Skinuto sa www.etf.ba

INŽENJERSKA MATEMATIKA 1

TUTORIAL 7

NEPREKIDNOST FUNKCIJA

ELEMENTARNE I INŽENJERSKE FUNKCIJE

ZADACI + TEORIJA

AUTOR: BERINA HRUSTIĆ

Skinuto sa www.etf.ba

5

→ TUTORIJAL 7 ←

Neprekidnost funkcije

Elementarne i inženjerske funkcije

<u>Def.</u> Fcija $f(x)$ se naziva neprekidnom u tački a ako je njena granična vrijednost u tački a jednaka vrijednosti te fcije u tački a, tj.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

<u>Def.</u>: (na jeziku ε-δ):

Neka su D, K podskupovi od $\mathbb{R}$ i $f: D \to K$. Za fciju f kažemo da je uniformno neprekidna na skupu $A \subseteq D$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in A)(\forall x \in A)\quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

$\Rightarrow$ uniformno neprekidna fcija na skupu je i neprekidna na tom skupu.

<u>N.B.</u> Ovo je ista def. kao i za graničnu vrijednost, s tim što $a \in D$ u kojoj se def. neprekidnost fcije ne mora biti tačka gomilanja skupa D (može biti izolovana*) tačka tog skupa). Nas uglavnom zanima slučaj kada je ovo ispunjeno. Kod neprekidnosti fcije u tački a se još pretpostavlja da je fcija f i def. u toj tački.

---

*) u nekoj okolini $U(a)$ nema drugih tačaka

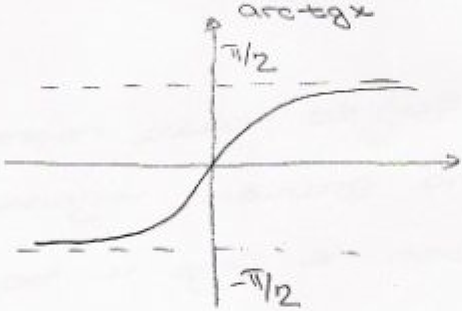
Skinuto sa www.etf.ba

Klasifikacija tačaka prekida

a $x=a$ kažemo da je:

1° PREKID PRVE VRSTE - ako postoje konačne lijeva i desna granična vrijednost f-je f u tački a i ako vrijedi da je $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a_+} f(x)$.

Primjer: $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$



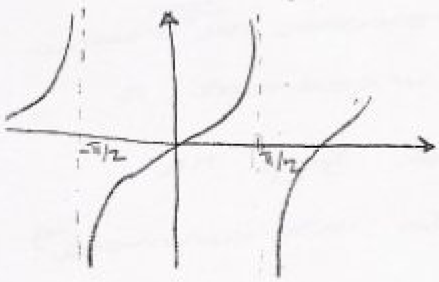
D: $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

2° PREKID DRUGE VRSTE - ako jedna od jednostranih graničnih vrijednosti ne postoji ili ima ∞ vrijednost.

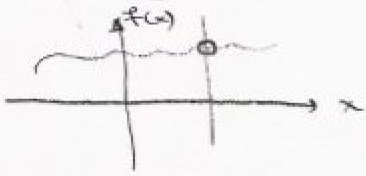
Primjer: $f(x) = \operatorname{tg} x$



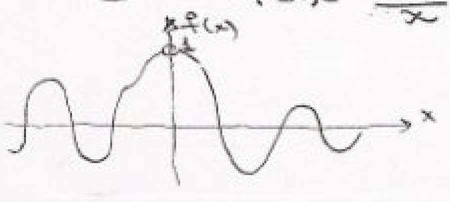
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

3° OTKLONJIV PREKID - ako u toj tački postoje konačne i međusobno jednake lijeva i desna gr. vrij., a f-ja nije def. u toj tački.



Primjer: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



$x \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x}$

$\Rightarrow$ f-ju $f(x)$ možemo produžiti po principu neprekidnosti u tački 0:

$\begin{cases} \sin x / x, & x \neq 0 \end{cases}$

Skinuto sa www.etf.ba

Def: ... je neprekidna u svakoj tački intervala (a,b), tada se ona naziva neprekidnom na (a,b).

T4: Prva Weierstrassova th.:
Fcija neprekidna na segmentu [a,b] je i ograničena na tom segmentu.

