LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Pre nego što krenete u reševanje jednačine savetujemo vam da se podsetite pravila za logaritme.

1) Rešiti jednačine:

a) $\log_3(2x+3)=2$
b) $\log_4(3x+4)=3$
c) $\log\sqrt{3x+1}=\dfrac{1}{2}$

Rešenje:

a) $\log_3(2x+3)=2 \rightarrow$ Iskoristićemo definiciju $\log_A B=\otimes \Leftrightarrow B=A^{\otimes}$

Dakle:

$$\begin{aligned}2x+3&=3^2\\2x+3&=9\\2x&=6\\x&=3\end{aligned} \quad \text{uz uslov} \quad \begin{aligned}2x+3&>0\\2x&>-3\\x&>-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Pošto je $3>-\dfrac{3}{2}$, rešenje x = 3 je ‘’dobro’’

b) $\log_4(3x+4)=3 \rightarrow$ Opet po definiciji

$$\begin{aligned}3x+4&=4^3\\3x+4&=64\\3x&=60\\x&=20\end{aligned} \quad \text{uslov} \quad \begin{aligned}3x+4&>0\\3x&>-4\\x&>-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Rešenje zadovoljava uslov!!!

v) $\log\sqrt{3x+1}=\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Primetimo da nema osnova, pa dopišemo 10 po dogovoru,.

$$\log_{10}\sqrt{3x+1}=\frac{1}{2}$$

$\sqrt{3x+1}=10^{\frac{1}{2}}$ uz uslov $\sqrt{3x+1}>0$

$\sqrt{3x+1}=\sqrt{10}......./()^2$ *kvadriramo* $\quad 3x+1>0$

$3x=9 \quad x>-\frac{1}{3}$

$x=3$

$3>-\frac{1}{3}$, dobro je rešenje.

2) Rešiti jednačine:

a) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$
b) $\log(x^2+19)-\log(x-8)=2$
v) $\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$

Rešenja:

a) Iskoristićemo $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$

$\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$

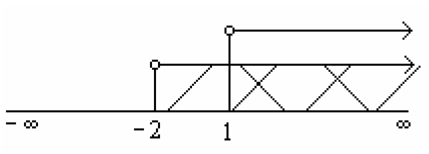
$\log_2(x-1)(x+2)=2\rightarrow$ Uslovi $x-1>0$ i $x+2>0$

$x>1$ i $x>-2$

Dalje po definiciji:

$$(x-1)(x+2)=2^2$$
$$x^2+2x-x-2=4$$
$$x^2+x-6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$
$$x_1=2$$
$$x_2=-3$$

Dalje se pitamo da li rešenja zadovoljavaju uslove: $x>1$ i $x>-2$



$x\in(1,\infty)$

$x_1=2\rightarrow$ Zadovoljava

$x_2=-3\rightarrow$ Ne zadovoljava

Dakle, jedino rešenje je $x=2$

b) $\log(x^2+19)-\log(x-8)=2$
Dopišemo najpre osnovu 10

$$\log_{10}(x^2+19)-\log_{10}(x-8)=2$$

Pošto je $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$

$$\log_{10}\frac{x^2+19}{x-8}=2 \text{ naravno uz uslove: } x^2+19>0 \text{ i } x-8>0$$

$$x>8$$

$$\frac{x^2+19}{x-8}=10^2$$

$$\frac{x^2+19}{x-8}=100$$

$$x^2+19=100(x-8)$$

$$x^2+19=100x-800$$

$$x^2-100x+819=0$$

$$x_{1,2}=\frac{100\pm 82}{2}$$

$$x_1=91$$

$$x_2=9$$

Oba rešenja ‘’dobra’’ jer su veća od 8

v)

$$\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$$

$$\log(5-x)+\log\sqrt{3-x}^2=1$$

$$\log(5-x)+\log(3-x)=1$$

Uslovi su:

$$5-x>0 \qquad 3-x>0$$

$$-x>-5 \quad \text{i} \quad -x>-3$$

$$x<5 \qquad x<3$$

Dakle uslov je $\boxed{x<3}$

$$(5-x)(3-x)=10^1$$
$$15-5x-3x+x^2-10=0$$
$$x^2-8x+5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{44}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{11}}{2}=\frac{2(4\pm\sqrt{11})}{2}=4\pm\sqrt{11}$$
$$x_1=4+\sqrt{11}\approx 7{,}32$$
$$x_2=4-\sqrt{11}\approx 0{,}68$$

