(1.) $(f_{a,b} : 0 < b < a \,;\ a, b \in \mathbb{R})$ I

$$f_{a,b}(x) = \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{\sin ax + \sin bx}$$

1. NE

(Drugačiji je ove školske godine!)

a) $D(f_{a,b})$

$\sin ax + \sin bx \neq 0$

$2 \sin \frac{a+b}{2} x \cos \frac{a-b}{2} x \neq 0$

$\sin \frac{a+b}{2} x \neq 0$

$\frac{a+b}{2} x \neq k\pi$

$x \neq \frac{2k\pi}{a+b} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\cos \frac{a-b}{2} x \neq 0$

$\frac{a-b}{2} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(a-b)x \neq \pi + 2k\pi$

$x \neq \frac{\pi(2k+1)}{a-b}$

$D(f_{a,b}) : x \in \mathbb{R} / \left\{ \frac{2k\pi}{a+b}, \frac{(2k+1)\pi}{a-b} \right\}$

$k \in \mathbb{Z}$

Što se tiče limesa $\lim_{x\to\pm\infty} f_{a,b}(x)$;
o njemu se ne može govoriti
jer nazivnik mijenja znak.

$$\lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}} f_{a,b}(x)=\lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}} \frac{e^{\frac{-2ak\pi}{a+b}}-e^{\frac{2bk\pi}{a+b}}}{2\sin k\pi \cos\frac{a-b}{a+b}k\pi}$$

1° $k>0$
brojnik negativan

$$\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi>0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(4t-1)}{4(a+b)}<k<\frac{(a-b)(1+4t)}{4(a+b)}$$
$t\in\mathbb{Z}$

U zavisnosti od toga
je x teži ka $\frac{2k\pi}{a+b}$ slijeva ili
s desna, dobijamo $+\infty$ ili $-\infty$.

2° $k<0$ — isto kao 1° - brojnik je
pozitivan

Što se tiče limesa
$\lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{a-b}} f_{a,b}(x)$ imamo ~~isto~~
razmatranje kao
u prethodnom slučaju
s tim do sad na znak utiče
znak od $\sin\left(\frac{a+b}{a-b}(2k+1)\pi\right)$

$$\sin\left(\frac{a+b}{a-b}(2k+1)\pi\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{a+b-2t(a-b)}{2(a+b)}<k<\frac{at-bt-b}{a+b} \quad t\in\mathbb{Z}$$

1. potražimo sada $\lim_{x\to 0} f_{a,b}(x)$ koji je specijalan

slučaj $\lim_{x\to \frac{2k\pi}{a+b}} f_{a,b}(x)$, značI za $k=0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{\sin ax+\sin bx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}(1-e^{ax+bx})}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-ax}\left(e^{\frac{a+b}{2}x}-1\right)\left(e^{\frac{a+b}{2}x}+1\right)}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\underbrace{e^{-ax}}_{\to 1}\underbrace{\left(e^{\frac{a+b}{2}x}+1\right)}_{\to 1}}{2\underbrace{\cos\frac{a-b}{2}x}_{\to 1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{a+b}{2}x}-1}{\sin\frac{a+b}{2}x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{\frac{a+b}{2}x}-1}{\frac{a+b}{2}x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{a+b}{2}x}{\sin\frac{a+b}{2}x}}_{\to 1}$$

$$= \underline{-1}$$

koristili smo limese

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

Sada vidimo da je $x=0$ tačka otklonjivog prekida, jer u njoj postoji limes $f_{a,b}(x)$ ali ne i $f_{a,b}(x)$

$$\tilde{f}=\begin{cases} f & x\neq 0 \\ -1 & x=0 \end{cases}$$

U ostalim tačkama prekida je limes $\pm\infty$, pa je to prekid druge vrste.

„JMB" $f_{k,1}$ $k=47$

Funkcija $f_{47,1}$ ima prekide u $x=\frac{2k\pi}{48}$ i $x=\frac{(2k+1)\pi}{46}$ $k\in\mathbb{Z}$.

O prekidima i nj. klasifikaciji smo već govorili ~~kod~~ kad smo razmatrali formulu

$f_{a,b}(x)$.

(2.) a) $\underbrace{\arcsin x + \arccos x}_{M(x)} = \frac{\pi}{2}$ 2. a)

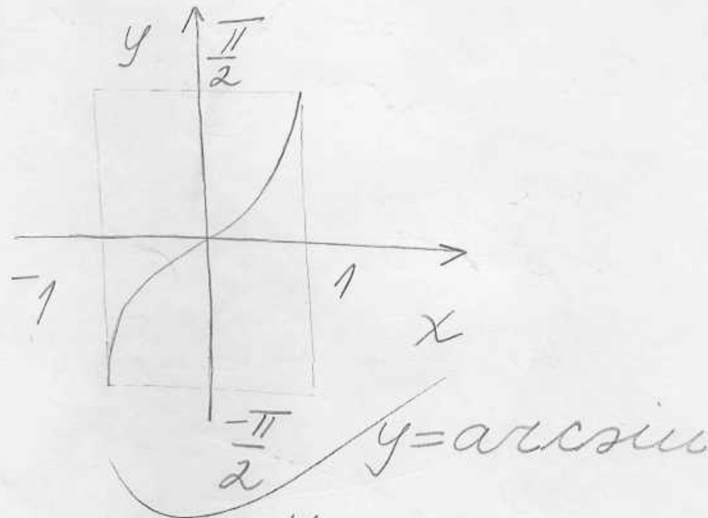
$x \in [-1, 1]$

$M(x) = \arcsin x + \arccos x$, $(x \in [-1, 1])$

$M'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ za $|x| < 1$, tj. $x \in (-1, 1)$

$M'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in (-1,1)$ $M(x) = C = const$ za $\forall x \in (-1, 1)$

na osnovu posljedice Langražeove teoreme



Za $x = \frac{1}{2}$ je

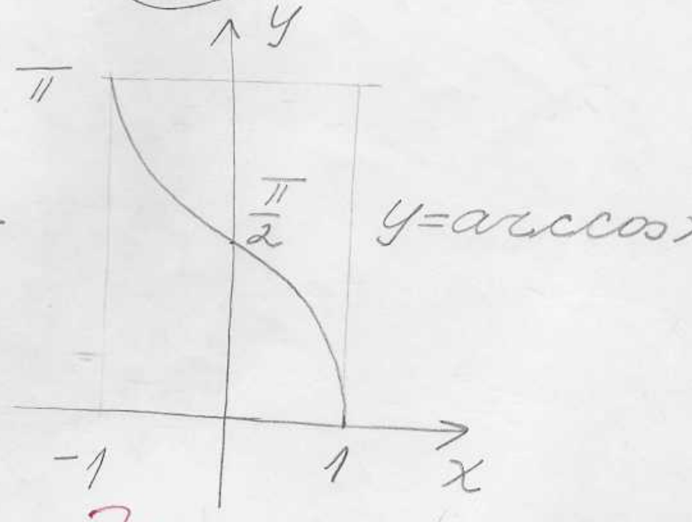
$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ +

$\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} =$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{M(x) = \frac{\pi}{2}}$ $\forall x \in (-1, 1)$



Za $x = 1$ je

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$\arccos 1 = 0$ +

$M(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$

Za $x = -1$ je

$\arcsin(-1) = \frac{-\pi}{2}$

$\arccos(-1) = \pi$ +

$M(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = \frac{\pi}{2}$.

q.e.d

б) $\underbrace{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}_{A(x)} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0; \\ -\frac{\pi}{2} & x<0; \end{cases}$

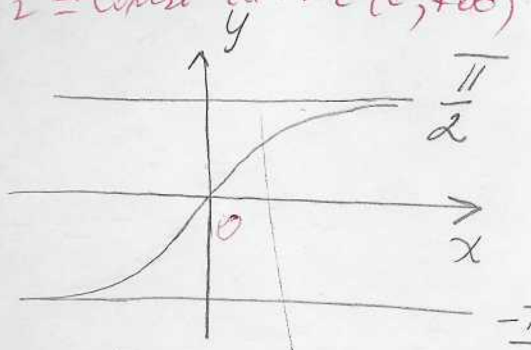
$A(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

$A'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$A'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\cancel{x^2}}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \cancel{\frac{1}{1+x^2}} = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

$A'(x) = 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow$ $A(x) = C_1 = const$ za $\forall x \in (-\infty, 0)$

i $A(x) = C_2 = const$ za $\forall x \in (0, +\infty)$



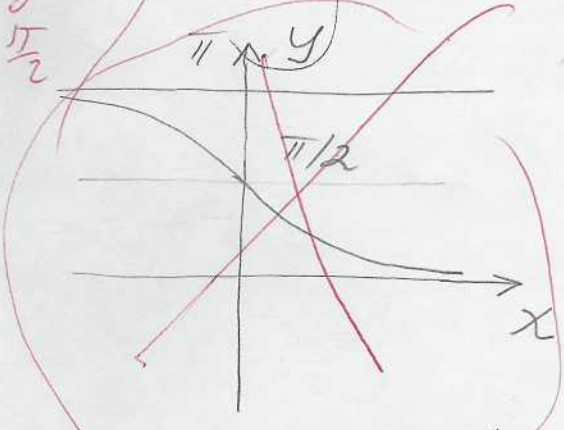
Za $x>0$, zamjenom $\boxed{x=1}$, dobijemo

$C_2 = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1$

$C_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, ~~$(\forall x>0)$~~

$\cancel{\boxed{x>0 \quad A(x) = \frac{\pi}{2}}}$

tj. $A(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ za $\forall x>0$.



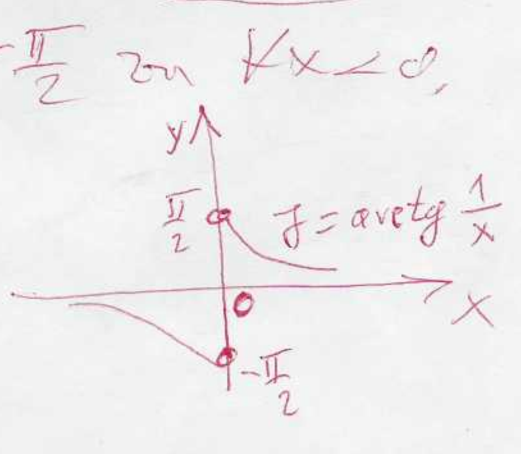
Za $x<0$, zamjenom $x=-1$, dobijemo

$C_1 = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1)$

$C_1 = -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$,

pa je $A(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ za $\forall x<0$.

$\cancel{\boxed{x<0 \quad A = -\frac{\pi}{2}}}$



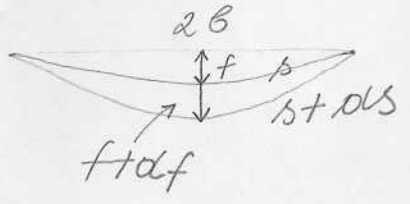
q.e.d

3. a) 3, a) $s = 2b\left(1+\frac{2f^2}{3b^2}\right)$

$$\frac{s}{2b} = 1 + \frac{2f^2}{3b^2} \Rightarrow \frac{2f^2}{3b^2} = \frac{s}{2b} - 1$$

$$2f^2 = \frac{s\cdot 3b^2}{2b} - 3b^2$$

$$2f^2 = \frac{3sb}{2} - 3b^2$$



$$f^2 = \frac{3sb}{4} - \frac{3b^2}{2}$$

$$2f\,df = \frac{3b}{4}ds$$

$$\boxed{df = \frac{3b\,ds}{8f}}$$

b) ~~b)~~ $Q = 8t^2 - 5t + 1$

~~$t = 5\,s$~~ $t = k\ [s]$

~~JMBG =~~

JMBG =

k = zbir svih cifara JMBG

=

$$J = \frac{dQ}{dt}$$

$$dQ = (16t-5)\,dt \ /: dt$$

$$\frac{dQ}{dt} = (16t-5)$$

$$J = 16t - 5$$

$$J = 16\cdot \overset{k}{\cancel{5}} - 5 = \cancel{5(16-1) = 75\,A}$$

~~$k =$~~ $= \dots\ [A]$

④ a) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4} \Big/ \ln$ $\quad 1-3x\neq 0$, $x\neq\frac{1}{3}$, $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

I

$$\ln|f(x)|=\underbrace{\ln|x+1|^{\frac{1}{3}}}_{\frac{1}{3}\ln|x+1|}-\underbrace{\ln(1-3x)^4}_{-4\ln|1-3x|} \Big/ '$$

$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-4\cdot\frac{1}{1-3x}(-3),$$

$\{$jer je $(\ln|g(x)|)'=\frac{g'(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ $(x\in D(f))$

$$\boxed{f'(x)=f(x)\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{12}{1-3x}\right]}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{12}{1-3x}\right]}$$

$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\frac{1}{3}\})$

$f'(-1):=\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{(1-3x)^4\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}=+\infty$

б) $f(x)=\sqrt{(x^2+1)(x^2+x+2)} \Big/ \ln$

$\boxed{D=-4<0}$ $\quad D=1-8=-7<0$ $\quad (D(f)=\mathbb{R})$

$$\ln f(x)=\ln\left[(x^2+1)(x^2+x+2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)+\ln(x^2+x+2)\right] \Big/ '$$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x+\frac{1}{x^2+x+2}\cdot 2x+1\right]$$

$$f'(x)=\frac{f(x)}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+2}\right]$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{(x^2+1)(x^2+x+2)}}{2}}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right],\ (\forall x\in\mathbb{R}).$$

2

$\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$

$\cancel{c)}$ $f(x)=\dfrac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{(x^2+2x-3)^2}$ / ln $1-2x\geq 0$

$2x\leq 1$

$\boxed{x\leq \frac{1}{2}}$

$\ln f(x)=\ln e^{-3x}+\ln\sqrt{1-2x}-\ln(x^2+2x-3)^2$

$x^2+2x-3\neq 0$

$x^2+3x-x-3\neq 0$

$(x+3)(x-1)\neq 0$

$\boxed{x\neq -3 \wedge x\neq 1}$

$x\in(-\infty,-3)\cup(-3,\frac{1}{2}]$

$\ln f(x)=-3x+\frac{1}{2}\ln(1-2x)-2\ln(x^2+2x-3)$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=-3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2x}(-2)-2\cdot\frac{1}{x^2+2x-3}\cdot 2x+2$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=-3-\frac{1}{1-2x}-\frac{4(x+1)}{x^2+2x-3}$

$f'(x)=f(x)\cdot\left[-3-\frac{1}{1-2x}-\frac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]$

$\boxed{f'(x)=\frac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{(x^2+2x-3)^2}\cdot\left[-3-\frac{1}{1-2x}-\frac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]}$

d) $f(x)=x^{2x+1}$ / ln $(x>0)$

$\ln f(x)=(2x+1)\ln x$ /'

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=2\ln x+(2x+1)\frac{1}{x}$

$f'(x)=f(x)\cdot\left[2\ln x+\frac{2x+1}{x}\right]$

$\boxed{f'(x)=x^{2x+1}\left[2\ln x+\frac{2x+1}{x}\right]}$

4. e) $f(x)=(\ln\sqrt{x})^x \quad (x>0)$

$f(x)=(\ln\sqrt{x})^x \;/\ln$

$\ln f(x)= x\ln(\ln\sqrt{x}) \;/'$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln(\ln\sqrt{x})+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}}$

$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln(\ln\sqrt{x})+\frac{1}{2\ln\sqrt{x}}\right]$

$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln(\ln\sqrt{x})+\frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\ln x}\right]$

$f'(x)=f(x)\cdot\left[\frac{1}{\ln x}+\ln(\ln\sqrt{x})\right]$

$\boxed{f'(x)=(\ln\sqrt{x})^x\left[\frac{1}{\ln x}+\ln(\ln\sqrt{x})\right]}$

f) $f(x)=\begin{cases}(x-2)\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2} & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$

$f(x)=(x-2)\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2} \;/\ln$

$\ln f(x)=\ln(x-2)+\ln\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{(x-2)^2}}\cdot\frac{(-1)}{(x-2)^2}$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{\cancel{(x-2)^2}}{x^2-4x+5}\cdot\frac{(-1)}{\cancel{(x-2)^2}}$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x^2-4x+5)\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}}$

f) $f'(x)=f(x)\cdot\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x^2-4x+5)\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}}\right]$

$$f'(x)=\cancel{(x-2)}\cdot \mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{\cancel{x-2}} - (x-2)\,\cancel{\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{1}{(x^2-4x+5)\,\cancel{\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}}}$$

$$\boxed{f'(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2-4x+5}}$$

za $x\neq 2$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2_+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2_+}\frac{\cancel{(x-2)}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}}{\cancel{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2_+}\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}=$$

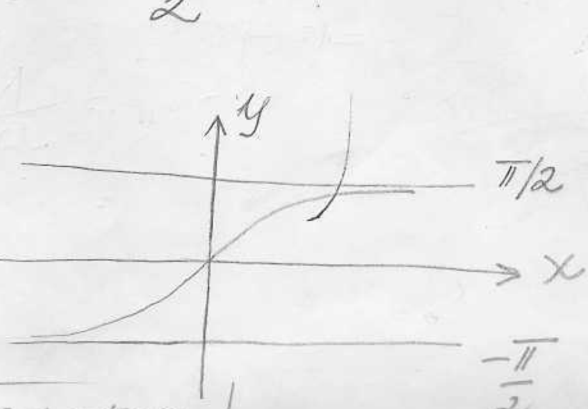
$$=\mathrm{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2_-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2_-}\mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}=$$

$$\mathrm{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2)$

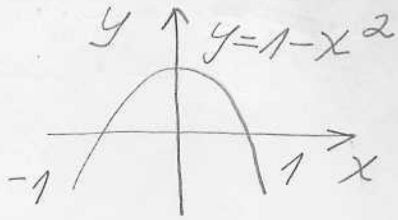
$f'(2)$ ne postoji



$y=\mathrm{arctg}\,x$

g) $f(x)=\frac{(x^2-2x-15)e^x}{|1-x^2|}$ $\quad x\neq\pm1$ $\qquad$ III

4



$x\in(-1,1)$

$f(x)=\frac{(x^2-2x-15)e^x}{1-x^2}$ $/\ln$

$\ln f(x)=\ln(x^2-2x-15)+\ln e^x-\ln(1-x^2)$

$\ln f(x)=\ln(x^2-2x-15)+x-\ln(1-x^2)$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2-2x-15}(2x-2)+1-\frac{1}{1-x^2}(-2x)$

$f'(x)=f(x)\cdot\left[\frac{2x-2}{x^2-2x-15}+1+\frac{2x}{1-x^2}\right]$

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$f(x)=\frac{(x^2-2x-15)e^x}{x^2-1}$ $/\ln$

$\ln f(x)=\ln(x^2-2x-15)+\ln e^x-\ln(x^2-1)$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2-2x-15}(2x-2)+1-\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x$

$f'(x)=f(x)\cdot\left[\frac{2x-2}{x^2-2x-15}+1+\frac{2x}{1-x^2}\right]$

$f'(x)=\frac{(x^2-2x-15)e^x}{|1-x^2|}\cdot\left[\frac{2x-2}{x^2-2x-15}+1+\frac{2x}{1-x^2}\right]$

3.

c) ~~b)~~ $f(x) = (\operatorname{arth} x)^{\operatorname{arcth}\frac{1}{x} + \operatorname{arch}\frac{1}{x}}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid |\frac{1}{x}| > 1,\ \frac{1}{x} \geq 1,\ 0 < x < 1$ ako se ograničimo na slučaj pozitivne baze$\} = (0,1)$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

[illegible]

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$$

$$\left(\operatorname{arcth}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \left(\text{za } \frac{1}{|x|} > 1, \text{ tj. za } |x| < 1\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{x^2-1}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$(\operatorname{arch} x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\left(\operatorname{arch}\frac{1}{x}\right)' = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}$ (za $0<x<1$)

$$\ln f(x) = \left(\operatorname{arcth}\frac{1}{x} + \operatorname{arch}\frac{1}{x}\right)\ln(\operatorname{arth} x)$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \left[\frac{1}{1-x^2} \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right]\ln(\operatorname{arth} x) +$$

$$\left(\operatorname{arcth}\frac{1}{x} + \operatorname{arch}\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{arth} x} \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = f(x)} \cdot \left\{\left[\frac{1}{1-x^2} \mp \frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}\right]\ln(\operatorname{arth} x) + \frac{1}{(1-x^2)\operatorname{arth} x}\left(\operatorname{arcth}\frac{1}{x} + \operatorname{arch}\frac{1}{x}\right)\right\}, \ (\forall x \in (0,1))$$

Skinuto sa www.etf.ba

Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Sarajevu

Predmet : Inženjerska Matematika 1

DOMAĆA ZADAĆA #3

R J E Š E NJ A Z A D A T A K A

Zad. 1. Data je realna funkcija f jedne realne promjenljive:

$$f(x) := \arcsin e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}} .$$

a) Nađite prirodni domen $D(f)$ i ispitajte ponašanje na rubu od $D(f)$ za datu funkciju f.
b) Nađite inverznu funkciju date funkcije f.

