Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Z A D A C I
Z A

DRUGI PARCIJALNI ISPIT IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1
Š.G. 2006 / 2007.
Sarajevo, 08. 01. 2007.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. *Za svaki od prva četiri zadatka ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje se boduje sa po* 2,5 *boda, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po* 0 *bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.*
2. *Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi* 10 *bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je* 0,5 *bodova).*
3. *Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.*

Rezultati drugog parcijalnog ispita iz IM1:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ....

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:

____

Predmetni nastavnik:

____

Doc. Dr. Huse Fatkić

Z A D A C I - Var. A :
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 08. 01. 2007.

Zad. 1. Izračunajte (ili ustanovite da ne postoji) sljedeći limes funkcije koristeći asimptotsku relaciju $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ $(x \to o)$, $(a > 0)$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+4^x+5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

I. 1.
II. $\sqrt[3]{20}$.
III. 10.
IV. Dati limes ne postoji.

Zad.2. Izračunajte derivaciju funkcije

$$f(x) := \int_{-x}^{x} \frac{t^2+1}{t-1}\,dt$$

u tački $x = \dfrac{1}{2}$.

I. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$.

II. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$.

III. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.

IV. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$.

Zad. 3. Izračunajte površinu lika kojeg ograničavaju: grafik funkcije φ zadane formulom

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + x^2 \operatorname{tg}^2 t)^{-1} dt ,$$

x – osa i ordinate u tačkama čije su apscise 0 i x.

I. $\ln(1 + 2x)$.
II. $\ln(1 + |x|)$.
III. $\dfrac{1}{1+|x|}$.
IV. $\dfrac{1}{1+2x}$.

Zad. 4. Zadana je funkcija f formulom

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx(1+n^5x^2)^{-1}.$$

Ispitajte integrabilnost zadane funkcije f, a zatim izračunajte integral $\int_0^x f(t)dt$.

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \ln(1+n^5x^2)$.

II. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^6} \ln(1+n^5x^2)$.

III. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^4} \ln(1+n^4x)$.

IV. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^4} \ln(1+n^5x^2)$.

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom

$$f(x):=\operatorname{sgn}(x)\cdot\ln(x-\sqrt{n^2-x^2}),$$

gdje je n najmanja cifra Vašeg jedinstvenog matičnog broja koja je veća od 0.

a) Odredite prirodni domen Dom (f) i ispitajte ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f).

b) Odredite eventualne presjeke grafika G(f) sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.

c) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\frac{1}{f}$.

d) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke grafika njene recipročne funkcije $\frac{1}{f}$.

e) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.

f) Odredite sliku Im(f) i nacrtajte grafik zadane funkcije f.

Rješenje:

Z A D A C I - Var. B :
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 08. 01. 2007.

Zad. 1. Izračunajte (ili ustanovite da ne postoji) sljedeći limes funkcije koristeći asimptotsku relaciju $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ $(x \to o)$, $(a > 0)$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x + 4^x + 5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

I. 1.
II. $\sqrt[3]{60}$.
III. 12.
IV. Dati limes ne postoji.

Zad.2. Za realnu funkciju f jedne realne promjenljive zadanu formulom:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x\cdot(1+x)}}$$

ispitajte egzistenciju primitivne funkcije, a zatim izračunajte neodređeni integral $I(x) := \int f(x)dx$.

I. $I(x) = 2\operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|}) + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus [-1,0]$;

II. $I(x) = \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|}) + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus [-1,0]$;

III. $I(x) = 2\operatorname{sgn} x(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|}) + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus [-1,0]$;

IV. $I(x) = 2\operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x+1|}) + C$, $x \in \mathbf{R} \setminus [-1,0]$.

Zad. 3. Izračunajte određeni integral

$$I := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^3 e^{-x^2} \arctan\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx\,.$$

I. $I = -20$. II. $I = 20$.

III. I = 0. IV. $I = 10$.

Zad. 4. Izračunajte limes

$$l := \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{2x^2}}{\int_9^x \left(2^{t^2}+5\right)dt}.$$

I. $\underline{l = +\infty.}$
II. $l = 1.$
III. $l = 0.$
IV. $l = 5.$

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom

$$f(x) := \left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)^{\frac{2}{3}},$$

gdje je $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + x^2 \mathrm{tg}^2 t)^{-1} dt$

g) Odredite prirodni domen Dom (f), a zatim ispitajte ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f) i odredite njene eventualne asimptote.
h) Odredite eventualne presjeke grafika G(f) sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.
i) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\frac{1}{f}$.
j) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika .
k) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.
l) Odredite sliku Im(f) i nacrtajte grafik zadane funkcije f.

