NEKI PRIMJERI CRTANJA GRAFIKA FUNKCIJE

1. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$

* $D_f$: $x > 0$

(*) označava krajnje tačke domena koje treba ispitati limesima

* $E_x \neq E_{-x}$ ⇒ nema simetrije domena ⇒ nema simetrije grafa tj. funkcija nije ni parna ni neparna, i to nema smisla ispitivati

* Periodičnost: nema (nema harmonijskih funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $e^x$)

* Nule

$$y = \frac{\ln^2 x}{x} = 0 \Rightarrow \ln^2 x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$$

$x_0 \in D_f$

* Znak funkcije

Kako domena $x > 0$ ⇒

| | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln^2 x$ | | + | 0 | + | |
| $x$ | | + | | + | |
| $y$ | | + | | + | |

$y \geq 0$, $\forall x \in D_f$

* Ekstremi / stacionarne tačke

$$y' = \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{(2 - \ln x)\ln x}{x^2} \quad ; \quad D_f \equiv D_{f'}$$

$$y' = \frac{(2 - \ln x)\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow (2 - \ln x)\ln x = 0$$

$\ln x = 0 \land (2 - \ln x) = 0$

$\boxed{x_1 = 1}$ $\boxed{x_2 = e^2}$ ; $x_1, x_2 \in D_f$

* Monotonost

| | $(0,1)$ | $(1,e^2)$ | $(e^2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $2-\ln x$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $\ln x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x^2$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y'$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| | M$\downarrow$ | M$\uparrow$ | M$\downarrow$ |

* Prevojne tačke (tačke infleksije)

$$y'' = \frac{(2\ln x - \ln^2 x)' x^2 - (2\ln x - \ln^2 x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$y'' = \frac{\left(2\frac{1}{x} - 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)x^2 - (2-\ln x)\ln x\cdot 2x}{x^4}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}\left(\ln^2 x - 3\ln x + 1\right) \qquad D_f \equiv D_{f''}$$

$y'' = 0 \implies \ln^2 x - 3\ln x + 1 = 0$

$t = \ln x$ smjena

$t^2 - 3t + 1 = 0$

$$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot1\cdot1}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{x_3 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} \qquad x_3, x_4 \in D_f$$

$$\boxed{x_4 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}$$

tačke infleksije

* Asimptotski dio

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty \Rightarrow \quad x=0 \text{ je vertikalna asimptota}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \left| \begin{matrix} \frac{\infty}{\infty} \text{ PNO} \\ \text{Lop} \end{matrix} \right| = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\frac{1}{x}\ln x}{1} = 2\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left| \begin{matrix} \frac{\infty}{\infty} \text{ PNO} \\ \text{Lop} \end{matrix} \right|$$

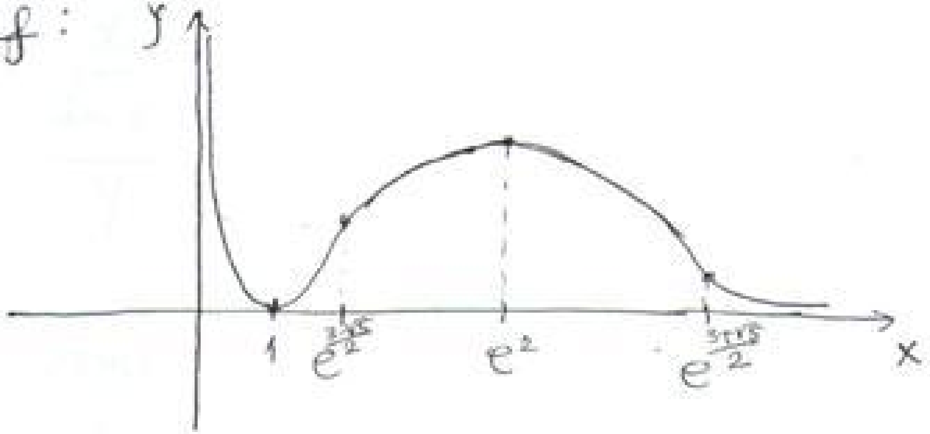
$$= 2\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ je horizontalna asimptota}$$

Iz ovoga slijedi da nema kose asimptote.

* $y''(x_1=1) = 2 > 0 \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \min.$

$y''(x_2=e^2) = -\frac{2}{e^6} < 0 \Rightarrow x_2 = e^2 \max.$

* Graf:



**ZAD 2**: $y = x^2 \ln x$

* **Df**: $x > 0$
* Nema simetrije
* def. nep. funkcija na Df
* **Nule**

$$y = x^2 \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \wedge \boxed{x = 1}$$

$x = 0 \notin D_f \Rightarrow \boxed{x = 1}$ je nula funkcije

* **Znak**

| | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | $+$ | $+$ | |
| $\ln x$ | $-$ | $+$ | |
| $y$ | $-$ | $+$ | |

* Ekstremi

$D_f = D_{f'}$

$$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = \cancel{2x \ln x + x} = x + 2x \ln x$$

$$y' = x + 2x \ln x = 0$$

$\Rightarrow y' = 0$ za $x = 0$ ali nije u $D_f$

$$x = -2x \ln x$$

$$y' = x(1 + 2\ln x)$$

$$1 = -2 \ln x$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = e^{-1/2}}$$

* Monotonost

| $x$ | $0$ + | $e^{-\frac{1}{2}}$ + | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $1+2\ln x$ | $-$ | $0$ $+$ | |
| $y'$ | $-$ | $+$ | |
| | M↓ | M↑ | |

$\Rightarrow \boxed{x = e^{-1/2}}$ min

* Fleksija

$$y'' = 2\ln x + 1 + x\left(2\frac{1}{x}\right) = 2\ln x + 1 + 2 = 3 + 2\ln x$$

$$y'' = 0 = 3 + 2\ln x$$

$$3 = -2\ln x$$

$$\ln x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = e^{-\frac{3}{2}}}$$

$$0 < x < e^{-3/2} \Rightarrow y'' < 0 \quad \frown$$

$$e^{-3/2} < x \Rightarrow y'' > 0 \quad \smile$$

* $$\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x = \left| \begin{array}{l} x = e^{-t} \\ t \to +\infty \end{array} \right| = \lim_{t\to+\infty} (-t)e^{-2t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{-t}{e^{2t}} = -\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{2t}} = \left| \begin{array}{l} \frac{\infty}{\infty} \text{ PNO} \\ \text{Lop} \end{array} \right|$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2e^{2t}} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} e^{-2t} = 0$$

$\Rightarrow$ нема H.AS.

