$a_1 \cdot q^{\ldots} - a_1 \cdot q^{\ldots} = 16$

ZBIR PRVIH n ČLANOVA GEOMETRIJSKOG NIZA

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}}$$ ako je $q > 1$.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}}$$ ako je $q < 1$.

① U geometrijskom nizu je $a_6 - a_4 = 216$, $a_3 - a_1 = 8$, $S_n = 40$. Izračunati a_1, q i n.

② Izračunati a_1 i a_7 u geometrijskom nizu ako je $q = 2$ i $S_7 = 625$.

③ $a_1 = 2$, $a_n = 1458$, $S_n = 2186$. Izračunati q i n.

④ $a_1 = 2$, $q = -3$, $S_n = -364$. Izračunati a_n i n.

⑤ Izračunati a_1, q i n, ako je a) $a_7 - a_5 = 48$, $a_6 - a_4 = 24$ i $S_n = 1023$. b) $a_3 + a_5 = -40$, $a_1 - a_5 = 30$; $S_n = 42$.

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

①
$$a_6 - a_4 = 216 \qquad S_n = 40$$
$$a_3 - a_1 = 8$$

$$a_1 \cdot q^5 - a_1 q^3 = 216$$
$$a_1 q^2 - a_1 = 8$$
$$a_1 (q^2 - 1) = 8$$
$$a_1 q^3 (q^2 - 1) = 216 \quad / :$$
$$q^3 = 27$$
$$q = \sqrt[3]{27}$$
$$\boxed{q = 3} \rightarrow q > 1$$
$$a_1 \cdot 9 - a_1 = 8 \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$S_n = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1}$$
$$40 = \frac{3^n - 1}{2}$$
$$80 = 3^n - 1$$
$$3^n = 81$$
$$3^n = 3^4$$
$$\boxed{n = 4}$$

(4) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\dots}{2(2n+1)}$

I $n=1$

$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{2}{\cancel{2}\cdot 3}$ (T)

II $n=k$

$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$

III $n=k+1$

$\frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$

$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)(2k+3)+(k+1)^2\cdot 2}{2(2k+1)(2k+3)}=$

$=\frac{(k+1)(k(2k+3)+2(k+1))}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k^2+3+k+1)^2\cdot 2}{2(2k+1)(2k+3)}=$

$=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2\cancel{(2k+1)}(2k+3)}=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}}$

$\boxed{k_1=-\frac{1}{2}}$

$\boxed{k_2=-2}$

$LS=DS$

Tvrdnja je tačna za svaki prirodan broj n.

(5) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[8]{x}\right)^n$

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$\binom{10}{k}x^{-\frac{1}{4}(10-k)}x^{\frac{1}{8}k}$

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=56$

$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=56$

$\boxed{n=10}$

$-\frac{1}{4}(10-k)+\frac{1}{8}k=\frac{1}{2}$

$-\frac{10}{4}+\frac{k}{4}+\frac{k}{8}=\frac{1}{2}$

$\frac{-20+2k+k}{8}=\frac{1}{2}$

$\frac{-20+3k}{8}=\frac{1}{2}$

$-40+6k=8$

$6k=48$

$\boxed{k=8}$

$T=9$

$T_9=\binom{10}{8}x^{\frac{1}{2}}=\frac{10!}{8!\,2!}x^{\frac{1}{2}}=$

$=\frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 2!}=\boxed{45x^{\frac{1}{2}}}$

(2) Odrediti x tako da brojevi $x+5,\ 25-x,\ 30+2x$, budu 3 uzastopna člana geometrijskog niza.

$a_1 = x+5 \qquad x = ?$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$

$25-x = \sqrt{(x+5)(30+2x)}$

$25-x = \sqrt{30x+2x^2+150+10x}$

$25-x = \sqrt{2x^2+40x+150} \quad /^2$

$(25-x)^2 = 2x^2+40x+150$

$625-50x+x^2-2x^2-40x-150=0$

$-x^2-90x+475=0$

$x^2+90x-475=0$

$x_{1/2} = \frac{-90 \pm \sqrt{8100+1900}}{2} = \frac{-90 \pm 100}{2}$

$\boxed{x_1 = -95}$
$\boxed{x_2 = 5}$

I $-80, 120, -210, \dots$

II $10, 20, 50, \dots$

(3) Prvi član geom niza je 1. Zbir 3. i 5. člana je 90. Odrediti niz.

