Z A D A C I - Grupa A:
sa drugog parcijalnog ispita iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 08.01.2012.

Zad. 1. Primjenom *Maclaurinovog razvoja* izračunajte $\lim_{x\to 0}(\sin x \cdot \mathrm{ctg}(\mathrm{tg}x))$.

[I. $-\infty$. **II.** 1. III. 0. IV. $+\infty$.] (2,5 b.)

Zad. 2. Definirajte pojmove lokalnog minimuma, stacionarne tačke i tangente na grafik realne funkcije jedne realne promjenljive, a zatim objasnite postupak određivanja najmanje vrijednosti takve funkcije, pa primjenom tog postupka odredite najmanju površinu trougla ABC čiji je vrh A tačka (-1,0), vrh B je tačka dodira tangente krive zadane jednačinom $y\sqrt{x}=1$, a vrh C je tačka presjeka te tangente s osom Ox.

[I. $2\sqrt{3}$. II. $\sqrt{6}$. **III.** $\sqrt{3}$. IV. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.] (1 b.+1 b.+1 b.)

Zad. 3. Definirajte pojmove sriktno primitivne funkcije, primitivne funkcije i neodređenog integrala, a zatim opišite metodu parcijalne integracije pa primjenom te metode nađite integral $\int e^{2x}\cos\left(x\sqrt{6}\right)\mathrm{d}x$.

[I. $\frac{e^{2x}}{10}\left[2\cos\left(x\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}\cdot\sin\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$ II. $\frac{e^{2x}}{8}\left[2\cos\left(x\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}\cdot\sin\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$

III. $\frac{e^{2x}}{10}\left[2\cos\left(x\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}\cdot\sin\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$ IV. $\frac{e^{2x}}{10}\left[\sqrt{6}\cdot\cos\left(x\sqrt{6}\right)+2\sin\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$]

(0,5 b.+ 1 b.+1 b.)

Zad. 4. Izračunajte površinu obrtne površi koja nastaje obrtanjem parabole zadane jednačinom $y^2=2x$ oko prave čija je jednačina $y=2x$. (2 b.)

[I. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{7\sqrt{2}-8}{3}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. **II.** $\frac{\pi}{4\sqrt{5}}\left[\frac{7\sqrt{2}-8}{3}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$.

III. $\frac{\pi}{4\sqrt{5}}\left[\frac{7\sqrt{2}-8}{3}+2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. IV. $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{7\sqrt{2}-8}{3}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$.]

Zad. 5. Realne funkcije f_1, f_2, f_3 jedne realne promjenljive zadane su formulama:

$$f_1(x)=\frac{x^3-1-b}{x},\quad f_2(x)=\sqrt[3]{x^3+(1+b)x^2},\quad f_3(x)=\frac{(1+x^2)\,\mathrm{ctg}(x)}{3-\cos(x)\cdot\mathrm{cosec}(x)},$$

gdje je b ukupan broj bodova koji ste ostvarili na 2. redovnom parcijalnom ispitu iz IM1 koji ste polagali (prvi put) u toku svog studija na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu* (održanom 13.1.2011, 8.1.2010, 9.1.2009, 9.1.2008, ...).

a) Odredite (prirodne) domene zadanih funkcija f_1, f_2, f_3, a zatim za svaku od tih funkcija odredite i klasificirajte eventualne njene tačke prekida i singulariteta. (1 b. + 0,5 b.)

b) Izračunajte (izvode) $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x)$ i diskutujte njihovu egzistenciju, a zatim odredite eventualne tačke lokalnog ekstrema zadanih funkcija f_1, f_2, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njihovih grafika. (1,5 b. + 1 b. + 0,5 b.)

c) Primjenom diferencijalnog računa ispitajte i ostala osnovna svojstva zadane funkcije f_1, pa na osnovu dobijenih rezultata /uključujući i rezultate u a) i b)/, nacrtajte njen grafik. (2,5 b.)

d) Izračunajte zapreminu obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem oko x – ose lika (u xy- ravni) kojeg ograničavaju grafik zadane funkcije f_1, x – osa i prave $p: x=3$ i $q: x=4$. (1,5 b.)

e) Verificirajte da su pretpostavke *Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti* zadovoljene za zadanu funkciju f_1 na segmentu [3, 4], a zatim opišite odgovarajuću geometrijsku interpretaciju. (1 b. + 0,5 b)

IME I PREZIME STUDENTA : ....

(2)

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\sin x\cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{tg}x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)}$$

Domen funkcije $f(x):=\sin x\cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{tg}x)$ je skup $\mathcal{D}(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ x\neq \operatorname{arctg}(k\pi)+m\pi;\ k,m\in\mathbb{Z}\}$ pa zadani limes ima smisla jer je tačka 0 tačka gomilanja od $\mathcal{D}(f)$.

Funkcije $\sin x$ i $\operatorname{tg}x$ zadovoljavaju uslove za primjenu Maclaurinovog razvoja sa ostatkom u Peanovom obliku. Ti poznati razvoji su:

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\ (x\to 0),\quad (1)$$

te

$$\operatorname{tg}x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4),\ (x\to 0)\quad (2).$$

Na osnovu (2) je

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+o(x^4)=$$

$$=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)^3+o(x^4)=$$

$$=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^4),\ (x\to 0)\quad (3)$$

Bitno je naglasiti da je $\operatorname{tg}x\sim x\ (x\to 0)$, pa je $o(\operatorname{tg}^4x)=o(x^4)$.

Uvrštavajući (1) i (3) u (*) dobije se

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)}{x+\frac{2}{3}x^3+o(x^4)}=1$$

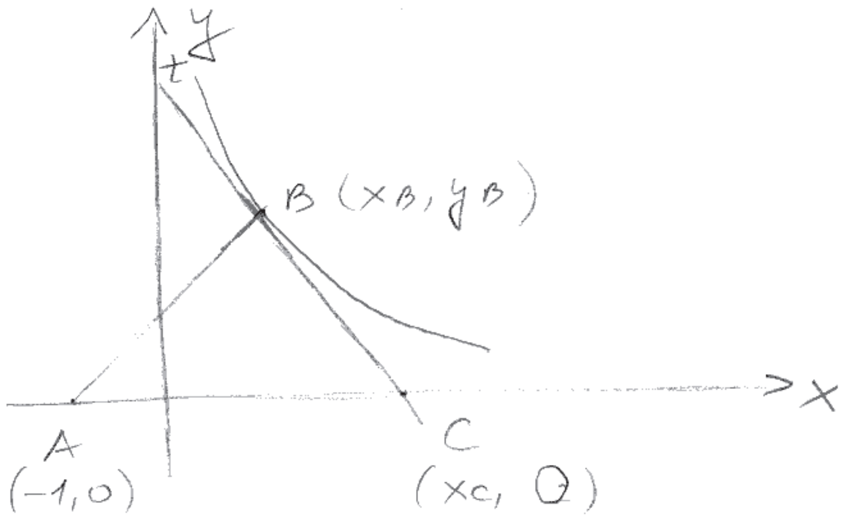
(2)

$$f: \quad y\sqrt{x} = 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (*)$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$$

S obzirom da je funkcija f zadata implicitno, lako se zaključi da se može napisati u obliku $(*)$, odnosno prevesti u eksplicitni oblik, jer njenom grafiku pripadaju samo tačke za koje je $x>0$ i $y>0$.



$$y_B = \frac{1}{\sqrt{x_B}} = x_B^{-\frac{1}{2}},$$

$$t: \ y = k_{TB} \cdot x + n_{TB},$$

$$k_{TB} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=x_B} = \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\Big|_{x=x_B} = -\frac{1}{2}x_B^{-\frac{3}{2}},$$

$$y_B = k_{TB} \cdot x_B + n_{TB},$$

$$x_B^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x_B^{-\frac{3}{2}} \cdot x_B + n_{TB},$$

$$x_B^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} x_B^{-\frac{1}{2}} + n_{TB},$$

$$n_{TB} = \frac{3}{2} x_B^{-\frac{1}{2}},$$

$$t: \ y = -\frac{1}{2} x_B^{-\frac{3}{2}} \cdot x + \frac{3}{2} x_B^{-\frac{1}{2}}.$$

Presjek tangente t sa x-osom je tačka $C(x_C, 0)$. Njenu apscisu x_C ćemo dobiti kao rješenje sistema

$$\frac{\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} x_B^{-\frac{3}{2}} \cdot x_C + \frac{3}{2} x_B^{-\frac{1}{2}} \\ y = 0 \end{array}}{\frac{3}{2} x_B^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x_B^{-\frac{3}{2}} \cdot x_C}$$

$$x_C = \frac{\frac{3}{2} x_B^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_B^{-\frac{3}{2}}} = 3 x_B$$