Na osnovu ponašanja prvog izvoda u okolini $x=0$ znamo način ulaska grafa u $x=0$:

$G_f'$ $\lim\limits_{x\to 0+} y' = \lim\limits_{x\to 0+} x(1+2\ln x) = \left| \begin{matrix} x \equiv e^{-t} \\ t \to +\infty \end{matrix} \right|$

$= \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}(1+2\ln e^{-t}) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}(1-2t)$

$= \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} - 2\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{e^t}$

$= -2\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \left| \begin{matrix} \frac{\infty}{\infty} \text{ PNo} \\ \text{Lop.} \end{matrix} \right| = -2\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{e^t}$

$= -2\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0 \Rightarrow \boxed{\angle_{ulaza} = 0}$

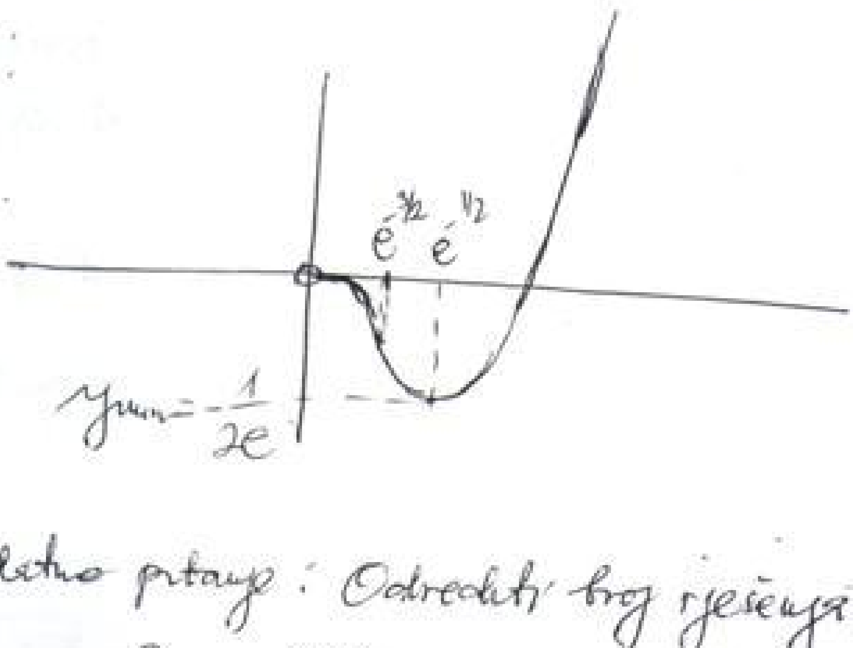
* $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty \Rightarrow$ nema V.AS.

* K.AS.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln x = +\infty$

$\Rightarrow$ nema K.AS.

* $G_f$:




* Dodatno pitanje: Odrediti broj rješenja jednačine

$\lambda = x^2 \ln x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Rješenje daje graf u presjeku $y=\lambda$

Za $\lambda \geq 0 \Rightarrow N=1$ rješenje

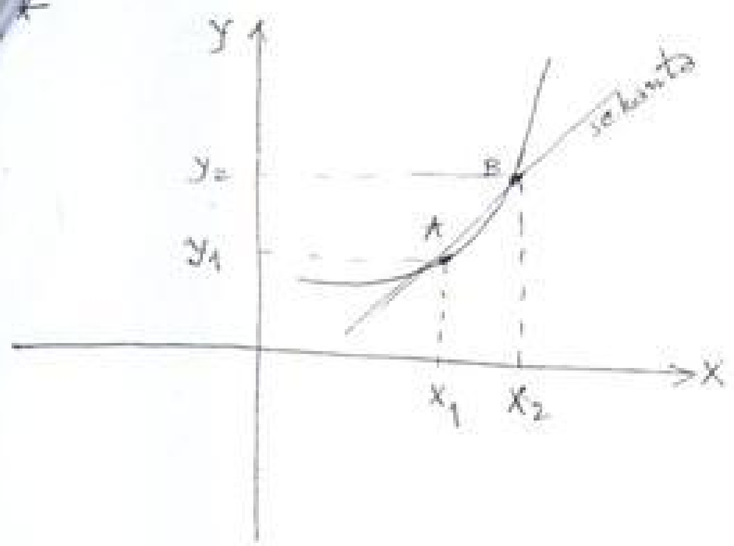
$0<\lambda \leq -\frac{1}{2e} \Rightarrow N=2$

$\lambda < -\frac{1}{2e} \Rightarrow N=\emptyset$

# DIFERENCIJALNI RAČUN REALNE FUNKCIJE JEDNOG REALNOG ARGUMENTA



*




Def: Razlika $\Delta x = x_2 - x_1$ naziva se priraštom argumenta u tački $x = x_1$, dok se razlika $\Delta y = y_2 - y_1$ naziva priraštom funkcije u tački $x = x_1$.

Def: Izvodom funkcije $f(x)$ u tački $x = x_0$ naziva se konačna granična vrijednost u tački $x = x_0$, količnika $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kada $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

* Prvi izvod nam daje informaciju o budućem ponašanju funkcije.
* $y'(x_0) = 0$ je potreban, ali ne i dovoljan uslov da $y(x_0)$ bude ekstrem funkcije. Dovoljan uslov je $y''(x_0) \neq 0$. Ako važi $y'(x_0) = 0$
  $y''(x_0) = 0$
onda je tačka $(x_0, y(x_0))$ tačka prevoja (infleksije).
* $y'(x) \gtrless 0 \Rightarrow$ opisuje monotoniju (rast, pad) funkcije

* Pravila diferenciranja

T1:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $D(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{vmatrix}$ determinanta | $D'(x) = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_3 & f_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3' & f_4' \end{vmatrix}$ |
| $z(t) = u(t) + i\,v(t)$ kompleksan broj | $z'(t) = u'(t) + i\,v'(t)$ |
| $A = (a_{ij}(x))'$ matrica | $A' = (a_{ij}'(x))$ |
| $\vec{a} = \{a_1(x), a_2(x), a_3(x)\}$ vektor | $(\vec{a})' = \{a_1'(x), a_2'(x), a_3'(x)\}$ |

T2:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $y = f(x)$ | $y' = f'(x)$ |
| $F(x,y) = 0$ | $y'(x) = -\dfrac{F_x'}{F_y'}$ |
| $\rho(\varphi) = \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ | $y' = \dfrac{y_\varphi'}{x_\varphi'}$ |

| | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| | $C$ | $0$ |
| | $Cu(x)$ | $Cu'(x)$ |
| | $u(x) \pm v(x)$ | $u'(x) \pm v'(x)$ |
| | $u(x) \cdot v(x)$ | $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ |
| | $\frac{u(x)}{v(x)}$ | $\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ |
| | $\frac{1}{u(x)}$ | $-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ |
| složena funkcija | $f(y(u(x)))$ | $\frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ |
| inverzna funkcija | $f^{-1}(x)$ | $\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y}$ |

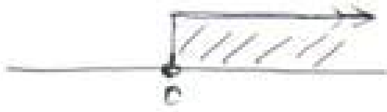
T4 :

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |

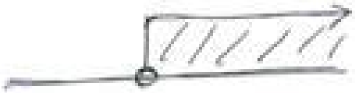
| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ |
| $\operatorname{th} x$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ |
| $\operatorname{cth} x$ | $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ |

1. Naći izvod $y=\sqrt{x}$

* $D_f: x \geq 0$



* $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow D_f': x > 0$

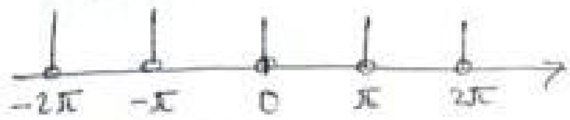


Došlo je do restrikcije domena u $x=0$.

2. Naći izvod $y = \frac{x^2}{\sin x}$

* $D_f: \sin x \neq 0$

$x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ def. nep.