(4) Izračunati a_1 i q u geom nizu ako je $a_5 - a_1 = 16$ i $a_4 - a_2 = 6$.

(5) Odrediti geom progresiju kod koje je $a_1 + a_3 = 15$ i $a_2 + a_4 = 30$

(6) Odrediti geom. niz iz sledećih sistema: $a_3 + a_6 - a_5 = 20$;

a) $a_2 + a_5 - a_4 = 10$; $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1000$

b) $a_1 + a_2 + a_3 = 62$; $a_2 \cdot a_4 = 2400$.

c) $a_1 - a_5 = 1200$;

(3) $a_1 = 1 \quad a_3 + a_5 = 90$

$a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4 = 90$

$1 \cdot q^2 + q^4 = 90$

$q^2 + q^2 \cdot q^2 = 90$

$q^2(1+q^2) = 90$

$q^4 + q^2 - 90 = 0 \qquad t^2 = q^2$

$t^2 + t - 90 = 0$

$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2} \qquad t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$

$a_2 = \sqrt{a_1 a_3}$

$a_2 = \sqrt{1(a_1 \cdot q^2)}$

$\boxed{t_1 = 9}$

$\boxed{t_2 = -10}$

I $q = \pm 3 \qquad q_2 = \sqrt{-10}$

$\Rightarrow$ I $1, 3, 9, 27$

II $1, -3, 9, -27, \dots$

② $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n = n$ $a_1 = 1$ $1, 2, 3, \ldots$

③ $a_n = \frac{1}{n}$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Mjesto člana u nizu određuje njegov indeks

Ako je A podskup od R, govorimo o nizu realnih brojeva. Niz možemo zadati općim članom ili nabrajanjem nekoliko prvih članova niza. Niz je određen ako mu je poznat opći član. Prvih nekoliko članova ne određuje niz.

① Odrediti nekoliko prvih članova niza

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ b) $a_n = 2^n$ c) $a_n = 2^{-n}$

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

b) $2, 4, 8, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

② Neka su zadana prva 3 člana nizova:

a) $1, 1, 2, \ldots$
b) $1, 0, 1, \ldots$ } ne možemo sa sigurnošću odrediti

Ova 2 niza se mogu nastaviti na bilo koji način.

Nizove možemo zadati pomoću rekurzivnih formula u kojima se članovi niza zadaju pomoću prije definiranih.

③ Neka je a) $a_1 = 1$, $a_n = n\, a_{n-1}$, $n \geq 2$

b) $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$.

a) $1, 2, 6, 24, \ldots$

$a_2 = 2 a_1 = 2$

$a_3 = 3 a_2 = 6$ $a_4 = 4 a_3 = 24$

$1 = 1!$
$2 = 1 \cdot 2!$
$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3!$
$24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!$

$\boxed{a_n = n!}$

Opći član

$$a_2 = \frac{\quad}{2}$$

$$a_1 + d = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2}$$

LIMES NIZA

1. Neka je $a_n = \frac{1}{10^n}$. Ispisati nekoliko prvih članova niza.

$a_1 = \frac{1}{10^1}$

$a_2 = \frac{1}{10^2}$ 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 Što je n veće niz teži 0.

$a_3 = \frac{1}{10^3}$

2. $a_n = \frac{1}{n}$

$a_1 = 1$ $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_{10} = \frac{1}{10}$ $a_{100} = \frac{1}{100}$

1; 0,5 ; 0,1 ; 0,01 ; ... opet teži 0

* Tvrdnja da članovi niza teže 0. kad n raste označavamo kao:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 0}$$ (lat) limes = granica

$\lim a_n = 0$, $n \to \infty$

$a_n \to 0$, $n \to \infty$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$x+36 = x+1+\left(\frac{344}{(2x+37)} - 1\right)5$