Rješenje:

Z A D A C I - Var. C :
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 08. 01. 2007.

Zad. 1. Izračunajte (ili ustanovite da ne postoji) sljedeći limes funkcije

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{2x^2}}.$$

I. e.
II. 0.

III. Dati limes ne postoji.
IV. $\frac{1}{e}$.

Zad.2. Izračunajte derivaciju funkcije

$$f(x) := \int_{-x}^{x}\left(2^{t^2}+5\right)dt$$

u tački $x=1$.

I. $f'(1)=14$. II. $f'(1)=7$.
III. $f'(1)=2$. IV. $f'(1)=8$.

Zad. 3. Kriva C zadana je jednačinom $xy^2=1-x$. Izračunati površinu P lika ograničenog lukom krive C i tetivom koja spaja prevojne tačke (te krive).

I. $P=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. II. $P=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

III. $P=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$. IV. $P=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zad. 4. Nađite (prirodni) domen funkcije f zadane formulom

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1},$$

tj. odredite skup svih realnih brojeva x za koje zadani red konvergira.

I. $[0, +\infty)$.
II. $(1, +\infty)$.
III. $(-1, +\infty)$.
IV. $(0, +\infty)$.

Zad.5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana jeformulom

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} .$$

m) Odredite prirodni domen Dom (f), a zatim ispitajte ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f) i odredite njene eventualne asimptote.

n) Odredite eventualne presjeke grafika G(f) sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.

o) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\frac{1}{f}$.

p) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika .

q) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.

r) Odredite sliku Im(f) i nacrtajte grafik zadane funkcije f.

Rješenje:

Z A D A C I - Var. D:
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 08. 01. 2007.

Zad. 1. Za realnu funkciju f jedne realne promjenljive zadanu formulom $f(x) := \sqrt[3]{x^3+2x^2}$ odredite asimptotsku relaciju u slučaju $x \to \pm\infty$.

I. $\sqrt[3]{x^3+2x^2} = x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x+\frac{2}{3}-\frac{4}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \pm\infty$.

II. $\sqrt[3]{x^3+2x^2} = x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x+2-\frac{4}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \pm\infty$.

III. $\sqrt[3]{x^3+2x^2} = x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x+\frac{2}{3}-\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \pm\infty$.

IV. $\sqrt[3]{x^3+2x^2} = x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x+2-\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \pm\infty$.

Zad. 2. Za realnu funkciju f jedne realne promjenljive zadanu formulom:

$$f(x) := (a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{-1} \quad (a,\ b \in \mathbf{R}\setminus\{0\})$$

nađite sve njene primitivne funkcije na njenom prirodnom domenu.

I. $F(x) = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) + \frac{\pi n}{|ab|} + C$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$,

$F\left((2n\pm1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm1}{2|ab|} + C \quad \left(n = \left\lfloor \frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

II. $F(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right) + \frac{\pi n}{|ab|} + C$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$,

$F\left((2n\pm1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm1}{2|ab|} + C \quad \left(n = \left\lfloor \frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

III. $F(x) = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right) + \frac{\pi n}{|ab|} + C$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$,

$F\left((2n\pm1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm1}{2|ab|} + C \quad \left(n = \left\lfloor \frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

IV. $F(x) = \frac{b}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right) + \frac{\pi n}{|ab|} + C$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$,

$F\left((2n\pm1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm1}{2|ab|} + C \quad \left(n = \left\lfloor \frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

Zad. 3. Izračunajte integral

$$I := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x \cos x}\, dx .$$

I. $I = \frac{2}{3}$. II. $I = \frac{4}{3}$.

III. $I = \frac{2}{3}\pi$. IV. $I = \frac{4}{3}\pi$.

Zad. 4. Nađite skup svih realnih brojeva x za koje konvergira red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} .$$