4: Druga Weierstrassova th.
Ako je fcija f(x) neprekidna na segmentu [a,b], onda egzistira barem jedna njena vrijednost jednaka donjoj i barem jedna njena vrijednost jednaka gornjoj međi fcije na tom segmentu.

Def: Neka je f realna fcija def. na $D (\subseteq \mathbb{R})$ i $a \in D$ tačka prekida fcije f. Kaže se da je u tački a:

a) OTKLONJIV PREKID - ako postoji konačno $\lim_{x\to a} f(x)$
$\Rightarrow$ a se naziva singularnom tačkom

b) POL - ako je $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ili $-\infty$)
$\Rightarrow$ a je pol fcije

c) ESENCIJALNI PREKID - ako $\lim_{x\to a} f(x)$ ne postoji.
↳ prve vrste - ako $\lim_{x\to a+} f(x)$ i $\lim_{x\to a-} f(x)$ postoje
↳ druge vrste - ako nije prve vrste.

$\Rightarrow$ a je esencijalni singularitet fcije → prve vrste
→ druge vrste

Skinuto sa www.etf.ba

F.M.

234.*) Ispitati neprekidnost f-je

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1, & (-1\le x<0)\vee(0<x\le 1) \\ 2x+1, & 1<x<2 \\ \dfrac{1}{x-3}, & 2\le x<+\infty \end{cases},$$

tj. da li je neprekidna slijeva odnosno zdesna u $x=1$? A u ostalim tačkama? Nacrtati grafik i utvrditi vrste prekida.

1° $\boxed{x=1}$

$$\left.\begin{aligned} f(1-)&=\lim_{x\to 1_-} f(x)=\lim_{x\to 1_-}(-2x+1)=-1 \\ f(1+)&=\lim_{x\to 1_+} f(x)=\lim_{x\to 1_+}(2x+1)=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(1-)\neq f(1+) \Rightarrow$$

f je prekidna u $x=1$

(prekid prve vrste)
(neodstranjiv)

neprekidnost slijeva: $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)=f(a)$

$f(1-)=-1=f(1)\Rightarrow$ da!

neprekidnost s zdesna: $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)=f(a)$

$f(1+)=3\neq f(1)=(-2+1)=-1\Rightarrow$ ne!

2° $\boxed{x=0}$

$$\left.\begin{aligned} f(0+)&=\lim_{x\to 0_+}(-2x+1)=1 \\ f(0-)&=\lim_{x\to 0_-}(-2x+1)=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0+)=f(0-)=\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$$

f(x) nije def. u 0 pa nema smisla f(0), neprekidnost zdesna i neprekidnost slijeva

prekid I vrste, odstranjiv

$$f^*(x)=\begin{cases} -2x+1, & -1\le x<0 \vee 0<x\le 1 \end{cases}$$

Skinuto sa www.etf.ba

3° $\boxed{x=-1}$

Fcija def. u $x=-1$ $\Rightarrow$ ima smisla neprekidnost zdesna

$$f(-1_+) = \lim_{x\to -1_+} (-2x+1) = 3 = f(-1) \Rightarrow \text{da}$$

Budući da f nije def. lijevo od -1 $\Rightarrow$ neprekidnost slijeva nema smisla

4° $\boxed{x=2}$

$$\left.\begin{aligned} f(2_-) &= \lim_{x\to 2_-} (2x+1) = 5 \\ f(2_+) &= \lim_{x\to 2_+} \frac{1}{x-3} = -1 \end{aligned}\right\}$$

$f(2_-) \neq f(2_+) \Rightarrow$ f prekidna u $x=2$

prekid prve vrste

neodstranjiv

$f(2_+) = -1 = f(2) \Rightarrow$ neprekidna zdesna

$f(2_-) = 5 \neq f(2) \Rightarrow$ prekidna slijeva

° $\boxed{x=3}$ $\leftarrow$ fcija nije def. u ovoj tački, pa $f(3)$ nema smisla

Ali ima smisla:

$$\left.\begin{aligned} f(3_-) &= \lim_{x\to 3_-} \frac{1}{x-3} = -\infty \\ f(3_+) &= \lim_{x\to 3_+} \frac{1}{x-3} = +\infty \end{aligned}\right\}$$

