UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

D O M A Ć A   Z A D A Ć A 1

- INŽENJERSKA MATEMATIKA 1-

Ak. 2010/2011. godina

/Formulacije i rješenja zadataka/

Galijašević Sanel

Sarajevo, 14. 10. 2010.

Zad. 1. **a)** Nacrtati kolo struje (sa samo dva prekidača) koje odgovara *implikaciji* $p \Leftarrow q$ (odnosno *jednačini* $p \Leftarrow q = Y$).

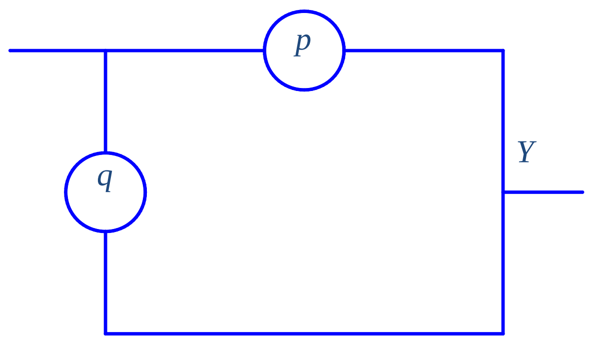
b) Potrebno je da se osvjetljenje nekog stepeništa reguliše pomoću dva prekidača, jednog dole i jednog gore. Okrećući bilo koji prekidač zahtijevamo da se može upaliti ili ugasiti osvjetljenje. Formirati tablicu koja daje rješenje postavljenog problema, a zatim napisati odgovarajuću *Booleovu* jednačinu za taj problem i nacrtati električni krug (kolo struje) koji odgovara toj jednačini.

[*Uputa.* Ako istinitom iskazu (logičkom sudu) pridružimo prekidač u horizontalnom položaju, a neistinitom iskazu pridružimo prekidač u vertikalnom položaju, možemo svaki iskaz predočiti električnim krugom (strujnim kolom) kojim struja teče ako i samo ako je pripadni iskaz istinit.**]**

Rješenje: U **relejno-prekidačkoj interpretaciji** iskazna slova p, q, r, ... interpretiramo kao relejne prekidače, a simbole $\top$ (odnosno 1), $\perp$ (odnosno 0) interpretiramo redom kao *uključen*, *isključen*. Negacije iskaznih slova, tj. formule p', q', ... interpretiramo također kao relejne prekidače.

a) U rješenju ovog zadatka, a u skladu s uputom navedenom uz njegovu formulaciju po pitanju interpretacije iskaznih slova pridruženim relejnim prekidačima u horizontalnom i vertikalnom položaju, pri grafičkom predstavljanju korišteni su tzv. **obrtni prekidači** (pri tome, horizontalni položaj prekidača označava 1 ili tačno, a vertikalni 0 ili netačno). U tom smislu, zadanu implikaciju $p \Leftarrow q$ možemo predstaviti električnim krugom (kolom struje) prikazanim na slici 1.1.

(Tehnički, moguće je bilo koristiti i „obične" tzv. COM prekidače sa dvostrukom mogućnošću spajanja. Također, primijetimo da se formula $p \Leftarrow q$ može napisati i u ekvivalentnom obliku $\neg q \vee p$.)



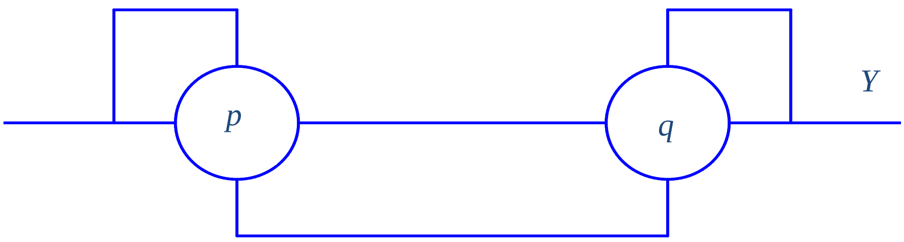
Slika 1.1. *Električni krug koji odgovara Booleovoj jednačini* $p \Leftarrow q = Y$

b) Dogovorno uzmimo da ćemo sa "1" ("istina") označiti "uključen" prekidač, a sa "0" ("laž") "isključen" prekidač. Istim znakovima ćemo u tablici označiti upaljeno i ugašeno svjetlo, respektivno. Također, bez umanjenja općenitosti pretpostavimo da je svjetlo upaljeno kad su oba prekidača u istom stanju vodljivosti. Pod takvim uvjetima dobijemo slijedeću tablicu istinitosti:

p	***q***	***Y***
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Navedena tablica predstavlja sva moguća stanja prekidača i osvjetljenja, te samim tim predstavlja i rješenje postavljenog problema. Očito ovoj tablici odgovara (*Booleova*) jednačina $p \Leftrightarrow q = Y$ ili, što je ekvivalentno, jednačina $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = Y$.