I. $[0, +\infty)$.
II. $(1, +\infty)$.
III. $(-1, +\infty)$.
IV. $(0, +\infty)$.

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom

$$f(x) := \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(x + \sqrt{n^2 - x^2}),$$

gdje je n najmanja cifra Vašeg jedinstvenog matičnog broja koja je veća od 0.

s) Odredite prirodni domen Dom (f) i ispitajte ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f).
t) Odredite eventualne presjeke grafika G(f) sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.
u) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\frac{1}{f}$.
v) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f , kao i eventualne prelomne i povratne tačke grafika njene recipročne funkcije $\frac{1}{f}$.
w) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.
x) Odredite sliku Im(f) i nacrtajte grafik zadane funkcije f.

Rješenje:

Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Z A D A C I
Z A
DRUGI PARCIJALNI ISPIT IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1
Akademska **2007 - 2008. godina**
Sarajevo, 09. 01. 2008.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. *Za svaki od prva četiri zadatka ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje se boduje sa po* 2,5 *boda, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po* 0 *bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.*

2. *Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi* 10 *bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je* 0,5 *bodova).*

3. *Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.*

Rezultati drugog parcijalnog ispita iz IM1:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ....

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:

____

Predmetni nastavnik:

____

Vanr. Prof. Dr. sci. Huse Fatkić

ZADACI - Var. A :
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 09. 01. 2008.

Zad. 1. Aproksimirajte funkciju f zadanu formulom $f(x) := 1 + \sqrt{x^5 + x^4}$ *Maclaurinovim polinomom* četvrtog stepena i procijenite grešku $|R_4|$ za $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

I. $f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$, $|R_4| < \frac{1}{2^4}$. **III.** $f(x) \approx 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$, $|R_4| < \frac{1}{2^9}$.

II. $f(x) \approx 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4$, $|R_4| < \frac{1}{2^5}$. **IV.** $f(x) \approx 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4$, $|R_4| < \frac{1}{2^8}$.

Zad. 2. Izračunajte integrale $I := \int\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)\mathrm{d}x$, $J := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x \cos x}\,\mathrm{d}x$.

I. $I = \ln\left|\sin x \operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C$, $J = \frac{2}{3}$. **III.** $I = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C$, $J = \frac{4}{3}$.

II. $I = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C$, $J = \frac{2}{3}\pi$. IV. $I = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|\right] + C$, $J = \frac{4}{3}\pi$.

Zad. 3. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) := \int_{-x}^{x} \frac{t^2+1}{t-1}\mathrm{d}t$ u tački $x = \frac{1}{2}$.

I. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$. **II.** $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$. III. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$. IV. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$.

Zad. 4. Kriva C zadana je jednačinom $xy^2 = 8 - 4x$. Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom oko x-ose lika (u xy-ravni) ograničenog zadanom krivom C i pravom koja prolazi kroz prevojne tačke te krive.

I. $V = \frac{8\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **II.** $V = 8\pi\left(\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right)$. III. $V = 8\pi\left(\ln\frac{2}{3} - 1\right)$. IV. $V = 8\pi\left(\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$.

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x) := \operatorname{arc\,ctg}\frac{x+n}{x-n}$, gdje je n najmanja cifra Vašeg jedinstvenog matičnog broja koja je veća od 1.

a) Odredite prirodni domen Dom (f), a zatim ispitajte ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f) i odredite njene eventualne asimptote.
b) Odredite eventualne presjeke grafika G(f) sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.
c) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\frac{1}{f}$.
d) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika .
e) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.
f) Odredite sliku Im(f) i nacrtajte grafik zadane funkcije f.

Rješenje: ....@..................

Z A D A C I - Var. B :
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 09. 01. 2008.

Zad. 1. Izračunajte granične vrijednosti L_1 (primjenom *Taylorove formule*) i L_2 (pomoću određenog integrala) ako je $L_1 := \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$, $L_2 := \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(i-1)^2 + n^2}$.