$x_1=4+\sqrt{11}$ ne zadovoljava uslov, pa je jedino rešenje: $x=4-\sqrt{11}$

3) Rešiti jednačine:

a) $\log^2 x-3\log x+2=0$

b) $\log_2 x+\log_x 2=\frac{5}{2}$

Rešenja:

a) Uvodimo smenu $\log x=t$ uz uslov $x>0$

$$\log^2 x-3\log x+2=0$$
$$t^2-3t+2=0$$
$$t_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}$$
$$t_1=2$$
$$t_2=1$$

Vratimo se u smenu $\log_{10} x=2$ i $\log_{10} x=1$

$x=10^2$ $\quad$ $x=10^1$

$x=100$ $\quad$ $x=10$

b) $\log_2 x+\log_x 2=\frac{5}{2}$ kako je $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=\frac{5}{2}\rightarrow$ Uvodimo smenu $\log_2 x=t$ uz uslove $x>0$ i $x\neq1$

$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\rightarrow$ Sve pomnožimo sa 2t

$$2t^2+2=5t$$
$$2t^2-5t+2=0$$
$$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4}$$
$$t_1=2$$
$$t_2=\frac{1}{2}$$

Vratimo se u smenu : $\log_2 x=2$ ili $\log_2 x=\frac{1}{2}$

$$x=2^2 \qquad x=2^{\frac{1}{2}}$$
$$x=4 \qquad x=\sqrt{2}$$

4) Rešiti jednačine:

a) $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$

b) $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\frac{2}{3}$

Rešenje: U oba primera ćemo koristiti da je:

$$\log_{a^S} x=\frac{1}{S}\log_a x$$

a)

$$\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7 \qquad \text{uslov } x>0$$
$$\log_2 x+\log_{2^2} x+\log_{2^4} x=7$$
$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=7\,/\cdot 4$$
$$4\log_2 x+2\log_2 x+1\log_2 x=28$$
$$7\log_2 x=28$$
$$\log_2 x=4$$
$$x=2^4\Rightarrow x=16$$

b)

$$\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\frac{2}{3}$$

$$\log_3 x\cdot\log_{3^2} x\cdot\log_{3^3} x\cdot\log_{3^4} x=\frac{2}{3}$$

$$\log_3 x\cdot\frac{1}{2}\log_3 x\cdot\frac{1}{3}\log_3 x\cdot\frac{1}{4}\log_3 x=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{24}\log_3^4 x=\frac{2}{3}$$

$$\log_3^4 x=16\Rightarrow\log_3 x=t$$

$$t^4-16=0\Rightarrow(t^2)^2-4^2=(t^2-4)(t^2+4)=0$$

$$(t-2)(t+2)(t^2+4)=0$$

odavde je t=2 ili t=-2

Kada se vratimo u smenu

$\log_3 x=2$	v	$\log_3 x=-2$
$x=3^2$		$x=3^{-2}$
$x=9$	v	$x=\frac{1}{9}$

5)

Rešiti jednačine:

a) $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$

b) $\log(7-2^x)-\log(5+4^x)+\log 7=0$

Rešenja

a)