Rješenje zadatka 1 :

a) Odredimo prirodni domen funkcije $f(x) := \arcsin\left(e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}}\right)$.

Nazivnik razlomka u izrazu $\frac{x^3+4}{x^3-1}$ ne smije biti jednak 0 , tj. $x \neq 1$. *(1.1)*

Za sve ostale realne vrijednosti argumenta x funkcija $e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}}$ je definisana.
Međutim, argument realne funkcije arcsin mora primati vrijednosti sa segmenta $[-1,1]$, a izraz $e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}}$ je nenegativan, odakle slijedi da prirodni domen nalazimo rješavajući nejednačinu :

$$e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3+4}{x^3-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+\sqrt[3]{4})(x^2-\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{4^2})}{(x-1)(x^2+x+1)} \leq 0 . \quad (2.1)$$

Označimo sa D_1 i D_2 diskriminante izraza $(x^2-\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{4^2})$ i (x^2+x+1) , respektivno.
Vrijedi da je $D_1 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^2 - 4\sqrt[3]{4^2} = -3\sqrt[3]{16} < 0$ i $D_2 = 1-4 = -3 < 0$.
Kako su diskriminante posmatranih izraza negativne i kako su koeficienti uz najstarije članove pozitivni (jednaki jedan), to onda vrijedi da je $x^2-\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{4^2} > 0$ i $x^2+x+1 > 0$, za sve realne x .

Otuda slijedi da je $(2.1) \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt[3]{4}}{x-1} \leq 0$. *(3.1)*

Napravimo tabelu da determiniramo znak razlomka u izrazu *(3.1)* :

	$-\infty$ do $-\sqrt[3]{4}$	$-\sqrt[3]{4}$ do 1	1 do $+\infty$
$x+\sqrt[3]{4}$	-	+	+
$x-1$	-	-	+
	+	-	+

Iz prethodne tabele vidimo da je rješenje nejednačine *(3.1)* $\forall x \in \left[-\sqrt[3]{4},1\right)$. Otuda slijedi da je prirodni domen funkcije $f(x)$ dat sa $Dom(f)=\left[-\sqrt[3]{4},1\right)$. **0.2 boda**

Što se tiče ispitivanja ponašanja funkcije na rubovima *D(f)* , nema smisla tražiti lijevi limes u tački $-\sqrt[3]{4}$ i desni limes u tački 1.

Iz $\lim\limits_{x\to-\sqrt[3]{4}_+}\dfrac{x^3+4}{x^3-1}=0$ slijedi $\lim\limits_{x\to-\sqrt[3]{4}_+} f(x)=\arcsin e^0=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}=f(-\sqrt[3]{4})$. **0.05 bodova**

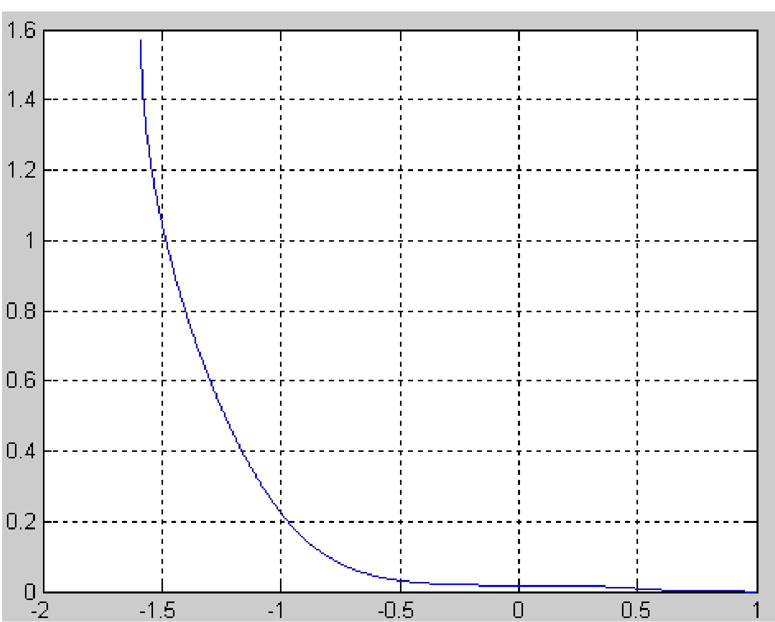
Iz $\lim\limits_{x\to 1_-}\dfrac{x^3+4}{x^3-1}=-\infty$ slijedi $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\arcsin e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}}=\arcsin 0=0$. **0.05 bodova**

Otuda slijedi da je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $-\sqrt[3]{4}$ pa je i ograničena u njenoj desnoj poluokolini, te da je ograničena u lijevoj poluokolini tačke 1.

Kako je funkcija $f(x)$ neprekidna i strogo opadajuća na $\left[-\sqrt[3]{4},1\right)$, vrijedi da je

$f(-\sqrt[3]{4})\geq f(x)>\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)$, odnosno rang funkcije $f(x)$ je $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Grafik funkcije na prirodnom domenu je prikazan kao dodatak na slijedećoj slici :



b) Pronađimo inverznu funkciju od f:

Ispitajmo prvo monotonost zadane funkcije, tj. pronađimo eventualne intervale na kojima je funkcija strogo monotona (rastuća ili opadajuća).

Napišimo zadanu funkciju u pogodnijem obliku : $f(x) = \arcsin\left(e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}}\right) = \arcsin\left(e^{1+\frac{5}{x^3-1}}\right)$.

Prvi način (kompozicija funkcija) :

Kako znamo da svaku složenu funkciju oblika $f(g(\ldots h(x)))$ možemo napisati kao :
$f(x)\ o\ g(x)\ o\ldots o\ h(x)$, to našu funkciju možemo predstaviti u obliku :

$$f(x) = \arcsin\left(e^{1+\frac{5}{x^3-1}}\right) = \left(\arcsin(x)\right) o \left(e^x\right) o (1+x) o \left(\frac{5}{x-1}\right) o \left(x^3\right).$$

Sada je jednostavnije ispitati monotonost :

$\arcsin(x)$	e^x	$(1+x)$	$\left(\frac{5}{x-1}\right)$	x^3	$f(x)$
$M\uparrow$	$M\uparrow$	$M\uparrow$	$M\downarrow$	$M\uparrow$	$M\downarrow$

Zaključak je da *f(x)* na svome domenu strogo opada.

Drugi način (koristeći monotonost elementarnih funkcija) :

x	x^3	(x^3-1)	$\left(\frac{5}{x^3-1}+1\right)$	$e^{\left(\frac{5}{x^3-1}+1\right)}$	$f(x) = \arcsin\left(e^{\left(\frac{5}{x^3-1}+1\right)}\right)$
$M\uparrow$	$M\uparrow$	$M\uparrow$	$M\downarrow$	$M\downarrow$	$M\downarrow$

Zaključak : *f(x)* je na svome domenu strogo opadajuća funkcija.

Iz neprekidnosti i monotonosti na $\left[-\sqrt[3]{4}, 1\right)$, slijedi da funkcija f ima inverznu funkciju.

0.05 bodova

Nađimo analitički oblik inverzne funkcije f^{-1}.
Imamo :

$$y = \arcsin e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}} \Leftrightarrow \left(\sin y = e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}}, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\sin y) = \frac{x^3+4}{x^3-1} = 1 + \frac{5}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 1 + \frac{5}{\ln(\sin y) - 1} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1 + \frac{5}{\ln(\sin y) - 1}} \quad ,$$

odakle slijedi da jednačina $y = f(x)$ ima jednoznačno rješenje po x dato sa :

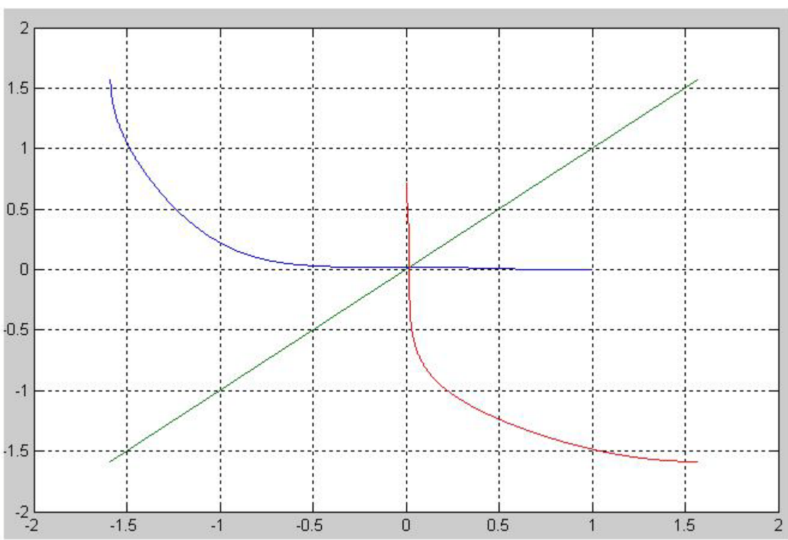
$$x = \sqrt[3]{1 + \frac{5}{\ln(\sin y) - 1}} \text{ za } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Odatle, transkripcijom $x \leftrightarrow y$, dobijemo analitički oblik funkcije $f^{-1}(x)$, koja je inverzna funkciji $f(x)$:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1 + \frac{5}{\ln(\sin x) - 1}} \quad \text{za } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

0.15 bodova

Grafik funkcije i njoj inverzne funkcije je prikazan na slijedećoj slici :



Inače se grafik inverzne funkcije, $f^{-1}(x)$, crta tako što se svaka tačka funkcije *f(x)* preslika simetrično u odnosu na pravu $y = x$.

Napomena : umjesto korištenja monotonosti, moglo se ispitati da li je funkcija f bijektivna, a tek onda da se traži analitički oblik inverzne funkcije f^{-1}.
Također, mogla se koristiti i činjenica da ako se jednačina $y = f(x)$ može riješiti po x jednoznačno, onda funkcija $f(x)$ ima inverznu funkciju, $f^{-1}(x)$.

Zad. 2. Izračunajte sljedeće limese funkcije:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+\sqrt{x^2-x+2})$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^x$, $(a,b\in\mathbf{R})$.

Rješenje zadatka 2 :

a) Pronađimo prvo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x+2}\right)$. Očigledno je da kad $x\to+\infty$ i potkorijeni izraz, pa i sam korijen, teži ka $+\infty$. Odatle slijedi da je dati limes jednak $+\infty$.

U drugom slučaju, kada $x\to-\infty$, potkorijeni izraz, pa i sam korijen, teži opet ka $+\infty$. Međutim, sada imamo slučaj *(-∞ +∞)* što je neodređeno, tj. prividno neodređen oblik, pa moramo promijeniti pristup pri rješavanju posmatranog problema.
Prvo ćemo koristiti smjenu $y=-x$ i racionalizirati izraz pod znakom limesa :

$$-y+\sqrt{y^2+y+2}=(-y+\sqrt{y^2+y+2})\frac{-y-\sqrt{y^2+y+2}}{-y-\sqrt{y^2+y+2}}=$$

$$=\frac{y+2}{y+\sqrt{y^2+y+2}}\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}=\frac{1+\frac{2}{y}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}}}$$

Kako znamo da kad $x\to-\infty$,onda $y\to+\infty$, $\frac{1}{y}\to 0$, odakle je :

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-x+2}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{y}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}}}=\frac{1+0}{1+\sqrt{1+0+0}}=\frac{1}{2}\ .$$

0.25 bodova

b) Ukoliko vrijedi da je $a=b$ (pa čak i kada je jednako nuli) tada imamo :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}(1)^x=1\,.$$

0.05 bodova

Treba obratiti pažnju, jer izraz pod limesom je identički jednak 1 , što treba razlikovati od slučaja P.N.O. (tip2) 1^∞ .

U slučaju da je $a\neq b$, da bismo odredili $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^x$, uvedimo smjenu $x=y-b$.

Otuda $y\to\infty$ kada $x\to\infty$, $(a,b\in\mathrm{R})$.

Sada imamo : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+a-b}{y}\right)^{y-b} = \frac{\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{y}\right)^{y}}{\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{y}\right)^{b}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{y}\right)^{y}$.

Znajući da je $\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$, imamo da je $\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{y}\right)^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a-b}{y}\right)^{\frac{y}{a-b}(a-b)} = e^{a-b}$

<u>0.2 bodova</u>

Zad. 3. Data je familija ($f_\alpha : \alpha \geq 0$) realnih funkcija jedne realne varijable, gdje je

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\alpha}|x| - \alpha, & |x| \leq \sqrt{\alpha}, \\ 2x^2 - x^4, & |x| > \sqrt{\alpha}. \end{cases}$$

Ispitajte neprekidnost i klasificirajte eventualne tačke prekida i singulariteta svake od funkcija f_α (iz date familije) i funkcija

$$g_\alpha(x) := \left(\frac{1}{f_\alpha(x)}\right)^p$$

ako je *p* zbir svih cifara vašeg JMB.

Rješenje zadatka 3 :

a) Svaka od funkcija $f_\alpha(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\alpha}|x| - \alpha, |x| \leq \sqrt{\alpha} \\ 2x^2 - x^4, |x| > \sqrt{\alpha} \end{cases} (\alpha \geq 0)$, je definirana na $\mathbb{R}$, a neprekidna $\forall x \in D(f_\alpha)$, gdje je $D(f_\alpha) = (-\infty, -\sqrt{\alpha}) \cup (-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}) \cup (\sqrt{\alpha}, +\infty)$.

Sada ispitajmo ponašanje funkcije u lijevoj i desnoj okolini tačaka $-\sqrt{\alpha}$ i $\sqrt{\alpha}$:

$$\lim_{x\to-\sqrt{\alpha}_-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to\sqrt{\alpha}_+} f_\alpha(x) = 2\alpha - \alpha^2,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{\alpha}_+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to\sqrt{\alpha}_-} f_\alpha(x) = f_\alpha(-\sqrt{\alpha}) = \alpha.$$

<u>0.1 bod</u>

Da bi funkcija f_α bila neprekidna u tačkama $-\sqrt{\alpha}$ i $\sqrt{\alpha}$, mora vrijediti da je

$$\lim_{x\to-\sqrt{\alpha}_-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to-\sqrt{\alpha}_+} f_\alpha(x) = f_\alpha(-\sqrt{\alpha}) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\sqrt{\alpha}_-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to\sqrt{\alpha}_+} f_\alpha(x) = f_\alpha(\sqrt{\alpha}),$$

što je ekvivalentno sa :

$\alpha = 2\alpha - \alpha^2$

$\alpha(\alpha - 1) = 0$

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$

Svaka od funkcija $f_\alpha(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{0,1\}$, ima prekid prve vrste (lijevi i desni limes su konačni, ali međusobno različiti) i on je neotklonjiv. Za $\alpha = 0$ i za $\alpha = 1$ je funkcija $f_\alpha(x)$ neprekidna. Od cijele familije funkcija $f_\alpha(x)$ jedino su $f_0(x)$ i $f_1(x)$ neprekidne. **<u>0.05 bodova</u>**

Potražimo još limes funkcije kada pustimo da $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x^2 - x^4\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2(2 - x^2)\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x^2 - x^4\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2(2 - x^2)\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

Očigledno je da funkcija f_α nema prekida druge vrste, niti singularnih tačaka.

b) Sada posmatramo familiju funkcija $g_\alpha(x) := \left(\dfrac{1}{f_\alpha(x)}\right)^p$, $(\alpha \geq 0)$, gdje je p zbir cifara vašeg JMBG.

Očigledno je da je p prirodan broj veći od jedan i jedino što će biti relevantno u vezi njega, u diskusiji koja slijedi, jeste upravo da li je p paran ili neparan.

Svaka od funkcija $g_\alpha(x)$ je neprekidna u svim tačkama $x \in \mathbf{R}$ u kojima je f_α neprekidna i $f_\alpha(x) \neq 0$, tj. na skupu $D(g_\alpha) = D(f_\alpha) \cap \{x \in \mathbf{R} : f_\alpha(x) \neq 0\}$.

Riješimo jednačinu $f_\alpha(x) = 0$.

Za $|x| \leq \sqrt{\alpha}$ je : $f_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}\,|x| - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}$, a ove tačke zadovoljavaju uslov $|x| \leq \sqrt{\alpha}$.

Za $|x| > \sqrt{\alpha}$ je : $f_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0, x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

Rješenje $x = 0$, jednačine $f_\alpha(x) = 0$ ne zadovoljava uslov $|x| > \sqrt{\alpha}$, jer je $\alpha \geq 0$, pa nam ostaje samo $x = \pm\sqrt{2}$ i to samo u slučaju da vrijedi $\alpha < 2$.

