LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Funkcija inverzna eksponencijalnoj funkciji $y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0, a \in R)$ naziva se logaritamska funkcija. Označava se sa:

$$y = \log_a x$$

(čita se logaritam od x za osnovu a)

Ako je a=e → y=lnx
Ako je a=10 → y=logx

Za osnovne logaritamske funkcije važi:

1) Funkcije su definisane za $x \in (0, \infty)$
2) Nula funkcije je x=1 tj. grafik seče x-osu u tački A(1,0)
3) Monotonost (rašćenje i opadanje)
    a) Ako je osnova $a > 1$ finkcija je rastuća
    b) Ako je osnova $0 < a < 1$ funkcija je opadajuća
4) Znak funkcije:

    a) Ako je osnova $a > 1$, znak je:
       $y > 0$ za $x \in (1, \infty)$
       $y < 0$ za $x \in (0,1)$
    b) Ako je osnova $0 < a < 1$, znak je:
       $y > 0$ za $x \in (0,1)$
       $y < 0$ za $x \in (1, \infty)$

Evo par primera osnovnih grafika:

1) $y = \log_2 x$

Napravimo tablicu, ali vrednosti za x biramo pametno x=1,2,4,8, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

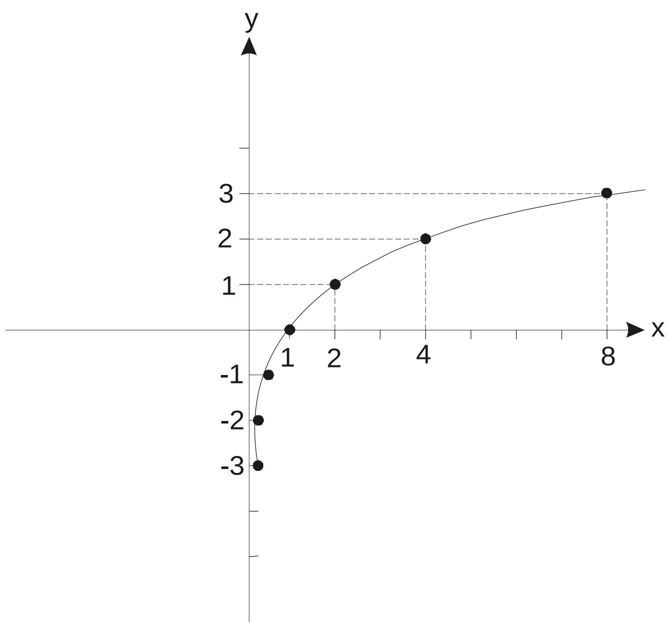
Videćemo zašto!!!

Za x=1 $\Rightarrow y = \log_2 1 = 0$
Za x=2 $\Rightarrow y = \log_2 2 = 1$
Za x=4 $\Rightarrow y = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$
Za x=8 $\Rightarrow y = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$
Za x=$\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1\log_2 2 = -1 \cdot 1 = -1$

Za x=$\frac{1}{4}$ $\Rightarrow y=\log_2 \frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

Za x=$\frac{1}{8}$ $\Rightarrow y=-3$

X	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
Y	-3	-2	-1	0	1	2	3

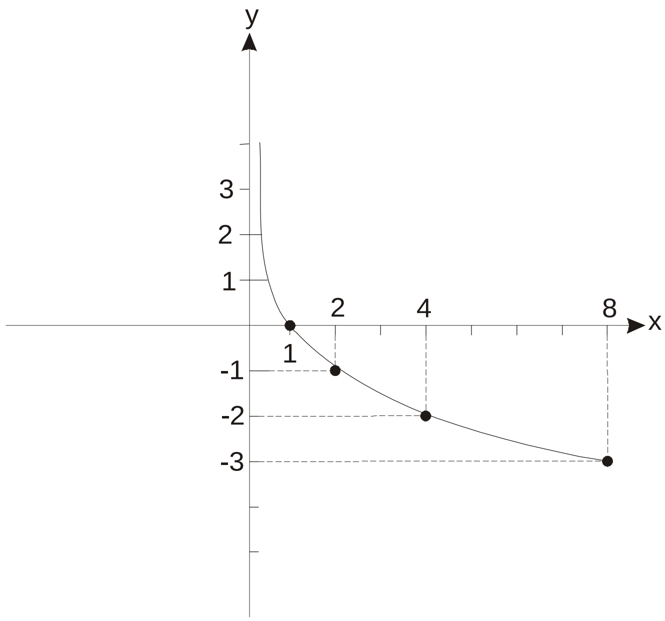


Kako je $a=2>0$ ona je rastuća!!!

2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

Slično kao malopre pravimo tablicu:

X	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
Y	3	2	1	0	-1	-2	-3



Dakle kad je osnova $a = \frac{1}{2}$ izmedju 0 i 1 grafik je opadajući!!!

Za malo složenije grafike je moguće izvršiti pomeranje duž x i y-ose (slično kao kod kvadratne funkcije) ali za ozbiljnije zadatke će nam biti potrebno znanje iz IV godine srednje škole.

3) Data je funkcija $y = \log_a(3x^2 - 2x) \quad (a > 0, a \neq 1)$

a) za koje vrednosti argumenata x funkcija ima smisla u skupu realnih brojeva?
b) Odrediti nule date funkcije;
c) Odrediti x tako da za osnovu $a = \sqrt{5}$ vrednost funkcije bude 2.

<u>Rešenje:</u> $y = \log_a(3x^2 - 2x)$

<u>Pazi:</u> ***Sve iza log mora biti >0***

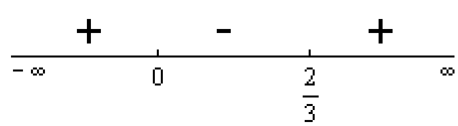
Znači: $3x^2 - 2x > 0 \rightarrow$ upotrebimo znanje iz kvadratne nejednačine!!! (podseti se)

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$



Pa je oblast definisanosti: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

b) Nule f-je su rešenja jednačine y=0

Znači: $\log_a(3x^2-2x)=0$ Kako je $\log_a 1=0$ to mora biti:

$$3x^2-2x=1$$
$$3x^2-2x-1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{6}$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-\frac{1}{3}$$

Dakle ova funkcija ima nule $x_1=1$ i $x_2=-\frac{1}{3}$

c) $y=\log_a(3x^2-2x)=0$ $\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{5} \\ y=2 \end{array}\right\}$ zamenimo

$$\log_{\sqrt{5}}(3x^2-2x)=2$$

Idemo po definiciji $\log_A B=\otimes \Leftrightarrow B=A^{\otimes}$

$$3x^2-2x=\sqrt{5}^2$$
$$3x^2-2x=5$$
$$3x^2-2x-5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{6}$$
$$x_1=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$
$$x_2=\frac{-6}{6}=-1$$