* $y' = \frac{(x^2)'\sin x - x^2(\sin x)'}{\sin^2 x}$

$y' = \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$ $\quad D_f = D_f'$

3. Naći izvod $y = x^{\sin x}$

* $D_f: x > 0$

* Logaritamski izvod

$\ln y = \sin x \ln x$

$\frac{y'}{y} = (\sin x)'\ln x + \sin x(\ln x)'$

$y' = y\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$

$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right)$ $\quad D_f = D_f'$

**4.** Odrediti n-ti izvod funkcije

$$f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}\ ,\quad a\neq 0$$

$$* \quad \frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}\equiv\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}\quad /\cdot(x-a)(x+a)$$

$$1=A(x+a)+B(x-a)$$

za $x=a \Rightarrow 1=2aA$

$$\boxed{A=\frac{1}{2a}}$$

Metoda parcijalnih razlomaka

za $x=-a \Rightarrow 1=-2aB$

$$\boxed{B=-\frac{1}{2a}}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\Big(\underbrace{\frac{1}{x-a}}_{f_1(x)}-\underbrace{\frac{1}{x+a}}_{f_2(x)}\Big)$$

$$f_1(x)=\frac{1}{x-a}=(x-a)^{-1}$$

$$f_1'(x)=-(x-a)^{-2}$$

$$f_1''(x)=2(x-a)^{-3}$$

$$f_1'''(x)=-6(x-a)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f_1^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\,(x-a)^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{(n+1)}}$$

Analogno, $f_2^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2a}\left(f_1^{(n)}(x) - f_2^{(n)}(x)\right)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2a}(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$$

**5.** $f(x) = e^{ax} \cdot \sin bx$ , $|a|+|b| \neq 0$

pri čemu je $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ; $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$* \; f'(x) = a e^{ax}\sin bx + b e^{ax}\cos bx$$

$$= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{ax}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\, e^{ax}(\cos\varphi \sin bx + \sin\varphi\cos bx) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\, e^{ax}\sin(bx+\varphi)$$

$$f''(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(a e^{ax}\sin(bx+\varphi) + e^{ax}\cdot\cos(bx+\varphi)\cdot b\right)$$

$$= (a^2+b^2)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{ax}\sin(bx+\varphi) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{ax}\cos(bx+\varphi)\right)$$

$$= (a^2+b^2)e^{ax}\left(\cos\varphi\sin(bx+\varphi) + \sin\varphi\cos(bx+\varphi)\right)$$

$$= (a^2+b^2)e^{ax} \cdot \sin(bx+2\varphi)$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (a^2+b^2)^{n/2} e^{ax} \cdot \sin(bx+n\varphi)$$

## <u>6</u> Naći n-ti izvod funkcije korišteniem Leibnizove formule

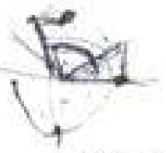
* Leibnizova formula

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) \cdot v(x) + \binom{n}{1} u^{(n-1)}(x) v'(x) + \binom{n}{2} u^{(n-2)}(x) \cdot v''(x) + \dots$$

$$+ \dots + \binom{n}{n-1} u'(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n} u(x) \cdot v^{(n)}(x)$$

* $f(x) = \underbrace{(x^2+x+1)}_{u(x)} \underbrace{\cos x}_{v(x)}$



$\cos x = \sin($

$\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2}$

$\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$

$$u(x) = x^2+x+1 \qquad v(x) = \cos x$$

$$u'(x) = 2x+1 \qquad v'(x) = -\sin x$$

$$u''(x) = 2 \qquad v''(x) = -\cos x$$

$$u'''(x) = 0 \qquad v'''(x) = \sin x$$

$$\vdots \qquad v^{IV}(x) = \cos x$$

$$u^{(n)}(x) = 0, \quad n \geq 3 \qquad \vdots$$

$$v^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(x) = u(x) \cdot v^{(n)}(x) + \binom{n}{n-1} u'(x) v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n-2} u''(x) v^{(n-2)}(x) =$$

$$= u(x) v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) \cdot v^{(n-2)}(x)$$

$$= \left| \begin{array}{l} \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \; ; \; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{1} = \frac{n}{1!} = n \; ; \; \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \end{array} \right| =$$

$$= (x^2+x+1)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) + n(2x+1)\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 2\frac{n(n-1)}{2} \cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$f^{(n)}(x)=(x^2+x+1)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n(2x+1)\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+n(n-1)\cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

**7.** Izvod prvog i višeg reda parametarski zadane funkcije

Naći $y'_x$, ako:

$$y(t)=2\sin t-\sin 2t$$
$$x(t)=2\cos t-\cos 2t \quad , \text{ za } t=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \; ; \; \frac{dx}{dt}=\dot{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\dot{y}=2\cos t-2\cos 2t$$
$$\dot{x}=-2\sin t+2\sin 2t$$

$$y'_x=\frac{2\cos t-2\cos 2t}{-2\sin t+2\sin 2t}=\frac{\cos t-\cos 2t}{-\sin t+\sin 2t}$$

Važe adicione teoreme:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad , -\sin\alpha=\sin(-\alpha)$$

$$y'_x=\frac{-2\sin\frac{3t}{2}\cdot\sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{2\cos\frac{3t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}=\frac{\cancel{2}\sin\frac{3t}{2}\cdot\cancel{\sin\frac{t}{2}}}{\cancel{2}\cos\frac{3t}{2}\cancel{\sin\frac{t}{2}}}=\left|\begin{array}{l}\sin\frac{t}{2}\neq 0\\ \cos\frac{3t}{2}\neq 0\end{array}\right|=$$

$$y'_x=\operatorname{tg}\frac{3t}{2} \quad , \quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$$

$\sin\frac{t}{2} \neq 0$

$\frac{t}{2} \neq k\pi \ , k\in \mathbb{Z}$

$\boxed{t \neq 2k\pi, k\in \mathbb{Z}}$

$\cos\frac{3t}{2} \neq 0$

$\frac{3t}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \cdot \frac{2}{3} \ , k\in \mathbb{Z}$

$t \neq \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \ , k\in \mathbb{Z}$

$\boxed{t \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \ k\in \mathbb{Z}}$

U navedenim tačkama ne postoji izvod funkcije $\Rightarrow$ špic

8. Diferencijabilnost funkcije

* Def: Za funkciju $f(x)$ kažemo da je diferencijabilna u tački $x=a$, ako se njen priraštaj može napisati u obliku:

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \omega(x)(x-a)$$

gdje je $A \in \mathbb{R}$, a funkcija $\omega(x)$ ima osobinu:

$$\lim_{x\to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$$

* $y = \sin x$ u $x = \pi$

$$y(x) - y(\pi) = \sin x - \cancel{\sin\pi}^{0} = \sin x \overset{def}{=} A(x-\pi) + \omega(x)(x-\pi)$$

Pretpostavka: $A = 0 \Rightarrow \sin x = \omega(x)(x-\pi)$

$$\omega(x) = \frac{\sin x}{x-\pi}$$

Provjerimo definiciju: $\lim_{x\to\pi} \omega(x) = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} = \left| \begin{matrix} \sin\pi \to 0 \\ \pi-\pi\to 0 \\ \frac{0}{0} \text{ P.N.O} \\ \text{Lop.} \end{matrix} \right| =$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{1} = \cos\pi = -1$$

$\Rightarrow$ nije ispunjena definicija $\Rightarrow$ nastimamo $\omega(x)$ da bude ispunyena definicija

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \cos\pi$$

$$\lim_{x\to\pi} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x-\pi} - \cos\pi\right)}_{\omega_{NOVO}(x)} = 0$$

Naštimavanje da definicija bude ispunjena!

$$y(x) - y(\pi) = \sin x - \overset{0}{\sin\pi} = \sin x = A_{NOVO}(x-\pi) + \left(\frac{\sin x}{x-\pi} + 1\right)(x-\pi)$$

$$\sin x = \left(A_{NOVO} + \frac{\sin x}{x-\pi} + 1\right)(x-\pi)$$

$$\sin x = \underbrace{A_{NOVO}(x-\pi) + (x-\pi)}_{0} + \sin x$$

$$\Rightarrow A_{NOVO}(x-\pi) = -(x-\pi)$$

$$\boxed{A_{NOVO} = -1}$$

$$\boxed{\omega_{NOVO}(x) = \frac{\sin x}{x-\pi} - \cos\pi}$$

$\Rightarrow$ prirast funkcije se može učiniti po volji malim $\Rightarrow$ funkcija $y = \sin x$ je diferencijabilna u $x = \pi$.