I. $L_1 = \frac{\pi}{4}$, $L_2 = \frac{\pi}{3}$. **II.** $L_1 = 1$, $L_2 = \frac{\pi}{3}$. **III.** $L_1 = 1$, $L_2 = \frac{\pi}{6}$. **IV.** $L_1 = 2$, $L_2 = \frac{\pi}{4}$.

Zad. 2. Za sve $a,b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ odredite funkciju $F_{a,b}(x)$ tako da je

$$\int (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-1}\,dx = F_{a,b}(x) + C, \text{ gdje je } C \text{ proizvoljna realna konstanta .}$$

....

I. $F_{a,b}(x) = \frac{a}{b} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) + \frac{\pi n}{|ab|}$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm 1}{2|ab|}$; $\left(n := \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$.

II. $F_{a,b}(x) = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + \frac{\pi n}{|ab|}$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm 1}{2|ab|}$; $\left(n := \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$.

III. $F_{a,b}(x) = \frac{b}{a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + \frac{2\pi n}{|a|}$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm 1}{2|ab|}$; $\left(n := \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$.

IV. $F_{a,b}(x) = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + \frac{2\pi n}{|ab|}$ za $(2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n\pm 1}{2|ab|}$; $\left(n := \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$.

Zad. 3. Izračunajte derivaciju prvog reda funkcije $f(x) := \int_{-x}^{x} \exp(-\frac{1}{t^2})dt$, ($x \in \mathbf{R}$), u tački $x = 10$.

I. $f'(10) = \frac{2}{\sqrt[10]{e}}$. II. $f'(10) = \sqrt{\frac{2}{e}}$. **III.** $f'(10) = \frac{2}{\sqrt[100]{e}}$. IV. $f'(10) = \frac{2}{\sqrt{e}}$.

Zad. 4. Kriva C zadana je jednačinom $xy^2 = 8 - 4x$. Izračunajte površinu P lika u ravni Oxy ograničenog lukom zadane krive C i tetivom koja spaja prevojne tačke te krive.

....

I. $P = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$. II. $P = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. III. $P = 8\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$. IV. $P = 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

....

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x) := \arccos \frac{x+n}{x-n}$,

gdje je n najmanja cifra Vašeg jedinstvenog matičnog broja koja je veća od 1.

a) Odredite prirodni domen Dom (f), a zatim ispitajte ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f) i odredite njene eventualne asimptote.

b) Odredite eventualne presjeke grafika G(f) sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.

c) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\frac{1}{f}$.

d) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika .

e) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.

f) Odredite sliku Im(f) i nacrtajte grafik zadane funkcije f.

Rješenje: ....@....................

Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Z A D A C I
S A
POPRAVNOG (PRVOG PARCIJALNOG, DRUGOG PARCIJALNOG I INTEGRALNOG) ISPITA IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 2
Akademska **2007 - 2008. godina**
Sarajevo, 30. 06. 2008.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. *Za svaki od prva četiri zadatka ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje se boduje sa po* 2,5 *boda, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po* 0 *bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje* 0 *bodova.*

2. *Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi* 10 *bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je* 0,5 *bodova).*

3. ***Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.***

Rezultati prvog parcijalnog ispita iz IM2:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ....

Rezultati drugog parcijalnog ispita iz IM2:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ....

____

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:

____

Predmetni nastavnik:
Huse Fatkić

V. Prof. Dr. Sci. Huse Fatkić, dipl. mat.

Z A D A C I - Gr. A
za popravni drugog parcijalnog ispita (ili drugog dijela integr. ispita) iz IM2,
Sarajevo, 30. 06. 2008.

Zad. 1. Nađite inverznu *Laplaceovu transformaciju* $\mathcal{L}^{-1}$ funkcije F zadane formulom

$$F(s) := \ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right).$$

I. $(\mathcal{L}^{-1}(F))(t) = \frac{2}{t}(\sin t - \cos\omega t)$. **III.** $(\mathcal{L}^{-1}(F))(t) = \frac{2}{t}(1-\cos\omega t)$.

II. $(\mathcal{L}^{-1}(F))(t) = \frac{2}{t}(\sin\omega^2 t - \cos\omega t)$. IV. $(\mathcal{L}^{-1}(F))(t) = \frac{2}{t}(\sin t - \cos\omega^2 t)$.