Površina trougla ΔABC je

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| -1 \left(x_B^{-\frac{1}{2}} - 0 \right) + x_B (0-0) + \right.$$

$$\left. + 3x_B \left(0 - x_B^{-\frac{1}{2}} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| -x_B^{-\frac{1}{2}} - 3x_B^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x_B}} + 3\sqrt{x_B} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 + 3x_B}{\sqrt{x_B}} = P_{\Delta ABC}(x_B).$$

Sada je potrebno naći minimum funkcije $P_{\Delta ABC}(x_B)$.

$$\frac{dP}{dx_B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{3 \cdot \sqrt{x_B} - (1 + 3x_B) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_B}}}{x_B} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{6x_B - 1 - 3x_B}{x_B \cdot 2\sqrt{x_B}} = 0 \Rightarrow x_B = \frac{1}{3}.$$

Da bismo potvrdili da za $x_B = \frac{1}{3}$ funkcija $P_{\triangle ABC}$ dostiže minimum, odredit ćemo znak drugog izvoda te funkcije za $x_B = \frac{1}{3}$.

$$\frac{d^2P}{d\,x_B^2} = \frac{d}{dx_B}\left(\frac{1}{4}\,\frac{3x_B - 1}{\sqrt{x_B^3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{3\sqrt{x_B^3} - (3x_B - 1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x_B^3}}\cdot 3x_B^2}{\sqrt{x_B^6}} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{6x_B^3 - 9x_B^3 + 3x_B^2}{2\sqrt{x_B^9}} =$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{3x_B^2 - 3x_B^3}{x_B^2\cdot\sqrt{x_B^5}} = \frac{1}{8}\,\frac{3(1 - x_B)}{\sqrt{x_B^5}}$$

Za $x_B = \frac{1}{3}$ je $\frac{d^2P}{dx_B^2} > 0$, pa za $x_B = \frac{1}{3}$ funkcija $P_{\triangle ABC}$ dostiže minimum i on je:

$$P_{\triangle ABC\,min} = P_{\triangle ABC}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1 + 3\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

②

$$I = \int e^{2x} \cdot \cos(x\sqrt{6})\,dx = \left| \begin{matrix} u = \cos(x\sqrt{6}) & e^{2x}dx = dv \\ du = -\sqrt{6}\sin(x\sqrt{6})dx & \frac{1}{2}e^{2x} = v \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(x\sqrt{6}) + \frac{\sqrt{6}}{2} \int e^{2x} \cdot \sin(x\sqrt{6})\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \sin(x\sqrt{6}) & e^{2x}dx = dV \\ du = \sqrt{6} \cdot \cos(x\sqrt{6}) & \frac{1}{2} e^{2x} = V \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(x\sqrt{6}) + \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cdot \sin(x\sqrt{6}) - \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot I + C_1 \right]$$

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(x\sqrt{6}) + \frac{\sqrt{6}}{4} e^{2x} \cdot \sin(x\sqrt{6}) - \frac{3}{2} I + C_2,$$

$$\frac{5}{2} I = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(x\sqrt{6}) + \frac{\sqrt{6}}{4} e^{2x} \cdot \sin(x\sqrt{6}) + C_2 \Big| \cdot \frac{2}{5}$$

$$I = \frac{1}{5} e^{2x} \cdot \cos(x\sqrt{6}) + \frac{\sqrt{6}}{10} e^{2x} \cdot \sin(x\sqrt{6}) + C,$$

$$I = \frac{e^{2x}}{10} \left[2 \cdot \cos(x\sqrt{6}) + \sqrt{6} \cdot \sin(x\sqrt{6}) \right] + C,$$

gdje je C proizvoljna realna konstanta.

Napomenimo da funkcije u i V zadovoljavaju uslove primjene metoda parcijalne integracije, budući da očito imaju čak neprekidne izvode na $\mathbb{R}$.

Zadatak ([DF] - II - 3. 9. 5) Izračunati površinu obrtne površi koja nastaje rotacijom krive date analitički sa $y^2=2x$ (luk između presječnih tačaka sa pravom $y=2x$) oko prave $y=2x$.

Rješenje

* Neka luk $\widehat{AB}$ krive $y=f(x)$ (za $a\le x\le b$), pri čemu postoji integrabilan izvod $f'(x)$ u $[a,b]$, rotira oko prave $l: Ax+By+C=0$. Ako proizvoljna normala date prave siječe dati luk u najviše jednoj tački, onda je površina dobivene obrtne površi data sa

$$P_l = 2\pi\int_a^b r(f,l)\sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx,$$

gdje je $r(f,l)$ rastojanje proizvoljne tačke $M(x, f(x))$ date krive od date prave l, tj.

$$r(f,l)=\frac{|Ax+Bf(x)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Odredimo presječne tačke krive $y^2=2x$ i prave $y=2x$.

$$\left.\begin{array}{l} y_0^2=2x_0 \\ y_0=2x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_0^2=2x_0 \\ y_0^2=4x_0^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_0=4x_0^2 \\ y_0=2x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_0(1-2x_0)=0 \\ y_0=2x_0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \nearrow (x_0,y_0)=(0,0) \\ \searrow (x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},1\right) \end{array}$$

Izrazimo pravu l u implicitnom obliku: $y=2x \Leftrightarrow 2x-y=0$

Sada je:

$$P_l = 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} r(f,l)\sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx = \left| \begin{array}{l} r(f,l)=\dfrac{|2x-f(x)|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{|2x-\sqrt{2x}|}{\sqrt{5}} \\ f(x)=\sqrt{2x}\ (x>0),\ f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}} \end{array}\right| =$$

$$= 2\pi\int_0^{1/2}\frac{|2x-\sqrt{2x}|}{\sqrt{5}}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \\ x\in\cancel{(0,1)} \\ \sqrt{2x}>2x \end{array}\right| = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\int_0^{1/2}\left(\sqrt{2x}-2x\right)\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \int_0^{1/2} \left(1-\sqrt{2x}\right)\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \underbrace{\int_0^{1/2} \sqrt{2x+1}\,dx}_{=I_1} - \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \underbrace{\int_0^{1/2} \sqrt{2x}\sqrt{2x+1}\,dx}_{=I_2} =$$

$$I_1 = \int_0^{1/2} \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(2x+1)^3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{2^3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$I_2 = \int_0^{1/2} \sqrt{2x}\,\sqrt{2x+1}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{2x} = sh\,t & \sqrt{2x+1} = ch\,t \\ ch^2 t - sh^2 t = 1 & \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx = ch\,t \cdot dt \\ ch\,t = \sqrt{1+sh^2 t} & dx = sh\,t\,ch\,t\,dt \end{array} \right| = \int_0^{ar\,sh\,1} sh^2 t\,ch^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{ar\,sh\,1} (2\,sh\,t\,ch\,t)^2\,dt = \left| \begin{array}{l} sh\,(\alpha \pm \beta) = sh\,\alpha\,ch\,\beta \pm ch\,\alpha\,sh\,\beta \\ sh\,(2\alpha) = 2\,sh\,\alpha\,ch\,\alpha \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int_0^{ar\,sh\,1} sh^2 2t\,dt$$

$$= \left| sh^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{ch\,\alpha - 1}{2} \right| = \frac{1}{8}\int_0^{ar\,sh\,1} ch\,4t\,dt - \frac{1}{8}\int_0^{ar\,sh\,1} dt = \frac{1}{8}\left(\frac{sh\,4t}{4} - t\right)\Big|_0^{ar\,sh\,1} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{sh(4\,ar\,sh\,1)}{4} - ar\,sh\,1\right) =$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{\ln(1+\sqrt{2})^4} - e^{\ln(1+\sqrt{2})^{-4}}\right) - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{8} =$$

$$= \frac{1}{64}\left((1+\sqrt{2})^4 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^4}\right) - \frac{1}{8}\ln(1+\sqrt{2}) =$$

$$= \dots = \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) =$$

$$sh\,x = y \Rightarrow x = ar\,sh\,y$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = y \Rightarrow e^{2x} - 1 = e^x y \cdot 2$$

$$(e^x)^2 - 2y\,e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2}$$

$$\Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$e^x > 0$$

$$\Rightarrow ar\,sh\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow ar\,sh\,1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(3\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$P_e = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{16\sqrt{2}-8-9\sqrt{2}}{24} + \frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{5}}\left(\frac{7\sqrt{2}-8}{3} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