# 9. Taylorova formula

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

* Lagrangeova formula (prva dva člana Taylorovog razvoja)

$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$ , razvoj u okolini $x_0=0$.

uvjet: $f'(0)\neq 0$

* Dokazati $(1+x)^n\approx 1+nx$ i naći $\sqrt{1{,}01}$

$e^x\approx 1+x$ $\qquad e^{-0{,}1}$

$\ln(1+x)\approx x$ , $x\in(-1,1)$ $\qquad \ln 1{,}01$

i) $f(x)=(1+x)^n \Rightarrow f(0)=1^n=1$

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}\Rightarrow f'(0)=n\cdot 1^{n-1}=n$

$f(x)\approx 1+nx$ i t.d.

$\sqrt{1{,}01}=(1+0{,}01)^{1/2}\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0{,}01 \\ n=\frac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \sqrt{1{,}01}\approx 1+0{,}5\cdot 0{,}01$

$\sqrt{1{,}01}\approx 1+0{,}005$

$\boxed{\sqrt{1{,}01}\approx 1{,}005}$

ii) $e^x \approx 1+x$

$f(x)=e^x \Rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$

$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$

$f(x)=e^x\approx 1+x$ š.t.d.

$e^{-0{,}1}\approx \left| x=-0{,}1 \right| \Rightarrow e^{-0{,}1}\approx 1-0{,}1$

$\boxed{e^{-0{,}1}\approx 0{,}9}$

iii) $f(x)=\ln(1+x)$

$f(0)=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$f'(0)=1 \Rightarrow f(x)=\ln(1+x)\approx x$ š.t.d.

$\ln 1{,}01=\ln(1+0{,}01)=\left| x=0{,}01 \right|$

$\boxed{\ln 1{,}01\approx 0{,}01}$

Dokazati
$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}, \quad a>0$$

gdje je $x = o(0)$ i naći $\sqrt[7]{100}$.

* $f(x) = \sqrt[n]{a^n+x} = (a^n+x)^{\frac{1}{n}}$

Primjenom Lagrangeove formule:

$f(0) = a$

$f'(x) = \frac{1}{n}(a^n+x)^{\frac{1}{n}-1}$

$f'(0) = \frac{1}{n}a^{1-n}$

$f(x) = \sqrt[n]{a^n+x} \approx a + x\frac{1}{na^{n-1}}$, š.t.d.

* $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7-28} = \left|\begin{matrix} n=7 \\ a=2 \\ x=-28 \end{matrix}\right| \approx 2 + \frac{-28}{7\cdot 2^6} \approx \frac{217}{112} \approx 1,\ldots$

OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

# 1. Rollova teorema

* Th: Ako je funkcija $f(x)$:

i) neprekidna na segmentu $[a,b]$;

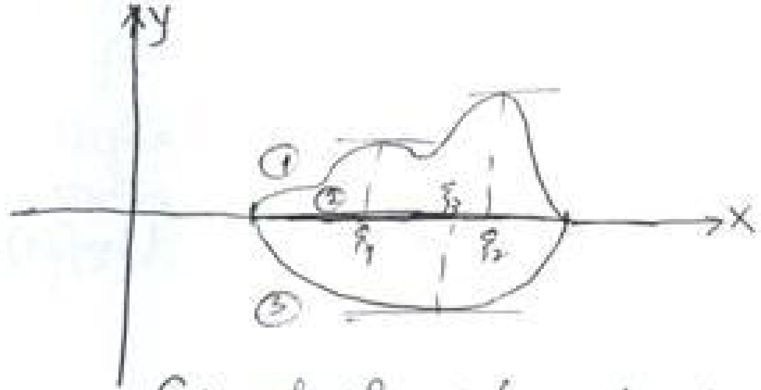
ii) u svakoj tački intervala $(a,b)$ ima konačan ili beskonačan izvod;

iii) na krajevima segmenta $[a,b]$ se anulira, tj. $f(a)=f(b)=0$,

tada u intervalu $(a,b)$ postoji bar jedna tačka $\xi$ u kojoj je izvod jednak 0, tj:

$$f'(\xi)=0 \quad , \quad a<\xi<b$$

*




Geometrijska interpretacija

① $\xi_1, \xi_2$

② $\forall x \in (a,b)$

③ $\xi_3$

* Primjer: Odrediti intervale u kojima važi Rollova teorema

$$f(x)=-x^3+\frac{8}{3}x^2-x-\frac{2}{3}$$

* Rješenje: Prvo odredimo nule funkcije tj. tačke u kojima se funkcija anulira

Hornerova shema, potencijalna rješenja

| | $-1$ | $\frac{8}{3}$ | $-1$ | $-\frac{2}{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{3}$ | $-1$ | $3$ | $-2$ | $\emptyset$ |

$\left\{+\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$
(vidi slobodni član i njegove faktore)

Slijedi:

$$-x^3+\frac{5}{3}x^2-x-\frac{2}{3}=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(-x^2+3x-2\right)$$

$$-x^2+3x-2=0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1&=2\\ x_2&=1\\ x_3&=-\frac{1}{3}\end{aligned}}$$

Traženi intervali su: $\left[-\frac{1}{3},1\right]$, $[1,2]$

Provjerimo da stvarno zadovoljavaju uslove Rollove teoreme

Za $\left[-\frac{1}{3},1\right]$:

i) def. neprekidna funkcija na segmentu

ii) $f'(x)=-3x^2+\frac{16}{3}x-1$

$\forall x\in\left[-\frac{1}{3},1\right]$

iii) $f'(x)=0 \Rightarrow x_1\doteq 0{,}213$ $\qquad f\left(-\frac{1}{3}\right)=f(1)=0$

$x_2\doteq 1{,}565$

$x_1\in\left[-\frac{1}{3},1\right] \Rightarrow \xi=x_1$

$f'(\xi)=0$

čime je Rollova teorema ispunjena

Za $[1,2]$:

i) def. nep. funkcija

ii) $f'(x)=-3x^2+\frac{16}{3}x-1$, $\forall x\in[1,2]$

iii) $f'(x)=0 \Rightarrow x_1\doteq 0{,}213$ $\qquad f(1)=f(2)=0$

$x_2\doteq 1{,}565$

$x_2\in[1,2] \Rightarrow \xi=x_2$

$f'(\xi)=0$

š.t.d.