$x+36 = x+1+\frac{344-2x-37}{(2x+37)}5$

$x+1+\frac{(-2x+307)5}{(2x+37)} - x - 36 = 0$

$\frac{(2x+37)(x+1) - 10x - 1535 - (x+36)(2x+37)}{(2x+37)} = 0$

$2x^2+2x+37x+37-10x+1535-2x^2-37x-72x-1332=0$

D.P. $2x+37 \neq 0$

$2x \neq 37$

$\boxed{x \neq \frac{37}{2}}$

$-80x+240=0$

$-80x=-240$

$\boxed{x=3}$

3 $a_1 \cdot a_{15} = -147$

$a_8 = 7$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$7 = a_1 + 7d$

$\boxed{a_1 = 7-7d} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1 = -7 \\ a_1 = 21 \end{array}}$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$a_{15} = 7-7d+14d$

$\boxed{a_{15} = 7+7d}$

$\boxed{a_{15} = 21}$

$\boxed{a_{15} = -7}$

$a_2 = -7+2 = \boxed{-5}$

$\boxed{a_2 = 19}$

$a_1 \cdot a_{15} = 147$

$(7-7d)(7+7d) = -147$

$7^2 - (7d)^2 = -147$

$49 - 49d^2 = -147$

$-49d^2 = -196$

$d^2 = 4$

$\boxed{d = 2}$

Niz I $= -7, -5, \ldots, 21$

Niz II: $21, 19, \ldots -7$

h) $n \geq 3$

$F_1 = 1 \quad F_2 = 2 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

FIBONAČIJEV NIZ

$F_3 = 3-1 + 3-2$
$\quad 2 + 1$

$F_4 = 4-1 + 4-2$
$\quad 3 + 2$
$\quad F_4 + F_3$

$F_5 = 5-1 + 5-2$
$\quad 4 + 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 8$

(6) Napisati najmanje 5 članova niza ako je opći član

a) $a_n = 2 - 3n$; b) $a_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$, c) $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$

d) $a_n = 3^{-n}$; e) $a_n = 2^{n-1}$

(7) Napišite prvih 5 čl. niza zadanog rekurzivnim formulama

a) $a_n = a_{n-1} + 1$, b) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_1 = 1$
$\quad a_1 = 1$

c) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, $a_1 = 1$; d) $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}}$, $a_1 = 1$
$\quad a_2 = 2$

(6) a) $a_n = 2 - 3n$

$a_1 = 2 - 3 \Rightarrow a_1 = -1$
$a_2 = 2 - 3 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = -4$
$a_3 = 2 - 3 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = -7$
$a_4 = 2 - 3 \cdot 4 \Rightarrow a_4 = -12$
$a_5 = 2 - 3 \cdot 5 \Rightarrow a_5 = -13$

ARITMETIČKI NIZ

- Za niz a_n kažemo da je aritmetički, ako je razlika svaka 2 susjedna člana konstantna i iznosi d.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = d$

$a_n - a_{n-1} = d$
$a_{n+1} - a_n = d$
$a_{n+1} = a_n + d$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ $\Rightarrow$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

formula za opći član aritmetičkog niza

$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ ← aritmetička sredina susjednih članova

$X = 3 + (n-1)4$

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + (n-1)d$

$a_1 + (n-1)d + \ldots + a_1 + 2d + a_1 + d + a_1$

$a_2 = a_1 + d \Rightarrow a_1 = a_2 - d$

$a_3 = a_2 + d \Rightarrow a_2 = a_3 - d$

$a_4 = a_3 + d$

$\vdots$

82 $a_n = a_{n-1} + d \Rightarrow a_{n-1} = a_n - d$

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_n &= \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \end{aligned}}$$

zbir prvih n članova aritmetičkog niza

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + (n-1)d \\ B &= a_n + a_n - d + a_n - 2d + \ldots + a_n - (n-1)d \end{aligned}\right\} + 1$$

$A + B = n \cdot a_1 + n \cdot a_n$

$A = B$

$A + A = na_1 + na_n$

$2A = n(a_1 + a_n)$

$A = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

① Odrediti n ako je $\binom{n+1}{3} + 2\binom{n-1}{2} = 7\binom{n-1}{1}$

② U jednačini $(x+1)+(x+6)+(x+11)+\dots+(x+36)=172$. Odrediti x.

③ U aritmetičkom nizu od 15 članova, srednji član je 7, a proizvod prvog i posljednjeg -147. Koji je to niz?