Električni krug koji odgovara ovoj jednačini/jednačinama dobije se analogno kao i u dijelu ovog zadatka pod **a)** (budući da je ekvivalencija dvostruka implikacija), a isti je prikazan na slici 1.2.



Slika 1.2. *Električni krug koji odgovara Booleovoj jednačini za razmatrani problem*

(Primijetimo da se tražena *Booleova* jednačina može napisati i u ekvivalentnom obliku

$$\left(\neg p \vee q\right) \wedge \left(\neg q \vee p\right) = Y \;\; \textbf{(ili } \left(\neg p \wedge \neg q\right) \vee \left(p \wedge q\right) = Y \textbf{).}$$

Također napomenimo da smo mogli na početku postupka izrade rješenja dijela b) ovog prvog zadatka pretpostaviti da kada se oba prekidača nalaze u istom stanju vodljivosti, svjetlo nalazi u stanju "0". Tada tablica stanja predstavlja tablicu ekskluzivne (isključne) disjunkcije ili negaciju ekvivalencije (što se, naravno, može napisati i pomoću konjunkcije, disjunkcije i negacije) čime se dobija drugo rješenje, po formi analogno prvome.)

Zad. 2. a) Izraziti logičke simbole $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$, $\veebar$ pomoću (logičkih) simbola $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

b) Izraziti pomoću *Shefferove operacije/funkcije* $x \uparrow y$ svaku od sljedećih logičkih operacija /(*Booleovih funkcija*): $\neg x,\ x \wedge y,\ x \vee y,\ x \Rightarrow y,\ x \Leftrightarrow y,\ x \downarrow y,\ x \veebar y$.

Rješenje: **a)** Logički simbol $\Rightarrow$ koji povezuje dva iskaza (logička suda) x i y (tj. $x \Rightarrow y$) ekvivalentan je sa $\neg x \vee y$ (što je navedeno i u izradi Zad. 1, a neposredno se vidi iz tablice vrijednosti istinitosti).

Nadalje, $x \Leftrightarrow y$ ekvivalentno je sa $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$, odnosno (primjenom prikaza simbola $\Rightarrow$ pomoću simbola $\neg$, $\vee$) sa $(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$ (ili sa $(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$).

Također su dobro poznate veze: $x \uparrow y = \neg(x \wedge y)$ i $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$.

Kako je $x \,\underline{\vee}\, y = \neg(x \Leftrightarrow y)$, to, primjenom ustanovljenog prikaza simbola $\Leftrightarrow$ pomoću simbola $\neg$, $\wedge$, $\vee$, dobijemo $x \,\underline{\vee}\, y = \neg\left((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)\right)$.

b) S ciljem izražavanja logičke operacije/*Booleove funkcije* $\neg x$ pomoću *Shefferove operacije/ funkcije* $x \uparrow x$ (uvažavajući da je $x \uparrow y = \neg(x \wedge y)$), posmatrajmo slijedeću tablicu vrijednosti istinitosti:

x	$\neg x$	$x \uparrow x$
1	0	0
0	1	1

Otuda je očito $\neg x = x \uparrow x$, što se moglo zaključiti i bez posmatranja tablice istinitosti jer vrijedi:

$$\neg x = \neg(x \wedge x) = x \uparrow x. \tag{2.1}$$

Za logičku operaciju/*Booleovu funkciju* $x \wedge y$ (prema rješenju ovog zadatka pod **a)** i (2.1)) vrijedi:

$$x \wedge y = \neg(x \uparrow y) = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y). \tag{2.2}$$

Budući da za logičku operaciju/*Booleovu funkciju* $x \vee y$ vrijedi:

$$x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y), \tag{2.3}$$

to se primjenom (2.1) i (2.2) nad (2.3) dobije:

$$\begin{aligned} x \vee y &= \neg\left((\neg x \uparrow \neg y) \uparrow (\neg x \uparrow \neg y)\right) = \neg\left(\left((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\right) \uparrow \left((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\right)\right) = \\ &= \left(\left((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\right) \uparrow \left((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\right)\right) \uparrow \left(\left((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\right) \uparrow \left((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\right)\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Za logičku operaciju/*Booleovu funkciju* $x \Rightarrow y$ (prema rješenju ovog zadatka pod **a)**) vrijedi:

$$x \Rightarrow y = \neg x \vee y, \tag{2.5}$$

to se primjenom (2.1) i (2.4) nad (2.5) dobije logička operacija $x \Rightarrow y$ izražena (isključivo) pomoću *Shefferove operacije/funkcije*.

