1}} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\ J_{n-2}\ .$$

Tako je napr.

$$J_7 = \left\{\frac{1}{(a^2+x^2)^2} + \frac{4}{3a^2}\ \frac{1}{a^2+x^2} + \frac{8}{3a^4}\right\}\ \frac{x}{5a^2(a^2+x^2)^{1/2}}$$

469.

-Dokazati da je

$$\int \frac{Pm(x)}{Q_n(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{Pm(x_i)}{Q_n'(x_i)}\ln|x-x_i| \quad , \tag{1}$$

(ispuštena je integralna konstanta);

gdje su P_m i Q_n polinomi, $(m < n)$ i polinom Q_n ima sve jednostruke i realne korijene $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Rješenje.- Prema pretpostavci $Q_n(x)$ ima jednostruke realne korijene i $m < n$, te se na jedinstven način može izraziti rastavljanje podintegralne funkcije na elementarne razlomke

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_i}{x-x_i} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n} \tag{2}$$

gdje koeficijente A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ treba sračunati.

Pomnoži li se (2) sa $x-x_k$, $(k=1,2,\ldots,n)$

$$\Longrightarrow \frac{P_m(x)}{Q_n(x)/(x-x_k)} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{A_i}{x-x_i}(x-x_k) + A_k \,. \tag{3}$$

Ako se u (3) stavi $x=x_k$, dobije se

$$A_k = \frac{P_m(x_k)}{Q_n(x)/(x-x_k)\Big|_{x=x_k}} = \frac{P_m(x_k)}{Q_n'(x_k)}\,, \quad k=1,2,\ldots,n\,; \tag{4}$$

pošto je

$$Q_n'(x_k) = \lim_{x\to x_k} \frac{Q_n(x)-Q_n(x_k)}{x-x_k} = \frac{Q_n(x)}{x-x_k}\Bigg|_{x=x_k}\,,$$

gdje prva jednakost važi na osnovu definicije izvoda, dok druga izražava neprekidnost polinoma

$$\frac{Q_n(x)}{x-x_k} \quad (\Leftarrow Q_n(x_k) = 0)\,.$$

Sad je prema (2) i (4)

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx = \int \Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x-x_k}\Big]dx \qquad (\Leftarrow (2))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k \int \frac{dx}{x-x_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(x_k)}{Q_n'(x_k)} \ln|x-x_k|\,.$$

što je i trebalo dokazati.

469.1.

– Koristeći se tvrdnjom iz prethodnog zadatka provjeriti rezultat

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-4x-4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{3}{2}\ln|x+2| - \ln|x+1| .$$

470.

–Neka je f strogo monotona i diferencijabilna funkcija na razmaku $\langle a,b\rangle$ tada ona na tom razmaku ima inverznu funkciju f^{-1}, (– teorem iz diferencijalnog računa).

Dokazati, da ako je

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1)$$

tada je

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F\left[f^{-1}(x)\right] + C. \qquad (2)$$

Koristeći se tim i odrediti

a) $\int \ln x dx$; b) $\int \arcsin x dx$; c) $\int \operatorname{arcctg} x dx$

Rješenje.– Prema pretpostavci je za svako $t \in \langle a,b\rangle$ $f\left[f^{-1}(t)\right] = t$, sem toga je i f^{-1} diferencijabilna funkcija, te u (1) možemo provesti zamjenu promjenljive $x=f^{-1}(t)$. Tada je

$$\int t\,d\left[f^{-1}(t)\right] = F\left[f^{-1}(t)\right] + C.$$

Ako na integral u zadnjoj jednakosti primijenimo parcijalnu integraciju, dobije se

$$tf^{-1}(t) - \int f^{-1}(t)dt = F\left[f^{-1}(t)\right] + C$$

što je ekvivalentno sa (2).

