Kompleksni brojevi

DefinicijaNeka su u skupu RxR uređenih parova realnih brojeva dvije operacije, koje ćemo označiti sa $+$ odnosno $\cdot$ i zvati sabiranje odnosno množenje, definirane formulama:

$$(\forall a,\ b,\ c,\ d \in R)\ (a,\ b) + (c,\ d) = (a + c, b + d)$$

$$(\forall a,\ b,\ c,\ d \in R)(a,\ b) \cdot (c,\ d) = (a\ c - b\ d, a\ d + b\ c)$$

Skup $RxR = \{(x\,y) : x,\ y \in R\}$ u kome su definirane operacije $+$ i $\cdot$ zove se skup kompleksnih brojeva i, najčešće, označava sa C, a njegovi elementi zovu se kompleksni brojevi. Njih ćemo označavati jednim slovom: $z, w; z_1, z_2, \ldots$

$R \subset C$, $(x,\ 0) = x$, specijalno $(0,\ 0) = 0$, $(1,\ 0) = 1$. Zbog toga kompleksne brojeve $(x,\ 0)$ zovemo realnim brojevima. Sve ostale kompleksne brojeve, tj. elemente $(x, y) \in C \setminus R$, zovemo imaginarnim brojevima. Kompleksne brojeve kod kojih je prva komponenta jednaka 0, tj. elemente $(0,\ y) \in C$ $(y \neq 0)$ zovemo čisto imaginarnim brojevima. Specijalno, element $(0,\ 1) \in C$ zovemo, po tradiciji, imaginarna jedinica i označavamo sa i (ili j), tj. po definiciji je

$$(0,\ 1) = i$$

. Kod kompleksnog broja $z = (x,\ y) = x + iy$ broj x zove se realni dio, a y imaginarni dio (komponenta) kompleksnog broja z i piše se

$$x = Re(z)(ili\ Re(z)),\quad y = Im(z)(ili\ Im(z))$$

. Jednostavno se provjerava da vrijedi:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1,\quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

Definicija Neka je $z = x + iy$ $(x, y \in R)$ kompleksan broj. Tada za broj $\bar{z} = x - iy$ kažemo da je konjugovan (konjugiran) ili spregnut kompleksan broj broju z.

Definicija Realan nenegativan broj $\sqrt{x^2 + y^2}$ zove se apsolutna vrijednosti li modul kompleksnog broja $z = x + iy$ $(x, y \in R)$ i označava se sa $|z|$ tj.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Očigledno je

$$(\forall z \in C)|z| \geq 0;\ |\bar{z}| = |z|;\ z\bar{z} = |z|^2, \text{tj. } |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Kompleksnom broju $z = (x, y)(= x + iy)$ pridružuje se u pravouglom koordinatnom sistemu xOy tačka $M(x, y)$ (tačka M zove se slika broja z, dok se broj z zove afiks tačke M), čime se uspostavlja bijekcija skupa C na ravan xOy. Tačku $M(x, y)$ koja odgovara kompleksnom broju $z = x + iy$ identifikujemo sa tim brojem, pa govorimo o tački z. Ravan xOy na koju su na opisan način preslikani kompleksni brojevi zove se kompleksna ili Gaussova ravan. Specijalno, realni brojevi $z = (x, 0) = x$ preslikavaju se na prvu koordinatnu osu ($x -$ osu), koja se zbog toga sada zove realna osa, a čisto imaginarni brojevi $z = (0, y) = iy$ preslikavaju se na drugu koordinatnu osu ($y -$ osu), koja se zbog toga zove imaginarna osa. Takođe, svakoj tački $M(x, y)$ kompleksne ravni odgovara vektor položaja (radijus vektor)$\vec{OM}$ tačke M, tj. svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara tačno jedan vektor $\vec{OM}$ i obratno. Dužina $|\vec{OM}|$ radijus-vektora koji odgovara broju $z = x + iy$ $(x, y \in R)$, prema slici jednaka je, očigledno,$\sqrt{x^2 + y^2}$. Otuda imamo