Kako za logičke operacije/*Booleove funkcije* $x \Leftrightarrow y$, $x \downarrow y$ i $x \,\underline{\vee}\, y$ (na osnovu rješenja ovog zadatka pod **a)**) vrijede slijedeće jednakosti:

$$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y), \tag{2.6}$$

$$x \downarrow y = \neg(x \vee y), \tag{2.7}$$

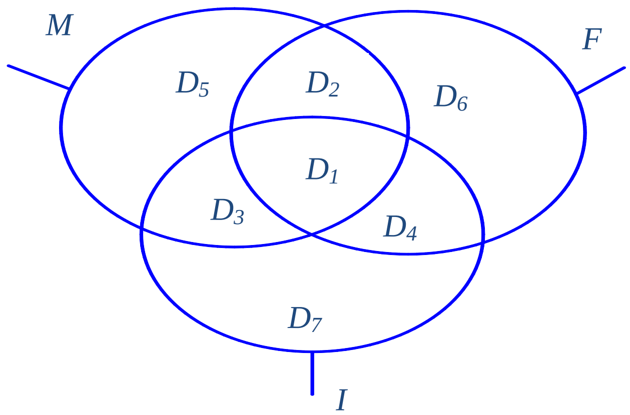
$$x \veebar y = \neg(x \Leftrightarrow y) = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y), \tag{2.8}$$

to se primjenom (2.1), (2.2) i (2.4) nad (2.6) i (2.8), te primjenom (2.1) i (2.4) nad (2.7) dobiju logičke operacije/*Booleove funkcije* $x \Leftrightarrow y$, $x \veebar y$ i $x \downarrow y$ izražene (isključivo) pomoću *Shefferove operacije/funkcije*.

Zad. 3. a) Na jednom fakultetu studenti pohađaju sekcije za dodatnu nastavu iz matematike, fizike i informatike. Sekciju za matematiku pohađa 40% studenata, a sekciju za informatiku 50%. Četvrtina studenata pohađa sekcije za informatiku i fiziku, a 5% studenata se zanima za sve tri sekcije. Fizika ne zanima polovinu studenata. 35% studenata radi fiziku ali ne i matematiku, dok 35% studenata radi informatiku ali ne i matematiku. 1) Koliko studenata pohađa tačno dvije sekcije? 2) Koliko studenata ne pohađa ni jednu od tih sekcija?

b) Zadan je neki neprazan skup S i u njegovom partitivnom skupu $P(S)$ relacija ρ definirana formulom $\forall (A, B \in P(S))\ A\rho B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. Ispitati da li ova relacija ima svojstva: refleksivnosti, antirefleksivnosti, simetričnosti, antisimetričnosti, tranzitivnosti, pa na osnovu toga zaključiti da li je zadana relacija ρ relacija ekvivalencije ili relacija poretka.

Rješenje: a) Označimo sa M skup svih studenata posmatranog fakulteta koji pohađaju sekciju za dodatnu nastavu matematike, sa F skup svih studenata tog fakulteta koji pohađaju sekciju za dodatnu nastavu iz fizike, a sa I skup svih studenata tog fakulteta koji pohađaju sekciju za dodatnu nastavu iz informatike. Zbog dimenzija problema, zadatak je pogodno riješiti pomoću *Vennovih dijagrama* (ili *Euler-Vennovi dijagrami*), kako je to prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1. *Euler-Vennovi dijagrami za razmatrani problem*

Svaki od skupova M, F i I je izdijeljen na četiri disjunktna (razdvojena) skupa (skupovi $D_1, D_2, D_3, ..., D_7$ su disjunktni). Prema slici 3.1. vrijede sljedeće jednakosti:

$$M \cup F \cup I = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7,$$
$$M = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_5,\ I = D_1 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_7$$
$$I \cap F = D_1 \cup D_4,\ M \cap F \cap I = D_1,$$
$$F = D_1 \cup D_2 \cup D_4 \cup D_6,$$
$$F \setminus M = D_4 \cup D_6,\ I \setminus M = D_4 \cup D_7.$$