Zad. 2. Primjenom dvojnog integrala nađite površinu P oblasti D u ravni Oxy ograničene pravcima $y=x,\ y=-x$ i kružnicom $x^2+y^2=2x$ $(|y|\le x)$.

I. $P = 1+\frac{\pi}{12}$. II. $P = 1+\frac{5\pi}{2}$. **III.** $P = 1+\frac{\pi}{2}$. IV. $P = 1+\frac{3\pi}{2}$.

Zad. 3. Izračunajte zapreminu v tijela V omeđenog s površi zadanoj formulom:

$$\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \quad (a,b,c>0).$$

I. $v = \frac{abc\pi}{3}$. II. $v = \frac{a^3b^3c^3\pi}{3}$. **III.** $v = \frac{abc\pi}{2}$. IV. $v = \frac{4}{3}a^3b^3c^3\pi$.

Zad. 4. Neka je f^* (tzv. *parabolic – cup*) funkcija dobivena kao 2π - periodičko proširenje funkcije f zadane formulom $f(x)=x^2$, $x\in[-\pi,\pi]$. Nacrtajte grafik te funkcije i razvijte je u *Fourierov red* .

I. $\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$. III. $\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$.

II. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$ IV. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

Zad. 5. Neka je vektorsko polje zadano formulom :

$$\vec{A} := (-x,\ yf(x),\ z(f''(x)-x^2)), \tag{1}$$

gdje je f realna funkcija jedne realne promjenljive .

a) Odredite funkciju f tako da vektorsko polje zadano formulom (1) bude bezizvorno i da je $f(0) = -1$, $f'(0)=0$, a zatim nacrtajte grafik tako dobivene funkcije f.

b) Nađite vektorsku liniju polja (1) koja prolazi tačkom $A(1,1,1)$ i skicirajte njen grafik.

c) Izračunajte fleksiju i torziju u tački A dobijene (u b)) vektorske linije.

d) Ispitati da li postoji realna funkcija f jedne realne promjenljive takva da polje zadano formulom (1) bude potencijalno.

Rješenje: : (*Uputa.* Ovaj zadatak je bio na dodatnom popravnom ispitnom roku od 30. 8. 2007. iz IM2 (a i na nekim drugim ispitnim rokovima iz IM2)).

Z A D A C I - Gr. B

za popravni drugog parcijalnog ispita (ili drugog dijela integr. ispita) iz IM2,

Sarajevo, 30. 06. 2008.

Zad. 1. Nađite inverznu *Laplaceovu transformaciju* $\mathcal{L}^{-1}$ funkcije F zadane formulom

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^n} + \frac{1}{(p^2+1)^2}, \ (n \in \mathbf{N}).$$

I. $\mathcal{L}^{-1}\ (F)(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$. II. $\mathcal{L}^{-1}\ (F)(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^t + \frac{1}{2}(t \sin t - \cos t)$. III. $\mathcal{L}^{-1}\ (F)(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$. IV. $\mathcal{L}^{-1}\ (F)(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^t + \frac{1}{2} t(\sin t - \cos t)$.

Zad. 2. Sa ili bez primjene *Laplaceove transformacije* riješite diferencijalnu jednačinu $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.

I. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{1}{37}\sin x - \frac{6}{37}\cos x\right)$. **III.** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x\right)$.

II. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{3}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x\right)$. IV. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{1}{37}\sin x - \frac{3}{37}\cos x\right)$.

Zad. 3. Izračunajte zapreminu v tijela V omeđenog s površi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \ \ y = x^2 + z^2 \ \ (y \geq x^2 + z^2).$$

I. $v = \frac{\pi}{6}(7\sqrt{2} - 3)$. II. $v = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{2} - 1)$. **III.** $v = \frac{\pi}{6}(8\sqrt{2} - 7)$. IV. $v = \frac{\pi}{6}(7\sqrt{2} - 5)$.

Zad. 4. Odredite konstante a, b, c tako da vektorsko polje

$$\vec{F} := (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

bude potencijalno. Nađite (skalarni) potencijal dobijenog polja.