Odredimo sada limese u tačkama $x = \pm\sqrt{\alpha}$:

$$L_1(\alpha) = \lim_{x \to -\sqrt{\alpha}_-} g_\alpha(x) = \lim_{x \to \sqrt{\alpha}_+} g_\alpha(x) = \lim_{x \to \sqrt{\alpha}_+} \left(\frac{1}{2x^2 - x^4}\right)^p = \left(\frac{1}{2\alpha - \alpha^2}\right)^p, \text{ za } 2\alpha - \alpha^2 \neq 0,$$

$$L_2(\alpha) = \lim_{x \to -\sqrt{\alpha}_+} g_\alpha(x) = \lim_{x \to \sqrt{\alpha}_-} g_\alpha(x) = \lim_{x \to \sqrt{\alpha}_-} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}\,|x| - \alpha}\right)^p = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^p, \text{ za } \alpha \neq 0.$$

0.05 bodova

Odredimo limese i u tačkama $x = \pm\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}$:

$$L_3(\alpha) = \lim_{x \to -\frac{\sqrt{\alpha}}{2}_+} g(x) = \lim_{x \to \frac{\sqrt{\alpha}}{2}_-} g(x) = \lim_{x \to \frac{\sqrt{\alpha}}{2}_-} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}\,|x| - \alpha}\right)^p = \begin{cases} -\infty, & p - neparno \\ +\infty, & p - parno \end{cases}$$

$$, \alpha \neq 0.$$

$$L_4(\alpha) = \lim_{x \to -\frac{\sqrt{\alpha}}{2}_-} g(x) = \lim_{x \to \frac{\sqrt{\alpha}}{2}_+} g(x) = \lim_{x \to \frac{\sqrt{\alpha}}{2}_+} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}\,|x| - \alpha}\right)^p = +\infty$$

0.05 bodova

Potražimo još dodatno limes funkcije kada pustimo da $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} g_\alpha(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2x^2 - x^4}\right)^p = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2(2 - x^2)}\right)^p = \left(\frac{1}{-\infty}\right)^p = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g_\alpha(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x^2-x^4}\right)^p=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2(2-x^2)}\right)^p=\left(\frac{1}{-\infty}\right)^p=0$$

Nadalje diskutujemo neprekidnost funkcija $g_\alpha(x)$.

Posmatrajmo $x=\pm\sqrt{\alpha}$, za $\alpha\neq 0$. Kada su $L_1(\alpha)$ i $L_2(\alpha)$ različiti i konačni, funkcija ima prekid prve vrste, a kada je barem jedan beskonačan (ili ne postoji), funkcija ima prekid druge vrste.

Za $\alpha=0$ imamo da je :

$f_0(x)=\begin{cases}0, x=0\\ 2x^2-x^4, |x|>0\end{cases}$, i kako je $g_\alpha(x):=\left(\frac{1}{f_\alpha(x)}\right)^p$ vidimo da $g_0(x)$ nije definisana u nuli.

Tada je $L_1(0)=L_2(0)=+\infty$, pa je $x=0$ njena singularna tačka (tačka gomilanja domena funkcije koja mu ne pripada) tipa pola .

U tačkama $x=\pm\sqrt{2}$ važi :

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}_-} g_0(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}_+} g(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}_+}\left(\frac{1}{2x^2-x^4}\right)^p=\begin{cases}-\infty, p-neparno,\\ +\infty, p-parno,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}_+} g_0(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}_-} g(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}_-}\left(\frac{1}{2x^2-x^4}\right)^p=+\infty.$$

Tačke $x=\pm\sqrt{2}$ predstavljaju singularne tačke tipa pola ako je p paran broj i esencijalne singularitete druge vrste ako je p neparan broj (esencijalna singularna tačka druge vrste je tačka gomilanja domena funkcije koja mu ne pripada, a lijevi i desni limesi su beskonačni, međusobno različiti, ili bar jedan od njih ne postoji).

0.05 bodova

Za $\alpha\in(0,2)\setminus\{1\}$ u tačkama $x=\pm\sqrt{\alpha}$ funkcija $g_\alpha(x)$ ima neotklonjivi prekid prve vrste, a tačke $x=\pm\sqrt{2}$ predstavljaju singularne tačke (što je već razmotreno u prethodnom slučaju).

Tačke $x=\pm\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$ su singularne tipa pola za ako je p parno $(L_3=L_4=+\infty)$, a esencijalni singularitet druge vrste ako je p neparno $(L_3=-\infty, L_4=+\infty)$.

0.05 bodova

Za $\alpha=1$, u tačkama $x=\pm\sqrt{\alpha}=\pm1$ limesi L_1 i L_2 su konačni, međusobno jednaki i jednaki vrijednosti funkcije u tim tačkama, pa je u tim tačkama funkcija neprekidna. Tačka $x=\pm\sqrt{2}$ predstavlja singularnu tačku (što je već razmotreno).

Tačke $x = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \pm\frac{1}{2}$ su singulariteti i to polovi ako je p parno $\left(L_3 = L_4 = +\infty\right)$, a esencijalni singulariteti ako je p neparno $\left(L_3 = -\infty, L_4 = +\infty\right)$.

<u>0.05 bodova</u>

Za $\alpha = 2$, tačke $x = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ su singulariteti (što je već razmotreno).

U tačkama $x = \pm\sqrt{\alpha} = \pm\sqrt{2}$ vrijedi da je $L_1 = \begin{cases} -\infty, p - neparno, \\ +\infty, p - parno, \end{cases}$ $L_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^p$, , pa funkcija g_α ima prekid druge vrste (o prekidu govorimo samo u slučaju da tačka pripada domenu funkcije, a ako to nije slučaj onda govorimo o singularitetu).

<u>0.05 bodova</u>

Za $\alpha > 2$, tačke $x = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ su singulariteti (što je već razmotreno), a u tačkama $x = \pm\sqrt{\alpha}$ funkcija g_α ima prekid prve vrste.

<u>0.05 bodova</u>

Zad. 4. Neka je funkcija *f* iz **R** u **R** definisana sa

$$f(x)=\frac{(x^2-2x-15)e^x}{\left|1-x^2\right|}.$$

a) Odredite prirodni domen Dom(*f*), eventualne presjeke grafika G(*f*) sa koordinatnim osama Dekartovog koordinatnog sistema, eventualne asimptote i sliku Im(*f*).
b) Ispitajte znak i ograničenost date funkcije.
c) Izračunajte izvode *f* ' (*x*) i *f* '' (*x*), a zatim odredite eventualne ugaone (prelomne) tačke i povratne tačke (šiljke) grafika date funkcije.
d) Skicirajte grafik date funkcije *f*.
e) Ispitajte da li su ispunjeni svi uslovi *Rolleove teoreme* za datu funkciju *f* na segmentu [-3,5].

Rješenje zadatka 4 :

a) Odredimo prirodni domen funkcije *f(x)* .

Funkcije $x^2-2x-15$ i e^x su definisane za svaki realan broj x,
a funkcija $\frac{1}{\left|x^2-1\right|}$ je definisana $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, pa je :

$$Dom(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Kako $0\in Dom(f)$, to postoji presjek grafika funkcije $f(x)$ sa *y-osom* dat sa :

$$f(0)=\frac{0-0-15}{\left|1-0\right|}e^0=-15.$$

Presjek sa *x-osom* (ako postoji) se dobiva rješavanjem jednačine $f(x)=0$:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2-2x-15}{\left|1-x^2\right|}e^x=0\right)\Leftrightarrow\left(x^2-2x-15=0\right)$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=1\pm4$$

Dakle, presjeci funkcije $f(x)$ sa *x-osom* (nule funkcije) postoje i imaju apscise -3 i 5, respektivno.

Ispitajmo ponašanje funkcije $f(x)$ na krajevima pojedinih intervala koji čine domen , odnosno pronađimo limese u slučajevima kada $x\to\pm\infty$ i kada $x\to\pm1$:

$$\lim_{x\to-1_-}f(x)=\lim_{x\to-1_+}f(x)=\frac{-12e^{-1}}{0_+}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1_-}f(x)=\lim_{x\to1_+}f(x)=\frac{-16e}{0_+}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-15}{x^2-1}\right)\left(\lim_{x\to+\infty} e^x\right) = (1)(+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-15}{x^2-1}\right)\left(\lim_{x\to-\infty} e^x\right) = (1)(0_+) = 0_+ \quad .$$

Vidimo da su prave $x=-1$ i $x=1$ vertikalne asimptote funkcije (limes funkcije u konačnoj tački je beskonačan) , dok su tačke $x=\pm 1$ singulariteti tipa pola.

Kada $x\to+\infty$ horizontalna asimptota ne postoji, ali je moguća kosa asimptota.

Kada $x\to-\infty$ vidimo da je prava $y=0$ horizontalna asimptota funkcije $f(x)$ i funkcija joj se približava sa gornje strane.

Provjerimo još postoji li kosa asimptota u slučaju kada $x\to+\infty$. U slučaju kada bi ona postojala, imala bi oblik $y=kx+n$ (jer je kosa asimptota prava linija), gdje za k i n vrijedi da su realni i konačni, te da je $k\neq 0$. Imamo :

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-15}{x^2-1}\right)\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\right) = (1)(+\infty) = +\infty .$$

S obzirom da smo dobili da je $k=+\infty$, kosa asimptota ne postoji kada $x\to+\infty$.

Specijalno : za x □ , vrijedi da je $0<\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}<1$, odakle slijedi da se naša funkcija asimptotski približava funkciji e^x i to sa donje strane.

Da bismo odredili sliku funkcije Im(*f*) , moramo odrediti na koji podskup skupa realnih brojeva naša funkcija preslikava domen.

Posmatrajmo interval $(1,+\infty)$. Vrijedi da je : $\begin{matrix} x\to 1_+ \Rightarrow f(x)\to-\infty \\ x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to+\infty \end{matrix}$.

Tada je $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}e^x$. Posmatrajmo izraz $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}$.

Pošto je $\left(\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}\right)' = 2\dfrac{x^2+14x+1}{\left(x^2-1\right)^2}>0$, to je $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}$ monotono rastuća funkcija na $(1,+\infty)$. Kako je još i e^x monotono rastuća na $(1,+\infty)$ (pa i na $(-\infty,+\infty)$), to je onda i *f(x)* monotono rastuća funkcija na $(1,+\infty)$ i na osnovu toga vrijedi da je :

$-\infty = \lim_{x\to 1_+} f(x) < f(x) < \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, za svaki $x\in(1,+\infty)$.

Kako je još funkcija neprekidna na $(1,+\infty)$, to ona prima sve vrijednosti sa skupa realnih brojeva, tj. $\mathrm{Im}(f)=\mathbf{R}$.

0.1 bod

b) Kako vrijedi da je : $\left(e^x > 0\left(\forall x \in \mathrm{R}\right)\right) \wedge \left(\dfrac{1}{\left|x^2-1\right|} > 0 \quad \left(\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}\right)\right)$,

to je znak funkcije determiniran znakom izraza : $\left(x^2-2x-15\right)$.

Riješimo jednačinu $x^2-2x-15=0$:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4(-15)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}.$$

Rješenja ove kvadratne jednačine su data sa : $x_{1,2} = 1 \pm 4$.

Vrijedi da je :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-15>0\right) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (5,+\infty),$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-15<0\right) \Leftrightarrow x \in (-3,-1) \cup (-1,1) \cup (1,5).$$

Funkcija nije ograničena ni sa lijeve, ni sa desne strane jer vrijedi da je $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}$.

<u>**0.1 bod**</u>

c) Funkciju *f(x)* možemo prikazati na slijedeći način : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}e^x, |x|>1 \\ -\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}e^x, |x|<1 \end{cases}$.

Ako sa *g(x)* označimo izraz $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-1}e^x$, onda funkciju *f(x)* možemo napisati u obliku :

$f(x) = \begin{cases} g(x), |x|>1 \\ -g(x), |x|<1 \end{cases}$, pa vrijedi da je $f'(x) = \begin{cases} g'(x), |x|>1 \\ -g'(x), |x|<1 \end{cases}$.

Pronađimo *g'(x)* koristeći pravila deriviranja proizvoda i količnika, tj. $(uv)' = u'v+uv'$ i $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, za $v \neq 0$:

$$g'(x) = \frac{\left[\left(x^2-2x-15\right)e^x\right]'(x^2-1) - \left(x^2-2x-15\right)e^x(x^2-1)'}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{\left[\left(x^2-2x-15\right)'e^x + \left(x^2-2x-15\right)(e^x)'\right](x^2-1) - \left(x^2-2x-15\right)e^x(x^2-1)'}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{\left[(2x-2)e^x + \left(x^2-2x-15\right)e^x\right](x^2-1) - \left(x^2-2x-15\right)e^x(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Nakon sređivanja brojnika dobijemo :

$$g'(x)=e^{x}\frac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}$$, pa je prvi izvod funkcije *f(x)* dat izrazom :

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x}\dfrac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}, |x|>1 \\ -e^{x}\dfrac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}, |x|<1 \end{cases}.$$

Nema smisla tražiti izvod funkcije $f(x)$ u tačkama $x=\pm 1$, jer funkcija $f(x)$ u njima nije definisana .

Pošto je drugi izvod, izvod prvog izvoda, to imamo da je : $f''(x)=\begin{cases} g''(x), |x|>1 \\ -g''(x), |x|<1 \end{cases}.$

Pronađimo drugi izvod funkcije *g(x)* :

$$g''(x)=\left(e^{x}\frac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}\right)'=$$

$$=\left(e^{x}\right)'\frac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}+e^{x}\left(\frac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}\right)'=$$

$$=e^{x}\frac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}+$$

$$+e^{x}\frac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)'\left(x^{2}-1\right)^{2}-\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)\left(\left(x^{2}-1\right)^{2}\right)'}{\left(x^{2}-1\right)^{4}}=$$

$$=e^{x}\frac{\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{2}}+$$

$$+e^{x}\frac{\left(4x^{3}-6x^{2}-28x+30\right)\left(x^{2}-1\right)^{2}-\left(x^{4}-2x^{3}-14x^{2}+30x+17\right)\left(2\left(x^{2}-1\right)(2x)\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{4}}$$

Nakon sređivanja dobijemo :

$$g''(x)=e^{x}\frac{\left(x^{6}-2x^{5}-13x^{4}+56x^{3}-53x^{2}-70x-47\right)}{\left(x^{2}-1\right)^{3}}$$, pa je drugi izvod funkcije *f(x)* dat izrazom:

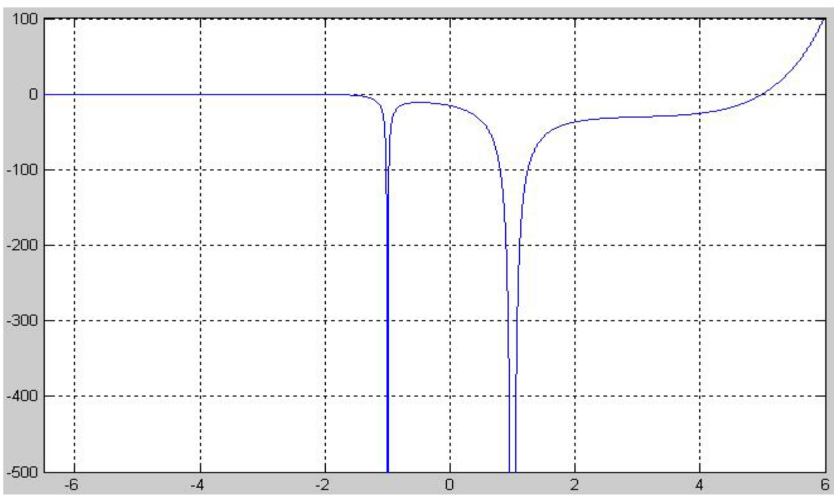
$$f''(x)=\begin{cases} e^x\dfrac{\left(x^6-2x^5-13x^4+56x^3-53x^2-70x-47\right)}{\left(x^2-1\right)^3}, |x|>1 \\ -e^x\dfrac{\left(x^6-2x^5-13x^4+56x^3-53x^2-70x-47\right)}{\left(x^2-1\right)^3}, |x|<1 \end{cases}.$$

Nema smisla tražiti drugi izvod funkcije $f(x)$ u tačkama $x=\pm 1$, jer funkcija $f(x)$ u njima nije definisana .

Kako $f'(x)$ postoji $\forall x \in$ Dom(f), to grafik $G(f)$ funkcije $f(x)$, nema ni ugaone (prelomne) tačke, ni povratne tačke (šiljke).

0.1 bod

d) Grafik funkcije je dat na slici 1.



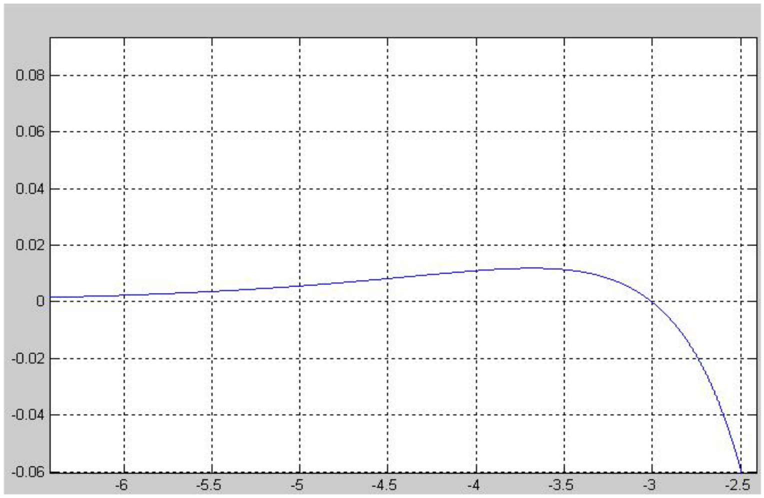
Slika 1.

Nije bilo potrebe prikazivati graf lijevo od -6, odnosno desno od 6, jer funkcija vrlo brzo teži ka nuli, odnosno ka $+\infty$.

0.1 bod

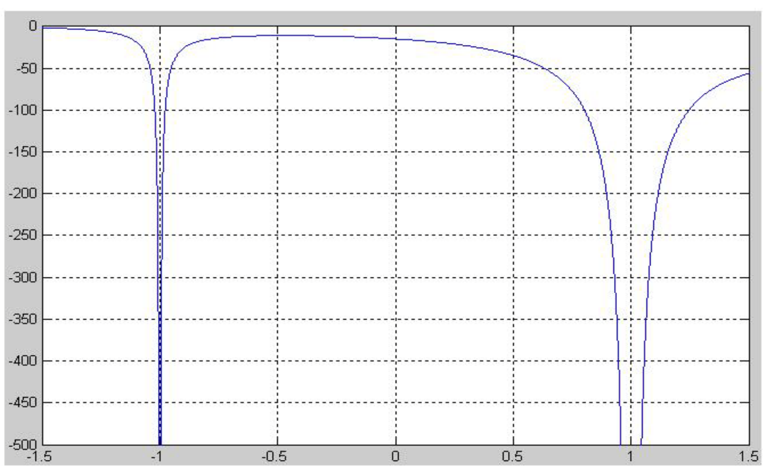
Prikažimo sada segmente grafa u "široj" okolini karakterističnih tačaka, kao što su -3 i 5 (nule funkcije) kao i -1 i 1 (singularne tačke).

Dio grafika koji sadrži prvu nulu je dat na slici 2.