Neka je x ukupan broj studenata posmatranog fakulteta. Označimo sa $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,$ a_6 i a_7 brojeve elemenata skupova $D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6$ i D_7, respektivno. Sada, na osnovu pripadnih jednačina i uslova zadatka, imamo slijedeći sistem jednačina:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_5 = 0,4x, \\ a_1 + a_3 + a_4 + a_7 = 0,5x, \\ a_1 + a_4 = 0,25x, \\ a_1 = 0,05x, \\ a_1 + a_2 + a_4 + a_6 = 0,5x, \\ a_4 + a_6 = 0,35x, \\ a_4 + a_7 = 0,35x. \end{cases} \tag{3.1}$$

Rješenje ovog sistema jednačina, svedeno na procentualni udio u odnosu na ukupan broj studenata x, je $(5\%,10\%,10\%,20\%,15\%,15\%,15\%)$.

1) Broj studenata (u procentima) koji pohađa tačno dvije sekcije (prema slici 3.1) je:
$$a_2(\%) + a_3(\%) + a_4(\%) = 40\%.$$
2) Broj studenata (u procentima) koji ne pohađa ni jednu od navedenih sekcija se dobije kada se od ukupnog broja studenata (100%) oduzme broj studenata koji pohađa bar jednu od navedenih sekcija (izražen u procentima u odnosu na ukupan broj studenata x), tj.
$$100\% - \left[a_1(\%) + a_2(\%) + a_3(\%) + a_4(\%) + a_5(\%) + a_6(\%) + a_7(\%)\right] = 10\%.$$

b) Relacija ρ nije refleksivna. Naime, skup S je neprazan skup, pa skup $P(S)$ sadrži bar jedan neprazan skup A (koji može biti jednak i skupu S) kao svoj element, i za njega vrijedi:

$$A \cap A = A \neq \varnothing,$$

pa $(A, A) \notin \rho$.

Osim toga, relacija ρ nije ni antirefleksivna jer, ako se posmatra $\varnothing \in P(S)$, onda vrijedi:

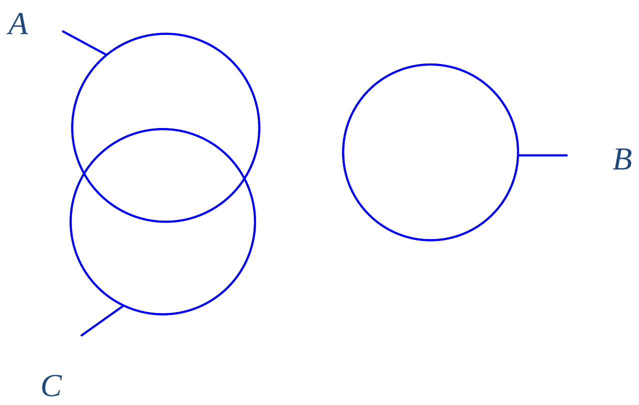
$$\varnothing \cap \varnothing = \varnothing,$$

pa je $(\varnothing, \varnothing) \in \rho$.

Relacija ρ je simetrična, jer za $\forall \left(A, B \in P(S)\right)$ vrijedi $A \cap B = B \cap A$ (što je posljedica definicije presjeka skupova A i B /komutativnost konjunkcije/).

Relacija ρ nije tranzitivna, jer postoje skupovi $A, B, C \in P(S)$ takvi da iz $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ ne slijedi $A \cap C = \varnothing$, kako je to prikazano *Vennovim dijagramima* na slici 3.2.

Na osnovu navedenog možemo zaključiti da relacija ρ nije relacija ekvivalencije (jer nije ni refleksivna ni tranzitivna, iako je simetrična) niti relacija poretka (jer nije ni antisimetrična ni tranzitivna).



Slika 3.2. *Ilustrativni primjer za određivanje tranzitivnosti zadane (binarne) relacije*

Zad. 4. Metodom matematičke indukcije dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$ i za svaki $x \in (\mathbf{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\})$.