Zad. 5. Realne funkcije f_1, f_2, f_3 jedne realne promjenljive zadane su formulama:

$$f_1(x)=\frac{x^3-1-b}{x},\quad f_2(x)=\sqrt[3]{x^3+(1+b)x^2},\quad f_3(x)=\frac{(1+x^2)\operatorname{ctg}(x)}{3-\cos(x)\cdot\operatorname{cosec}(x)},$$

gdje je b ukupan broj bodova koji ste ostvarili na 2. redovnom parcijalnom ispitu iz IM1 koji ste polagali (prvi put) u toku svog studija na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu* (održanom 13.1.2011. 8.1.2010. 9.1.2009. 9.1.2008. ...).

a) Odredite (prirodne) domene zadanih funkcija f_1, f_2, f_3, a zatim za svaku od tih funkcija odredite i klasificirajte eventualne njene tačke prekida i singulariteta. (1 b. + 0,5 b.)

b) Izračunajte (izvode) $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x)$ i diskutujte njihovu egzistenciju, a zatim odredite eventualne tačke lokalnog ekstrema zadanih funkcija f_1, f_2, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njihovih grafika. (1,5 b. + 1 b. + 0,5 b.)

c) Primjenom diferencijalnog računa ispitajte i ostala osnovna svojstva zadane funkcije f_1, pa na osnovu dobijenih rezultata /uključujući i rezultate u a) i b)/, nacrtajte njen grafik. (2,5 b.)

d) Izračunajte zapreminu obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem oko x – ose lika (u xy- ravni) kojeg ograničavaju grafik zadane funkcije f_1, x – osa i prave $p: x=3$ i $q: x=4$. (1,5 b.)

e) Verificirajte da su pretpostavke *Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti* zadovoljene za zadanu funkciju f_1 na segmentu [3, 4], a zatim opišite odgovarajuću geometrijsku interpretaciju. (1 b. + 0.5 b)

Rješenje:

a) $\operatorname{Dom}(f_1)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\lim_{x\to 0\pm} f_1(x)=\lim_{x\to 0\pm}\frac{x^3-(b+1)}{x}=\mp\infty.$$

Funkcija f_1 ima vertikalnu asimptotu čija je jednačina $x=0$.
Funkcija f_1 u tački 0 ima esencijalni singularitet II vrste.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2-\frac{1+b}{x}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{1+b}{x^2}\right)=\pm\infty.$$

Funkcija f_1 nema horizontalnih niti kosih asimptota.

$\operatorname{Dom}(f_2)=\mathbb{R}$,

Funkcija f_2 je neprekidna na $\mathbb{R}$ (kao elementarna funkcija), a njene (eventualne) asimptote nisu od interesa jer se ne crta grafik ove funkcije.

$$f_3(x)=\frac{(1+x^2)\operatorname{ctg}(x)}{3-\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}}=\frac{(1+x^2)\operatorname{ctg}x}{3-\operatorname{ctg}x},$$

$\sin x \neq 0 \iff x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$3 - \operatorname{ctg} x \neq 0 \iff 3 \neq \operatorname{ctg} x \iff x \neq \operatorname{arcctg} 3 + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{Dom}(f_3) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall (k \in \mathbb{Z})(x \neq k\pi) \wedge \forall (l \in \mathbb{Z})(x \neq \operatorname{arcctg} 3 + l\pi) \}$

$$\lim_{x \to k\pi_\pm} f_3(x) = \lim_{x \to k\pi_\pm} \frac{(1+x^2)\operatorname{ctg} x}{3 - \operatorname{ctg} x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \lim_{x \to k\pi_\pm} \frac{(1+x^2)\cos x}{3\sin x - \cos x} =$$

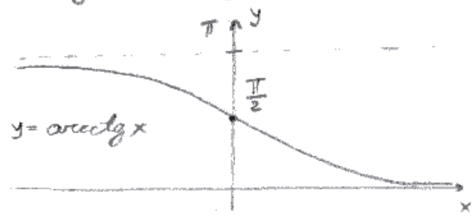
$$= \frac{(1+k^2\pi^2)\cancel{\cos k\pi}}{-\cancel{\cos(k\pi)}} = -(1+k^2\pi^2), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Funkcija f_3 u točkama skupa $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (k \in \mathbb{Z})(x = k\pi) \}$ ima otklonjive singularitete.

$$\lim_{x \to (\operatorname{arcctg} 3 + l\pi)_\pm} f_3(x) = \lim_{x \to (\operatorname{arcctg} 3 + l\pi)_\pm} \frac{(1+x^2)\operatorname{ctg} x}{3 - \operatorname{ctg} x} = \frac{(1+(\operatorname{arcctg} 3 + l\pi)^2)\, 3_\mp}{3 - 3_\mp} =$$

$$= \frac{\overbrace{3(1+(\operatorname{arcctg} 3 + l\pi)^2)}^{>0}}{0_\pm} = \pm\infty$$

arcctgx je monotono opadajuća funkcija na (-



Funkcija f_3 u točkama skupa

$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (l \in \mathbb{Z})(x = \operatorname{arcctg} 3 + l\pi) \}$

ima esencijalne singularitete II vrste.

b) $f_1'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot x - (x^3 - 1 - b)}{x^2} = \dfrac{3x^3 - x^3 + 1 + b}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 1 + b}{x^2}, \quad x \in \operatorname{Dom}(f_1)$

$f_1'(x_s) = 0 \Rightarrow 2x_s^3 + 1 + b = 0 \Rightarrow x_s = -\sqrt[3]{\dfrac{b+1}{2}}$

	$-\infty$	$-\sqrt[3]{\frac{b+1}{2}}$		0		$+\infty$
f_1'	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	
f_1	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Funkcija f_1 u točki $-\sqrt[3]{\dfrac{b+1}{2}}$ ima lokalni minimum koji nije globalni zbog $\lim_{x \to 0\pm} f_1(x) = \mp\infty$.

$$f_1\left(-\sqrt[3]{\frac{b+1}{2}}\right) = \frac{-\frac{3}{2}(b+1)}{-\frac{\sqrt[3]{b+1}}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{3\sqrt[3]{(b+1)^2}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$f_2'(x)=\left(\left(x^3+(1+k)x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)_x' = \frac{1}{3}\left(x^3+(1+k)x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3x^2+2(1+k)x\right)=$$

$$=\frac{x\left(3x+2(1+k)\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^3+(1+k)x^2\right)^2}}, \quad \text{za} \quad x^3+(1+k)x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2(x+1+k)\neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x\neq 0 \ \wedge \ x\neq -(1+k)$$

$$\lim_{x\to 0\pm} f_2'(x)=\lim_{x\to 0\pm}\frac{x(3x+2(1+k))}{3\sqrt[3]{x^4(x+1+k)^2}}=\lim_{x\to 0\pm}\frac{\cancel{x}\overbrace{(3x+2(1+k))}^{>0}}{3\cancel{x}\sqrt[3]{x}\underbrace{\sqrt[3]{(x+1+k)^2}}_{>0}}=$$

$$\left.\begin{array}{l} =\pm\infty \\ f_2 \text{ je neprekidna u točki } 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{2\pm}'(0)=\pm\infty$$

Točka $(0, f_2(0))=(0,0)$ je povratna točka grafika funkcije f_2.

$$\lim_{x\to -(1+k)\pm} f_2'(x)=\lim_{x\to -(1+k)\pm}\frac{\cancel{x}(3x+2(1+k))}{3\sqrt[3]{x^{\cancel{4}}}\sqrt[3]{(x+1+k)^2}}=\text{"}\frac{-3(1+k)+2(1+k)}{3\sqrt[3]{-(1+k)}\cdot 0_+}\text{"}$$

$$\left.\begin{array}{l} =\text{"}\dfrac{-(1+k)}{-3\sqrt[3]{1+k}\cdot 0_+}\text{"}=+\infty \\ f_2 \text{ je neprekidna u točki } -(1+k) \end{array}\right\} \Rightarrow f_{2\pm}'(-(1+k))=+\infty$$

Točka $\left(-(1+k), f(-(1+k))\right)=\left(-(1+k),0\right)$ je točka vertikalne tangente grafika funkcije f_2.

$$f_2'(x_s)=\frac{3x_s+2(1+k)}{3\sqrt[3]{x_s}\sqrt[3]{(x_s+1+k)^2}}=0 \Rightarrow x_s=-\frac{2}{3}(1+k)$$

stacionarna točka

	$-\infty$		$-(1+k)$		$-\frac{2}{3}(1+k)$		0		$+\infty$
$3x+2(1+k)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt[3]{x}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt[3]{(x+1+k)^2}$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$f_2'(x)$		$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	
f_2		$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	

Funkcija f_2 u stacionarnoj točki $-\frac{2}{3}(1+k)$ ima lokalni maksimum.