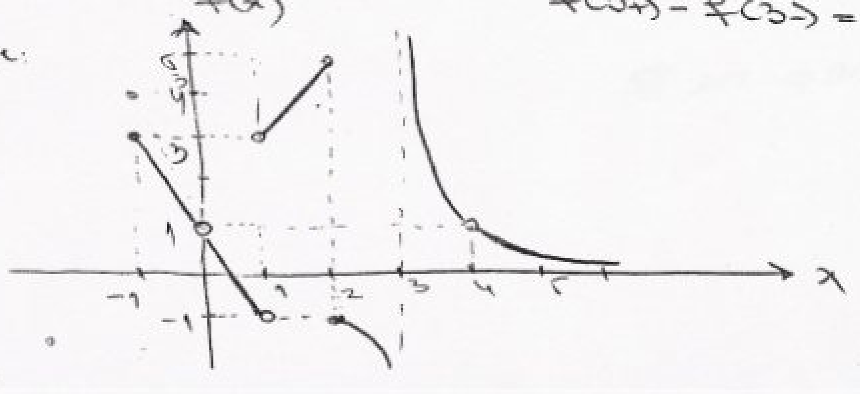
$f(3_-) \neq f(3_+) \Rightarrow$

f prekidna u 3

prekid druge vrste

$f(3_+) - f(3_-) = +\infty \Rightarrow$ u $x=3$ fcija ima skok

Grafik:



fcija nije neprekidna jer je prekidna u $x=1$ . . . .

Skinuto sa www.etf.ba

F.M.

235) Koju relaciju treba da zadovoljavaju a i b pa da f-ja $f(x)=\begin{cases} -2\cos x, & x\le -\pi \\ a\cos x+b, & -\pi<x<\pi \\ 2\sin\frac{x}{2}, & x\ge\pi \end{cases}$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$?

$\lim\limits_{x\to -\pi_-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi_-} -2\cos x = 2$

$\lim\limits_{x\to -\pi_+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi_+} a\cos x+b = -a+b$

da bi f bila neprekidna u $x=-\pi$

$f(-\pi_-)=f(-\pi_+)$

$\Rightarrow \boxed{b-a=2}$

$\lim\limits_{x\to \pi_-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi_-} a\cos x+b = -a+b$

$\lim\limits_{x\to \pi_+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi_+} 2\sin\frac{x}{2} = 2$

za nep. u $x=\pi$

$f(\pi_+)=f(\pi_-)$

$\boxed{b-a=2}$

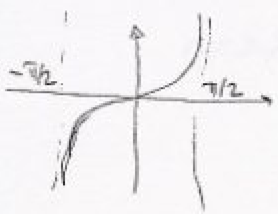
$a<0$

$a=0$

$a>0$

F.M. ← sami

239 1) Ispitati neprekidnost f-je $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x\,\mathrm{arctg}\,nx)$



$\Rightarrow$ moramo ispitati neprekidnost u tački $x=0$

$f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2}x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{\pi}{2}x, & x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f je nep. na $\mathbb{R}$

F.M. Skinuto sa www.etf.ba

243)* Ispitati neprekidnost fcije

$$f(x) = 2 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$$

Fcije je elementarna ⇒ nep. je tamo gdje je i def.

$D(f)$: $x \neq 1$, $x=1$ je tačka nagomilavanja skupa $D(f)$, pa ima smisla:

$$f(1_-) = \lim_{x\to 1_-}\left(2 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}\right) = \left|\begin{array}{l} 1-x=y \\ x\to 1_- \\ y \to 0_+ \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{y\to 0_+}\left(2 + \frac{1}{1+\underbrace{2^{\frac{1}{y}}}_{\to +\infty}}\right) = 2+0 = 2$$

$$f(1_+) = \lim_{x\to 1_+}\left(2 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}\right) = \left|\begin{array}{l} 1-x=y \\ x\to 1_+ \\ y \to 0_- \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0_-}\left(2 + \frac{1}{1+\underbrace{2^{\frac{1}{y}}}_{\to 0_+}}\right) = 1+2 = 3$$

$f(1_-) \neq f(1_+)$ ⇒ nema smisla $f(1)$

$x=1$ je prekid prve vrste i to neotklonjiv

Skinuto sa www.etf.ba

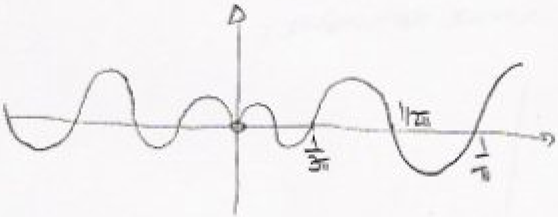
Uščumlić I

2034.) Ispitati neprekidnost f-je $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$.