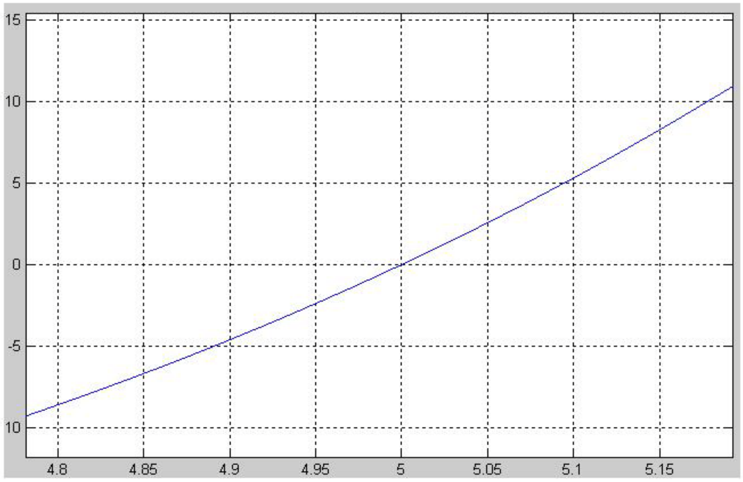
Slika 2.

Dio grafa sa singularnim tačkama je prikazan na slici 3.



Slika 3.

Dio grafika koji sadrži drugu nulu je dat na slici 4.



Slika 4.

e) Da bismo ispitali da li su ispunjeni uslovi *Rolleove teoreme* , prvo je navedimo :

Ako je *f(x)* definisana i neprekidna na segmentu $\left[a,b\right]$, ima izvod $f\,'(x)$ (konačan ili beskonačan) $\forall x \in (a,b)$ i ako je $f(a) = f(b)$, onda postoji bar jedan $\xi \in (a,b)$ takav da je $f\,'(\xi) = 0$.

Očigledno je da za $a = -3 \wedge b = 5$ i datu funkciju *f* vrijedi, $f(a) = f(b) = 0$. Međutim, funkcija $f(x)$ i njen prvi izvod, $f\,'(x)$, nisu definisani u tačkama $x = \pm 1 \in \left[-3,5\right]$.
Na osnovu toga zaključujemo da funkcija *f(x)* ne ispunjava sve uslove *Rolleove teoreme* .

0.1 bod

Napomenimo da ako svi uslovi *Rolleove teoreme* nisu ispunjeni, onda zaključak *Rolleove teoreme* može da vrijedi ili ne vrijedi (jer ta teorema daje samo dovoljan, a ne i potreban uslov za postojanje bar jedne tačke $\xi \in (a,b)$ sa svojstvom da je $f\,'(\xi) = 0$) pa se može dodatno ispitati egzistencija tačke $\xi \in \left[a,b\right]$ za koju vrijedi $f\,'(\xi) = 0$.

Sa priloženih slika od $G(f)$ se vidi da postoje samo dvije tačke na Dom(*f*) u kojima je $f\,'(x) = 0$. Prva je za $x \approx -3.6975 \notin \left[-3,5\right]$, a druga je za $x \approx -0.4715 \in \left[-3,5\right]$.

Demonstrator Mirza Milišić
i
Doc. Dr. Huse Fatkić

Zad. 1. Zadana je familija ($f_{a,b} : 0 < b < a; a, b \in R$) realnih funkcija jedne realne varijable, gdje je

$$f_{a,b}(x) = \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{\sin ax + \sin bx}$$

a) Nađite prirodni domen $D(f_{a,b})$ i ispitajte ponašanje na rubu od $D(f_{a,b})$ svake od funkcija iz zadane familije ($f_{a,b} : 0 < b < a; a, b \in R$).
b) Bez upotrebe *L'Hospitalovog* pravila izračunajte graničnu vrijednost svake od funkcija iz zadane familije u svakoj od tačaka gomilanja njenog prirodnog domena koja mu ne pripada.
c) Ispitajte neprekidnost i klasificirajte eventualne tačke prekida i singulariteta funkcije $f_{k,1}$ iz zadane familije ako je k zbir svih cifara vašeg jedinstvenog matičnog broja (JMB).

<u>Rješenje:</u>

a) Data funkcija nije definisana za:

$$\sin ax + \sin bx = 0$$
$$2\sin\frac{a+b}{2}x \cdot \cos\frac{a-b}{2}x = 0$$

$$\sin\frac{a+b}{2}x = 0$$
$$\frac{a+b}{2}x = k\pi,\ k \in Z$$
$$x = \frac{2k\pi}{a+b},\ k \in Z$$

$$\cos\frac{a-b}{2}x = 0$$
$$\frac{a-b}{2}x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in Z$$
$$x = \frac{(2l+1)\pi}{a-b},\ l \in Z$$

Dakle, prirodni domen date funkcije je:

$$D(f_{a,b}) = \left\{ \forall x \in R \middle| x \neq \frac{2k\pi}{a+b} \wedge x \neq \frac{(2l+1)\pi}{a-b};\ k, l \in Z; a, b \in R; 0 < b < a \right\}$$

S obzirom da se prirodni domen svake od funkcija iz zadane familije ($f_{a,b} : 0 < b < a; a, b \in R$) sastoji od beskonačno mnogo intervala čije su granice oblika $\frac{2k\pi}{a+b}$ i $\frac{(2l+1)\pi}{a-b}$, $k, l \in Z$, koje su ujedno i tačke gomilanja domena koje mu ne pripadaju, odredit ćemo granične vrijednosti u tim tačkama (posebno ćemo razmotriti slučaj kada je $k = 0$).

Prije toga, odredit ćemo ponašanje funkcija iz pomenute familije kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$:

1° Sinusna funkcija je, kako znamo, ograničena funkcija i vrijedi da je:

$-2 \le \sin ax + \sin bx \le 2$, odnosno nazivnik je konačan broj. Zbog toga imamo da je:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{\sin ax + \sin bx} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{e^{ax}} - e^{bx}}{\sin ax + \sin bx} = \pm\infty$$

2°

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x \cdot \cos\frac{a-b}{2}x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1-e^{(a+b)x}}{e^{ax}}}{2\frac{a+b}{2}x \cdot \frac{\sin\frac{a+b}{2}x}{\frac{a+b}{2}x} \cdot \cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{1-e^{(a+b)x}}{(a+b)x} = -\lim_{x\to 0-} \frac{e^{(a+b)x}-1}{(a+b)x} = \left| \begin{array}{l} (a+b)x = t \\ x \to 0- \Rightarrow t \to 0- \end{array} \right| =$$

$$= -\lim_{t\to 0-} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = -1$$

Analogno je i $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x \cdot \cos\frac{a-b}{2}x} = -1$. Dakle, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x \cdot \cos\frac{a-b}{2}x} = -1$.

3°

$$\lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}} \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x \cdot \cos\frac{a-b}{2}x} = \lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}} \frac{\frac{1-e^{(a+b)x}}{e^{ax}}}{2\sin\frac{a+b}{2}x \cdot \cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= \frac{1-e^{2k\pi}}{e^{\frac{2k\pi a}{a+b}}} \cdot \frac{1}{2\sin 2k\pi \cdot \cos\frac{a-b}{a+b}k\pi} = \begin{cases} +\infty & za \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi > 0 \wedge k < 0\right) \vee \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi < 0 \wedge k > 0\right) \\ -\infty & za \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi > 0 \wedge k > 0\right) \vee \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi < 0 \wedge k < 0\right) \end{cases}$$

$$\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi>0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2m\pi<\frac{a-b}{a+b}k\pi<\frac{\pi}{2}+2m\pi,\quad m\in Z$$
$$\frac{(4m-1)(a+b)}{2(a-b)}<k<\frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)}.$$

Da bi k bilo veće od 0, potrebno je da bude $m\geq\frac{1}{4}$, tj. $m\geq 1$. S druge strane, da bi bilo k manje od 0, potrebno je da bude $m\leq-\frac{1}{4}$, tj. $m\leq -1$.

Sljedeći uslov je da je:

$\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi<0 \Leftrightarrow \frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)}<k<\frac{(4m+3)(a+b)}{2(a-b)}$, $m\in Z$. Da bi k bilo veće od 0, potrebno je da bude $m\geq -\frac{1}{4}$, tj. $m\geq 0$. S druge strane, da bi bilo k manje od 0, potrebno je da bude $m\leq -\frac{3}{4}$, tj. $m\leq -1$. Konačno, imamo da je:

$$\lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}}\frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x}=$$
$$=\begin{cases}+\infty\ za\left(\frac{(4m-1)(a+b)}{2(a-b)}<k<\frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)},m\leq -1\right)\vee\left(\frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)}<k<\frac{(4m+3)(a+b)}{2(a-b)},m\geq 0\right)\\ -\infty\ za\left(\frac{(4m-1)(a+b)}{2(a-b)}<k<\frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)},m\geq 1\right)\vee\left(\frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)}<k<\frac{(4m+3)(a+b)}{2(a-b)},m\leq -1\right)\end{cases}$$

4°

$$\lim_{x\to\frac{(2l+1)\pi}{a-b}}\frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x}=\lim_{x\to\frac{(2l+1)\pi}{a+b}}\frac{\frac{1-e^{(a+b)x}}{e^{ax}}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x}=$$
$$=\frac{1-e^{\frac{a+b}{a-b}(2l+1)\pi}}{e^{\frac{(2l+1)\pi a}{a-b}}}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}\cdot\cos\frac{(2l+1)\pi}{2}}=$$
$$=\begin{cases}+\infty\quad za\left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}>0\wedge l<-\frac{1}{2}\right)\vee\left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}<0\wedge l>-\frac{1}{2}\right)\\ -\infty\quad za\left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}>0\wedge l>-\frac{1}{2}\right)\vee\left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}<0\wedge l<-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

$\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}>0 \Leftrightarrow 2n\pi<\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}<\pi+2n\pi,\quad n\in Z$**.** Odavde se dobija da je:

$$\frac{4n(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}.$$

Da bi l bilo veće od $-\frac{1}{2}$, potrebno je da bude $n\geq 0$, a da bi l bilo manje od $-\frac{1}{2}$ potrebno je da bude $n\leq -\frac{1}{2}$, odnosno $n\leq -1$, jer $n\in Z$.

S druge strane imamo da je:

$$\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}<0 \Leftrightarrow \frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{4(n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)},\quad n\in Z.$$

Da bi l bilo veće od $-\frac{1}{2}$, potrebno je da bude $n\geq -\frac{1}{2}$, odnosno $n\geq 0$, a da bi l bilo manje od $-\frac{1}{2}$ potrebno je da bude $n\leq -1$. Konačno, možemo pisati da je:

$$\lim_{x\to\frac{(2l+1)\pi}{a-b}}\frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x}=$$

$$=\begin{cases} +\infty \quad za\left(\frac{4n(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}, n\leq -1\right)\vee \\ \qquad\left(\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{4(n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}, n\geq 0\right) \\ -\infty \quad za\left(\frac{4n(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}, n\geq 0\right)\vee \\ \qquad\left(\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{4(n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}, n\leq -1\right) \end{cases}$$

c) S obzirom da je $\lim_{x\to 0-} f_{k,1}(x) = \lim_{x\to 0+} f_{k,1}(x) = -1$, tj postoji limes u tački $x = 0$ i to konačan, ali $f(0)$ nema smisla, pa zaključujemo da se u toj tački radi o prekidu prve vrste. S obzirom da su singularne tačke zapravo tačke gomilanja domena funkcije koje mu ne pripadaju, tačka $x = 0$ je ujedno i otklonjiv ili prividni singularitet, jer je limes u toj tački konačan broj, a funkcija nije definisana u toj tački. Da bismo uklonili takav singularitet, dovoljno je dodefinisati funkcije $f_{k,1}(x)$ uzimajući da je $f_{k,1}(0) = -1$.

U tačkama gomilanja za domen familije funkcija $f_{k,1}(x)$, tj. za $x = \dfrac{2k\pi}{a+b}$, $k \neq 0$ i $k \in Z$ i za $x = \dfrac{(2l+1)\pi}{a-b}$, $l \in Z$ imamo prekide drugog reda, jer limesi uzimaju ∞ vrijednosti. To su ujedno i singulariteti tipa pola, jer su lijevi i desni limesi u tim tačkama jednaki i beskonačni. Ukoliko limesi u tim tačkama ne postoje, tada kažemo da je riječ o esencijalnim singularitetima.

Uvrstiti individualna rješenja!

Zad. 2. Primjenom diferencijalnog računa dokažite sljedeće jednakosti:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1,1]$**;** **b)** $arctgx + arctg\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$

<u>Rješenje</u>:

a) Uzmimo da je $f_1(x) = \arcsin x$, a $f_2(x) = \arccos x$.

Razvićemo funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ Taylorovom formulom, tj. napisat ćemo ih u obliku:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \; a \in [-1,1]$$

Za funkciju $f_1(x)$ će biti:

$$f_1(x) = f_1(a) + \underbrace{\frac{f_1'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f_1''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f_1^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P(x)} \qquad (1)$$

a za funkciju $f_2(x)$ će biti:

$$f_2(x) = f_2(a) + \underbrace{\frac{f_2'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f_2''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f_2^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{Q(x)} \qquad (2)$$

Kako je $f_1'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -(\arccos x)'$, to će za n-te izvode funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ vrijediti:

$f_1^{(n)}(x) = -f_2^{(n)}(x)$, pa vrijedi da je:

$$\frac{f_1'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f_1^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = -\left[\frac{f_2'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f_2^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right],$$

odnosno vrijedi da je: $P(x) = -Q(x)$.

Saberimo sada jednakosti (1) i (2):

$$f_1(x)+f_2(x)=f_1(a)+P(x)+f_2(a)+Q(x)$$
$$f_1(x)+f_2(x)=f_1(a)+P(x)+f_2(a)-P(x)$$
$$f_1(x)+f_2(x)=f_1(a)+f_2(a)$$

S obzirom da a uzima neku vrijednost iz segmenta $[-1,1]$, uvrštavajući da je, npr. $a=0$, dobijamo:

$\arcsin x+\arccos x=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$, odnosno

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, što je trebalo i dokazati.

<u>II NAČIN</u>:

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x$$
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

Kako je izvod funkcije jednak 0, zaključujemo da se radi o funkciji koja je jednaka konstanti, tj. $f(x)=m,\ m\in R$. Potrebno je odrediti o kojoj se konstanti radi. Uvrštavamo proizvoljnu tačku iz domena funkcije, npr. $x=0$:

$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$, čime smo i dokazali traženu jednakost.

b) Neka je $f_3(x)=arctgx$, a $f_4(x)=arctg\frac{1}{x}$.

Razvijmo ove dvije funkcije pomoću Taylorovog polinoma. Bit će:

$$f_3(x)=f_3(a)+\underbrace{\frac{f_3'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f_3''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f_3^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{R(x)} \quad (3)$$, a

$$f_4(x)=f_4(a)+\underbrace{\frac{f_4'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f_4''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f_4^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{S(x)} \quad (4)$$

Vrijedi da je:

$$f_3'(x) = \left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ i}$$

$$f_3'(x) = \left(arctg\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

pa i u ovom slučaju dobijamo da je:

$$f_3^{(n)}(x) = -f_4^{(n)}(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{f_3'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f_3^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = -\left[\frac{f_4'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f_4^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]$$

Dakle, vrijedi da je $R(x) = -S(x)$. Ukoliko se saberu jednakosti (3) i (4), dobijamo da je:

$$f_3(x)+f_4(x) = f_3(a)+R(x)+f_4(a)+S(x)$$
$$f_3(x)+f_4(x) = f_3(a)+R(x)+f_4(a)-R(x)$$
$$f_3(x)+f_4(x) = f_3(a)+f_4(a)$$

Ukoliko uvrstimo da je, npr. $a=1 \ (a>0)$, dobijamo da je:

$$arctgx + arctg\frac{1}{x} = arctg1 + arctg1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$, odnosno

$$arctgx + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$ za $x>0$.

S druge strane, ukoliko uvrstimo da je $a=-1 \ (a<0)$, tada je:

$$arctgx + arctg\frac{1}{x} = -arctg1 - arctg1 = -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$, odnosno

$$arctgx + arctg\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$ za $x<0$, što je trebalo i dokazati.

II NAČIN:

$$f(x) = arctgx + arctg\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Analogno prethodnom slučaju imamo da je:

1° Za $x \in (0,+\infty)$

Uvrštavamo proizvoljnu vrijednost, npr. $x = 1$, pa dobijamo da je:

$$arctg1 + arctg1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

2° Za $x \in (-\infty, 0)$:

Uvrštavamo, npr. $x = -1$, pa dobijamo da je:

$arctg(-1) + arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, što je trebalo i dokazati!

Zad. 3. a) Dužina s telegrafskog voda je $s := 2b\left(1+\frac{2f^2}{3b^2}\right)$, gdje je $2b$ rastojanje između oslonaca voda, a f najveći ugib. Za koliko se poveća ugib f, kada se dužina voda usljed zagrijavanja poveća za ds (gdje je ds diferencijal funkcije s)?

b) Količina Q elektriciteta, koja protiče kroz provodnik, počinjući od momenta $t=0$ zadana je formulom $Q=8t^2-5t+1$ (kulona). Izračunajte jačinu I struje na kraju pete sekunde.