Provjeriti da li važi Rollova teorema za:

i) $f(x) = 1 - x^2$ , $x \in [-1, 1]$

ii) $f(x) = |x| - 1$ , $x \in [-1, 1]$

* i) Funkcija je diferencijabilna na segmentu $[-1, 1]$ i važi

$f(-1) = f(1) = 0$

Njen izvod $f'(x) = -2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 = \xi$

$\xi \in [-1, 1]$

pa Rollova teorema je ispunjena.

ii) $f(x) = |x| - 1$

$f(-1) = f(1) = 0$

Najmanja vrijednost funkcije $f(x)$ je u tački $x = 0$, no ova tačka predstavlja špic (izvod u njoj ne postoji) te za funkciju $f(x)$ nisu ispunjeni uslovi Rollove teoreme

3. Lagrangeova teorema

* Th: Ako je funkcija $f(x)$:

i) neprekidna na segmentu $[a,b]$;

ii) u svakoj tački intervala $(a,b)$ ima konačan ili beskonačan izvod,

tada u intervalu $(a,b)$ postoji bar jedna tačka $\xi$ u kojoj je

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \quad , \quad a<\xi<b$$

* Primjer: Neka je $f(x)=x^n$. Pokazati da je za interval $(0,a)$ po Lagrangeovoj teoremi $\xi$ dato izrazom:

$$\xi=\frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$$

Rješenje: Prema Lagrangeovoj teoremi je

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi)$$

$$f(a)-f(0)=a\cdot f'(\xi)$$

---

$f(x)=x^n \qquad f'(x)=nx^{n-1}$

$f(a)=a^n \qquad f'(\xi)=n\xi^{n-1}$

---

$$f(a)-f(0)=a^n-0=a^n\equiv a\cdot f'(\xi)$$

$$a^n=a\cdot n\xi^{n-1}$$

$$a^{n-1}=n\xi^{n-1}\Rightarrow \xi^{n-1}=\frac{a^{n-1}}{n}$$

$$\xi=\frac{a}{\sqrt[n-1]{n}} \quad \text{š.t.d.}$$

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ i ima izvod za $\forall x \in (a,b)$, dokazati da se primjenom Rollove teoreme na funkciju 15

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

dobija Lagrangeova teorema.

* Iz izraza $\Phi(x)$ slijedi:

$$\Phi(a) = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Phi(b) = \begin{vmatrix} b & f(b) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

funkcija se anulira na krajevima intervala (zahtjev iii Rollove teoreme)
zahtjev i je ispunjen jer je $\Phi(x)$ neprekidna na segmentu.

te postoji bar jedno $\xi$ $(a<\xi<b)$ takvo da je $\Phi'(\xi)=0$
Međutim,

$$\Phi'(x) = \begin{vmatrix} 1 & f'(x) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

(primjeniti pravilo o diferenciranju determinante iz T1 tabele)
(zahtjev ii Rollovog stava je ispunjen jer je funkcija $\Phi(x)$ diferencijabilna na intervalu $(a,b)$)

tj. $$\Phi'(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

iz čega slijedi $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$ tj. Lagrangeova teorema što je i trebalo dokazati.

5. Primjenom Lagrangeove formule za konačni priraštaj dokazati nejednakost

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b} \quad , \quad 0<b\leq a$$

* Ako Lagrangeovu formulu

$$f(a)-f(b)=(a-b)f'(\xi) \quad , \quad b<\xi<a$$

primjenimo na funkciju $f(x)=\ln x$ na segmentu $[b,a]$ dobijamo:

$$\ln a - \ln b = (a-b)\cdot\frac{1}{\xi}$$

tj.

$$\ln\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b+\theta(a-b)} \quad , \quad \xi = b+\theta(a-b) \quad (*)$$
$$\theta\in(0,1)$$

Za $\theta=1$ je:

$$\ln\frac{a}{b} \geq \frac{a-b}{a}$$

Za $\theta=0$ je:

$$\ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$$

čime je dokazana gornja dvostruka nejednakost.

Izraz (*) opisuje bilo koju tačku iz intervala $[a,b]$, gdje je $b$ početna tačka, a krajnja tačka, $(a-b)$ širina intervala, a $\theta$ izražava koliko smo procentualno ušli s našom tačkom u interval krećući se od početne tačke $b$:

$$\theta=0 \Rightarrow 0\%$$
$$\theta=1 \Rightarrow 100\%$$

Cauchyeva teorema

<u>Th</u>: Ako dvije funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ ispunjavaju slijedeće uslove:

i) u intervalu $(a, b)$ imaju konačne il. beskonačne izvode;

ii) neprekidne su na segmentu $[a, b]$;

iii) u svakoj tački $x \in (a, b)$ bar jedan od izvoda $f'(x)$ i $\varphi'(x)$ je različit od 0 i konačan;

iv) $\varphi(a) \neq \varphi(b)$,

tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da važi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

7. L'Hospitalova teorema. Granične vrijednosti količnika beskonačno malih i beskonačno velikih veličina $\left(\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}\right)$

* Ova teorema je posljedica Lagrangeove i Cauchyeve teoreme, i rješava pitanje poređenja beskonačno malih i beskonačno velikih veličina.

* <u>Th</u>: Ako funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ ispunjavaju slijedeće uslove:

i) $f(a) = \varphi(a) = 0$;

ii) predstavljaju neprekidne funkcije na izvesnom segmentu $\Sigma$ koji sadrži tačku $a$;

iii) za sve tačke $x \neq a$ segmenta $\Sigma$ egzistiraju $f'(x)$ i $\varphi'(x)$,

iv) $\varphi'(x) \neq 0$, za $x \neq a$;

tada iz

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = L \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = L$$

(Izvod je mjera brzine porasta, što omogućuje da poredimo beskonačno velike i male veličine).

8. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-tg\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x\cdot(1-\cos x)}{\cos^2 x - 1} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}$

Sukcesivna primjena L'Hospitalovog pravila

9.

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

11. Pokazati da je $\beta(x) = \ln(1+x) - e\ln\ln(e+x)$ beskonačno mala veličina drugog reda u poređenju sa $x$, kada $x\to 0$.

* Treba pokazati da je $\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{x^2}$ ima konačnu vrijednost.

Zaista,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - e\ln\ln(e+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - e\,\frac{1}{\ln(e+x)}\cdot\frac{1}{e+x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e+x)\ln(e+x) - e(1+x)}{2x(1+x)(e+x)\ln(e+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e+x) + 1 - e}{2(1+x)(e+x)\ln(e+x) + 2x(e+x)\ln(e+x) + 2x(1+x)}$$

$$= \frac{2-e}{2e}$$

# NEKI PRIMJERI RJEŠAVANJA LIMESA

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}$ , $a>0$ , $\beta \neq 0$

* $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}} = \left| \begin{matrix} \frac{0}{0} \text{ PNO} \\ \text{Lop.} \end{matrix} \right| = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{a^{\alpha-1}}{a^{\beta-1}}$

$L = \dfrac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}$

2. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

* $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\dfrac{\sin x}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}} = \left| \begin{matrix} \text{uočiti} \\ \text{poznate} \\ \text{limese} \end{matrix} \right|$

$A = \dfrac{0}{1} = 0$

3. $$B = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$^{*} B = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)\right]} \stackrel{*}{=} e^{L}$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot \ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)\right) = \left|\begin{matrix}\frac{0}{0} & \text{PNO}\\ \text{Lop.}\end{matrix}\right|$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}\right) = \left|\begin{matrix}\frac{0}{0} & \text{PNO}\\ \text{Lop.}\end{matrix}\right|$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1$$

$$L = -1 \Rightarrow B = e^{L} \Rightarrow \boxed{B = e^{-1}}$$

# METODE INTEGRACIJE NEODREĐENOG INTEGRALA

* **Def**: Primitivnom funkcijom funkcije $f(x)$ naziva se funkcija $F(x)$ čiji je izvod jednak $f(x)$, tj:

$$F'(x) = f(x)$$

Primjer: Za $f(x) = 3x$ primitivna funkcija je $F(x) = \frac{3}{2}x^2$

* Također, ako je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$, onda je i $(F(x) + C)$ primitivna funkcija od $f(x)$.

Zaključujemo, ako funkcija ima jednu primitivnu funkciju, onda ih ima beskonačno mnogo.