Dokaz: Označimo sa $T(n)$ zadanu tvrdnju. Primjenom metode matematičke indukcije (potpune indukcije ili savršene indukcije ili zaključivanja od n na $n+1$) dokažimo istinitost tvrdnje $T(n)$:

1° Baza indukcije:

Dokažimo da tvrdnja $T(n)$ važi za $n=1$. Kako je

$$\sum_{k=1}^{1} \cos(kx) = \cos x, \quad \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = \cos x, \text{ za } \forall \left(x \in (\mathbf{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}) \right), \tag{4.1}$$

to, očito, vrijedi tvrdnja $T(n)$ za $n=1$.

2° Induktivna pretpostavka:

Pretpostavimo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za prirodan broj n, $n = m \geq 1$, tj. pretpostavimo da je

$$\sum_{k=1}^{m} \cos(kx) = \frac{\sin \frac{mx}{2} \cdot \cos \frac{(m+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \forall \left(x \in (\mathbf{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}) \right). \tag{4.2}$$

3° **Korak indukcije:**

Koristeći induktivnu pretpostavku pokažimo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi i za $n = m+1$, tj. dokažimo da je

$$\sum_{k=1}^{m+1}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\cos\frac{(m+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\ \forall\left(x\in(\mathbf{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\})\right).$$

Zaista, imamo da je

$$\sum_{k=1}^{m+1}\cos(kx)=\sum_{k=1}^{m}\cos(kx)+\cos(m+1)x=\frac{\sin\frac{mx}{2}\cdot\cos\frac{(m+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\cos 2\frac{(m+1)x}{2}=$$

$$=\frac{\sin\frac{mx}{2}\cdot\cos\frac{(m+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\cos^2\frac{(m+1)x}{2}-1=\frac{\sin\frac{mx}{2}\cdot\cos\frac{(m+1)x}{2}+2\cos^2\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{(m+1)x}{2}\left(\sin\frac{mx}{2}+2\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\left|\begin{array}{l}2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\alpha-\sin\beta\\ 2\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin\alpha-\sin\beta\\ \left.\begin{array}{l}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{(m+1)x}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{x}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha=\frac{(m+2)x}{2}\\ \beta=\frac{mx}{2}\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\cos\frac{(m+1)x}{2}\left(\sin\frac{mx}{2}+\sin\frac{(m+2)x}{2}-\sin\frac{mx}{2}\right)-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{(m+2)x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\left(\frac{(m+1)x}{2}+\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\sin^2\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}\left(\cos\frac{(m+1)x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}\cdot\cos\frac{(m+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

$(n=m\geq 1,\ \ \forall x\in(\mathbf{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\})$.

4° Zaključak:

Budući da tvrdnja $T(n)$ vrijedi i za prirodan broj n = $m+1$, to ona vrijedi i za bilo koji prirodan broj n, čime je dokaz završen.

Zad. 5. Riješiti nejednačinu $\left|\frac{x+4}{ax+b}\right| > \frac{1}{x}$, gdje su $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$, takvi da $\overline{ab}$ označava redni broj dana u mjesecu vašeg datuma rođenja.

Rješenje: 1° Data nejednačina/nejednadžba je, uvažavajući prirodu parametara a i b ($\overline{ab}$ označava odgovarajući redni broj dana u mjesecu rođenja, pa isključujemo mogućnost da oba parametra a i b simultano /istovremeno/ imaju vrijednost nula), definirana na skupu

$$D_1 = \left\{x \in \mathbf{R} : x \neq 0 \wedge x \neq -\frac{b}{a}\right\} = \mathbf{R} \setminus \left\{0, -\frac{b}{a}\right\} \text{ za } a \in \{1, 2, 3\},\ b \in \{0, 1, \dots, 9\}, \tag{5.1}$$

odnosno na skupu

$$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{0\} \text{ za } a = 0,\ b \in \{1, \dots, 9\}. \tag{5.2}$$

2° Za $\forall x \in (-\infty, 0)$ data nejednačina je (uz uvažavanje prirode parametara a i b) očito zadovoljena.