④ Matematičkom indukcijom provjeriti da li za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

$3(2x)^4$

⑤ U razvoju binoma $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[8]{x}\right)^n$ zbir prva 3 binomna koeficijenta iznosi 56. Odrediti član koji sadrži $\sqrt{x}$.

① $\binom{n+1}{3} + 2\binom{n-1}{2} = 7\binom{n-1}{1}$

$$\frac{(n+1)n(n-1)!}{3!\,(n-2)!} + 2\,\frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!} = 7\,\frac{(n-1)!}{1!\,(n-2)!}$$

$-7)(n-8)$

$$\frac{n(n+1)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{3\cdot2\cdot\cancel{(n-2)!}} + \cancel{2}\,\frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{(n-3)!}} = 7\,\frac{(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$$

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{6} + (n-1)(n-2) = 7(n-1) \quad /:(n-1)$$

$$\frac{n(n+1)}{} + (n-2) = 7$$

GEOMETRIJSKI NIZ

- Za niz a_n kažemo da je geometrijski ako je količnik 2 uzastopna člana konstantan i iznosi q.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \ldots$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q \qquad \frac{a_3}{a_2} = q \rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = \boxed{a_1 \cdot q^2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = \boxed{a_1 \cdot q^3}$$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$ opći član geom. niza

npr. a) $3, 6, 12, 24, \ldots$ $\quad q = 2$

b) $8, -4, 2, -1$ $\quad q = -\frac{1}{2}$

Svaki član geometrijskog niza je geometrijska sredina susjedna dva

$$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$$
$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4}$$

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}}$$

1. Odrediti a_{10}, ako je $a_3 = 8$, $a_5 = 32$.

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 8 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 32 = a_1 \cdot q^4 \quad /:$$

$$\frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{32}_{4}} = \frac{\cancel{a_1} \cdot q^2}{\cancel{a_1} \cdot q^4}$$

$$\frac{1}{4} = 1 \cdot \frac{1}{q^2}$$

$$q = \pm 2$$

$q_1 = 2$

$8 = a_1 \cdot 4$

$\boxed{a_1 = 2} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 2^9 = \boxed{2^{10}}$

$q_2 = -2$

$8 = a_1 \cdot (-2)^2$

$a_1 = 2 \qquad a_{10} = 2 \cdot (-2)^9 = \boxed{-2^{10}}$

⑧ $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$

⑨ $\lim_{n\to\infty} k^{a_n} = k^{\lim_{n\to\infty} a_n}$

① Odredite limese nizova: a) $a_n = \frac{1}{n^2}$; b) $a_n = \frac{3}{n}$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1 \ /:n}{3n+2 \ /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \lim \frac{5}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$

(dijelimo sa najvećim eksponentom)

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-8n+3 \ /:n^4}{4n^4-6n+9 \ /:n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{8}{n^3} + \frac{3}{n^4}}{4 - \frac{5}{n^3} + \frac{9}{n^4}} = \frac{0}{4} = \boxed{0}$

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2+1 \ /:n^3}{3n^2-n+2 \ /:n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{0} = \infty$

⑤ $\lim_{n\to\infty} 5^{\frac{3n+1}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} 5^{\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}} = 5^{\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}} = \boxed{5^{\frac{3}{2}}}$

⑥ $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = (\infty - \infty)$ (neodređen niz)

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}$ } racionalizacija

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(\sqrt{n^2+n})^2 - n^2}^{(a-b)\ (a+b)}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

⑦ $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \frac{\sqrt{(n+1)}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

BROJNI NIZOVI

Pojam niza veže se za pojam prebrojavanja. U običnom jeziku pod nizom podrazumijevamo poredanu skupinu bilo kakvih problema objekata (npr. kuća, đaka u redu, brem el u PSE) Pri tome znamo točan poredak tih objekata (npr. poredane i označene brojevima, ponedjeljak 1.d. u sedmici)

POJAM NIZA i ZADAVANJE NIZA

Ispisujući redom elemente nekog skupa A $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ dobijamo niz u skupu A.

npr: $2, 4, 6, 8, 10 \dots$ su 2 različita skupa $\mathbb{N}$ skupa.
$3, 5, 7, 9, \dots$

DEFINICIJA: Svaka funkcija $\mathbb{N} \to A$ ($\mathbb{N}$ slika u A) koja prirodnom broju n pridružuje element a_n naziva se niz u skupu A.
Niz zapisujemo u obliku $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ ili $\{a_n\}$, (a_n)

$a_1, a_2, a_3, \dots \boxed{a_n}$ su članovi niza

→ opći član niza.