* **Def**: Skup svih primitivnih funkcija neprekidne funkcije $f(x)$ naziva se neodređenim integralom funkcije $f(x)$ ili diferencijalnog izraza $f(x)dx$ i piše

$$\int f(x)dx$$

* Rješenje ovog integrala je familija krivih koje se razlikuju u konstanti i nazivaju se integralnim krivim linijama.
* **Th**: Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a,b]$, tada za nju egzistira primitivna funkcija za $\forall x \in [a,b]$, tj. funkcija je integrabilna na segmentu.

Pokažimo na primjeru da funkcija koja ima prekid 1. vrste nema primitivnu funkciju:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

i $x=0$ prekid prve vrste $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x) \neq \pm\infty$

Pretpostavimo da ova funkcija ima primitivnu funkciju $F(x)$. Tada bi za $x<0$ moralo biti:

$$F'(x) = f(x) = 1$$

$$F(x) = x + C \,, \quad x<0$$

Nadalje, za $x>0$ $\quad F'(x) = f(x) = 2$

$$F(x) = 2x + C_1 \quad , x>0$$

te slijedi

$$F(x) = \begin{cases} x+C, & x<0 \\ 2x+C_1, & x>0 \end{cases}$$

Da bi primitivna funkcija bila diferencijabilna, iz njene diferencijabilnosti slijedila bi neprekidnost. To znači da u $x=0$ mora biti:

$$F(0+) = F(0-) = F(0)$$

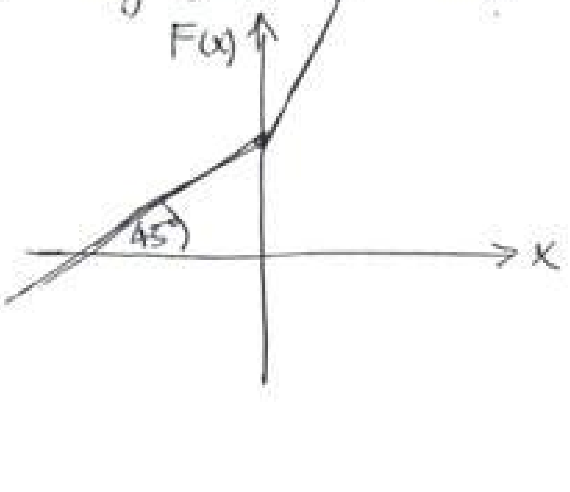
$$F(0+) = \lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} (2x+C_1) = C_1$$

$$F(0-) = \lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0-} (x+C) = C$$

tj. $F(0) = C_1 = C$, i pisali bi

$$F(x) = \begin{cases} x+C & , x\leq 0 \\ 2x+C & , x>0 \end{cases}$$

Sa grafika je za $x=0$ očigledno špic, pa funkcija nije diferencijabilna čime dolazimo u protivrječnost sa pretpostavkom $\Rightarrow$ nema primitivne funkcije $\Rightarrow$ funkcija $f(x)$ nije integrabilna.



* Metode rješavanja neodređenih integrala

i) metoda supstitucije (zamjene)
ii) metoda parcijalne integracije
iii) metoda parcijalnih razlomaka
iv) metoda neodređenih koeficijenata
v) metoda izvoda po parametru
vi) metoda kompleksnih brojeva
vii) metoda specijalnih smjena

1. $I = \int \frac{\ln^2 x}{x^4}\,dx$

* $D_f: \ x > 0$
* smjena: $x = e^t$     / metoda smjene /

$dx = e^t dt$

$$I = \int \frac{\ln^2 e^t}{e^{4t}} e^t dt = \int \frac{t^2}{e^{3t}} dt = \int t^2 e^{-3t} dt$$

Korištenjem metode izvoda:

$$\int t^2 e^{-3t} dt \equiv e^{-3t}(At^2 + Bt + C) \ /'$$

$$t^2 e^{-3t} \equiv e^{-3t}(-3At^2 - 3Bt - 3C + 2At + B)$$

$$t^2 \equiv -3At^2 + (2A - 3B)t + B - 3C$$

$$-3A = 1 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{3}}$$

$$2A - 3B = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{3}A \Rightarrow B = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{B = -\frac{2}{9}}$$

$$B - 3C = 0 \Rightarrow C = \frac{B}{3} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{2}{27}}$$

$$I = e^{-3t}\left(-\frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27}\right) + C = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\ln x - \frac{2}{27}\right) + C$$

2. $I = \int 3x^2 (a^3+x^3)^{\pi} dx$

* Ovaj integral se može svesti na tablični integral

$$I = \int 3x^2 (a^3+x^3)^{\pi} dx = \int (a^3+x^3)^{\pi} d(a^3+x^3) = \left| \begin{array}{l} df = f' dx \\ \text{diferencijal} \\ \text{funkcije} \\ \text{uočiti !!} \end{array} \right|$$

$$I = \left| \begin{array}{l} \text{smjena} \\ a^3+x^3 = t \end{array} \right| = \int t^{\pi} dt = \frac{t^{\pi+1}}{\pi+1} + C = \frac{(a^3+x^3)^{\pi}}{\pi+1} + C$$

3. $I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

* Kako je

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{(x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{sjetimo se} \\ \text{da ako postoji jedna} \\ \text{postoji i } \infty \text{ mnogo} \\ \text{primitivnih funkcija} \end{array} \right|$$

$$= \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$I = \int \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{smjena} \\ t = 1+x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = t^{1/2} + C = \sqrt{t} + C$$

$$I = \sqrt{1+x^2} + C$$

4. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{vmatrix} t=1+x^2 \\ dt=2x\,dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$

$$= \frac{\sqrt{t^3}}{3}+C = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}+C$$

5. Pogledajmo neke korisne osobine

* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$

* $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|+C$

* $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|+C$

* $\int \frac{x}{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2\pm a^2}\,dx = \begin{vmatrix} t=x^2\pm a^2 \\ dt=2x\,dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$

$$= \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2|+C$$

* $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \mathrm{arctg}\,f(x)+C$

6. $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{ll} x=2\,\mathrm{arctg}\,t & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ t=\mathrm{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right|$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

7. $$\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx = \begin{vmatrix} a+b\cos x = t \\ -b\sin x\,dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{b}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{b}\ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x| + C$$

8. $$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$$

9. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+\ln x}} = \begin{vmatrix} t = a^2+\ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{a^2+\ln x} + C$$

10. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad 0 < x < +\infty$$

Smjena: $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \begin{vmatrix} 1+t^2 = z \\ 2t\,dt = dz \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \sqrt{z} + C = \sqrt{1+t^2} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

# INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

* Za rješavanje ovih integrala koristit ćemo metodu parcijalnih razlomaka
* Ovo su integrali tipa $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$

gdje su $P_n(x)$, $Q_m(x)$ polinomi $n$-tog, odnosno $m$-tog stepena respektivno

* Tip 1 : $n > m \Rightarrow$ razlomak je nepravi i navedene polinome treba podijeliti i izdvojiti cijeli dio; svodimo na tip 2
* Tip 2 : $n < m \Rightarrow$ pravi razlomak

Ako je razlomak pravi, težimo rastaviti $Q_m(x)$ na oblik

$$(x-a)^{\alpha}(x^2+px+q)^{\beta}$$

tj.