a) Za $f(x) = e^x$ je $f^{-1}(x) = \ln x$, $\int e^x dx = e^x + c$, tj. prema (1) je $F(x) = e^x$, te je prema (2)

$$\int \ln x dx = x\ln x - e^{\ln x} + C = x\ln x - x + C.$$

b) Za $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, je $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$, tj. $F(x) = -\cos x$, te je prema (2)

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - (-\cos\arcsin x) + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

pošto je $\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$.

c) Za $f(x) = ctgx$, $x \in [0,\pi]$ je $f^{-1}(x) = arcctgx$,

$$\int ctgx dx = \int \frac{dsinx}{sinx} = \ln|sinx| + C = -\frac{1}{2}\ln(1+ctg^2x) + C,$$

pošto je $sinx = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2x}}$, za $x \in [0,\pi]$. Dakle je, prema (1) u ovom slučaju $F(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+ctg^2x)$.

Kako je $F(arcctgx) = -\frac{1}{2}\ln(1+ctg^2 arcctgx) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ to je, prema (2)

$$\int arcctgx dx = x arcctgx + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

što je i trebalo odrediti.

470.1.

-Dokazati da je

$$\int \frac{P_n(x)dx}{(x-a)^{n+1}} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a| ,$$

gdje je $P_n(x)$ polinom stepena n; $(P^{(0)}(x) = P(x))$; te na osnovu toga rezultata izračunati integral:

$$J = \int \frac{x^4-5x^3+6x^2-x+7}{(x-2)^5} dx.$$

Rješenje.- Prema Taylorovoj formuli je

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(a)(x-a)^n$$

odakle slijedi

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(x-a)^{n-k+1}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!(x-a)} .$$

Sad se integracijom dobije formula koju je trebalo dokazati.

Za polinom $P_4(x) = x^4-5x^3+6x^2-x+7 \Longrightarrow P_4(2) = 5$, $P_4'(2) = -5$, $P_4''(2) = 0$, $P_4'''(2) = 18$, $P^{IV}(2) = 24$, te je prema dokazanoj formuli (n=4)

$$J = -\frac{5}{4(x-2)^4} + \frac{5}{3(x-2)^3} - \frac{3}{x-2} + \ln|x-2| .$$

470.2.

-Za integral

$$J = \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} , \tag{1}$$

gdje je $P_n(x)$ polinom stepena x; a,b,c su dati brojevi; važi

$$J = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + p\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} , \tag{2}$$

gdje se polinom (n-1)-vog stepena $Q_{n-1}(x)$ i konstanta p mogu odrediti, (koristeći princip identiteta polinoma).

Koristeći ovu tvrdnju provjeriti rezultate:

a) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$;

b) $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx = (-\frac{a^4x}{16} - \frac{a^2x^3}{24} + \frac{x^5}{6})\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}$

Rješenje.- Diferenciranjem iz (1) i (2), izlazi

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{p}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ili

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+p, \tag{3}$$

odakle, primjenom principa identiteta polinoma, može da se odredi (n+1)-na nepoznata konstanta (n koeficijenta polinoma $Q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k$ i konstanta p):

a) Sad je $P_3(x) = x^3$; $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$, te je prema (3) , $(Q_2(x) = Ax^2+Bx+C)$,

$$x^3 = (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+p,$$

tj.

$$x^3 = -3Ax^3+(5A-2B)x^2+(2A+3B-C)x+B+C+p,$$

ili, na osnovu principa identiteta polinoma,

$-3A = 1$; $5A-2B = 0$; $2A+3B-C = 0$; $B+C+p = 0$;

odakle slijedi

$A = -\frac{1}{3}$; $B = -\frac{5}{6}$; $C = -\frac{19}{6}$; $p = 4$.

Dakle, prema (2), je

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\cdot\sqrt{1+2x-x^2} + 4I$$

gdje je $I = \int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$, š.it.d..

b) Kako je

$$x^4\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

to se i u ovom slučaju može primijeniti isti metod kao u zadatku pod a).