Funkcija f_2 u točki 0, gdje nije diferencijabilna, ima lokalni minimum.

$$f_3'(x) = \frac{\left(2x\cdot ctg\,x + (1+x^2)\frac{-1}{\sin^2 x}\right)(3-ctg\,x) - (1+x^2)\,ctg\,x\,\frac{-1}{\sin^2 x}}{(3-ctg\,x)^2}\cdot\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{(2x\cos x\sin x - 1 - x^2)(3-ctg\,x) - (1+x^2)\,ctg\,x}{(3\sin x - \cos x)^2}, \quad x \in Dom(f_2)$$

c) $$f_1''(x) = \frac{6x^2\cdot x^2 - (2x^3+1+k)\cdot 2x}{x^4} = \frac{6x^4 - 4x^4 - 2(1+k)x}{x^4} = \frac{2(x^3-1-k)}{x^3}$$

$f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1+k}$

	$-\infty$	0		$\sqrt[3]{1+k}$	$+\infty$
x^3-1-k	$-$		$-$	0	$+$
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$f_1''(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
f_1	$\cup$	$\times$	$\cap$	P	$\cup$

Točka $\sqrt[3]{1+k}$ je prevojna točka grafika funkcije f_1

Funkcija nije definisana u točki 0, pa ona nije prevojna točka grafik, ali je za $x<0$ grafik konveksan, a za $0 < x < \sqrt[3]{k+1}$ je konkavan

Haćimo je još ispitati nule i znak funkcije f_1:

$f_1(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{1+k}$

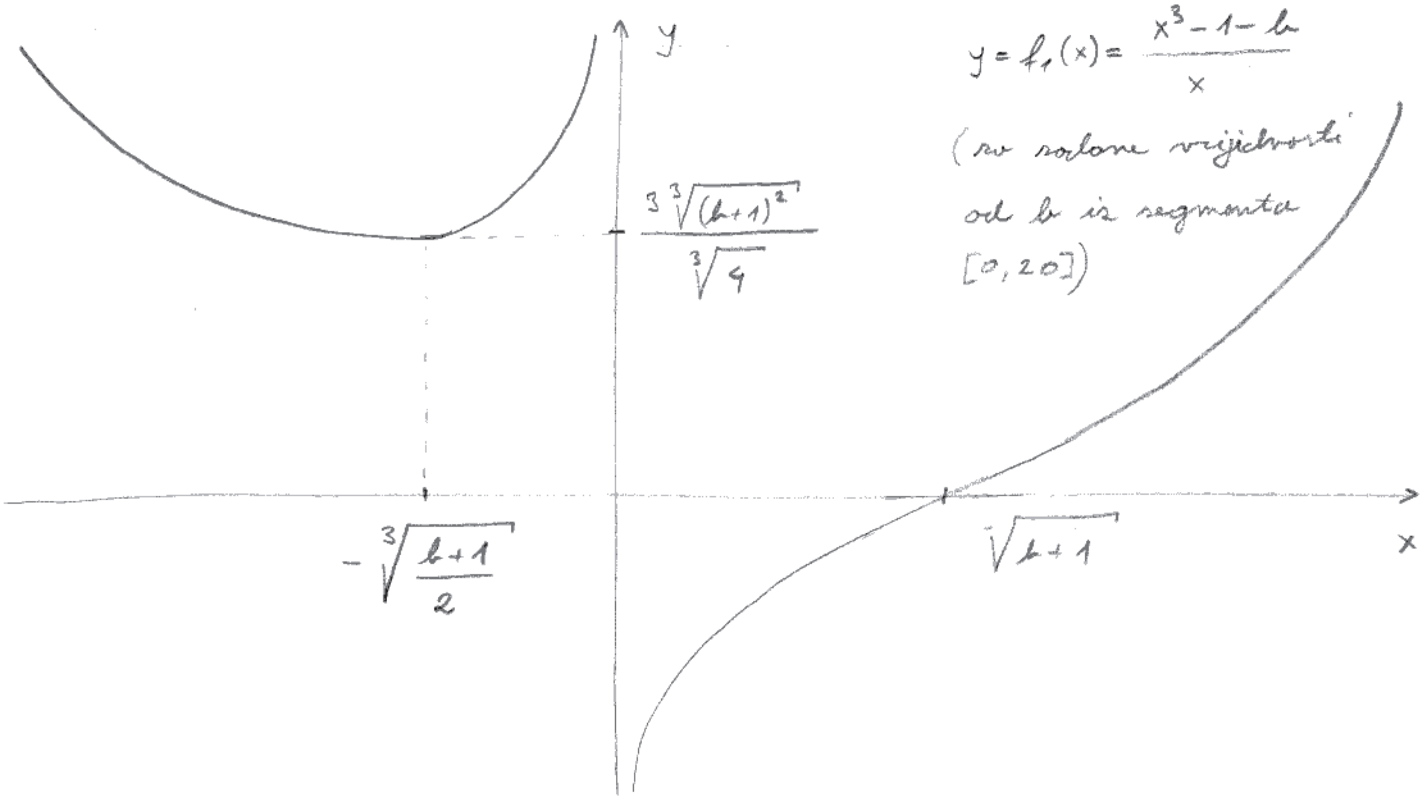
	$-\infty$	0		$\sqrt[3]{1+k}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
x^3-1-k	$-$		$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$

Sada možemo tabelarno prikazati tok i druga svojstva grafika funkcije f_1:

	$-\infty$	$-\sqrt[3]{\frac{k+1}{2}}$		0		$\sqrt[3]{k+1}$	$+\infty$
$f_1(x)$	$+$		$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$		$+$
f_1	$\searrow$	MAX	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$		$\nearrow$
$f_1''(x)$	$+$		$+$	$\times$	$-$	0	$+$
f_1	$\cup$		$\cup$	$\times$	$\cap$	P	$\cup$

$$M\left(-\sqrt[3]{\frac{k+1}{2}},\ \frac{3\sqrt[3]{(k+1)^2}}{\sqrt[3]{4}}\right)$$

$$P\left(\sqrt[3]{k+1},\ 0\right)$$



Napomena: Svi određeni limesi u ovom rješenju imaju smisla jer su točke u kojima su traženi točke gomilanja domena promatrane funkcije.

d) Funkcija f_1 je neprekidna i pozitivna na segmentu $[3, 4]$, pa je tražena zapremina:

$$V = \pi \int_3^4 f_1^2(x)\,dx = \pi \int_3^4 \left(x^2 - \frac{1+b}{x}\right)^2 dx = \pi \int_3^4 \left(x^4 - 2x(1+b) + \frac{(1+b)^2}{x^2}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - (1+b)x^2 - \frac{(1+b)^2}{x}\right)\Bigg|_3^4 = \frac{4^5}{5} - \frac{3^5}{5} - (1+b)(4^2-3^2) - (1+b)^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1024-243}{5} - (1+b)\cdot(16-9) - (1+b)^2\,\frac{3-4}{12} = \frac{781}{5} - 5(1+b) + \frac{(1+b)^2}{12}$$

e) Funkcija f_1 je neprekidna na segmentu $[3,4]$ i ima (konačan) izvod u svakoj točki intervala $(3,4)$, pa su ispunjeni uslovi Lagrange-ove teoreme, pa prema tome postoji barem jedna točka $\xi \in (3,4)$ takva da je

$$f_1(4) - f_1(3) = f_1'(\xi)\cdot(4-3) \iff \frac{64-1-b}{4} - \frac{27-1-b}{3} = \frac{2\xi^3+1+b}{\xi^2}$$

$$\frac{192 - 3(1+b) - 108 + (1+b)}{12}\,\xi^2 = 2\xi^3 + 1 + b$$

$$2\xi^3 - \frac{84+(1+b)}{12}\,\xi^2 - 1 - b = 0$$

Jedino realno rješenje ove jednačine predstavlja točku u kojoj je tangenta na grafik funkcije paralelna sa tetivom kroz točke $(3, f(3))$ i $(4, f(4))$.

Z A D A C I - Grupa B:

sa drugog parcijalnog ispita iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 08. 01.2012.

Zad. 1. Primjenom *Maclaurinovog razvoja* izračunajte $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x \cdot \sin(\sin x))$.

[I. $-\infty$. II. 0. **III.** 1. IV. $+\infty$.] (2,5 b.)