<u>Rješenje</u>:

a) Diferenciranjem jednakosti $s := 2b\left(1+\frac{2f^2}{3b^2}\right)$ dobije se da je:

$$ds = \frac{8f}{3b}df \Rightarrow df = \frac{3b}{8f}ds$$

b) Kako je $Q=8t^2-5t+1$ (kulona), a $I=\frac{dQ}{dt}$ (ampera), diferencirat ćemo jednakost $Q=8t^2-5t+1$:

$$dQ = (16t-5)dt$$

$$\frac{dQ}{dt} = 16t-5 \Rightarrow I(t=5\sec) = 80-5 = 75A$$

Zad. 4. Primjenom logaritamskog izvoda izračunajte izvod $f'(x)$ ako je:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$; **b)** $f(x)=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}$; **c)** $f(x)=\dfrac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$;

d) $f(x)=x^{2x+1}$; **e)** $f(x)=\left(\ln\sqrt{x}\right)^x$ (za $x>0$); **f)** $f(x)=\begin{cases}(x-2)\,arctg\,\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$

g) $f(x)=\dfrac{\left(x^2-2x-15\right)e^x}{\left|1-x^2\right|}$; **h)** $f(x)=\left(arthx\right)^{arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}}$

Rješenje:

a) Primjenom logaritamskog izvoda imamo da je:

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln f(x)\right]'$$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\cdot\left[\ln\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\right]'=\\
&=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\cdot\left[\ln\left(x+1\right)^{1/3}-\ln\left(1-3x\right)^4\right]'=\\
&=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-4\cdot\frac{1}{1-3x}\cdot(-3)\right]=\\
&=f(x)\cdot\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{12}{1-3x}\right]
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\cdot\left[\ln\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\right)\right]'=\\
&=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\cdot\left[\ln\left(x^2+1\right)^{1/2}+\ln\left(x^2+x+2\right)^{1/2}\right]'=\\
&=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2}\cdot(2x+1)\right]=\\
&=\frac{f(x)}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+2}\right)
\end{aligned}$$

c)

$$f'(x)=\frac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{\left(x^2+2x-3\right)^2}\cdot\left[\ln e^{-3x}+\ln\left(1-2x\right)^{1/2}-\ln\left(x^2+2x-3\right)^2\right]'=$$

$$=f(x)\cdot\left[-3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2x}\cdot\left(-2\right)-2\cdot\frac{1}{x^2+2x-3}\cdot\left(2x+2\right)\right]=$$

$$=f(x)\cdot\left(-3-\frac{1}{1-2x}-\frac{4\left(x+1\right)}{x^2+2x-3}\right)$$

d)

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln x^{2x+1}\right]'=$$

$$=f(x)\cdot\left[\frac{2x+1}{x}+2\ln x\right]$$

e)

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)^x\right]'=$$

$$=f(x)\cdot\left[x\cdot\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\cdot\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)\right]=$$

$$=f(x)\cdot\left[\frac{1}{\ln x}+\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)\right]$$

f) 1° Za $x\neq 2$**:**

$$f'(x)=\left(x-2\right)\cdot arctg\,\frac{1}{x-2}\cdot\left[\ln\left(x-2\right)+\ln\left(arctg\,\frac{1}{x-2}\right)\right]'=$$

$$=\left(x-2\right)\cdot arctg\,\frac{1}{x-2}\cdot\left[\frac{1}{x-2}+\frac{1}{arctg\,\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\cdot\frac{(-1)}{\left(x-2\right)^2}\right]=$$

$$=\left(x-2\right)\cdot arctg\,\frac{1}{x-2}\cdot\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{arctg\,\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{1}{x^2-4x+5}\right]$$

2° Za $x = 2$: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f_+'(2) = \lim_{x \to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} \frac{(x-2)\, arctg \frac{1}{x-2}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2+} arctg \frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f_-'(2) = \lim_{x \to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{(x-2)\, arctg \frac{1}{x-2}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2-} arctg \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$$

S obzirom da je $f_+'(x) \neq f_-'(x) \Rightarrow f'(2)$ ne postoji!

g) Imamo da je: $\left|1 - x^2\right| = \left|(1-x)(1+x)\right| = \begin{cases} 1 - x^2 & za\ x \in (-1,1) \\ x^2 - 1 & za\ ostale\ x \end{cases}$

1° za $x \in (-1,1)$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 15)e^x}{1 - x^2} \cdot \left[\ln(x^2 - 2x - 15) + x - \ln(1 - x^2)\right]' =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x - 15)e^x}{1 - x^2} \cdot \left(\frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 15} + 1 + \frac{2x}{1 - x^2}\right) =$$

$$= f(x) \cdot \left(\frac{x^2 - 17}{x^2 - 2x - 15} + \frac{2x}{1 - x^2}\right)$$

2° za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 15)e^x}{x^2 - 1} \cdot \left[\ln(x^2 - 2x - 15) + x - \ln(x^2 - 1)\right]' =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x - 15)e^x}{x^2 - 1} \cdot \left(\frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 15} + 1 - \frac{2x}{x^2 - 1}\right) =$$

$$= f(x) \cdot \left(\frac{x^2 - 17}{x^2 - 2x - 15} + \frac{2x}{1 - x^2}\right)$$

Dakle, za $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ vrijedi da je:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[\frac{x^2 - 17}{x^2 - 2x - 15} + \frac{2x}{1 - x^2}\right]$$

h)

$$\left(arcth\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{(-1)}{x^2} = \frac{1}{1-x^2} \text{ za } \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\left(arch\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\cdot\frac{(-1)}{x^2} = -\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{x^2} \text{ za } 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$(arthx)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ za } |x| < 1$$

Dakle, za $|x| < 1$ imamo da je:

$$f'(x) = f(x)\cdot\left[\left(arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}\right)\cdot\ln(arthx)\right]' =$$

$$= f(x)\cdot\left\{\left[\frac{1}{1-x^2}-\frac{|x|}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right]\cdot\ln(arthx)+\left(arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right\}$$

Nadalje, za $0 < x < 1$ bit će:

$$f'(x) = f(x)\cdot\left\{\left[\frac{1}{1-x^2}-\frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right]\cdot\ln(arthx)+\left(arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right\} =$$

$$= f(x)\cdot\left\{\left[\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\right]\cdot\ln(arthx)+\left(arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right\} =$$

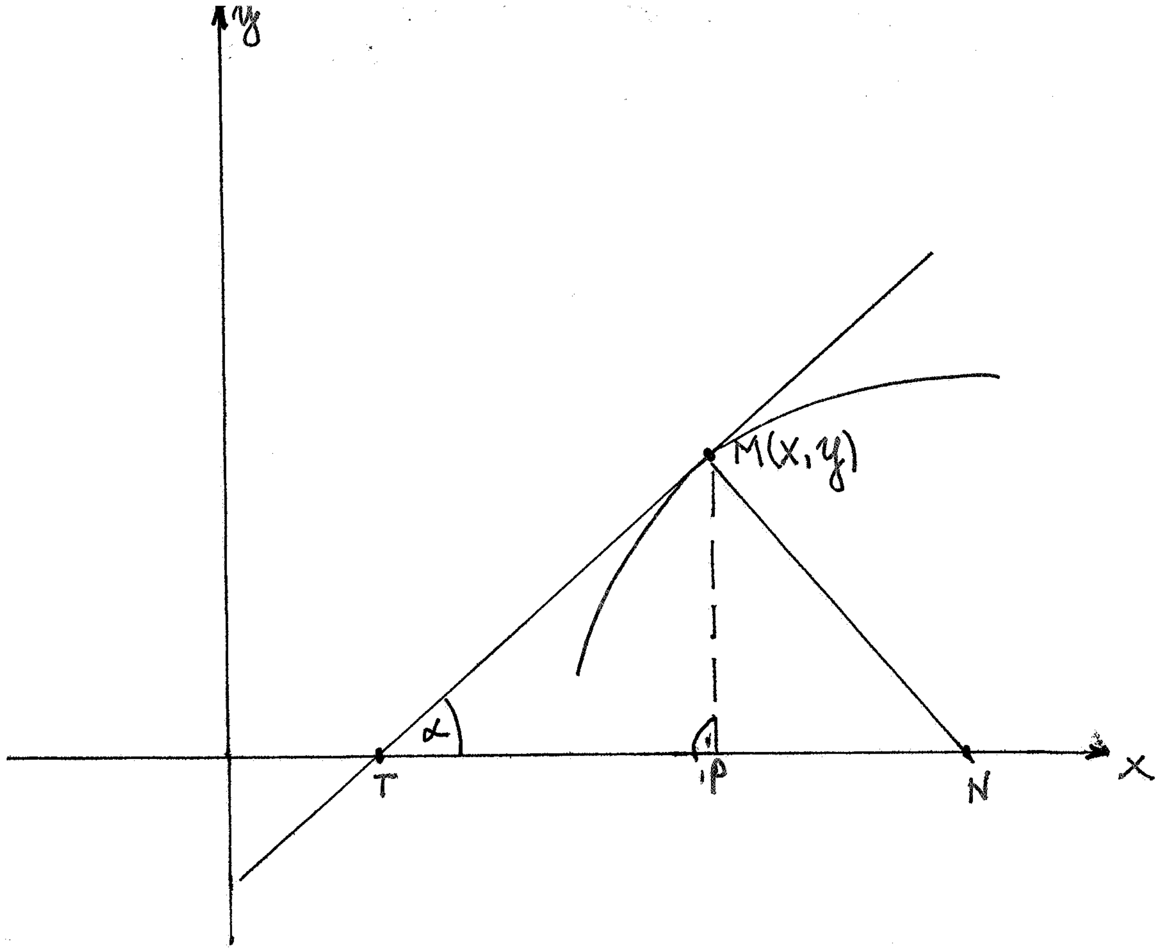
$$= f(x)\cdot\left\{\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x\left(1-x^2\right)}\cdot\ln(arthx)+\left(arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right\} =$$

$$= \frac{f(x)}{\left(1-x^2\right)}\left[\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\ln(arthx)+\left(arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\right]$$

Analogno, za $-1 < x < 0$ bit će:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\left(1-x^2\right)}\left[\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\ln(arthx)+\left(arcth\frac{1}{x}+arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\right]$$

Pripremila:
Majda Đukić



$\overline{TM}$ - dužina tangente $\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+(y')^2}$

$\overline{MN}$ - dužina normale $|y|\sqrt{1+(y')^2}$

$\overline{PT}$ - dužina subtangente $\left|\frac{y}{y'}\right|$

$\overline{PN}$ - dužina subnormale $|y \cdot y'|$

$$y' = tg\alpha = y'(x_M) \quad y = y(x_M) = y_M$$

$$y - y_M = \boxed{k} \cdot (x - x_M)$$

$$k \downarrow y'(x_M)$$

$\boxed{y - y_M = y'(x_M) \cdot (x - x_M)}$ - jednačina tangente

$\boxed{y - y_M = \frac{-1}{y'(x_M)}(x - x_M)}$ - jednačina normale

Selma G.

Izvod višeg reda

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n)}(x)\right]' \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$f^{(0)}x \equiv f(x) \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

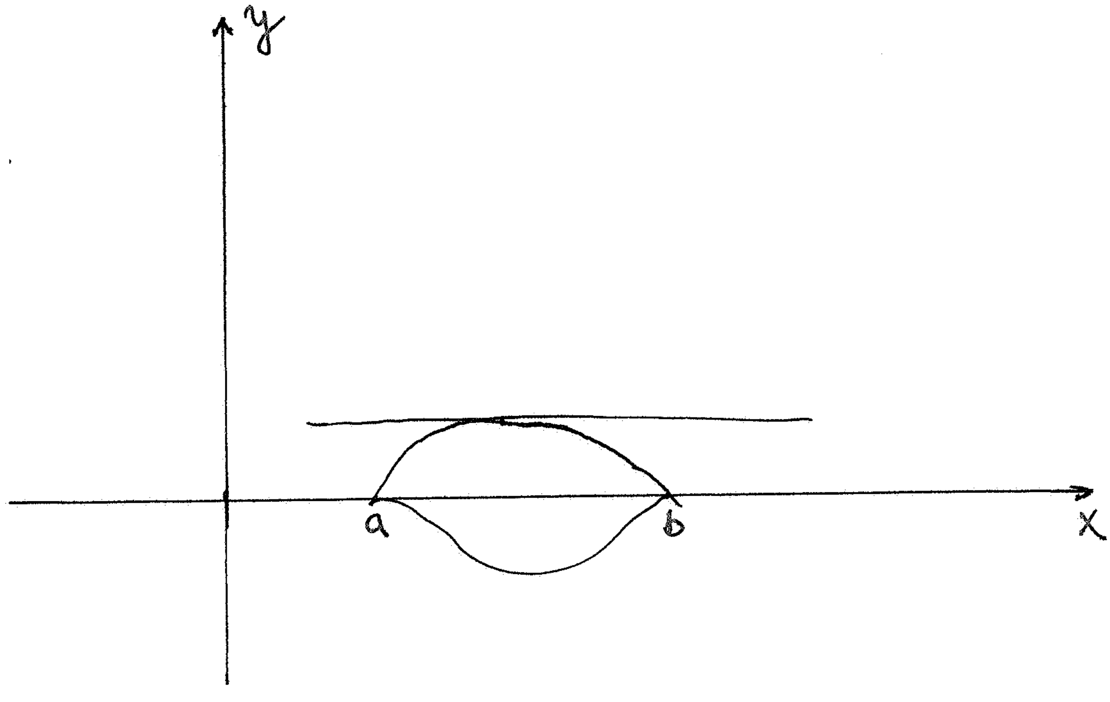
$$dy = df(x) = f'(x)\,dx = y'\,dx$$

$$d^{n+1}y = d(d^n y) \qquad n=1,2,3\dots$$

$$d^n y = y^{(n)}\,dx^n$$

Rolle-ova tk.

$y=f(x)$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i ima izvod $f'(x)$ za $\forall x \in (a,b)$ i $f(a)=f(b)=0$ tada postoji c koje pripada (a,b) tako da je $f'(c)=0$



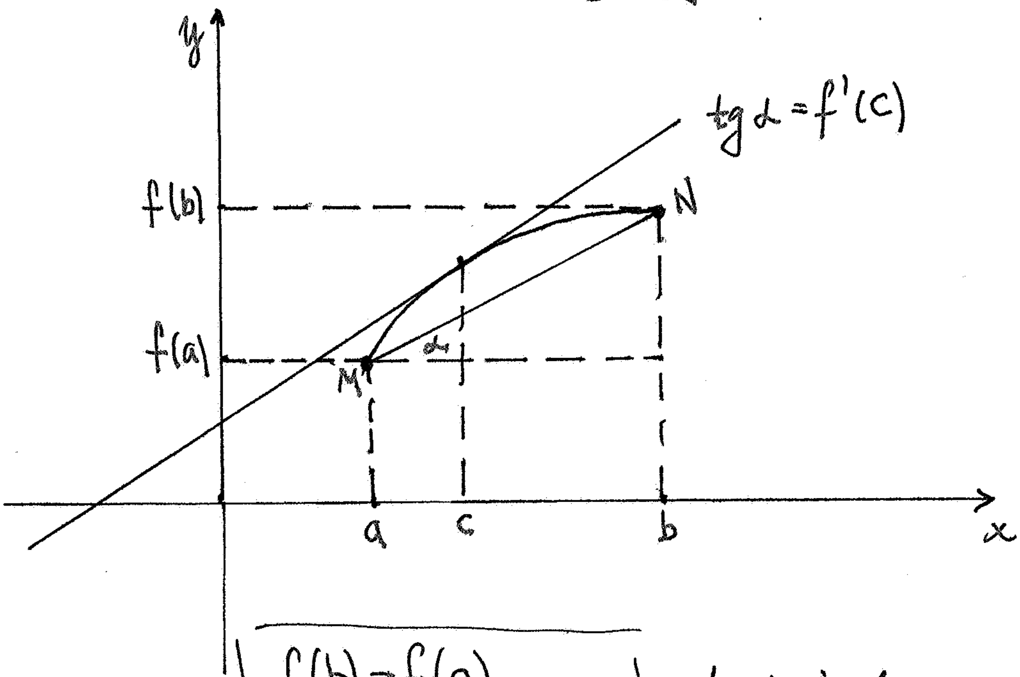
Selma G.

(Poopćenje Roll-eove th)

Lagrange th.

Ako je $y=f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i ima izvod $f'(x)$ za $\forall x\in(a,b)$ tada postoji $c\in(a,b)$ tako da je:
$a<b$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=tg\,\alpha}$ - koeficijent pravca sekante

Selma G.

(1) $\boxed{279.d}$!!!

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

$$f(x) = (x^2+x+1)\cdot \cos x$$

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = (u'v+uv')' = [u''v + u'v' + u'v' + uv''] = [u''v + 2u'v' + uv'']$$

$$(uv)''' = [u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''']$$

$$(uv)^{(n)} = \binom{n}{0}u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + \binom{n}{n-2}u''v^{(n-2)} +$$

$$+ \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{n}uv^{(n)}$$

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^{k}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u^0 \equiv u \\ v^0 \equiv v \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \end{array}}$$

$u = x^2+x+1$

$v = \cos x$

$u' = 2x+1$

$u'' = 2$

$u''' = 0$ $\boxed{\text{za } n \geq 3}$

$v' = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$v'' = -\cos x = \cos(x+\pi)$

$v''' = \sin x = \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

$v^{IV} = \cos x = \cos(x+2\pi)$

$v^{(n)} = \cos' x = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{n-2}\cdot u''v^{(n-2)} + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{n}uv^{(n)}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}(\cancel{n}+2-\cancel{n})!}\cdot 2\cdot\cos\left[x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}(\cancel{n}-\cancel{n}+1)!}(2x+1)\cdot$$

$$\cdot\cos\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right] + 1\cdot x^2+x+1\cdot\cos\left[x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

Selma G.

(2) $\boxed{281.}$

$y'_x = ?$

$x = 2\cos t - \cos 2t$

$y = 2\sin t - \sin 2t$ $\quad$ za $t = \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}} = \frac{\frac{dy}{\cancel{dt}}}{\frac{dx}{\cancel{dt}}} = \frac{2\cos t - 2\cos 2t}{-2\sin t + 2\sin 2t}$$

$$y'_x\left(t = \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\cdot\cos\frac{\pi}{6} - 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}}{-2\cdot\sin\frac{\pi}{6} + 2\cdot\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}{-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{-1 + \sqrt{3}} = 1$$

(3) a) $y = \sin x$

b) $y = |\sin x|$ $\Big\}$ $x = \pi$

a) $y = \sin x$

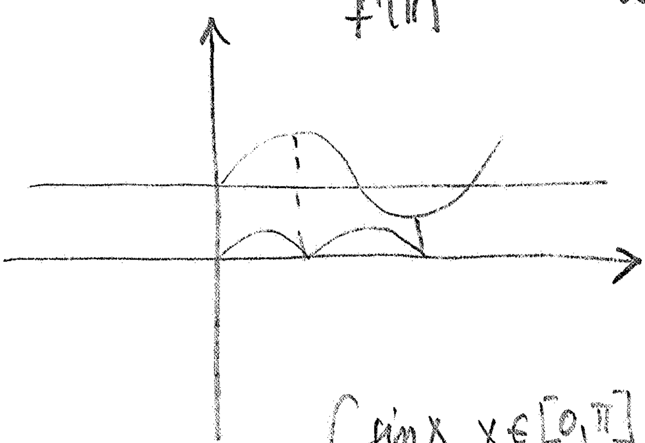
$y' = \cos x$

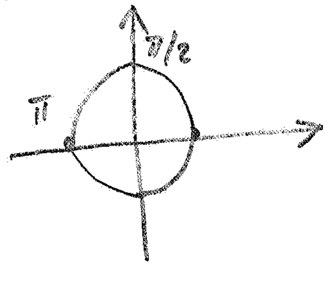
$y'(\pi) = \cos\pi = -1 \in \mathbb{R}$ (konačan broj)

pa je funkcija diferencijabilna u tački π

$$f(x) - f(\pi) = \underbrace{\boxed{A}}_{f'(\pi)}\,(x - \pi) + \omega(x)$$

$\omega(x) \to 0$ kada $x \to \pi$





$$y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \pi] \\ -\sin x & x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Selma G.

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x-\pi} \quad f(\pi) = |\sin\pi| = 0$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{|\sin x|}{x-\pi} \quad \begin{cases} \text{pozitivno za } x \searrow \pi \text{ tj za } x > \pi \\ \text{negativno za } x \nearrow \pi \text{ tj za } x < \pi \end{cases}$$

ne postoji limes nema ni izvoda pa funkcija nije diferencijabilna

(4) $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$ $\quad (a>0)$

$x = \sigma(a)$

$$f(x) - f(x_0) = \boxed{A}\,(x - x_0) + \omega(x)$$

$$A \to f'(x_0) \qquad \omega(x) \to 0, \quad x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \quad (*)$$

$$f'(x) = \left[(a^n + x)^{1/n}\right]' = \frac{1}{n}(a^n + x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot 1$$

$x_0 = 0$

$$f'(0) = \frac{1}{n}(a^n)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} a^{1-n} = \frac{1}{n(a)^{n-1}}$$

$$f(0) = \sqrt[n]{a^n} = a \quad (a>0)$$

$(*)$ $f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0)$

$$f(x) \approx a + \frac{1}{na^{n-1}} \cdot x$$

Selma G.

5 313.