I. $a = 5, \ b = 3, \ c = -1. \ \ u(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 - zy + yx + 4zx + C$, gdje je C pr. konst.

II. $a = 4, \ b = 4, c = -1. \ \ u(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 - zy + 2yx + zx + C$, gdje je C pr. konst.

III. $a = 4, \ b = 2, \ c = -1. \ u(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 - zy + yx + 4zx + C$ gdje je C pr. konst.

IV. $a = 5, \ b = 2, \ c = -1. \ u(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 - zy + yx + 4zx + C$ gdje C pr. konst.

Zad. 5. Zadana je realna funkcija f jedne realne promjenljive formulom:

$$f(x) = \arccos|\sin x|.$$

a) Nacrtajte grafik zadane funkcije f i ispitajte da li joj se može pridružiti *Fourierov red* koji konvergira ka toj funkciji na $\mathbf{R}$.

b) Razvijte u Fourierov red zadanu funkciju f i ispitajte apsolutnu i uniformnu konvergenciju dobijenog reda.

c) Odredite (ili ustanovite da se ne može odrediti) *Laplaceovu transformaciju* zadane funkcije f.

d) Odredite (ili ustanovite da se ne može odrediti, odnosno ustanovite da ne postoji) *Fourierovu transformaciju* i *Fourierov integral* zadane funkcije f i funkcije $\tilde{f}$ definirane sa $\tilde{f}(x) = f(x)$ za svaki $x \in [0, 2\pi]$ i $\tilde{f}(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbf{R} \setminus [0, 2\pi]$.

Rješenje: Ovaj zadatak je kombinacija Zad. 1. i Zad. 3. sa Domaće zadaće 4 iz IM2 od 2. 5. 2008. (a i sa nekih prethodnih ispitnih rokova iz IM2)).

Napomena: Upute, rješenja, rezultati i odgovori za ove ispitne zadatke ili za njihove analogone i neznatne modifikacije mogu se vidjeti u preporučenoj literaturi (posebno u *Univerzitetskoj knjizi* **[Fatkić, H. - Dragičević, V., *Diferencijalni račun funkcija dviju i više promjenljivih*, I.P. Svjetlost, Sarajevo, 2006.]** i/ili u materijalima za Predavanja iz *Inženjerske matematike* 2 (elektronska verzija *univerzitetskog udžbenika*: FATKIĆ, H., Inženjerska matematika 2, Sarajevo, 2006. (http://courses.etf.unsa.ba/)).

Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

PRIPREMNI ZADACI
za
DRUGI PARCIJALNI ISPIT IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1
Š.G. 2005 / 2006.

UPUTSTVO:

1. *Za svaki od prva četiri zadatka ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Za svaki od prva četiri zadatka koje dobijete na ispitu,nakon što ga riješite na ispitu, zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak . Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor se boduje sa po* 2,5 *boda, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po* (–0,5) *bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.*
2. *Peti zadatak, koji dobijete na ispitu, je s otvorenim odgovorom i trebate ga riješiti detaljno. Tačno urađen taj zadatak donosi* 10 *bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je* 0,5 *bodova).*

Sarajevo, 10.01. 2006.

Predmetni nastavnik:

Doc. Dr. Huse Fatkić

PRIPREMNI ZADACI 1:

Zad.1. Data je familija ($f_\alpha : \alpha \geq 0$) funkcija $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiranih sa

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} 2\sqrt{\alpha x^2} - \alpha, & |x| \leq \sqrt{\alpha}, \\ 2x^2 - x^4, & |x| > \sqrt{\alpha}. \end{cases}$$

Ustanovite koja je od sljedeće četiri izjave tačna:

A. Svaka od funkcija f_α $(\alpha \geq 0)$ je neprekidna na **R**.
B. Ni jedna od funkcija f_α $(\alpha \geq 0)$ nije neprekidna na **R.**
C. Postoje dvije vrijednosti od α $(\alpha \geq 0)$ za koje je f_α neprekidna na R.
D. Samo je jedna funkcija f_α iz date familije neprekidna na **R**.

(Ili: Nađite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^x$. **Rezultat:** e^{b-a}, $(a, b \in \mathbf{R})$.)