Zad. 2. Definirajte pojam diferencijala realne funkcije jedne realne promjenljive i formulišite *teoremu o približnom određivanju vrijednosti funkcije* primjenom diferencijala, a zatim primjenom diferencijala odgovarajuće realne funkcije jedne realne promjenljive izračunajte približno $\sqrt{\dfrac{2{,}037^2-1}{2{,}037^2+1}}$.

[I. 0,872 . **II.** 0,782. III. 0,827. IV. 0,278.] (0,5 b.+1 b. +1,5 b.)

Zad. 3. Definirajte pojmove sriktno primitivne funkcije, primitivne funkcije i neodređenog integrala, a zatim opišite metodu parcijalne integracije pa primjenom te metode nađite integral $\int e^{2x}\sin\left(x\sqrt{6}\right)dx$.

[**I.** $\dfrac{e^{2x}}{10}\left[2\sin\left(x\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}\cdot\cos\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$ II. $\dfrac{e^{2x}}{8}\left[2\sin\left(x\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}\cdot\cos\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$

III. $\dfrac{e^{2x}}{10}\left[\sqrt{6}\cdot\sin\left(x\sqrt{6}\right)-2\cdot\cos\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$ IV. $\dfrac{e^{2x}}{10}\left[2\sin\left(x\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}\cdot\cos\left(x\sqrt{6}\right)\right]+C.$]

(0,5 b.+ 1 b.+1 b.)

Zad. 4. Izračunajte površinu lika (u xy- ravni) kojeg ograničavaju x – osa, y – osa, prava p: $x=10$ i grafik funkcije φ zadane formulom $\varphi(x) = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+x^2\operatorname{tg}^2 t)^{-1}dt$.

[I. $\ln 9$. II. $\ln 10$. **III.** $\ln 11$. IV. $\ln 12$.] (1,5 b.+ 0,5 b)

Zad. 5. Realne funkcije f_1, f_2, f_3 jedne realne promjenljive zadane su formulama:

$$f_1(x)=\frac{x^2-1-b}{x},\quad f_2(x)=\sqrt[3]{x^3-(1+b)x^2},\quad f_3(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\sec(x)}{\sin^2(x)+\cos(x)},$$

gdje je b ukupan broj bodova koji ste ostvarili na 2. redovnom parcijalnom ispitu iz IM1 koji ste polagali (prvi put) u toku svog studija na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu* (održanom 13.1.2011, 8.1.2010, 9.1.2009, 9.1.2008, ...).

a) Odredite (prirodne) domene zadanih funkcija f_1, f_2, f_3, a zatim odredite i klasificirajte eventualne njihove tačke prekida i singulariteta. (1 b. + 0,5 b.)

b) Izračunajte (izvode) $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x)$ i diskutujte njihovu egzistenciju, a zatim odredite eventualne tačke lokalnog ekstrema zadanih funkcija f_1, f_2, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njihovih grafika. (1,5 b. + 1 b. + 0,5 b.)

c) Primjenom diferencijalnog računa ispitajte i ostala osnovna svojstva zadane funkcije f_1, pa na osnovu dobijenih rezultata /uključujući i rezultate u a) i b)/, nacrtajte njen grafik. (2,5 b.)

d) Izračunajte zapreminu obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem oko x – ose lika (u xy – ravni) kojeg ograničavaju grafik zadane funkcije f_1, x – osa i prave $p: x=5$ i $q: x=6$. (1,5 b.)

e) Verificirajte da su pretpostavke *Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti* zadovoljene za zadanu funkciju f_1 na segmentu [5, 6], a zatim nađite sve vrijednosti od c iz intervala (5, 6) koje (u ovom slučaju) zadovoljavaju zaključak tog teorema. (1 b. + 0,5 b)

IME I PREZIME STUDENTA : ....

DRUGI PARCIJALNI ISPIT 08.01.2012. grupa B

1) Primjenom Maclaurinovog razvoja izračunajte

$$\lim_{x\to 0}\left(ctgx\cdot \sin(\sin x)\right).$$

RJEŠENJE: DOMEN FUNKCIJE $f(x):=ctgx\cdot\sin(\sin x)$ JE SKUP $D(f):=\{x\in R \mid \sin x\neq 0\}$ PA ZADANI LIMES IMA SMISLA JER JE TAČKA 0 TAČKA GOMILANJA OD $D(f)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(ctg x\cdot \sin(\sin x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{tg x}$$

$f(x)=\sin x,\quad f(0)=0,$

$f'(x)=\cos x,\quad f'(0)=1,$

$f''(x)=-\sin x,\quad f''(0)=0,$

$f'''(x)=-\cos x,\quad f'''(0)=-1,$

OČITO FUNKCIJA f ZADOVOLJAVA USLOVE ZA MACLAURINOVU FORMULU SA OSTATKOM U PEANOVOM OBLIKU.

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\quad (x\to 0)$$

$$\begin{aligned}\sin(\sin x)&=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)\\&=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}\left[x^3+o(x^5)\right]+o(x^4)\\&=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4),\quad (x\to 0)\end{aligned}$$

$g(x)=tg x,\qquad g(0)=0,$

$g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x},\qquad g'(0)=1,$

$g''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x},\qquad g''(0)=0,$

$g'''(x)=\dfrac{2\cos x\cdot\cos^3 x+3\cos^2 x\cdot\sin x}{\cos^6 x},\qquad g'''(0)=2,$

ODAKLE, KAO I ZA $f(x)=\sin x$, VRIJEDI

$$tg x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\quad (x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)}=1$$

TAČAN ODGOVOR JE III

DRUGI PARCIJALNI ISPIT 08.01.2012. GRUPA B

1) PRIMJENOM DIFERENCIJALA ODGOVARAJUĆE REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE PROMJENLJIVE IZRAČUNATI PRIBLIŽNO

$$\sqrt{\frac{2{,}037^2-1}{2{,}037^2+1}}$$

RJEŠENJE:

PRIMIJETIMO DA JE ZA RJEŠAVANJE ZADATKA, POTREBNO POSMATRATI FUNKCIJU: $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$, U OKOLINI $(x_0-\Delta x, x_0+\Delta x)\subset D(f)$ TAČKE $x_0:=2$, GDJE JE $\Delta x=0{,}037$.

PREMA TEOREMI O PRIBLIŽNOM ODREĐIVANJU VRIJEDNOSTI FUNKCIJE (PRIMJENOM DIFERENCIJALA) IMAMO DA JE

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ (ZA DOVOLJNO MALE Δx) AKO JE $f'(x_0)\neq 0$.

U NAŠEM SLUČAJU JE:

$$f(x_0)=f(2)=\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}}\cdot\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\cdot\frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad \text{za } \forall x\in D(f)\ (x\neq\pm1),$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$\sqrt{\frac{2{,}037^2-1}{2{,}037^2+1}}\approx\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot 0{,}037\approx 0{,}782$$

TAČAN ODGOVOR JE II.

DRUGI PARCIJALNI ISPIT 08.01.2012. grupa B

3

$$I=\int e^{2x}\sin(x\sqrt{6})\,dx$$

RJEŠENJE:

$$I=\int e^{2x}\sin(x\sqrt{6})\,dx=\left|\begin{matrix} u=\sin(x\sqrt{6}), & dv=e^{2x}dx \\ du=\sqrt{6}\cdot\cos(x\sqrt{6})dx, & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|$$

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x\sqrt{6})-\frac{\sqrt{6}}{2}\int e^{2x}\cos(x\sqrt{6})\,dx=\left|\begin{matrix} u=\cos(x\sqrt{6}) \\ du=-\sqrt{6}\sin(x\sqrt{6})dx \\ dv=e^{2x}dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|$$

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x\sqrt{6})-\frac{\sqrt{6}}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos(x\sqrt{6})+\frac{\sqrt{6}}{2}\underbrace{\int e^{2x}\sin(x\sqrt{6})\,dx}_{I}\right]$$

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x\sqrt{6})-\frac{\sqrt{6}}{4}e^{2x}\cos(x\sqrt{6})+C_1-\frac{3}{2}I$$

$$I+\frac{3}{2}I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x\sqrt{6})-\frac{\sqrt{6}}{4}e^{2x}\cos(x\sqrt{6})+C_1$$

$$I=\frac{2}{10}e^{2x}\sin(x\sqrt{6})-\frac{\sqrt{6}}{10}e^{2x}\cos(x\sqrt{6})+C$$

$$I=\frac{e^{2x}}{10}\left[2\sin(x\sqrt{6})-\sqrt{6}\cos(x\sqrt{6})\right]+C,$$ gdje je C proizvoljna realna konstanta.