$f(x) = -x^3 + \frac{8}{3}x^2 - x - \frac{2}{3} \quad /3$

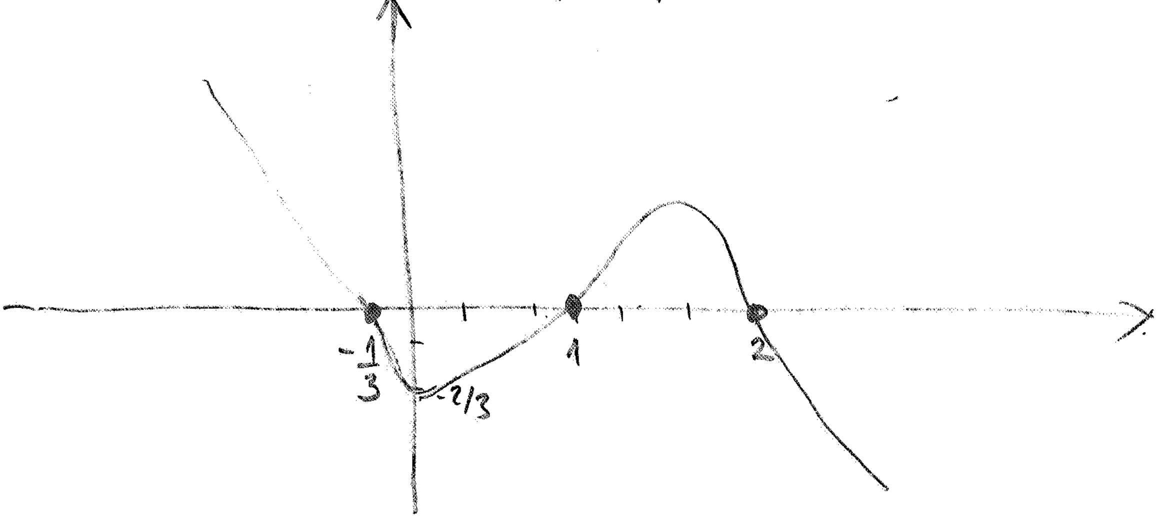
$3f(x) = -3x^3 + 8x^2 - 3x - 2$

	-3	8	-3	-2
1	-3	5	2	$\emptyset$
2	-3	-1	$\emptyset$	

$(x-1)(-3x^2+5x+2)$

$(x-1)(x-2)(-3x-1)$

$f(x) = (x-1)(x-2)\left(-x-\frac{1}{3}\right) = -\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)(x-2)$



$f(0) = -\frac{2}{3} \qquad \left[-\frac{1}{3}, 1\right] \qquad [1,2] \qquad \left[-\frac{1}{3}, 2\right]$

Selma G.

⑥ (319) (tangenta || tetivi Lagrange u pitanju) $\underline{V'}$

$$y=f(x)=\begin{vmatrix} \ln(x+1) & 2 & 2 \\ 3 & x & 1 \\ 3x & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$f'(x)=\begin{vmatrix} \frac{1}{x+1} & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \ln(x+1) & 0 & 2 \\ 3 & 1 & \boxed{1} \\ 3x & 0 & 0 \end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix} \ln(x+1) & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 \\ 3x & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{0}$$

$$f'(x)=\begin{vmatrix} \frac{1}{x+1} & 2-2x & 0 \\ 0 & x & \boxed{1} \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -6+\ln(x+1) & -2 & 0 \\ 3 & 1 & \boxed{1} \\ 3x & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\cdot\boxed{1}\left[-\frac{1}{x+1}-(3\cdot(2-2x))\right]$$

$$+(-1)^{2+3}\cdot\boxed{1}+6x=\frac{1}{x+1}+6-6x-6x$$

$$\boxed{f'(x)=-12x+\frac{1}{x+1}+6} \quad (**)$$

$$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\cdot\boxed{1}+6=-6$$

$$f(1)=\begin{vmatrix} \ln 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6+\ln 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & \boxed{1} \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\cdot\boxed{1}(6-\ln 2)=$$

$$=\ln 2-6$$

$\Rightarrow$

Selma G.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \ln 2 - \cancel{6} + \cancel{6} = \ln 2$$

$$(**) \quad -12c + \frac{1}{c+1} + 6 = \ln 2 \,/\cdot(c+1) \qquad c \neq -1$$

$$-12c^2 - 12c + 1 + 6c + 6 = c\ln 2 + \ln 2$$

$$12c^2 + (6+\ln 2)c + (\ln 2 - 7) = 0$$

$$c_{1,2} = \ldots\ldots$$

$$c_1 = 0{,}4979 \checkmark$$

$$\boxed{c_2 = -1{,}0056 \notin (0,1)}$$

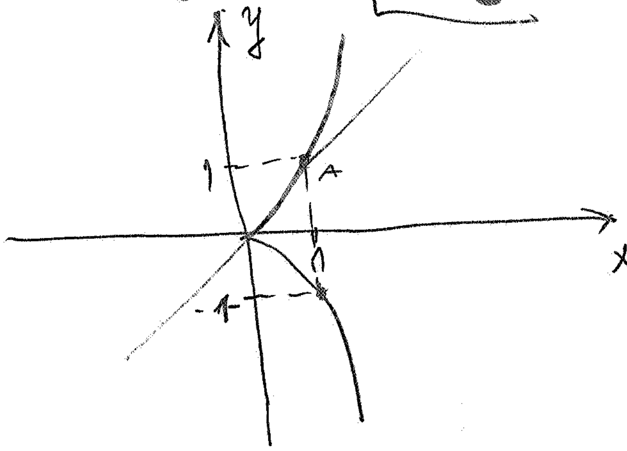
$D = 372 + \ln^2 2 - 36\ln 2 > 0$

$\exists$ dvije tačke u kojima je $t \parallel \overline{AB}$

Selma G.

(7) (364) VI

$x = t^2 \quad y = t^3 \quad \boxed{t = \frac{2\sqrt2}{3}}$



$x = t^2 \geq 0$

$t = \pm\sqrt{x} = \pm x^{1/2}$

$y = \pm x^{3/2}$

$x = \frac{8}{9} \quad y = \frac{16\sqrt2}{27} \quad A\left(\frac{8}{9}, \frac{16\sqrt2}{27}\right)$

$\boxed{y'_x = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t}$ (*)

(*) $y'_A = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt2}{3} = \sqrt2 \equiv k_t \qquad k_n = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{\sqrt2} = \frac{-\sqrt2}{2}$

$k_n = y'_B = -\frac{1}{\sqrt2}$ (**)

(*) (**) $y'_B = \frac{3}{2} \cdot t_b = \frac{-1}{\sqrt2} \Rightarrow t_b = \frac{-2}{3\sqrt2} = \frac{-\sqrt2}{3}$

$x_B = \frac{2}{9} \qquad y_B = \frac{-2\sqrt2}{27}$

Da bi dokazali da je tangenta u tački A ujedno i normala na krivu u tački B dovoljno je pokazati da je $k_{AB} = k_t$

$k_{AB} = \frac{\frac{-2\sqrt2}{27} - \frac{16\sqrt2}{27}}{\frac{2}{9} - \frac{8}{9}} = \frac{\frac{-18\sqrt2}{27}}{\frac{-6}{9}} = \sqrt2$ Š.T.D.

Selma G.

Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Sarajevu
Predmet: Inženjerska matematika I

Rješenje Domaće zadaće 5

Zadatak 1: Izračunajte neodređene integrale:

a) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; b) $I_2 = \int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx.$

Rješenje:

a) **I način:**

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x=\frac{2}{t}, dx=-\frac{2}{t^2}dt \\ 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2,0) \cup (0,2] \\ t=\frac{2}{x} \Rightarrow t \in [-1,0) \cup (1,0] \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{2}{t^2}dt}{\frac{4}{t^2}\sqrt{4-\frac{4}{t^2}}} = -\frac{1}{4}\int \frac{|t|dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

- Za $t>0 \Rightarrow x>0$, pa imamo:

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} = \left| \begin{array}{c} t^2-1=p \Rightarrow \\ 2tdt=dp \end{array} \right| = -\frac{1}{8}\int \frac{dp}{\sqrt{p}} = -\frac{1}{4}\sqrt{p}+C, \quad C \in R.$$

$$I_1 = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C.$$

- Za $t<0 \Rightarrow x<0$, pa imamo:

$$I_1=\frac{1}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}=\left|\begin{array}{c} t^2-1=p\Rightarrow \\ 2tdt=dp\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int\frac{dp}{\sqrt{p}}=\frac{1}{4}\sqrt{p}+C,$$

$$I_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}+C=\frac{\sqrt{4-x^2}}{4|x|}+C=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C.$$

II način (metod binomnog diferencijala):

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int x^{-2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{c} m=-2, n=2, p=-\frac{1}{2}, a=4, b=-1 \\ p+\frac{m-1}{n}=-2\in Z \\ 4x^{-2}-1=t^2\Rightarrow -\frac{8}{x^3}dx=2tdt \\ dx=-\frac{tdt}{4x^{-3}}\end{array}\right|=$$

$$=-\int x^{-2}(t^2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{tdt}{4x^{-3}}=-\frac{1}{4}\int dt=-\frac{1}{4}t+C=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C.$$

b)

$$I_2=\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx=\left|\begin{array}{c} t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ x\neq(2k+1)\pi, k\in Z \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$I_2=\int\frac{1+t^2-2t+1-t^2}{1+t^2+2t-1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2(1-t)}{2t(1+t)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{1-t}{t(t+1)(t^2+1)}dt;$$

$$\frac{1-t}{t\cdot(t+1)\cdot(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C\cdot t+D}{t^2+1}\quad /\cdot t(t+1)\cdot(t^2+1)$$

$$1-t=A(t+1)\cdot(t^2+1)+B\cdot t\cdot(t^2+1)+(C\cdot t+D)\cdot t\cdot(t+1)$$

* za t = 0 $\Rightarrow A=1$
* za t = -1 $\Rightarrow 2=-B\cdot 2 \Rightarrow B=-1$

* za t = i $\Rightarrow 1-i \equiv (Ci+D)\cdot(i-1) \;\Rightarrow\; 1-i \equiv -C-D+(D-C)\cdot i \quad \Rightarrow \begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} -C-D=1 \\ -C+D=-1 \end{array}\right\} + \\ \hline C=0 \\ \mathrm{D=-1} \end{array}$

Sada je:

$$I_2 = 2\int\frac{Adt}{t}+2\int\frac{Bdt}{T+1}+2\int\frac{Ddt}{t^2+1} = 2\cdot\int\frac{dt}{t}-2\cdot\int\frac{dt}{t+1}2\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2\left[\ln|t|-\ln|t+1|\right]-arctg\cdot t+C=2\left|\frac{t}{t+1}\right|-2\cdot arctg\cdot t+C=$$

$$=2\ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}}{1+tg\,\frac{x}{2}}\right|-2arctg\cdot(tg\cdot\frac{x}{2})+C \Rightarrow\; I_2=2\ln\cdot\left|\frac{tg\cdot\frac{x}{2}}{1+tg\,\frac{x}{2}}\right|-x+C.$$

Zadatak 2: Date su funkcije f i g iz **R** u **R** izrazima:

$$f(x)=\sqrt{\sin^2 x\cdot\cos x}, \qquad g(x)=\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}.$$

a) Ispitajte integrabilnost funkcija f i g;

b) Izračunajte određene integrale: $I(f)=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$ i $I(g)=\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx$.

Rješenje:

Ispitajmo najprije neprekidnost funkcija f i g na odgovarajućim segmentima:

- $f(x)$ nep. $\forall x\in R$, pa prema tome i $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow\; f(x)$ integrabilna na $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Odredimo sada domen funkcije g :

$$D(g):\cap\begin{cases}\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}>0\Leftrightarrow(\sin x>-1\wedge\sin x<1)\\ \\ 1-\sin x\neq 0\Leftrightarrow\sin x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\ D(g):\cap\begin{cases}1+\sin x\neq 0\\1-\sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\cap\begin{cases}\sin x\neq -1\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$D(g): x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\ \Rightarrow$$

- $g(x)$ nep. $\forall x\in[-1,1]\Rightarrow g(x)$ integrabilna na $[-1,1]$

b)

$$I(f)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 x\cdot\cos x}\cdot dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\sqrt{\cos x}\cdot dx=2\int_0^{\frac{\pi}{s}}\sin x\sqrt{\cos x}\cdot dx=\begin{vmatrix}\cos^2 x=t^2\\-\sin x\cdot dx=2tdt\\x=0\Rightarrow t=1\\x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0\end{vmatrix};$$

$$I(f)=-4\int_1^0 t\cdot|t|\cdot dt=4\int_0^1 t^2dt=\frac{4}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{4}{3}\Rightarrow I_1=\frac{4}{3}.$$

$$I(g)=\int_{-1}^{1}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx=\begin{vmatrix}g(-x)=\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}=\ln(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x})^{-1}=-\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\\ \\ g(-x)=-g(x)\Rightarrow neparna\end{vmatrix}=0.$$

Zadatak 3:

a) Izracunajte dericaciju funkcije $f(x)=\int_{-x}^{x}e^{-\frac{1}{t^2}}dt\quad x\in\mathbf{R}$, u tački x=2;

b) Izračunajte limes $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+e^{t^2})dt}{e^{2x^2}}$.

Rješenje:

a) Kako je podintegralna funkcija parna, to možemo (na osnovu osobine $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)\cdot dt) = f(x)$)

pisati:

$$f(x) = 2\int_0^x e^{-\frac{1}{t^2}}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{df(2)}{dx} = 2e^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e}}.$$

b)

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x (1+e^{t^2})dt}{e^{2x^2}} \underset{Lop}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\int_0^x (1+e^{t^2})dt)}{4x\cdot e^{2x^2}} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{x^2}}{xe^{2x^2}} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{x^2}}+1}{x\cdot e^{x^2}} = 0.$$

Zadatak 4: U tačkama presjeka prave (l) i parabole (p) datih jednačinama $y = 0$ i $y = x^2 - 4$, respektivno, povučene su normale na parabolu (p). Naći površinu P lika omeđenog parabolom (p) i dobivenim normalama.

Rješenje:

Tačke presjeka prave (l) i parabole (p) određujemo iz uslova: $x^2 - 4 = 0$, pa imamo

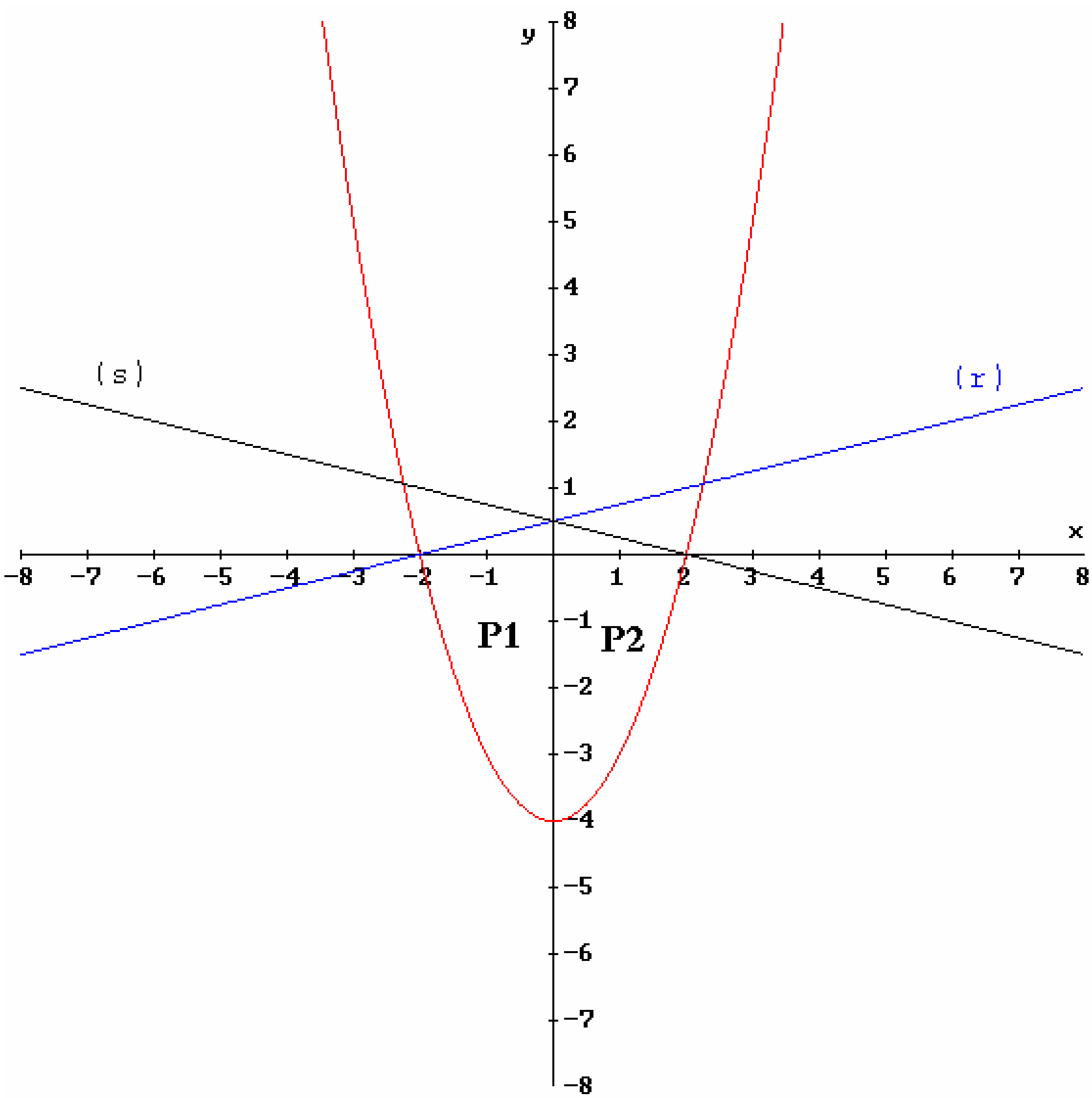
$$\left.\begin{array}{l} x_A = -2 \wedge y_A = 0 \\ x_B = 2 \wedge y_B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(-2,0) \wedge B(2,0).$$

Nađimo sada jednačine normala na parabolu (p) u tačkama A i B.

$$(r): y - y_A = k_A(x - x_A)$$
$$(s): y - y_B = k_B(x - x_B)$$

$$k_A \cdot k_1 = -1 \Rightarrow k_1 = y'_p\big|_{x=x_A} = 2x\big|_{x=x_A} = 2x_A = -4 \Rightarrow k_A = \frac{1}{4} \Rightarrow (r): y = \frac{1}{4}(x+2)$$

$$k_B \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = y'_p\big|_{x=x_B} = 2x\big|_{x=x_B} = 2x_B = 4 \Rightarrow k_B = -\frac{1}{4} \Rightarrow (s): y = -\frac{1}{4}(x-2)$$



$$P = P_1 + P_2 = \int_{-2}^{0} (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - x^2 + 4)dx + \int_{0}^{2} (-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - x^2 + 4)dx$$

$$P = -\int_{-2}^{0} x^2 dx + \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} xdx + \frac{9}{2}\int_{-2}^{0} dx - \int_{0}^{2} x^2 dx - \frac{1}{4}\int_{0}^{2} xdx + \frac{9}{2}\int_{0}^{2} dx = -\int_{-2}^{2} x^2 dx + \frac{9}{2}\int_{-2}^{2} dx + \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} xdx - \frac{1}{4}\int_{0}^{2} xdx;$$

$$P = -\frac{1}{3}(x^3\Big|_{-2}^{2}) + \frac{9}{2}(x^3\Big|_{-2}^{2}) + \frac{1}{8}(x^3\Big|_{-2}^{0}) - \frac{1}{8}(x^3\Big|_{0}^{2}) = -\frac{1}{3}(8+8) + \frac{9}{2}(2+2) + \frac{1}{8}(0-4) - \frac{1}{8}(4-0);$$

$$P = -\frac{16}{3} + 18 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{16}{3} + 17 = \frac{-16+51}{3} = \frac{35}{3}.$$