Zad.2. Izračunajte (ili ustanovite da ne postoji) sljedeći limes funkcije koristeći asimptotsku relaciju $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ $(x \to 0)$, $(a > 0)$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x + 4^x + 5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

A. 1.
B. $\sqrt[3]{60}$.
C. 4.
D. Dati limes ne postoji.

(Ili: Napišite *Maclaurinov* razvoj funkcije $f(x) := \sin(\sin x)$ po potencijama od x do člana x^4 sa ostatkom u *Peanovoj* formi. **Rezultat:** Iz $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ slijedi

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right]^3 + o(x^4) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left[x^3 + o(x^4)\right] + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4), (x \to 0).)$$

Zad.3. Izračunajte integrale:

$$I := \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx\,;\quad J := \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1 + \sqrt{3}\tan x\right)dx,$$ (Uputa: Pogodno je koristiti relaciju $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.).

A. $I = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln\left|2\sin x + 3\cos x\right| + C$, $J = \frac{\pi}{3}\ln 2$.

B. $I = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}\ln\left|2\sin x + 3\cos x\right| + C$, $J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

C. $I = \frac{1}{13}\ln\left[e^{12x}\cdot\left|2\sin x + 3\cos x\right|^5\right] + C$, $J = \frac{\pi}{3}\ln\sqrt{3}$.

D. $I = \frac{1}{13}\ln\frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x} + C$, $J = \frac{\pi}{3}\ln 4$.

Zad.4. Izračunajte limes

$$l := \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x\left(e^{t^2}+10\right)dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}.$$

A. $l = +\infty$.
B. $l = 1$.
C. $l = 0$.
D. $l = 5$.

(Ili: Primjenom *Lagrangeove* teoreme (o srednjoj vrijednosti) diferencijalnog računa nađite približnu vrijednost, tačnu na četiri decimale, od arctg 1,003567.

Rezultat: Iz $\operatorname{arctg}(x+h) = \operatorname{arctg}x + h\cdot\frac{1}{1+(x+\theta h)^2}$, za $x = 1$ i $h = 0{,}003567$,

slijedi arctg 1,003567 $\begin{cases} < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 0{,}003567 & \text{za } \theta=0, \\ > \frac{\pi}{4}+0{,}003567\cdot\frac{1}{1+1{,}003567} & \text{za } \theta=1, \end{cases}$,tj. 0,787175<arctg 1,003567 <

< 0,787181, pa približna vrijednost od arctg 1,003567, tačna na četiri decimale, iznosi 0,7871.)

Zad.5. Data je realna funkcija f jedne realne promjenljive sa:

$$f(x) := \frac{\left(x^2-2x-15\right)e^x}{\left|x^2-1\right|} \quad (\text{ ili } f(x) := \sqrt[3]{x^4-2x^3+x^2} \text{ ili } f(x) := (x-a)\,e^{\frac{1}{x}}\ ).$$

a) Odredite prirodni domen Dom (f) i ispitajte ponašanje date funkcije f na rubovima područja Dom (f).

b) Odredite eventualne presjeke grafika date funkcije f sa koordinatnim osama O_x i O_y, a zatim ispitajte znak od f.

c) Odredite eventualne horizontalne, vertikalne i kose asimptote date funkcije f.

d) Nađite ekstreme i tablicu monotonosti za funkciju g datu sa $g(x) := \left|x^2-1\right|\cdot f(x)$.

e) Nađite tačke infleksije i tablicu konveksnosti i konkavnosti za funkciju g datu u d).

f) Odredite sliku Im(g) i nacrtajte grafik funkcije g iz d).

PRIPREMNI ZADACI 2:

Zad.1. Odredite red beskonačno male veličine $\alpha(x) := \mathrm{tg}x - \sin x$ u odnosu na x kad $x \to 0$ i napišite odgovarajuću asimptotsku relaciju.

A. $\alpha(x)$ je beskonačno mala veličina trećeg reda u odnosu na x kad $x \to 0$ i vrijedi asimptotska relacija $\alpha(x) \sim \frac{1}{2}x^3$ $(x \to 0)$.