471

— Ako je R racionalna funkcija i ako su brojevi $a_1,\dots,a_2,\dots,a_n$ pozitivni i samjerljivi, tada je integral

$$\int R\,(e^{a_1x}, e^{a_2x},\dots,e^{a_nx})dx \qquad (1)$$

elementarna funkcija. Dokazati!

Koristeći se navedenim rezultatom odredi integrale

a) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{x}-2}$; c) $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$

d) $\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^{2}}\,dx$; e) $\int \frac{chx\,dx}{3shx-4chx}$.

Rješenje.- Dakle, prema pretpostavci, postoji broj p (>0) koji je (najveća) zajednička mjera (pozitivnih [*]) brojeva $a_i (i=1,2,\dots,n)$, tako da je

$$a_i = n_i p\,,\quad n_i \in N\ ;\quad i = 1,2,\dots,n.$$

Smjenom $e^{px} = t \Rightarrow e^{a_i x} = t^{n_i}$, $dx = \frac{1}{p}\,\frac{dt}{t}$;

te je

$$R(e^{a_1 x},\ e^{a_2 x},\dots,\ e^{a_n x})dx = \frac{1}{pt}\,R(t^{n_1},\ t^{n_2},\dots,\ t^{n_n})dt$$

$$= \bar{R}\,(t)\,dt$$

tj. integral (1) je zaista elementarna funkcija pošto se pogodnom smjenom svodi na integral racionalne funkcije.

a) Sad je je $p = (1,2) = 1$ (notacija $(a_1, a_2, \dots a_n)$ neka ovdje služi da označi najveću zajedničku mjeru), te smjenom $e^{x} = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$, izlazi

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}\,dx = \int \frac{t^{2}dt}{t(t+1)} = \int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = t+\ln|1+t|+C$$

$$= e^{x} + \ln(1+e^{x}) + C.$$

b) Smjenom $e^{x} = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{e^{2x}+e^{x}-2} = \int \frac{dt}{t(t^{2}+t-2)} = \int \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{1}{6(t+2)}\right)dt$$

---

[*] Uslov da je $a_i > 0$ nije neophodan, ali je lako primjetiti da ova pooštrena pretpostavka ne umanjuje opštost pristupa integralu (1).

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln|t+2| + C$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\ln|e^x-1| + \frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C.$$

c) Ovdje je $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$, te smjenom

$$e^{\frac{x}{6}} = t \Longrightarrow dx = 6\frac{dt}{t}, \quad \text{tj.}$$

$$J=\int\frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}} = 6\int\frac{dt}{t(1+t^3+t^2+t)}.$$

Integracijom po t i vraćanjem na staru promjenljivu, na kraju, se dobije

$$J = x-3\ln(1+e^{x/6}) - \frac{3}{2}\ln(1+e^{x/3}) - 3\operatorname{arctg} e^{x/6} + C.$$

d) Sad je $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$; smjena $e^x=t^4 \Longrightarrow dx = \frac{4dt}{t}$,

$$\Longrightarrow\int\frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}dx = 4\int\frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt = 4\int\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{(1+t)^2}\right)dt$$

$$= 4\left(\ln|t| + \frac{2}{1+t}\right) + C$$

$$= x + \frac{8}{1+e^{x/4}} + C.$$

e) Kako je $\frac{chx}{3shx-4chx} = -\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+7}$,

to smjenom $e^{2x}=t$, $dx = \frac{dt}{2t}$ i vraćanjem na staru promjenljivu izlazi

$$\int\frac{chx\,dx}{3shx-4chx} = -\int\frac{(t+1)dt}{t(t+7)} = -\int\left(\frac{1}{7t} + \frac{6}{7(t+7)}\right)dt$$

$$= -\frac{x}{7} - \frac{3}{7}\ln(e^{2x}+7) + C.$$

Primjedba: Primjeti da je moguće rastavljanje

$chx \equiv A(3shx-4chx)+B(3sh-4chx)'_x \Longleftrightarrow (A,B) = (-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7})$,

na osnovu koga se još lakše dobija prethodni rezultat.

2-1 Jasmina Tatlić

472.