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$$

Kako je $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{4^x - 6}{2^x - 2} = 2$$

$$\frac{4^x - 6}{2^x - 2} = \sqrt{5}^2$$

$$4^x - 6 = 5(2^x - 2)$$

$$4^x - 6 = 5 \cdot 2^x - 10$$

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow smena\ 2^x = t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = 1$$

$$2^x = 4 \quad \text{ili} \quad 2^x = 1$$

$$2^x = 2^2 \qquad x = 0$$

$$x = 2$$

Ovde je najbolje da proverimo rešenja u početnoj jednačini→ x=2 je jedino rešenje

b)

$$\log(7 - 2^x) - \log(5 + 4^x) + \log 7 = 0$$

$$\log_{10}(7 - 2^x) - \log_{10}(5 + 4^x) + \log_{10} 7 = 0$$

$$\log_{10}(7 - 2^x) \cdot 7 = \log_{10}(5 + 4^x) \text{...............} /\ ANTILOGARITMOVANJE$$

$$(7 - 2^x) \cdot 7 = 5 + 4^x$$

$$49 - 7 \cdot 2^x = 5 + 4^x$$

$$49 - 7 \cdot 2^x - 5 - 4^x = 0$$

$$-4^x - 7 \cdot 2^x + 44 = 0 / (-1)$$

$$4^x + 7 \cdot 2^x - 44 = 0 \text{..................................} smena\ 2^x = t$$

$$t^2 + 7t - 44 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm 15}{2}$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = -11$$

Vratimo se u smenu:

$$2^x = 4 \qquad \text{ili} \qquad 2^x = -11 \text{ nema rešenja}$$
$$2^x = 2^2$$
$$x = 2$$

Uslovi su $7 - 2^x > 0$ i $5 + 4^x > 0$ a rešenje je x=2 ih očigledno zadovoljava

6) Rešiti jednačine:

a) $x^{1+\log_3 x} = 3x$
b) $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$

Ovo je tip zadataka gde moramo logaritmovati obe strane za odgovarajuću osnovu!!!

a)

$$x^{1+\log_3 x} = 3x ..../\log_3$$
$$\log_3 x^{1+\log_3 x} = \log_3 3x \qquad \text{važi } \log_a b^n = n\log_a b$$
$$(1+\log_3 x)\log_3 x = \log_3 3 + \log_3 x .... \Rightarrow \textit{smena } \log_3 x = t$$
$$(1+t)\cdot t = 1 + t$$
$$t + t^2 = 1 + t$$
$$t^2 = 1 - t + t \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

Vratimo se u smenu:

$$\log_3 x = 1 \text{ ili } \log_3 x = -1$$
$$x = 3^1 \qquad \text{ili} \qquad x = 3^{-1}$$
$$x = 3 \qquad \text{ili} \qquad x = \frac{1}{3}$$

b)

$$x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)} \rightarrow \text{logaritmijemo za osnovu 4}$$
$$\log_4 x^{\log_4 x - 2} = \log_4 2^{3(\log_4 x - 1)}$$
$$(\log_4 x - 2)\log_4 x = 3(\log_4 x - 1)\log_4 2$$
$$(\log_4 x - 2)\log_4 x = 3(\log_4 x - 1)\log_{2^2} 2$$
$$(\log_4 x - 2)\log_4 x = 3(\log_4 x - 1)\cdot\frac{1}{2}$$

Smena $\log_4 x = t$:

$$(t-2)\cdot t=\frac{3}{2}(t-1)$$
$$2t(t-2)=3(t-1)$$
$$2t^2-4t=3t-3$$
$$2t^2-4t-3t+3=0$$
$$2t^2-7t+3=0$$
$$t_{1,2}=\frac{7\pm5}{4}$$
$$t_1=3$$
$$t_2=\frac{1}{2}$$

Dakle:

$$\log_4 x=3 \quad \text{ili} \quad \log_4 x=\frac{1}{2}$$
$$x=4^3 \quad \text{ili} \quad x=4^{\frac{1}{2}}$$
$$x=64 \quad \text{ili} \quad x=2$$

Za logaritamske <u>nejednačine</u> koristimo iste ''trikove'' kao za jednačine, ali vodimo računa:

1) Kad je osnova <u>veća od 1</u> (a>1) <u>prepisujemo znak</u> nejednakosti jer je funkcija rastuća.
2) Kaj je osnova <u>izmedju 0 i 1</u> (0<a<1) <u>okrećemo znak</u> nejednakosti jer je tada funkcija opadajuća.

Kad postavimo uslove tj. oblast definisanosti, nadjemo i rešimo nejednačinu, trebamo naći njihov presek.