Demonstrator: Salihbegović Almir

(1757) $y=\frac{x^2}{x+1}$

- D_f $x \neq -1$
- $x=0 \Rightarrow y=0$ (nula)
- asimptote:

vertikalna $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = -\infty$ $x=-1$ vert. asimpt.

horizont. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = +\infty$

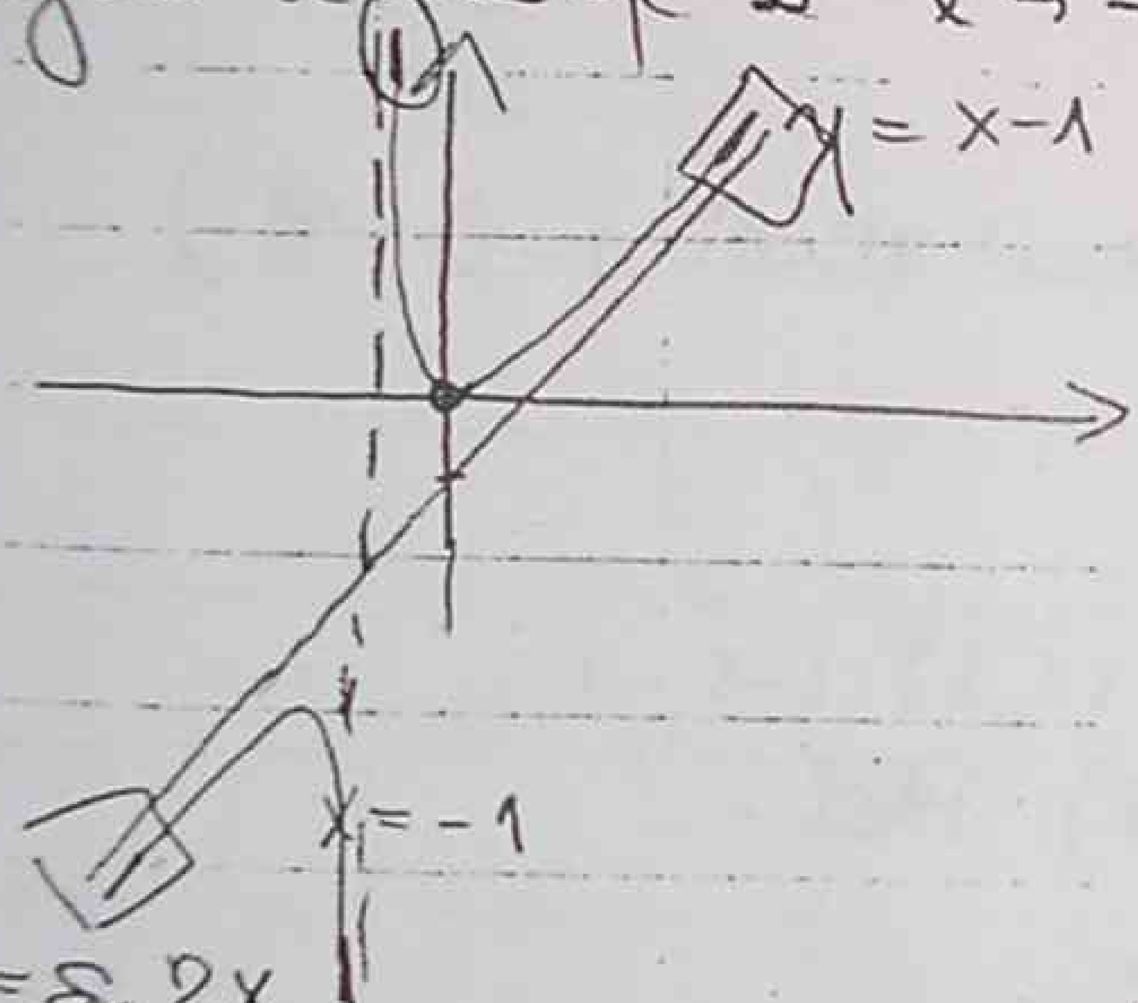
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nema hor. asimptote

kosa: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

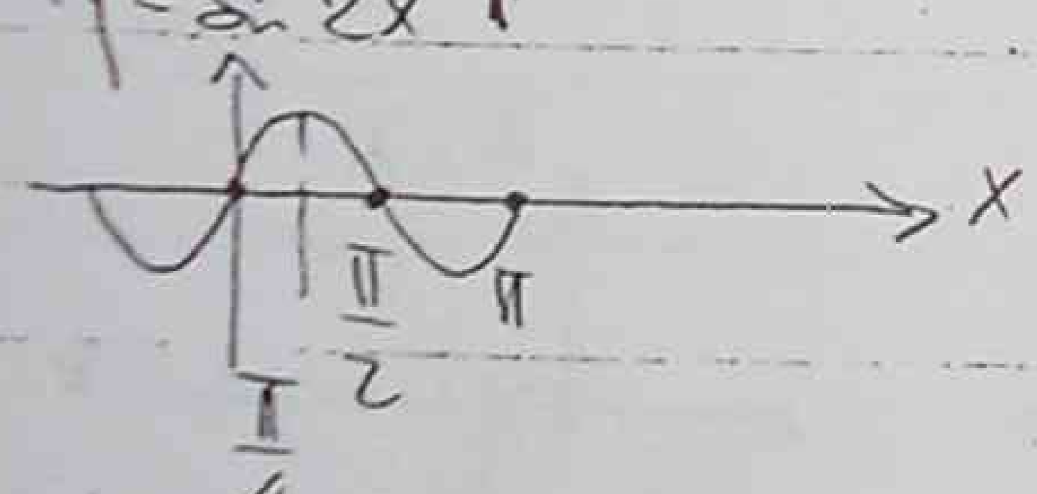
$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x}{x+1} = -1$

pa je $ax+b$ kosa asimpt. tj. $x-1$ prava
(analogno se dobije za $x\to-\infty$)

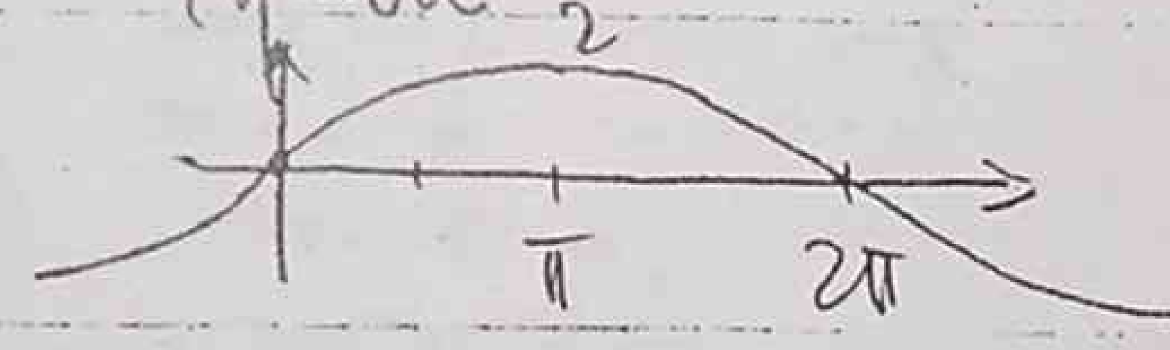
$y = x-1$ (kose asimpt.)



(1767) $y = \sin 2x$

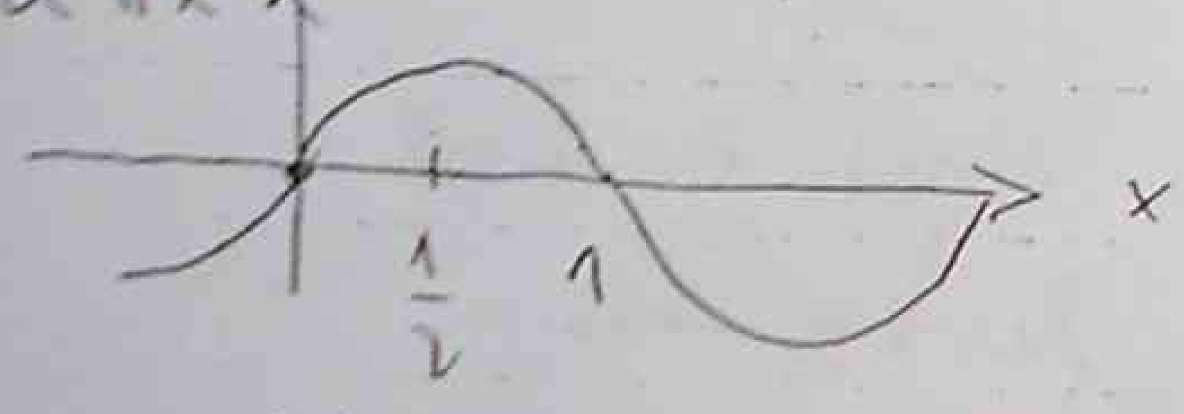


$y = \sin\frac{x}{2}$



(nule su tačke $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \dots$

$y = \sin \pi x$



(1709) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}} \ /^3 \Rightarrow$

$y^3 = x+\cancel{\sqrt{x^2+1}} + 3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}\right)}_{y}$
$+ x - \cancel{\sqrt{x^2+1}}$

$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{x^2-(x^2+1)}\cdot y$

$y^3 = 2x+3y\cdot\sqrt[3]{-1}$

$y^3 = 2x-3y$

$y^3+3y=2x$

$x=\frac{y^3+3y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^3+3x}{2}$

Skinuto sa www.etf.ba

(2023) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[illegible]}{3x^5 \cdot \sin^2 x + 4x - 7x^8}$ ([illegible] stepenom ... $x \to 0$)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 2\frac{\sin x}{x} - 8x^5}{3x^4 + \frac{\sin x}{x}\cdot \sin x + 4 - 7x^8}$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\frac{\sin x}{x} \to 1}{4 + \underbrace{\sin x}_{0} \frac{\sin x}{x} \to 1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

(2024) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x-x^2+x^4-5x^5)}{\ln(1+x+2x^2+x^4)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\ln(1+2x-x^2+x^4-5x^5)}{1+2x-x^2+x^4-5x^5}}{\dfrac{\ln(1+x+2x^2+x^4)}{1+x+2x^2+x^4}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+2x^2+x+1}{1+2x-x^2+x^4-5x^5}^{-1}$

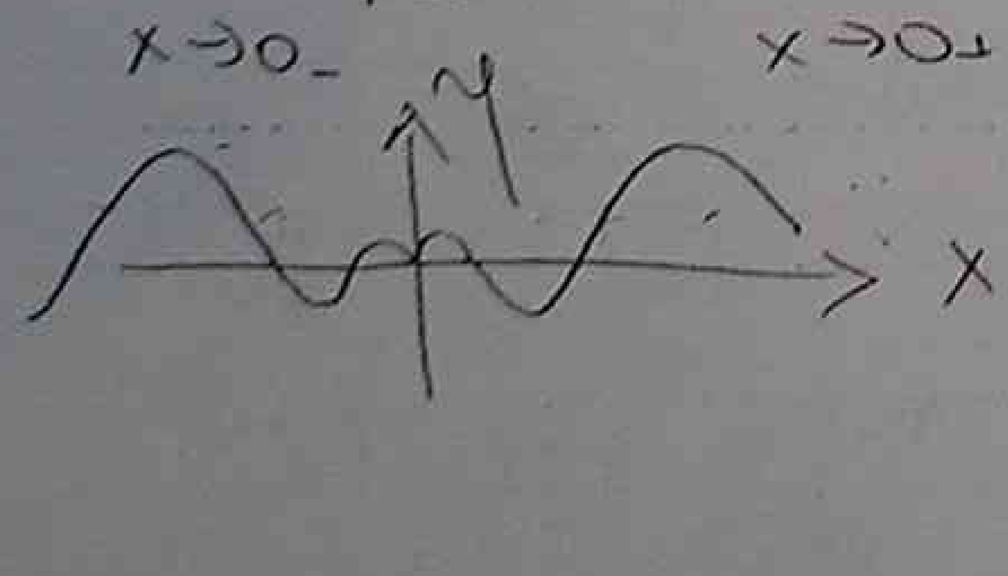
ili $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1$ ...

(2025) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$ / $\ln(1+\sin x) \overset{x\to 0}{\sim} x$ / $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

(2032) $y = a^x$ $\forall x$, $a > 0$
Za fc. kažemo da je nepr. u x_0 ako $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0$
Ako je fc. nepr. $\forall x \in (a,b)$ kažemo da je nepr. na (a,b)
$\lim\limits_{\Delta x\to 0} (f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} (a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}) = 0$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ ŠTD.

(2034) $y = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ – $x^2 \sin\frac{1}{x}$ nepr. $\forall x \neq 0$ (sve elementarne fc.)

– $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = 0$ $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x) - f(0) \Rightarrow$
nepr. fc. $x = 0$



2039) 1° $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $x \neq 0$ $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$ različit limes $\Rightarrow$ za $x=0$ je fc. prekidna!

2° $y = x e^{\frac{1}{x}}$ $x \neq 0$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ / $\frac{1}{x} = n$ / $= \lim_{n\to +\infty} \frac{e^n}{n} =$ / $\lim_{(n)} \frac{n^k}{a^n} = 0$ za $k \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ / $\Rightarrow \lim_{(n)} \frac{e^n}{n} = +\infty$ / $a = e > 1$ od $k = 1 \in \mathbb{N}$ od

$\lim_{x\to 0-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$ (prekid fc. za $x=0$ jer su limesi različiti)

2041) $y = \begin{cases} 1-x^2 & x<0 \\ a & x=0 \\ 1+x & x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 1-x^2 = 1$

$\lim_{x\to 0+} 1+x = 1$

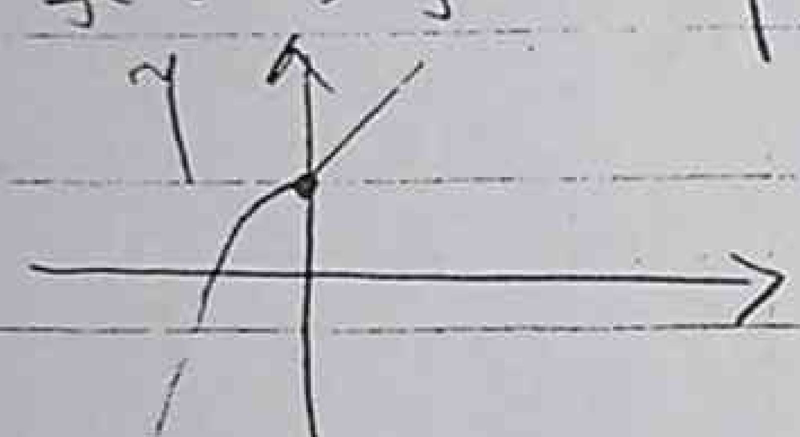
$f(0) = a$

da bi fc bila nepr. za $x=0$

$f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 1$

$f(0) = a = 1 \Rightarrow a = 1$

$x \neq 0$ el. fc. $\Rightarrow f(x)$ nepr.



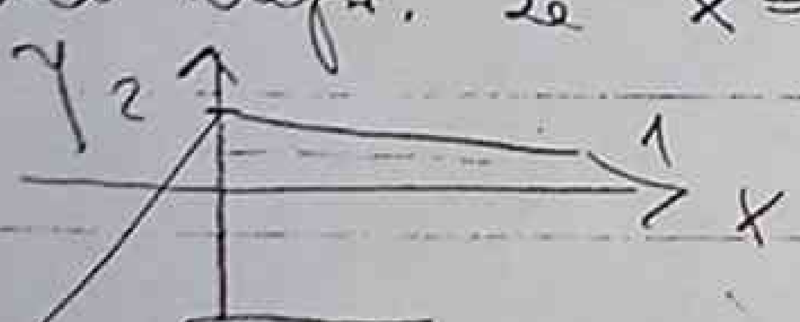
2043) $y = \begin{cases} e^{-x}+1 & x \geq 0 \\ x+\lambda & x<0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (e^{-x}+1) = 2$ (1)

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x+\lambda) = \lambda$ (2)

$f(0) = e^{-0} + 1 = 1+1 = 2$ (3)

da bi f bila nepr. za $x=0$ mora biti $(1)=(2)=(3) \Rightarrow \lambda = 2$



- za ostale x elem. f $\Rightarrow$ neprekidnost $\forall x \in \mathbb{R}$

2044) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ Dp. $x \geq -1$

$(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1) = x+1-1 = x$

$(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1) = x+1-1 = x$

$\Rightarrow f(x) = \frac{\frac{\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+1}}{\frac{\cancel{x}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}} \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt{x+1}+1}$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{3}{2}$ $\lim_{x\to 0-} f(x) = \frac{3}{2}$ / da bi f bila nep. u $x=0$ mora biti $f(0) = \frac{3}{2}$ tj.

$f(x) = \frac{3}{2}$ za $x=0$

1717) y
...
1723) (1) $x=$
...
1732)
...
1744. 9)
...
koren za ... za ostale ... tj. $x = \frac{\pm\pi}{2}$

(1717) $y = \ln\left(\arcsin \frac{x}{x+1}\right)$ Dp. $x \neq -1$

$\arcsin \frac{x}{x+1} = \alpha \to \sin\alpha = \frac{x}{x+1}$ (uslov $-1 \le \frac{x}{x+1} \le 1$, $x \neq -1$)

$\Rightarrow \sin\alpha(x+1) = x \Rightarrow x = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ (1) ($\sin\alpha \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

⇓ $-1 \le \frac{x}{x+1} < 1$

Znamo da je $y = \ln\alpha$ (uslov $\alpha > 0$) i $\alpha = e^y$ (2)

iz (1) i (2) $\Rightarrow x = \frac{\sin e^y}{1-\sin e^y} \to f^{-1}(x) = \frac{\sin e^x}{1-\sin e^x}$

$\to \frac{x}{x+1} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{x+1} < 1$ (vaci samo!!)