-Koristeći razne metode integracije provjeri rezultate

$1^\circ \int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{3/2}-x^{3/2}\right] + C, \quad (a \neq 0)$;

$2^\circ \int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = x\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \ln\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x|\frac{x+1}{x}}\right) + C$;

$3^\circ \int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{arct}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C$; 27.06.1999 Jasmina Tatlić

$4^\circ \int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + x\right) + C$;

$5^\circ \int \mathrm{sh}^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}4x - 2\,\mathrm{sh}2x + 3x\right) + C$;

$\int \mathrm{sh}^3 x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{ch}x\right) + C$;

$\int \mathrm{sh}x(\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x)\,dx = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2x\right) + C$;

$6^\circ \int (2x-1)e^{1/x}\,dx = x^2 e^{1/x} + C \quad \left(\frac{1}{x} = t\right)$;

$7^\circ \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3} = \mathrm{arctg}\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 1\right) + C$;

$$8^\circ \quad J_{m,n} = -\frac{\sin^{n-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}$$

$$= \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}, \quad (m+n \neq 0);$$

$$= \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}J_{m+2,n}, \quad (m+1 \neq 0);$$

$$= -\frac{\sin^{m+1}\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}J_{m,n+2}, \quad (n+1 \neq 0);$$

gdje je $J_{m,n} = \int \sin^m x\cos^n x\,dx$;

$9^\circ \int \frac{e^x(1+e^x)\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}} + C$;

$10^\circ \int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x + \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}x^3 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\cdot\sqrt{3}+1}{x^2-x\cdot\sqrt{3}+1} + C.$

$$11^{\circ +} \int\left[e^{-|x|} + \max(1, x^2)\right]dx = \begin{cases} c + e^x - 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{sgn}\,x, & x < -1 \\ c + e^x - 1 + x, & -1 \leqslant x < 0 \\ c + 1 - e^{-x} + x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ c + e^{-x} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{sgn}\,x, & x > 1; \end{cases}$$

$12^{\circ +} \int \frac{dx}{x^{11}+1} = (?).$

L I T E R A T U R A

1. DR.M.BAJRAKTAREVIĆ, Predavanja iz Analize I /Pribilješke sa predavanja studentima matematike Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu/, šk. 1967/68. godine u Sarajevu.

2. G.N.BERMAN, Sbornik zadač po kursu matematičeskovo analiza, dlja vtuzov Ogiz, Gostehizdat, 1958.

3. A.F.BERMANT, Kurs matematičeskovo analiza dlja vtuzov, čašć jervaja, Ogiz, Gostehizdat, 1946.

4. D.BICAKCIĆ i S.SLAKOVIĆ, Zbirka riješenih zadataka iz Više matematike I, Sarajevo, 1965.

5. D.BLANUŠA, Više matematika, I dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

6. B.P.DEMIDOVIČ, Sbornik zadač i upražnenija po matematičeskomu analiza, Moskva, 1966.

7. DEVIDÉ-ZELENKO, Zbirka zadataka, Zagreb, 1949 /1946/.

8. V.DRAGIĆEVIĆ, H.H.FATKIĆ i B.A.MESIHOVIĆ, Zbirka riješenih zadataka iz Matematike II, 2. dio, ETF, Sarajevo 1973.

9. F.EMDE, Tablici funkcij s formulami i krivimi, perev. s nem., Gostehizdat,M.,1948.

10. L.EJLER, Vedenije v analiz beskonečno malih, t.I.perev.s.Lat., M.-L., 1931.

11. D.K.FADEJEV, Teorija iracionaljnstej tretej stjepeni, Izd-vo AN SSSR, III, 1940.

12. H.H.FATKIĆ, O jednom poopštenju funkcionalne jednačine /d.rad na PMF-u u Sarajevu/, Sarajevo , 1971.

13.H.H.FATKIĆ, Uvod u Algebru, Analitičku geometriju i Analizu, ETF, 1972., Sarajevo.