$$|z| = |\vec{OM}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definicija Neka je $M(x, y)$ tačka koja predstavlja kompleksni broj $z = x + iy$, $(z \neq 0)$. Svaki mjerni broj ϕ orijentisanog ugla $(x, \vec{OM}\ )$ koji čini radijus-vektor $\vec{OM}$ sa osom Ox, tj. svaki realan broj ϕ određen pomoću zove se argument (ili arkus ili amplituda) broja z, i označava se sa $Arg\ z$ (ili $Arc\ z$ ili $Amp\ z$). Argument ϕ broja z koji zadovoljava uslov $-\pi < \phi \leq \pi$ zove se glavna vrijednost argumenta broja z i označava se sa $arg\ z$ (ili $arc\ z$ ili $amp\ z$). Uglu $(x, \vec{OM}\ )$ pripada tačno jedan mjerni broj ϕ_0 koji pripada razmaku $(-\pi, pi]$, dok se svi ostali mjerni brojevi ϕ ugla $(x, \vec{OM}\ )$ dobiju po formuli

$$\phi = \phi_0 + 2k\pi (k \in Z)$$

Dakle, broj $\phi = Arg\ z$ nije jednoznačno određen; $Arg\ z$ je određen samo za $z \neq 0 = 0 + i0$ i to samo do aditivne konstante $2k\pi$, dok je $arg\ z$ potpuno određen brojem $z (z \neq 0)$ i važi

$$Arg\ z = arg\ z + 2k\pi (k \in Z)$$

tj. simbol $Arg\ z$ ima beskonačno mnogo vrijednosti.
Glavna vrijednost argumenta broja $z = x + iy$ data je (u slučaju kada se uzima varijanta $(-\pi < arg\ z \leq \pi)$ sa:

$$argz = \begin{cases} arctg\frac{y}{x} & (x > 0) \\ \pi + arctg\frac{y}{x} & (x < 0 \wedge y > 0) \\ -\pi + arctg\frac{y}{x} & (x < 0 \wedge y < 0) \\ \frac{\pi}{2} & (x = 0 \wedge y > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x = 0 \wedge y < 0) \\ \pi & (x < 0 \wedge y = 0) \end{cases}$$

Položaj tačke $M(x, y)$ koja predstavlja kompleksni broj $z = x + iy$, $(z \neq 0)$, određen je takođe i tzv. polarnim koordinatama r i ϕ, gdje je dužina radijus-vektora $r = |\vec{OM}| = |z|$, a ϕ je orijentisani ugao koji čini vektor $\vec{OM}$ sa osom Ox.
Kako su kosinus i sinus ugla $(x, \vec{OM}\ )$, odnosno mjernog broja ϕ ovog ugla zadani formulama

$$cos\phi = \frac{x}{r},\ sin\phi = \frac{y}{r}$$

to imamo

$$z = r(cos\phi + i\ sin\phi),\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\phi = \frac{y}{x}$$

Izraz $r(cos\phi + i \sin\phi)$ zovemo trigonometrijskim oblikom kompleksnog broja z.
Ako formalno stavimo $e^z = e^{x+iy} = e^x(cos\ y + i\ sin\ y)$, tj. specijalno $e^{iy} = cos\ y + i\ sin\ y$ onda se izraz može pisati u obliku

$$z = re^{i\phi}$$

Izraz $z = re^{i\phi}$ zove se eksponencijalni oblik kompleksnog broja z. Relacija $e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$, kojom smo zapravo definirali $e^{i\phi}$, može se dokazati, ako se e^x definira na (neki drugi) podesan način. Tada ta relacija predstavlja tzv. Eulerovu formulu.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),\ (k = 0, 1, 2, ..., n - 1$$

Broj z_0 zove se glavna vrijednost korijena $\sqrt[n]{a}$
Premda povijesno dokazana ranije, de Moivrevoa formula se može jednostavno izvesti iz Eulerove formule kako slijedi:

$$e^{ix}cos\ x + isin\ x$$

$$\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$$

i koristeći Eulerovu formulu slijedi da je

$$e^{i(nx)} = cos(nx) + isin(nx)$$

Za n>0, razmatramo najjednostavniji slučaj gdje je n=1 i formula, očito vrijedi. Predpostavimo da je formula istinita i za neki cijelobrojni k, što znači da predpostavljamo da je

$$(cos\ x + isin\ x)^k = cos(kx) + isin(kx)$$

Razmotrimo sada slučaj gdje je $n = k + 1$

$$\begin{aligned} (cos\ x + isin\ x)^{k+1} &= (cos\ \ x + isin\ \ x)^k(cos\ \ x + isin\ \ x) \\ &= [cos(kx) + isin(kx)]\,(cos\ \ x + isin\ \ x) \\ &= cos(kx)cos\ x - sin(kx)sin\ x + i\,[cos(kx)sin\ x + sin(kx)cos\ x] \\ &= cos\,[(k+1)x] + isin\,[(k+1)x] \end{aligned} \tag{1}$$