NAPOMENIMO DA FUNKCIJE u i v ZADOVOLJAVAJU USLOVE ZA PARCIJALNU INTEGRACIJU BUDUĆI DA IMAJU ČAK NEPREKIDNE IZVODE NA $\mathbb{R}$.

TAČAN ODGOVOR JE I

DRUGI PARCIJALNI ISPIT 08. 01. 2012. GRUPA B

1) IZRAČUNAJTE POVRŠINU LIKA (u xy-RAVNI) KOJEG OGRANIČAVAJU x-OSA, y-OSA, PRAVA $p: x=10$ i GRAFIK FUNKCIJE φ ZADANE FORMULOM $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+x^2 tg^2 t)\,dt$.

RJEŠENJE:

DOVOLJNO JE IZRAČUNATI ZADANI INTEGRAL ZA $0 \le x \le 10$

$$\varphi(0) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$

ZA $x>0$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+x^2 tg^2 t)\,dt = \left| \begin{array}{l} x\cdot\frac{\sin t}{\cos t} = u, \quad t \neq \frac{\pi}{2} \\ dt = \frac{\cos^2 t}{x}\,du \\ t \to 0 \Rightarrow u \to 0 \\ t \to \frac{\pi}{2}- \Rightarrow u \to +\infty \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{x^2 \sin^2 t}{\cos^2 t} = u^2 & \cos^2 t = \frac{x^2}{u^2+x^2} \\ \frac{x^2 - x^2\cos^2 t}{\cos^2 t} = u^2 & dt = \frac{x}{u^2+x^2}\,du \end{array} \right|$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x}{u^2+x^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{2x}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+x^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$\frac{1}{(u^2+x^2)(1+u^2)} = \frac{Au+B}{u^2+x^2} + \frac{Cu+D}{1+u^2}$$

$$1 \equiv u^3(A+C) + u^2(B+D) + u(A+Cx^2) + (B+Dx^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A+Cx^2=0 \\ B+Dx^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} A=0 & \\ C=0 & \\ B = -\frac{1}{x^2-1} & (0<x\neq 1) \\ D = \frac{1}{x^2-1} & (0<x\neq 1) \end{array}$$

$$\varphi(x)=\frac{2x}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{x^2-1}\,\frac{1}{u^2+x^2}+\frac{1}{x^2-1}\,\frac{1}{1+u^2}\right]du$$

$$\varphi(x)=\frac{2x}{\pi}\,\frac{1}{x^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+x^2}\right]$$

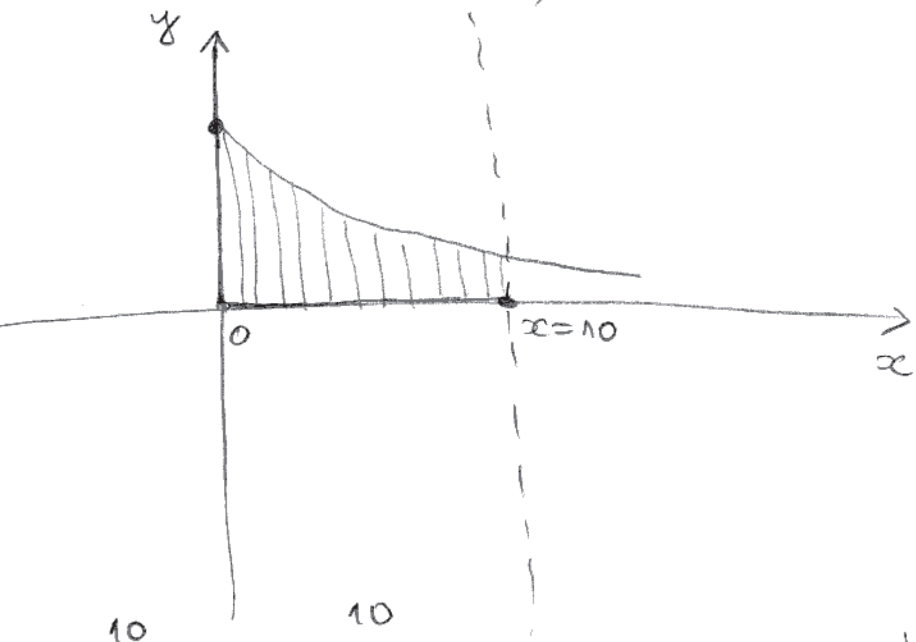
$$\varphi(x)=\frac{2x}{\pi}\,\frac{1}{x^2-1}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2x}\right]=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{1+x}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x}\quad \text{ZA}\quad 0<x\neq 1$$

ZA $x=1$ DOBIJE SE:

$$\varphi(1)=\frac{1}{2}$$

PA JE $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $(x\geqslant 0)$

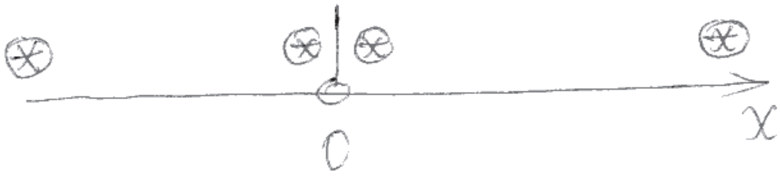


$$P=\int_0^{10}\varphi(x)\,dx=\int_0^{10}\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^{10}=\ln 11.$$

TAČAN ODGOVOR JE $\underline{\text{III}}$.

5. a)

$\circledast$ $D(f_1)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$



Za ispitivanje toka funkcije od interesa su limesi u tačkama $\circledast$, što slijedi iz domena funkcije, jer za dobijanje potpune slike o funkciji neophodno je ispitati ponašanje funkcije u tačkama $+\infty$ i $-\infty$ kao rubnih tačaka gomilanja domena, koje mu ne pripadaju, i u konačnim tačkama u kojima funkcija nije definisana, a tačke su gomilanja domena koje mu ne pripadaju.

Očito je,

$$\lim_{x\to 0_+} f_1(x)=\lim_{x\to 0_+}\frac{x^2-1-b}{x}=\lim_{x\to 0_+}\left(x-\frac{1+b}{x}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0_-} f_1(x)=\lim_{x\to 0_-}\frac{x^2-1-b}{x}=\lim_{x\to 0_-}\left(x-\frac{1+b}{x}\right)=+\infty,$$

a budući da iz uslova zadatka $1+b>0$.

Zadata funkcija $f_1(x)$, sa proizvoljnim realnim parametrom b u $x=0$ ima i lijevu i desnu asimptotu, pa zaključujemo da je prava zadata sa $x=0$ dvostrana vertikalna asimptota za funkciju $f_1(x)$.

Kako u $x=0$ postoji dvostrana vertikalna asimptota, a limesi funkcije $f_1(x)$, kada argument x teži ka tački $x=0$ slijeva i zdesna, su beskonačni i različitog znaka, zaključujemo da funkcija $f_1(x)$ ima esencijalni singularitet 2. vrste u tački $x=0$.

Dalje,

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-b}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-b}{x}=-\infty,$$

Zaključujemo da funkcija $f_1(x)$ nema horizontalnih asimptota niti za slučaj $x\to+\infty$, niti za slučaj $x\to-\infty$.
Iz nepostojanja horizontalnih asimptota slijedi da ima smisla ispitati egzistenciju kosih asimptota.

<u>Za $x\to+\infty$</u> : $y=k_1x+n_1$

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1-b}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-b}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1+b}{x^2}\right)=1,$$

$$n_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f_1(x)-k_1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1-b}{x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-b-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-b}{x}=0.$$

Zaključujemo da, za $x\to+\infty$, funkcija $f_1(x)$ ima kosu asimptotu, analitički zadatu sa $y=x$.

Za $x\to-\infty$: $y=k_2x+n_2$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-1-b}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-b}{x^2}=$$

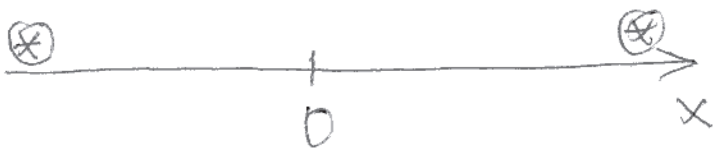
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1+b}{x^2}\right)=1,$$

$$n_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x)-k_2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1-b}{x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-b-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-b}{x}=0.$$

Zaključujemo da, za $x\to-\infty$, funkcija $f_1(x)$ ima kosu asimptotu, analitički zadatu sa $y=x$.