→ su indeksi članova niza

npr: 1. a) $1, 2, 3, 4, 5$ – KONAČAN NIZ (na 5 članova)

b) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ – BESKONAČAN NIZ (neparnih brojeva)

c) $3, 3, 3, 3, 3, \dots$ – BESKONAČAN NIZ = KONSTANTAN

Niz može biti konačan, beskonačan, konstantan

$(n+8)$

$$\frac{n(n+1)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{3\cdot 2\cdot\cancel{(n-2)!}} + \cancel{2}\,\frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{(n-3)!}} = 7\,\frac{(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$$

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{6} + (n-1)(n-2) = 7(n-1) \quad /:(n-1)$$

$$\frac{n(n+1)}{6} + (n-2) = 7$$

$$\frac{n(n+1)+6(n-2)-42}{6} = 0$$

$$n^2+n+6n-12-42=0$$

$$n^2+7n-54=0 \qquad n_1 = \frac{-7+\sqrt{265}}{2} \qquad n_2 = \frac{-7-\sqrt{265}}{2}$$

2) $(x+1)+(x+6)+(x+11)+\ldots+(x+36)=172 \qquad x=?$

$a_1 = x+1 \quad d=5 \quad S_n=172 \quad a_n = x+36$

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right)(a_1+a_n) \qquad x+36 = x+1+(n-1)5$$

$$172 = \frac{n}{2}(2x+37) \qquad x+36 = x+1+5n-5$$

$$344 = n(2x+37) \qquad \cancel{x}+36+5-1\cancel{-x} = 5n$$

$$\boxed{n = \frac{344}{(2x+37)}} \qquad \boxed{n=8}$$

Jednostavnije

Svaki član aritmetičkog niza je aritmetička sredina susjedna 2.

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Zadaća za 3.

① Niz a_n je aritmetički. Ako je $a_6 = 16$, $a_8 = 22$, odrediti a_{10}.

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_1 = ?$

$d = ?$

$16 \; a_6 = a_1 + 5d$

$22 \; a_8 = a_1 + 7d \; / \cdot (-1)$

$16 = \cancel{a_1} + 5d$

$-22 = -\cancel{a_1} - 7d$

$-6 = -2d \Rightarrow \boxed{d = 3}$

$16 = a_1 + 5 \cdot 3$

$\boxed{a_1 = 1}$

$a_{10} = 1 + 9 \cdot 3$

$\boxed{a_{10} = 28}$

② Zbir prva 3 člana aritmetičkog ...

③ Neka je $a_n = \frac{[illegible]}{n}$ $a_1 = [illegible]$

$a_2 = 1$

$\vdots$

$0; 0{,}5; 0{,}9; 0{,}99, \ldots$ $a_{10} = \frac{9}{10} = 9{,}9$

$a_{100} = \frac{99}{100} = 0{,}99$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

Za niz a_n kažemo da je KONVERGENTAN ako je njegov limes konačan.
Za niz a_n kažemo da je DIVERGENTAN ako nema limesa.

④ Neka je $a_n = (-1)^n \cdot n$

$a_1 = (-1)^1 \cdot 1 = -1$ $-1, 2, -3, 4, \ldots$ Ovaj niz je divergentan, nema limesa (granicu).

$a_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$

$a_3 = (-1)^3 \cdot 3 = -3$

Za niz a_n kažemo da je NULA NIZ ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

([illegible] i drugi primjer)

TEOREME O LIMESIMA

Neka su nizovi a_n i b_n konvergentni, tj. neka vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, tada vrijedi:

① $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

③ ako je $b_n \neq 0$ za svaki n i $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, onda je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

④ ako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, onda je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

⑥ $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$, c je konstanta

⑦ $\lim_{n\to\infty}(a_n)^x = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^x = a^x$