B. $\alpha(x)$ je beskonačno mala veličina drugog reda u odnosu na x kad $x \to 0$ i vrijedi asimptotska relacija $\alpha(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ $(x \to 0)$.

C. $\alpha(x)$ je beskonačno mala veličina istog reda kao i x u odnosu na x kad $x \to 0$ i vrijedi asimptotska relacija $\alpha(x) \sim x$ $(x \to 0)$.

D. $\alpha(x)$ je beskonačno mala veličina trećeg reda u odnosu na x kad $x \to 0$ i vrijedi asimptotska relacija $\alpha(x) \sim \frac{1}{3}x^3$ $(x \to 0)$.

(Ili: Izračunajte limes $l := \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{10} - 1}{x}$. **Rezultat:** $l = 10$.)

Zad.2. Odredite minimalnu površinu trougla ABC čiji je vrh A(-1,0), vrh B je dirałište tangente krive date sa $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, a vrh C je sjecište te tangente sa osi O_x.

A. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{3}$.

(Ili: Funkciju f datu izrazom $f(x) = x^2 \ln^2 x$ u okolini $U(1)$ tačke 1 aproksimirajte *Taylorovim* polinomom četvrtog stepena i procijenite grešku aproksimacije za $x \in \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$. **Rezultat:** $f(x) = x^2 \ln^2 x \approx T_4(x) = (x-1)^2 + (x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4$ za svaki $x \in U(1)$, gdje se za $U(1)$ može uzeti skup $(0,+\infty)$; Iz $R_4(x) =$
$8 \cdot \frac{(x-1)^5}{5!} \cdot \frac{\ln(1+\theta(x-1))}{(1+\theta(x-1))^3}$
za $x \in \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$ slijedi $|R_4(x)| < \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{10^5} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{10^6} \approx 6,\dot{6} \cdot 10^{-8}$, jer je $\ln(1+x) \approx x$ za male vrijednosti argumenta x.)

Zad.3. Izračunajte integrale

$$I := \int\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sinh x}\right)dx\,,\quad J:=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx\,.$$

A. $I=\ln\left|\sin x\tanh\frac{x}{2}\right|+C\,,\ J=\frac{2}{3}$.

B. $I=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\tanh\frac{x}{2}\right|+C\,,\ J=\frac{4}{3}$.

C. $I=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tanh\frac{x}{2}\right|+C\,,\ J=\frac{2}{3}\pi$.

D. $I=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|\right]+C\,,\ J=\frac{4}{3}\pi$.

(Ili: Izračunajte integrale $I:=\int\frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$, $J:=\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx$. **Rezultat:** $I=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C\,,\ J=\frac{1}{2}$.)

Zad.4. Izračunajte derivaciju funkcije

$$f(x):=\int_{-x}^{x}\exp\left(-\frac{10}{t^2}\right)dt$$

u tački $x=2$.

A. $f'(2)=\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$.

B. $f'(2)=\frac{2}{\sqrt{e^5}}$.

C. $f'(2)=\frac{20}{\sqrt[4]{e}}$.

D. $f'(2)=\frac{10}{\sqrt{e^5}}$.

(Ili: Nađite najmanju i najveću vrijednost funkcije $F(x):=\int_0^x\frac{t-1}{t^2+1}dt$ na segmentu $\left[0,\sqrt{3}\right]$. **Rezultat:** $\min F=\min\left\{F(0),F(1),F\left(\sqrt{3}\right)\right\}=F(1)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$, $\max F=F(0)=0$.)

Zad.5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive definisana je izrazom

$f(x) := \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$ (ili $f(x) := \dfrac{x}{4} + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ ili $f(x) := \arctan\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$).

g) Odredite prirodni domen $\operatorname{Dom}(f)$ date funkcije f.

h) Odredite eventualne presjeke grafika $G(f)$ funkcije f sa koordinatnim osama.

i) Ispitajte znak date funkcije f.

j) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za datu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\dfrac{1}{f}$.

k) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema date funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke.

l) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke date funkcije f.

m) Odredite sliku $\operatorname{Im}(f)$ i nacrtajte grafik date funkcije f.

♫