(*) $D(f_2)=\mathbb{R}$



Kako je funkcija $f_2(x)$ definisana preko neparnog korjena, to nema restrikcija domena i oblast definisanosti funkcije je cijeli skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Kako je funkcija $f_2(x)$ elementarna realna funkcija jedne realne promjenjive, to je ona i neprekidna gdje je definisana, tj. neprekidna je na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

Zaključujemo da funkcija $f_2(x)$ nema prekida ni singulariteta, pa stoga nema ni vertikalnih asimptota.

Kako nam nije cilj, u ovom zadatku, crtanje grafa funkcije $f_2(x)$, to ispitivanje egzistencije horizontalnih i/ili kosih asimptota nije od interesa.

(*) $$f_3(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\sec(x)}{\sin^2x+\cos x}=\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{\cos x}}{1-\cos^2x+\cos x}$$

$$f_3(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\cos x\cdot(1+\cos x-\cos^2x)}$$

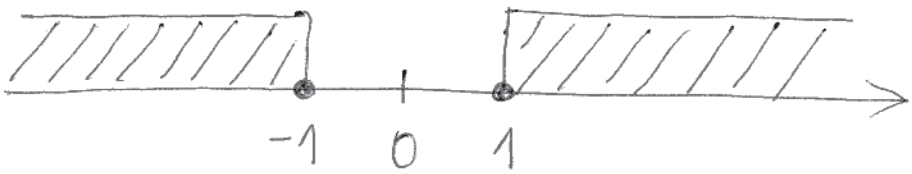
Zbog parnog korijena u brojniku:

$$x^2-1\geq 0 \iff (x-1)(x+1)\geq 0$$

Riješimo navedenu nejednačinu tabelarno:

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$		$-$		$+$

$$x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$



Iz zahtjeva da nazivnik bude različit od 0, slijedi:

$$\cos x\cdot(1+\cos x-\cos^2x)\neq 0,$$

što znači:

$$(\cos x\neq 0)\wedge(1+\cos x-\cos^2x\neq 0)$$

i) $\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

ii) $1 + \cos x - \cos^2 x \neq 0$

Ovo je kvadratna jednačina po $\cos x$, pa slijedi:

$\cos^2 x - \cos x - 1 \neq 0$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kako je $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, to nije ispunjen uslov $|\cos x| \leq 1$ pa to rješenje odbacujemo.

Usvajamo:

$$\cos x \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

odnosno:

$$x \neq \operatorname{Arccos} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x \neq \pm \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Konačno, oblast definisanosti funkcije $f_3(x)$ je:

$$D(f_3) = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle| \ x \notin (-1,1), \ x \neq \pm \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

b)

$$(*)\quad f_1'(x) = \left(\frac{x^2-1-b}{x}\right)' = \frac{2x\cdot x-(x^2-1-b)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2-x^2+1+b}{x^2} = \frac{x^2+1+b}{x^2}, \quad (\forall x \in D(f_1))$$

Zadata funkcija $f_1(x)$ ima konačan izvod u svim tačkama domena $D(f_1)$, pa na grafu funkcije $f_1(x)$ neće biti prelomnih i povratnih tačaka, niti vertikalnih prolaza.

Ispitajmo egzistenciju stacionarnih tačaka funkcije $f_1(x)$:

$$f_1'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2+1+b}{x^2}=0 \Rightarrow x^2+1+b=0$$

$$x^2=-1-b$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-1-b}, \quad \text{uz uslov } -1-b\geq 0 \Rightarrow b\leq -1$$

Zbog uslova zadatka, realni parametar b uzima vrijednosti između 0 i 20, pa uslov $b\leq -1$ ne može biti ispunjen.

Zaključujemo da, funkcija $f_2(x)$ nema stacionarnih tačaka.

Kako funkcija $f_2(x)$ nema stacionarnih tačaka, a nema ni tačaka tipa prelomnih/povratnih tačaka, to funkcija $f_2(x)$ nema lokalnih ekstrema

(*) $f_2'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3+(1+b)x^2}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3-(1+b)x^2)^2}} \cdot (3x^2-2(1+b)x)$

Očigledno, prvi izvod funkcije nije definisan, ako:

$$\sqrt[3]{(x^3-(1+b)x^2)^2} = 0$$

$$\iff (x^3-(1+b)x^2)^2 = 0$$

$$\iff x^3-(1+b)x^2 = 0$$

$$\iff x^2(x-1-b) = 0$$

$$\iff (x \neq 0) \wedge (x \neq 1+b),$$

pa je izraz $f_2'(x)$ prvi izvod funkcije $f_2(x)$, za

$$\forall x \in D(f_2) \setminus \{0, 1+b\}.$$

Ispitajmo karakter i egzistenciju izvoda $f_2'(x)$ u tačkama $x=0$ i $x=1+b$.

Za $x=0$

$$f_2'(0_-) = \lim_{x\to 0_-} f_2'(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{x\cdot(3x-2-2b)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-1-b)^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0_-} \frac{x\cdot(3x-2-2b)}{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x-1-b)^2}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0_-} \frac{3x-2-2b}{\sqrt[3]{x(x-1-b)^2}} =$$

$= \left| \begin{array}{l} \text{brojnik je nenegativna konačna vrijednost} \\ \text{nazivnik teži ka 0 slijeva} \end{array} \right| = +\infty$

$$f_2'(0_+) = \lim_{x\to 0_+} f_2'(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{x\cdot(3x-2-2b)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-1-b)^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0_+} \frac{x\cdot(3x-2-2b)}{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x-1-b)^2}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0_+} \frac{3x-2-2b}{\sqrt[3]{x(x-1-b)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{brojnik je konačna negativna vrijednost} \\ \text{nazivnik teži 0 zdesna} \end{array} \right| = -\infty$$

Kako $f_2'(0_-) \neq f_2'(0_+)$, to $f_2'(0)$ ne postoji ni kao konačan ni kao beskonačan. Kako su lijevi i desni izvod beskonačni i različitog znaka, to je $x=0$ povratna tačka grafika $G(f_2)$.

Kako $f_2'(0_-) = +\infty > 0$ i $f_2'(0_+) = -\infty < 0$, to u tački $x=0$ funkcija mijenja znak prvog izvoda, odnosno funkcija $f_2(x)$ mijenja karakter monotonosti iz rastuće u opadajuću pa ~~je~~ po definiciji u tački $x=0$ funkcija postiže lokalni ekstrem tipa maksimuma.

Procijenimo ulazni i izlazni ugao u tački $x=0$:

$$tg\,\alpha_{ul} = f_2'(0_-) = +\infty \Rightarrow \alpha_{ul} = arctg(+\infty)$$

$$\alpha_{ul} = \lim_{x\to +\infty} arctg\,x$$

$$\alpha_{ul} = \frac{\pi}{2}$$

$$tg\,\alpha_{izl} = f_2'(0_+) = -\infty \Rightarrow \alpha_{izl} = arctg(-\infty)$$

$$\alpha_{izl} = \lim_{x\to -\infty} arctg\,x$$

$$\alpha_{izl} = -\frac{\pi}{2}$$

Za $x=1+b$:

$$f_2'((1+b)_-)=\lim_{x\to(1+b)_-} f_2'(x)=\lim_{x\to(1+b)_-}\frac{x\cdot(3x-2-2b)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-1-b)^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to(1+b)_-}\frac{3x-2-2b}{\sqrt[3]{x(x-1-b)^2}}=+\infty$$

$$f_2'((1+b)_+)=\lim_{x\to(1+b)_+} f_2'(x)=\lim_{x\to(1+b)_+}\frac{x\cdot(3x-2-2b)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-1-b)^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to(1+b)_+}\frac{3x-2-2b}{\sqrt[3]{x(x-1-b)^2}}=+\infty$$

Kako su $f_2'((1+b)_-)=f_2'((1+b)_+)=+\infty$, to postoji izvod u tački $x=1+b$ i to kao beskonačan:

$$f_2'(1+b)=+\infty$$

Kako prvi izvod ne mijenja znak u $x=1+b$, to u tački $x=1+b$ funkcija $f_2(x)$ ima vertikalni prolaz.

Ulazni i izlazni ugao:

$$\alpha_{ul}=\alpha_{izl}=\frac{\pi}{2}$$

Ispitajmo egzistenciju stacionarnih tačaka funkcije $f_2(x)$:

$$f_2'(x)=0 \Rightarrow \frac{3x-2-2b}{3\cdot\sqrt[3]{x(x-1-b)^2}}=0 \Rightarrow 3x-2-2b=0$$

$$x_s=\frac{2(1+b)}{3}, \in D(f_2), \in D(f_2')$$

pa je $x=x_s$ jedina stacionarna tačka.