(1723) (1) $x = \sin t + \sqrt{3}\cos t \;\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \sin t \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$

$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x = \sin t \cdot \cos\theta + \sin\theta\cos t \Leftrightarrow$

$\cos\theta \cdot x = \sin(t+\theta) \Rightarrow \arcsin(x\cdot\cos\theta) - \theta = t$

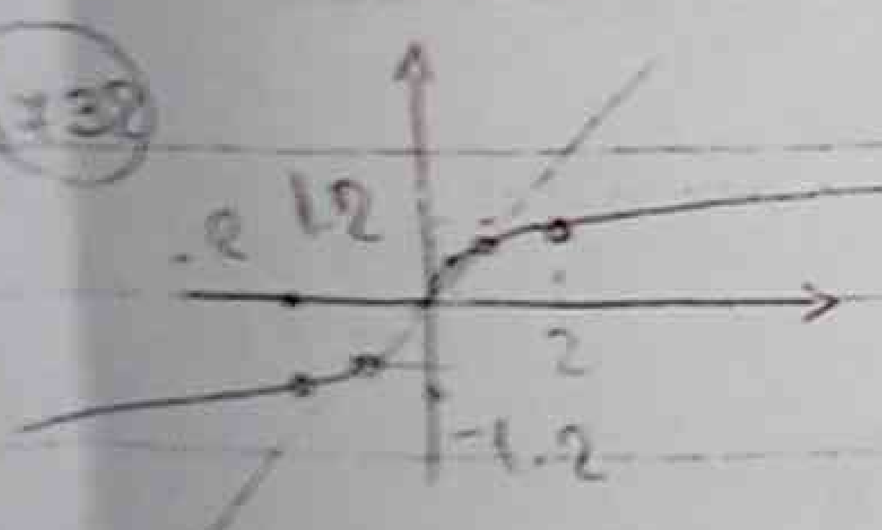
(2) $y = t + \sin(t + \operatorname{arctg}\sqrt{3})$ / $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = \theta$

⇓

$y = \arcsin(x\cos\theta) - \theta + \sin(\arcsin(x\cos\theta) - \theta + \theta)$

$= \arcsin(x\cos\theta) - \theta + x\cos\theta$

(1738)



$n = 1$ $y = x$

$n = 3$ $y = \sqrt[3]{x}$ tačke $(1,1)$ $(-1,-1)$

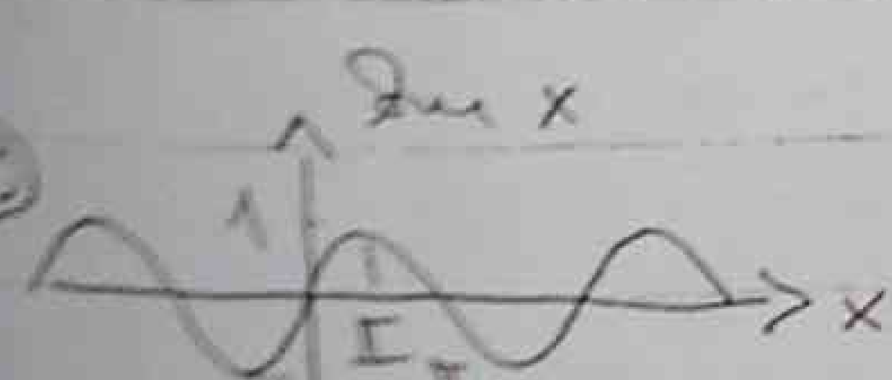
$\left(\frac{1}{2}, 0.8\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, -0.8\right)$ itd..

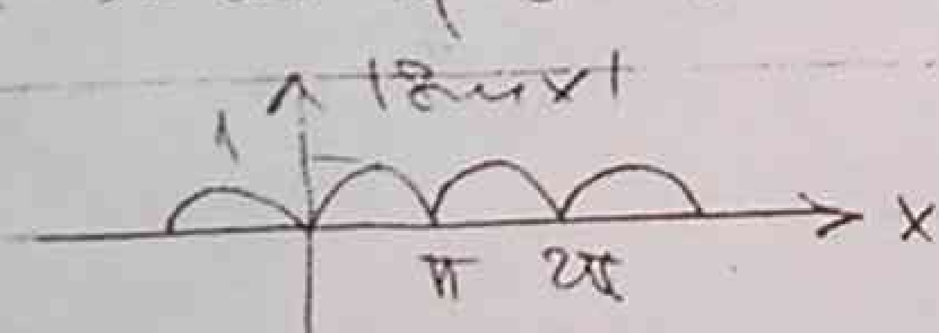
- kad je $x \to 0$ $y \to 0$

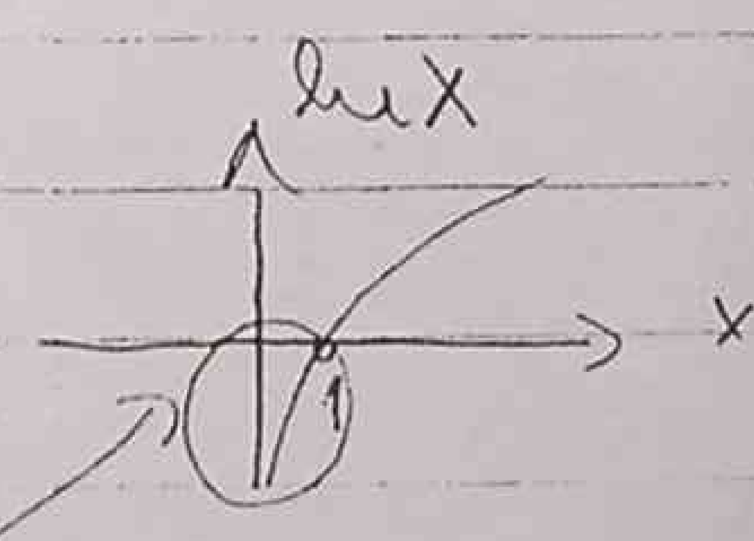
$x \to +\infty$ $y \to +\infty$

$x \to -\infty$ $y \to -\infty$

(1744)





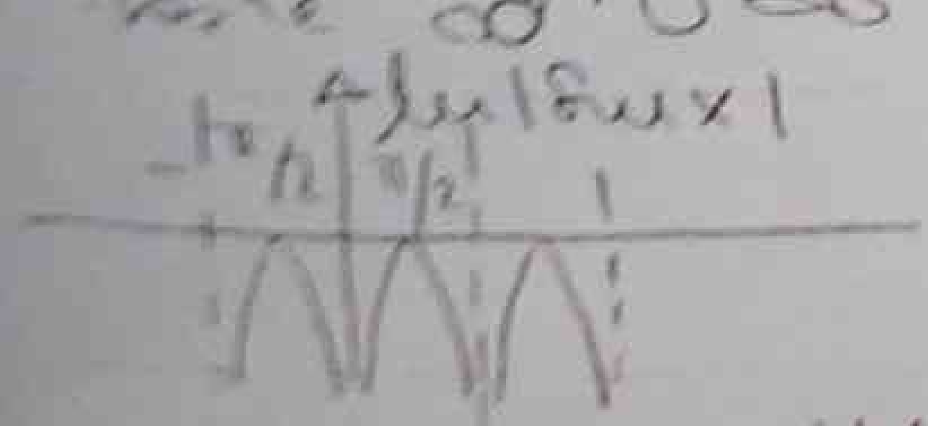


⇒ očigledno la fc je $|\sin x|$; $0 \le |\sin x| \le 1$

$|\sin x|$ raste od 0 do 1 i pada sa 1 na 0 itd..

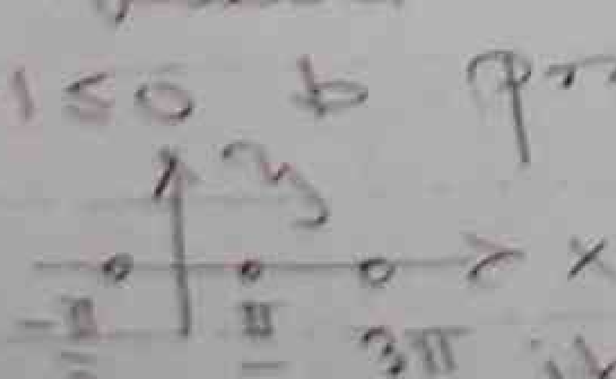
$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to 1} \ln x = 0$



⇒ tražimo sve vrijednosti $\ln|\sin x| \ge 0$ a kako je za sve druge $\ln|\sin x| \le 0$ to postoji samo za $\ln|\sin x| = 0 \Rightarrow$

⇒ f: $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$.

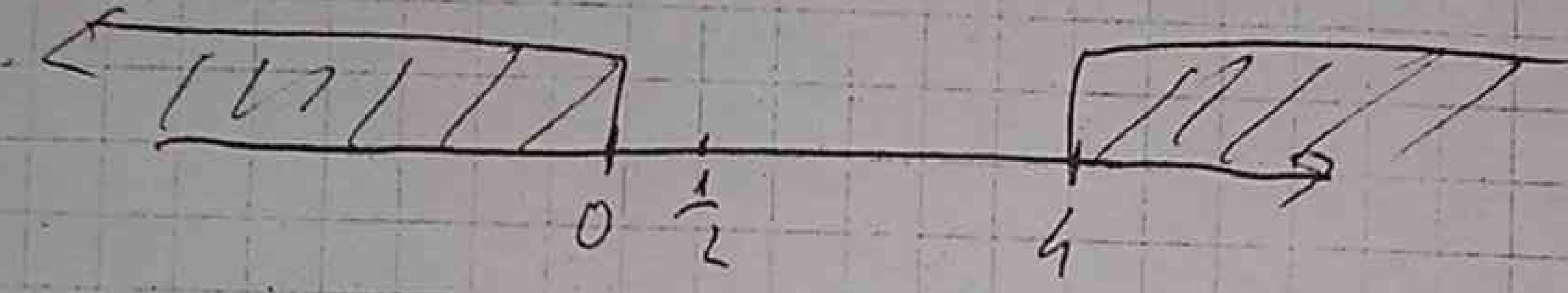


246) Za funkciju f, definisanu sa

$$f(x) = \begin{cases} x^3-6x^2+11x-6, & \text{za } 4 \geq x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{za } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

ispitati ograničenost, odrediti segmente (intervale) za min i max vrijednosti.

Kritične tačke



$\boxed{x=0}$

$f(0)=0$

$f(0-)=$ nema smisla

$f(0+) = \lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$; prekid II vrste.

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

$$\left.\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{2}-\right) &= \lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} \frac{1}{x} = 2 \\ f\left(\tfrac{1}{2}+\right) &= \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} (x^3-6x^2+11x-6) = -\frac{15}{8} \end{aligned}\right\} \text{nema neprekidnost,}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = (x^3-6x^2+11x-6)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{15}{8}$

Imamo neprekidnost zdesna.

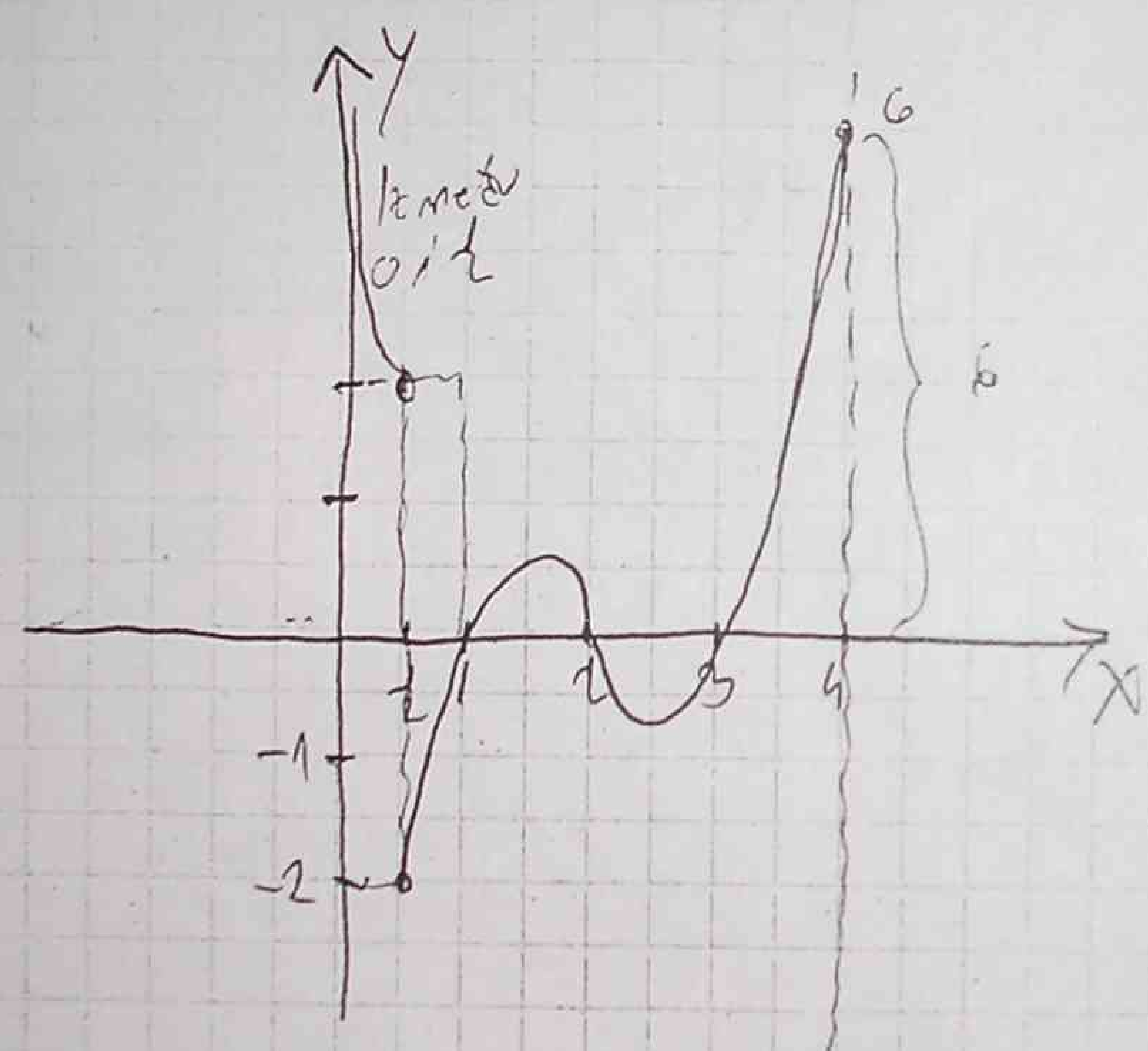
$\boxed{x=4}$

$f(4-) = \lim\limits_{x \uparrow 4} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 4} (x^3-6x^2+11x-6) = 6$

$f(4) = (x^3-6x^2+11x-6)\Big|_{x=4} = 6$

$f(4+)$ – nema smisla.

Neprekidnost slijeva.



Nula f-je je

$x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$

$= (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3)$

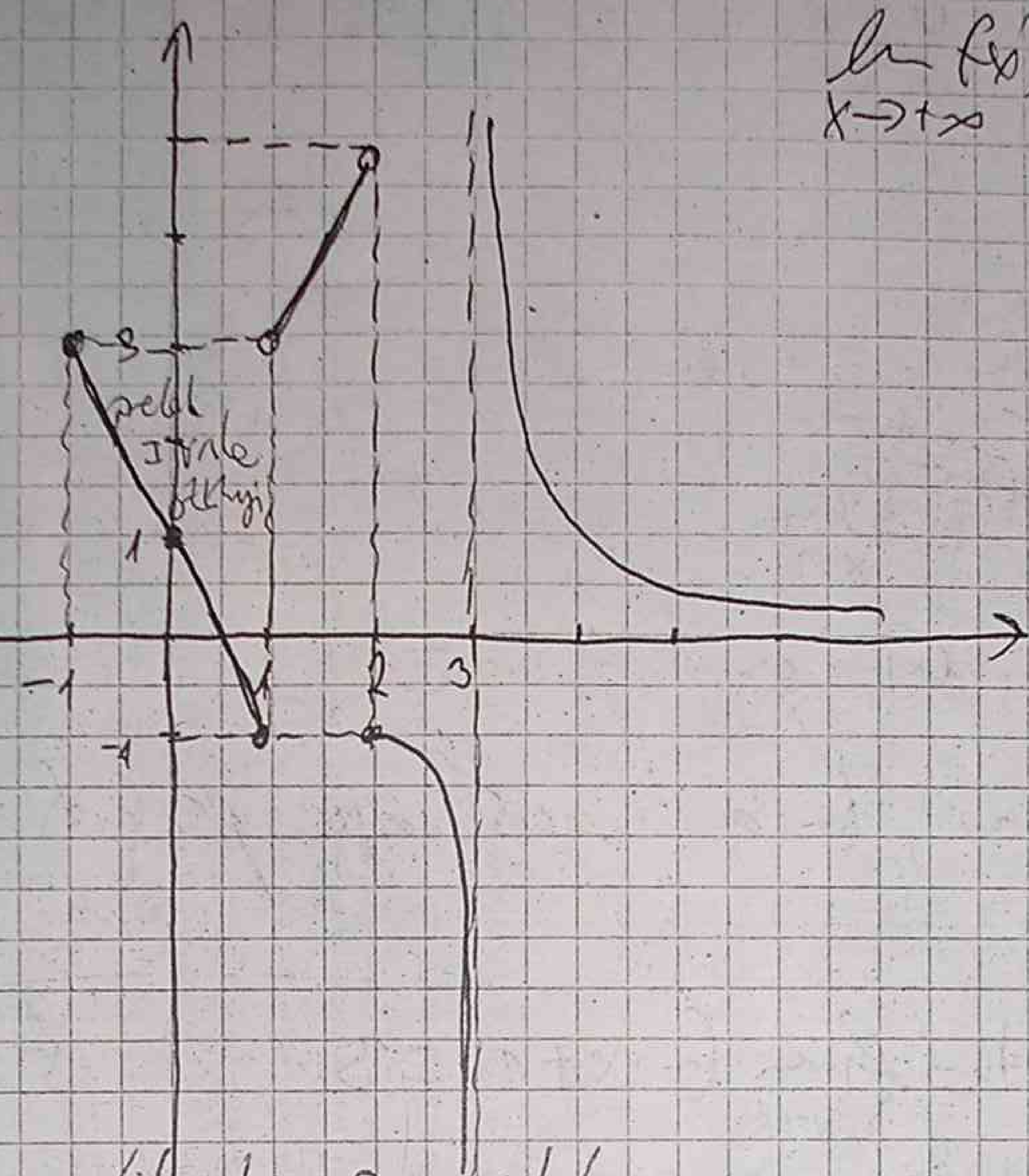
$[\frac{1}{2}, 4] \to$ neprekidna i ograničena

$(0, \frac{1}{2})$ nije ograničena jer bježi u $+\infty$.

U segmentu

$[a, \frac{1}{2})$, $\frac{1}{2} > a > 0$, dobijamo ograniču

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$



243) Ispitati neprekidnost f-je date sa:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$$

$D(f) = R \setminus \{1\}$

Funkcija je sigurno neprekidna na $R \setminus \{1\}$ jer je elementarna.

$\boxed{x=1}$

$$f(1+) = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1}\left(2 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}\right) = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1-x} = t \\ t \to -\infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(2 + \frac{1}{1+2^{t}}\right) = 3$$

$$f(1-) = \lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1}\left(2 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}\right) = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1-x} = t \\ t \to +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{1+2^{t}}\right) = 2$$

$$f(1+) \neq f(1-)$$

Ima neotklonjiv prekid I vrste.