$D(f)$: $x \neq 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f(0_-) &= \lim_{x\to 0_-} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \\ f(0_+) &= \lim_{x\to 0_+} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \; f(0_-) = f(0_+) \Rightarrow f(0) = 0$$

u $x=0$ f-ja ima otklonjiv prekid prve vrste



$$f^*(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

2037.)

2° $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

$D(f)$: $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0_+} xe^{1/x} = \left| \begin{aligned} &\tfrac{1}{x} = t \\ &x \to 0_- \\ &t \to -\infty \end{aligned} \right| = \lim_{t\to -\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

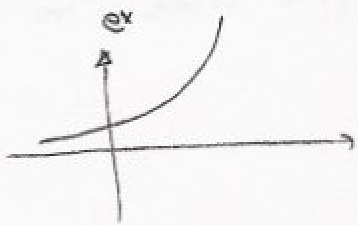
(e^t brže teži ∞ nego t)

$$\lim_{x\to 0_-} xe^{1/x} = 0$$

$\Rightarrow$ $x=0$ je prekid II vrste

3° $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$

$D(f)$: $x \neq 1$



$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = 2 \cdot \infty = \infty$$

$\Rightarrow$ prekid druge vrste

Skinuto sa www.etf.ba

2032)

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x<0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2 \\ 3, & 2 < x \end{cases}$$

$x=0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0_-} \left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ &\lim_{x\to 0_+} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{prekid II vrste}$$

$f(0)=1 = f(0_+) \Rightarrow$ neprekidna zdesna

$\neq f(0_-) \Rightarrow$ prekidna slijeva

$x=1$

$$\left.\begin{aligned} &f(1_-) = \lim_{x\to 1_-} 1 = 1 \\ &f(1_+) = \lim_{x\to 1_+} x = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{otklonjiv prekid I vrste}$$

$f(1_-) = f(1_+) = f(1) = 1$

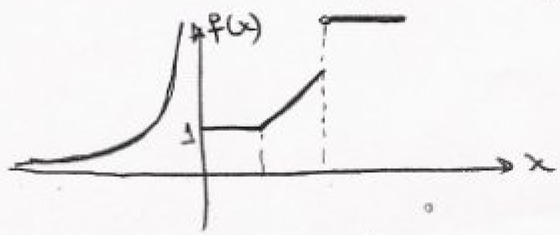
$x=2$

$$\left.\begin{aligned} &f(2_-) = \lim_{x\to 2_-} x = 2 \\ &f(2_+) = \lim_{x\to 2_+} 3 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(2_-) \neq f(2_+)$$

neotklonjiv prekid I vrste

$f(2) = 2 \quad = f(2_-) \Rightarrow$ neprekidna slijeva

$\neq f(2_+) \Rightarrow$ prekidna zdesna



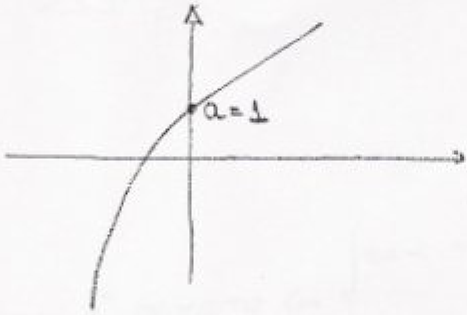
U.M.I

Skinuto sa www.etf.ba

2041.) Za koje a je fcija neprekidna?

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ a, & x=0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0_-}(1-x^2)=1 \\ &\lim_{x\to 0_+}(1+x)=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a=1}$$



U.M.I

2043.) Za koje λ je fcija neprekidna?

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}+1, & x\geq 0 \\ x+\lambda, & x<0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0_+}(e^{-x}+1)=\lim_{x\to 0_+}\left(\frac{1}{e^{x}}+1\right)=2 \\ &\lim_{x\to 0_-}(x+\lambda)=\lambda \end{aligned}\right\} \boxed{\lambda=2}$$