Ispitajmo karakter monotonosti funkcije $f_2(x)$ i utvrdimo da li postoje lokalni ekstremi:

$$f_2'(x)>0 \Rightarrow \frac{3x-2-2b}{3\cdot\sqrt[3]{x(x-1-b)^2}}>0$$

Izraz $(x-1-b)^2$ je nenegativan, pa slijedi:

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{2(1+b)}{3}\right)$	$\left(\frac{2(1+b)}{3}, +\infty\right)$
$3x-2-2b$	$-$	$-$ 0	$+$
x	$-$ 0	$+$	$+$
$f_2'(x)$	$+$	$-$	$+$
	M↑	M↓	M↑

u $x=0$, po definiciji, egzistira lokalni maksimum

u $x=\frac{2(1+b)}{3}$, po definiciji, egzistira lokalni minimum c)

Ispitajmo znak i nule funkcije, te fleksiju i tačke prevoja funkcije $f_1(x)$.

Znak i nule funkcije $f_1(x)$

$$f_1(x)=\frac{x^2-1-b}{x}=0 \iff x^2=1+b,\quad x\neq 0$$

$$x_{01}=\sqrt{1+b}$$

$$x_{02}=-\sqrt{1+b}$$

Kako je $D(f_1)$ simetričan, to ima smisla provjeriti da li postoji simetrija funkcije $f_1(x)$:

$$f_1(-x)=\frac{(-x)^2-1-b}{(-x)}=-\frac{x^2-1-b}{x}=-f_1(x)$$

Funkcija $f_1(x)$ je neparna.

Funkcija $f_1(x)$ nije periodična, jer očito ne postoji realna vrijednost T takva da $f(x)=f(x+kT)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Znak:

	$-\infty$	$-\sqrt{1+b}$		0		$\sqrt{1+b}$		$+\infty$
x^2-1-b	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_1(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
		nula		V.AS.		nula		

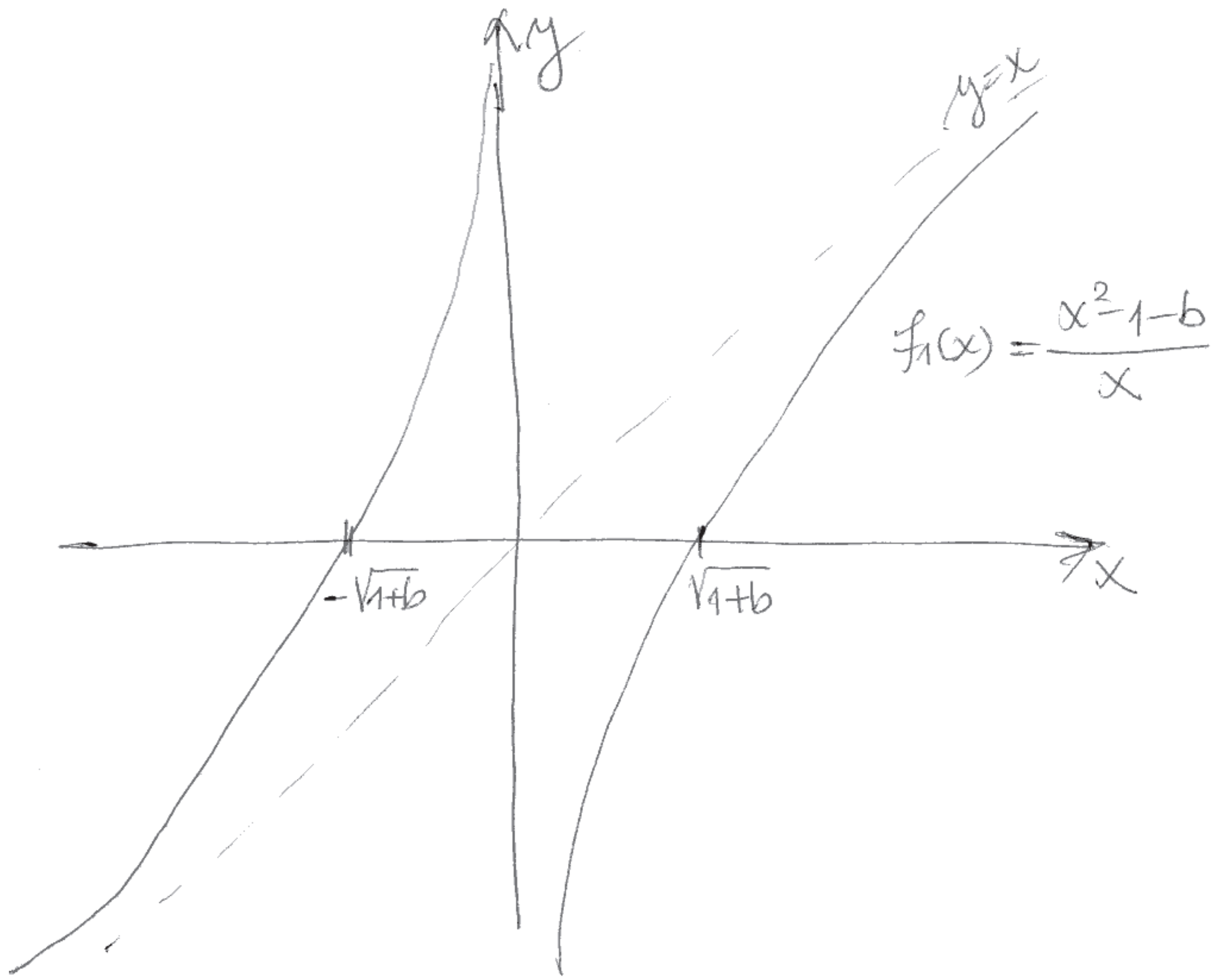
Fleksija i prevojne tačke $f_1(x)$:

$$f_1''(x) = \left(\frac{x^2+1+b}{x^2}\right)' = \frac{2x\cdot x^2 - (x^2+1+b)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{2x\,(x^2-x^2-1-b)}{x^4} = \frac{-2(1+b)}{x^3}, \quad (\forall x \in D(f_1))$$

Zaključujemo da $f_1''(x) \neq 0$, $\forall x \in D(f_1)$, pa $f_1(x)$ nema prevojnih tačaka.

Graf funkcije, $G(f_1)$



d)

$$V=\pi\cdot\int_5^6\left(\frac{x^2-1-b}{x}\right)^2dx=\pi\cdot\int_5^6\frac{x^4+1+b^2-2x^2-bx^2+b}{x^4}dx=$$

$$=\pi\int_5^6 dx+(1+b+b^2)\pi\int_5^6 x^{-4}dx-(2+b)\pi\int_5^6 x^{-2}dx=$$

$$=\pi+(1+b+b^2)\pi\cdot\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_5^6-(2+b)\pi\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_5^6=$$

$$=\pi-\frac{1+b+b^2}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{6^3}-\frac{1}{5^3}\right)+(2+b)\pi\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)=$$

Funkcija $f_1(x)$ je integrabilna na segmentu $[5,6]$, pa sve već navedeno važi.

e)

Funkcija $f_1(x)$ je neprekidna na $D(f_1)$, pa i na $[5,6] \subset D(f_1)$, i ima konačan izvod na $(5,6)$, pa postoji bar jedna tačka $\xi \in (5,6)$ takva da:

$$f_1'(\xi) = \frac{f_1(6) - f_1(5)}{6-5}$$

Odredimo tačke ξ-tipa:

$$\frac{\frac{6^2-1-b}{6} - \frac{5^2-1-b}{5}}{1} = \frac{\xi^2+1+b}{\xi^2}$$

$$\frac{35-b}{6} - \frac{24-b}{5} = \frac{\xi^2+1+b}{\xi^2}$$

$$\frac{31+b}{30} = \frac{\xi^2+1+b}{\xi^2} \quad , \xi \in (5,6) \Rightarrow \xi \neq 0$$

$$30\xi^2 + 30 + 30b = 31\xi^2 + b\xi^2$$

$$(1+b)\xi^2 - 30(1+b) = 0$$

$$(1+b)(\xi^2-30) = 0 \quad , (1+b) \neq 0$$

$$\xi^2 - 30 = 0 \Rightarrow \xi^2 = 30$$

$$\xi_1 = \sqrt{30} \quad , \quad \xi_2 = -\sqrt{30} \quad ; \quad \xi_2 \notin (5,6)$$

pa je tražena tačka jedinstvena $\xi = \sqrt{30}$