3° Za $x > 0$, prema (5.1) i (5.2), ima smisla razmatrati slijedeća dva slučaja (svaki student ponaosob rješava samo jedan od tih slučajeva u ovisnosti o konkretnim vrijednostima parametara a i b):

3.1° $a \in \{1, 2, 3\}$, ($x > 0$):

Kako je $x+4>0$ ($x>0$), te zbog prirode parametara a i b vrijedi $ax+b>0$, to zadana nejednačina u razmatranom slučaju postaje:

$$\frac{x+4}{ax+b} - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+(4-a)x-b}{(ax+b)x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+(4-a)x-b > 0 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2) > 0 \ (a \in \{1, 2, 3\},\ x>0),$$

gdje su rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2+(4-a)x-b=0$ realna i međusobno različita (jer je, zbog prirode parametara a i b diskriminanta $D=(4-a)^2+4b$ pozitivna) i određena su sljedećim relacijama:

$$x_1 = \frac{-(4-a)-\sqrt{(4-a)^2+4b}}{2}\ (<0),\quad x_2 = \frac{-(4-a)+\sqrt{(4-a)^2+4b}}{2}\ (\geq 0).$$

Otuda slijedi (slika 5.1.) da je

$$\left|\frac{x+4}{ax+b}\right| > \frac{1}{x} \ (x>0,\ a \in \{1, 2, 3\},\ b \in \{0, 1, \dots, 9\}) \Leftrightarrow x \in (x_2, +\infty).$$

3.2° $a = 0$, $b \in \{1, \dots, 9\}$ ($x > 0$):

Kako je $x+4>0$ ($x>0$), to zadana nejednačina u razmatranom slučaju postaje:

$$\frac{x+4}{b} - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x-b}{bx} > 0 \Leftrightarrow x^2+4x-b>0 \Leftrightarrow (x-x_1')(x-x_2')>0 \ (x>0),$$

gdje su rješenja x_1' i x_2' kvadratne jednačine $x^2+4x-b=0$ realna i međusobno različita (jer je, zbog prirode parametra b (>0) diskriminanta $D=16+4b$ pozitivna) i određena su formulama

$$x_1' = \frac{-4-\sqrt{16+4b}}{2} \ (<0),\ x_2' = \frac{-4+\sqrt{16+4b}}{2} \ (>0).$$

Otuda slijedi (slika 5.1.) da je

$$\left|\frac{x+4}{ax+b}\right| > \frac{1}{x} \ (x>0,\ a=0, b\in\{1,\ \dots\ ,\ 9\}) \Leftrightarrow x\in(x_2',+\infty).$$

4° Na osnovu 1° - 3° odredimo rješenje polazne nejednačine u ovisnosti o vrijednosti parametra a:

4.1° Za $a\in\{1,2,3\}$ i $b\in\{0,\ 1,\ \dots\ ,\ 9\}$ iz 1°, 2° i 3.1° slijedi da je rješenje zadane nejednačine svaki $x\in\mathbf{R}$ za koji je

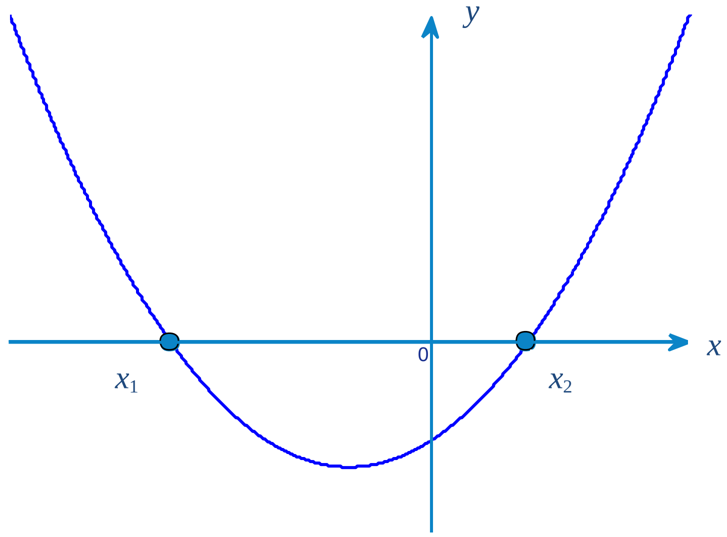
$$x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)\cup\left(-\frac{b}{a},0\right)\cup\left(x_2,+\infty\right),$$

gdje je: $x_2 = \dfrac{-(4-a)+\sqrt{(4-a)^2+4b}}{2}$.

4.2° Za $a=0$ i $b\in\{1,\ \dots\ ,\ 9\}$ iz 1°, 2° i 3.2° slijedi da je rješenje zadane nejednačine svaki $x\in\mathbf{R}$ za koji je

$$x\in(-\infty,0)\cup(x_2',+\infty),$$

gdje je: $x_2' = \dfrac{-4+\sqrt{16+4b}}{2}$.



Slika 5.1. *Pomoćni graf(ik) za određivanje znaka kvadratne funkcije*

-- @ --