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^{\alpha}(x^2+px+q)^{\beta}} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_{\beta}x+N_{\beta}}{(x^2+px+q)^{\beta}}$$

# INTEGRACIJA TRANSCEDENTNIH FUNKCIJA

* Tip 1

Integrali oblika $\int P(x)e^{ax}dx$

$$\int P(x)\sin ax\,dx$$

$$\int P(x)\cos ax\,dx$$

gdje je $P(x)$ polinom $n$-tog stepena, rješavaju se metodom parcijalne integracije

* Tip 2

Integrali oblika $\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx$

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx$$

mogu se riješiti metodom parcijalne integracije stavljajući

$$u = x^n$$

$$dv = e^{ax}\sin bx \text{ , odnosno } dv = e^{ax}\cos bx$$

* Tip 3

Integrali oblika $\int P(\ln x)\,x^n dx$

$$\int P(\arcsin x)\,dx$$

gdje je $P(\ln x)$ polinom po $\ln x$, i $P(\arcsin x)$ polinom po $\arcsin x$, svode se smjenom $\ln x = t$

$$\arcsin x = t$$

na integrale $\int P(t)e^{(n+1)t}dt$

$$\int P(t)\cos t\,dt$$

tipa 1

## * Predtip A

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

Radimo nadopunu po formuli $x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q$

i štimamo na:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+k^2} &= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x}{k} + C \\ \int \frac{dx}{x^2-k^2} &= \frac{1}{2k} \ln \frac{k-x}{k+x} + C \end{aligned}\right\} \text{tablični integrali}$$

## * Predtip B

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \implies$$ štima se na sljedeće tablične integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm k^2}\right) + C$$

## * Predtip C

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx \implies$$ štima se na

$$\int \sqrt{t^2-k^2}\, dt$$

$$\int \sqrt{k^2-t^2}\, dt$$

$$\int \sqrt{t^2+k^2}\, dt$$

*** Tip 1** – ~~Integracija racionalnih funkcija~~

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx \quad ; \text{ smjena } t^n = ax+b$$

$$\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}) \cdot x^{m-1}\,dx \quad ; \text{ smjena } t^n = ax^m+b$$

*** Tip 2**

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad , \quad \text{smjena: } x-\alpha = \frac{1}{t}$$

*** Tip 3** – Svođenje na integraciju racionalnih funkcija

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx \quad ; \text{ } \cancel{\text{svodi}} \text{ smjena } x = a\sin t$$

$$\int R(x\sqrt{a^2+x^2})\,dx \quad , \text{ smjena } x = a\,\mathrm{tg}\,t$$

*** Tip 4**

Integral oblika $\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ može da se svede na oblik:

$$\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{Q}\,dx = (A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1})Q + A_m\int$$

gdje je $Q=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Koeficijenti $A_i$ se nalaze diferenciranjem zadnje jednakosti oslobađanjem od imenioca i upoređivanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani ~~uz~~ iste stepene ~~od~~ $x$.

*** Tip 5**

Integral binomnog diferencijala $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ može se izraditi u konačnom obliku u sljedeća tri slučaja:

i) kada je $p$ cijeli broj, razlaganje na sabirke;

ii) $\frac{m+1}{n}$ cijeli broj, smjena $t^s = a+bx^n$; } $s$ je nazivnik broja $p$

iii) $\frac{m+1}{n}+p$ cijeli broj; smjena $t^s = ax^{-n}+b$

ELIPTIČKI INTEGRALI

* Nerješivi su elementarnim postupcima. Integrant se ne može racionalisati, jer pod korijenom imamo polinom 3. ili višeg ~~ste~~ stepena. Ovi integrali rješavaju se tako što se integrant razvije u red (konvergentan!) pa se integrira član po član
* Svaki eliptički integral (zovu se još i Lagrangeovi integrali) rastavlja se u jedan od tri osnovna oblika eliptičkih integrala

$$I = \int R\left(x, \sqrt{a_4(x)x^4 + a_3(x)x^3 + a_2(x)x^2 + a_1(x)x + a_0}\right)dx$$

*

JOŠ NEKI OBLICI INTEGRALA

i) $$I_n = \int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx = \ldots$$

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx = \ldots$$

ii) $$I = \int \sin^n x \cos^m x\,dt$$

*

1. Metoda parcijalne integracije

$$* \; I_1 = \int x^2 \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ dv = \sin x \, dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x - \int -\cos x \cdot 2x\,dx$$

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x \, dx \\ v = \sin x \end{array} \right|$$

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2 \left( x \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$* \; \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$2. \quad I_2 = \int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right|$$

$$I_2 = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \underbrace{\int \frac{x^3}{1+x^2} dx}_{\substack{\text{nepravi razlomak} \\ \text{(racionalna funkcija tip 1)}}}$$

$$\begin{array}{l} x^3 : (x^2+1) = x \\ \underline{-x^3 - x} \\ \quad -x \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x^3 = x(x^2+1) - x$$

$$I_2 = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$I_2 = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Metoda parcijalnih razlomaka

$$I_3 = \int \frac{x^2-3}{x^2(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$$

* $x \neq 0$
  $x \neq -1$

* $$\frac{x^2-3}{x^2(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

Množeći sa $x^2(x+1)^2(x^2+1)$ :

$$x^2-3 \equiv Ax(x+1)^2(x^2+1) + B(x+1)^2(x^2+1) + C(x+1)x^2(x^2+1) + Dx^2(x^2+1) + (Ex+F)x^2(x+1)^2$$

Uvrštavanjem : $x=0$, $x=-1$, $x=i$ $\cancel{x=1}$ $\cancel{x=2}$ } kritične tačke

dobijamo :

$B=-3$
$D=-1$
$E=-2$
$F=0$

a zatim za proizvoljne $x=1$ i $x=2$ :

$$-2 = 8A+8B+4C+2D+4E+4F$$
$$1 = 18A\cdot 5 + 9B + 9B\cdot 5 + 60C + 20D + 72E + 36F$$

⋮

Završiti sami!

4. Metoda kompleksnih brojeva

(Koristi se za tipove $\int \sin^n x\, dx$ i $\int \cos^n x\, dx$)

* Uzmimo
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

* $$I = \int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 dx = \frac{1}{16} \int (e^{ix} + e^{-ix})^4 dx$$

$$I = \frac{1}{16} \int \left( \binom{4}{0} e^{4ix} + \binom{4}{1} e^{3ix} \cdot e^{-ix} + \binom{4}{2} e^{2ix} \cdot e^{-2ix} + \binom{4}{3} e^{ix} e^{-3ix} + \binom{4}{4} e^{-4ix} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{16} \int \left( (e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \frac{4 \cdot 3}{2} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{8} \int \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} dx + \frac{4}{8} \int \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} dx + \frac{6}{16} \int dx$$

$$I = \frac{1}{8} \int \cos 4x\, dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{3}{8} x$$

$$I = \frac{1}{8} \frac{\sin 4x}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3}{8} x + C$$

$$I = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}$ , $k>0$

* $I = \begin{vmatrix} x = kt \\ dx = k\,dt \end{vmatrix} = \int \frac{k\,dt}{\sqrt{k^2+k^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$

$I = \arcsin \frac{x}{k} + C$ , $\left|\frac{x}{k}\right| \leq 1$

6. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x^2-4x+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(x-2)^2}} = \begin{vmatrix} x-2 = t \\ dx = dt \end{vmatrix}$

$I = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x-2}{3} + C$

ur $\left|\frac{x-2}{3}\right| \leq 1$

7. $I = \int \frac{ch x}{3 sh x - 4 ch x} dx$

$* \quad I = \int \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{3}{2}(e^x - e^{-x}) - 2(e^x - e^{-x})} dx$

$I = \frac{1}{2} \int \frac{e^x + e^{-x}}{-\frac{e^x}{2} - \frac{7}{2}e^{-x}} dx = -\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + 7e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} dx$