14. H.H.FATKIĆ i B.A.MESIHOVIĆ, Zbirka riješenih zadataka iz Matematike II, I dio, ETF, Sarajevo, 1973.

15. A.J.HINČIN, Kratkij kurs matematičeskovo analiza, Moskva, 1955.

16. A.J.HINĆIN, Osam predavanja iz matematičke analize, prevod M.Ilić-Dajović, Naučna kmjiga, Beograd, 1951.

17. G.M.FIHTENGELJC, Osnovi matematičeskovo analiza, t.I i II, Matimatičeskij praktikum, pod.red. G.N.Položevo, Moskva, 1960.

18. DR.R.KAŠANIN, Zbirka rešenih zadataka Više matematike I /Uredio I.S.Spasić/, Geogr.inst. JNA, Beograd, 1952.

19. S.KLAŠNJA, Elementarna matematika /I.Algebra/, Sarajevo,1963.

20. V.A.KUDRJAVCEV i B.P.DEMIDOVIČ, Kratkij kurs viššej matematiki, Moskva, 1956.

21. R.KURANT, Kurs diferencijalnog i integralnog računa, knjiga prva, prevod V. i M. Dajović, Naučna knjiga, Beograd,1951.

22. S.KUREPA, Matematička analiza, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.

23. S.KUREPA, Uvod u matematiku, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

24. DR.Ž.MARKOVIĆ, Uvod u Višu analizu, I dio, Zagreb, 1950.

25. DR.D.MIHAJLOVIĆ, Elementi matematičke analize za studente prve godine elektroteh.fak.Beograd, 1969.

26. DR.D,S.MITRINOVIĆ - DR.D.MIHAJLOVIĆ, Linearna algebra, Analistička geomatrija, Polinomi, Gradje-Vinska knjiga, Beograd, 1962.

27. D.S.MITRINOVIĆ, Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka s riješenjima, II, Beograd, 1971.

28. D.S.MITRINOVIĆ, Zbornik matem.problema , II, Beograd 1960.

29. P.S.MODENOV, G.A.NEVJAŽSKIJ, Kurs viššej matematiki, Ogiz, Gostehizdat, 1948.

30. I.P.NATANSON, Teorija funkcij veščestvenoj peremenoj, Gostehizdat, M., 1950.

31. T.PEJOVIĆ, Matematička analiza, I i II dio, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1955. / 1967./.

32. S.SAKS, Teorija integrala, perev.s angl. IL., M., 1949.

33. J.A.ŠIHANOVIČ, Vedenije v sovremeniju matematiku, načatjnie ponjatija, Moskva, 1965.

34. M.P.UŠĆUMLIĆ i P.M.MILIČIĆ, Zbirka zadataka iz više matematike I, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1973.

35. B.VENE, Zbirka zadataka iz matematike, Savremena administracija, Beograd,1969.

36. A.VUKOVIĆ, Zbirka zadataka iz više analize, ETF, Split, 1962.

37. G.S.BARANENKOV, B.P.DEMIDOVIČ,V.A.JEFIMENKO, S.M.KOGAN, G.L.LUNC, E.F.PORŠNEVA, E.P.SYČEVA, S.V.FROLOV, R.J.ŠOSTAK, A.R.JANPOLJSKIJ: Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke. Teh.knjiga, Zagreb, 1968.

- . -

Primijećene štamparske greške:

1. Na strani 1, u osmom redu, umjesto varijabile treba VARIJABLE.
2. Na strani 198, na prelazu sa 9. na 10. red ne treba znak =.
3. Na strani 200, u šestom redu pod a), umjesto O treba — 1/2.
4. Na strani 204, u 13. redu, umjesto X teži 3 treba X teži — 3.
5. Na strani 217, u 4. redu, umjesto X teži u beskonačnost, treba X teži O.
6. Na strani 217, u 11. redu, umjasto X teži u beskonačno treba X teži O.

Štampa: Tehnički odsjek Instituta za istoriju — Sarajevo