$I = -\int \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 7} dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = t \\ 2e^{2x} dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2t} \end{array} \right|$

$I = -\frac{1}{2} \frac{t+1}{t+7} \cdot \frac{dt}{t}$

$* \quad \frac{t+1}{t(t+7)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+7} \implies \boxed{A = \frac{1}{7}} \quad \boxed{B = \frac{6}{7}}$

$* \quad I = -\frac{1}{2} \int \frac{A}{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{B}{t+7} dt = -\frac{1}{14} \ln|t| - \frac{3}{7} \ln|t+7| + C$

$I = -\frac{1}{14} \ln e^{2x} - \frac{3}{7} \ln (e^{2x} + 7) + C$

$I = -\frac{x}{7} - \frac{3}{7} \ln (e^{2x} + 7) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

# TAYLOROVA FORMULA

* Def: Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija i neka ima neprekidne izvode do reda $(n-1)$ za $x \in [a, a+h]$, $n$-ti izvod konačan i određen sa $x \in (a, a+h)$ tada:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n$$

* Češći zapis je dat sa:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n \quad (*)$$

i predstavlja razvoj u red funkcije $f(x)$ u okolini $x = x_0$.

* Razvoj funkcije $f(x)$ u okolini $x = 0$ u Taylorov red naziva se još i Maclaurinov razvoj funkcije.

* Th: Ako postoji konačan izvod $f^{(n)}(x_0)$, tada je

$$R_n(x) = \omega(x)(x-x_0)^n$$

gdje je $\omega(x)$ funkcija neprekidna $x = x_0$ i $\omega(x_0) = 0$.

* Kako se $f(x)$ zapisuje kao red $(*)$ to pišemo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ali uzimanjem konačnog umjesto beskonačnog broja članova pravimo grešku koju nazivamo ostatkom pa imamo

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

gdje je $R_n(x)$ ostatak.

Ostatak $R_n(x)$ može se zapisati u više oblika:

i) Lagrangeov oblik

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} \quad , \; 0 \leq \theta \leq 1$$

ii) Cauchyev oblik

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h)}{n!} \quad , \; 0 \leq \theta \leq 1$$

iii) Peanov oblik

$$R_n(x) = o(h^n)$$

1. Napisati Taylorov polinom $n$-tog stepena za funkciju $f(x)=a^x$ u tački $x=1$

* $f(x) = a^x$

$f'(x) = a^x \ln a$

$f''(x) = a^x \ln^2 a$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = a^x \ln^k a$

$$T_n(x) = a + \frac{a \ln a}{1!}(x-1) + \frac{a \ln^2 a}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{a \ln^n a}{n!}(x-1)^n$$

2. Dokazati da je za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$$

Taylorov polinom proizvoljnog stepena u $x=0$ identički jednak 0.

* Za $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

a za $x=0$ po definiciji

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

tako da je:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$$

Analogno,

$$f''(x) = \begin{cases} -\left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$$

gdje je $P\left(\frac{1}{x}\right)$ polinom po $\frac{1}{x}$.

Odavdje slijedi: $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)\equiv 0$

pa je i $T_n(0)\equiv 0$ š t.d.

3. Razviti $f(x)=e^x$ u Maclaurinov red.

* $f^{(n)}(x)=e^x$

$f^{(n)}(0)=1$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}$$ , ostatak u Lagrangeovom obliku

4. Razviti $f(x)=\sin x$ u Maclaurinov red

* $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$

Za $n=2k+1$:

$f^{(2k+1)}(0)=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^k$

Za $n=2k$:

$f^{(2k)}(0)=\sin k\pi=0$

Slijedi:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\underbrace{\frac{(-1)^k x^{2k+1}\cos(\theta x)}{(2k+1)!}}_{R_n(x)}$$

Ostatak u Lagrangeovom obliku:

$$R_n(x)=\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{2k+1}{2}\pi\right)=\frac{(-1)^k x^{2k+1}\cos(\theta k)}{(2k+1)!}$$

5. Razviti u Maclaurinov red $f(x) = \cos x$

* $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ (*)

$f^{(2k)}(0) = \cos k\pi = (-1)^k$

$f^{(2k+1)}(0) = 0$

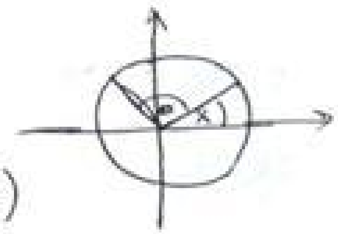
pa slijedi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2} \cos(\theta x)}{(2k+2)!}$$

(*): $f'(x) = -\sin x = \sin(-x)$

$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + \pi)$



$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Analogno zaključivati i u prethodnom zadatku.

6. Razviti u Maclaurinov red $f(x) = \ln(1+x)$

* $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$R_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$ ; $0 < \theta < 1$

u Lagrangeovom obliku

ili $R_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ ; $0 < \theta < 1$

u Cauchyevom obliku

## * Primjena Taylorove formule

Taylorovim polinomom $T_n(x)$ može se vršiti lokalna aproksimacija funkcije u okolini $x=x_0$. Ovo pravo imamo na osnovu sljedeće teoreme:

**Th:** Ako funkcija $f(x)$ u tački $x=x_0$ ima konačan izvod $f^{(n)}(x_0)$ i ako je $Q(x)$ bilo kakav polinom čiji stepen nije veći od $n$, a koji je različit od Taylorovog polinoma $T_n(x)$ funkcije $f(x)$ u $x=x_0$, onda za dovoljno malu okolinu tačke $x=x_0$ vaźi nejednakost:

$$|f(x)-T_n(x)|<|f(x)-Q(x)| \quad , x\neq x_0 \qquad (*)$$

Geometrijski smisao ove teoreme je sljedeći: Ako posmatramo proizvoljnu parabolu

$$y=Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

$n$-tog stepena ili stepena nižeg od $n$, koja prolazi kroz tačku $(x_0, f(x_0))$ i parabolu koja odgovara $T_n(x)$:

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Tada iz $(*)$ zaključujemo da kriva $T_n(x)$ leži bliže grafiku $y=f(x)$ nego kriva $y=Q(x)$ tj. Taylorov polinom je najbolja aproksimacija funkcije.

Specijalno, $y=T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ izražava poznatu osobinu diferencijala tj. lokalnu aproksimaciju luka grafika funkcije $y=f(x)$ segmentom njene tangente u tački $M(x_0, f(x_0))$

Za $x=0$: $\quad y\approx f(0)+f'(0)\cdot x$ za aproksimaciju, uz uslov $f'(0)\neq 0$ naziva se Lagrangeovom aproksimacionom formulom.

7. Procijeniti ostatak razvoja $f=e^x$ u Maclaurinov red.

*
$$R_n(x) = \frac{x^{n+1} \cdot e^{\Theta x}}{(n+1)!} \quad ; \quad 0<\Theta<1$$

Majoriranjem slijedi:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1} e^{\Theta x}}{(n+1)!} \right| < e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

za proizvoljno $x$: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

To znači da postoji vrijednost za $n$ takva da je:

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

Uzmimo $\varepsilon = 10^{-3}$, na segmentu $[-1, 1]$, važi da:

$$|e^{\Theta x}| < e^x \leq e < 3$$

i

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

Za $n=6$ je $\quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$

tj.

$$|R_6(x)| < \frac{3}{5040} < \frac{1}{1000} \Rightarrow T_6(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^6}{6!}$$

aproksimira funkciju sa tačnošću $10^{-3}$ tj. na 3. decimalu.