1) Reši nejednačine:

a) $\log_2(3x+4)\geq 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-3)<0$

v) $\log_2(3x-5)<1$

<u>Rešenje:</u>

a)

$\log_2(3x+4) \geq 0$ uslov $3x+4>0$

$3x+4 \geq 2^o$ $3x>-4$

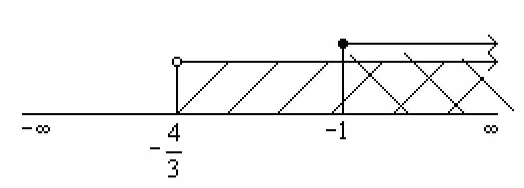
$3x+4 \geq 1$ $x>-\frac{4}{3}$

$3x \geq -3$

$x \geq -1$

ne okrećemo znak jer je osnova veća od 1

Sad upakujemo rešenje i oblast definisanosti.



Konačno: $x \in [-1, \infty)$

b)

$\log_{\frac{1}{2}}(4x-3) < 0$ uslov: $4x-3>0$

$4x>3$

PAZI: Okrećemo znak!!! $x>\frac{3}{4}$

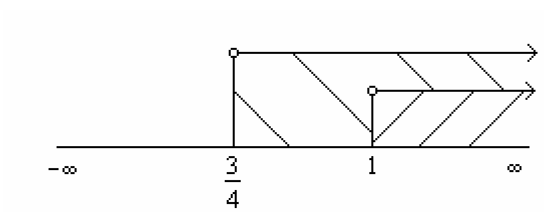
$4x-3 > \left(\frac{1}{2}\right)^o$

$4x-3>1$

$4x>4$

$x>1$

Upakujemo ova dva:



Konačno: $x \in (1, \infty)$

v)

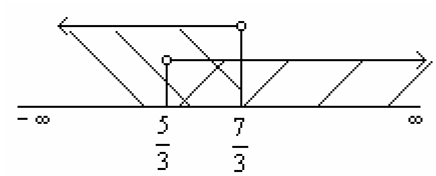
$\log_2(3x-5) < 1$ uslov $3x-5>0$

$3x-5<2^1$ $3x>5$

$3x-5<2$ $x>\frac{5}{3}$

$3x<7$

$x<\frac{7}{3}$



$$x \in \left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$$

2) Rešiti nejednačine:

a) $\log(x-2) > \log x$

b) $\log_{0,5}(2x+6) > \log_{0,5}(x+8)$

<u>Rešenja:</u>

a)

$\log(x-2) > \log x$ uslovi: $x-2>0$ i $x>0$

$x-2>x$ $x>2$ i $x>0$

$x-x>2$ Dakle $x>2$

$0x>2$

Ovo nema rešenja, pa cela nejednačina nema rešenja!!!

b)

$\log_{0,5}(2x+6) > \log_{0,5}(x+8)$

PAZI: Okreće se smer <u>Uslovi:</u>

$2x+6<x+8$

$2x+6>0 \wedge x+8>0$

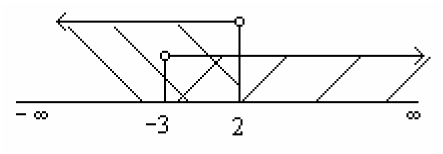
$2x-x<8-6$

$x>-3 \wedge x>-8$

$x<2$

<u>Uslovi daju :</u> $x>-3$

Upakujemo:



$x \in (-3{,}2)$ konačno rešenje

3) Rešiti jednačine:

a) $\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$
b) $\log_{0,5}(x^2 - 4x + 3) \geq -3$

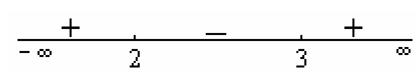
a)

$\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$ uslov $x^2 - 5x + 6 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$



$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ Rešenje uslova

$x^2 - 5x + 6 < 3^o$

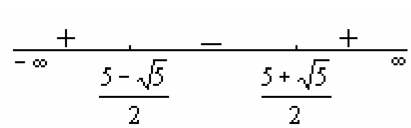
$x^2 - 5x + 6 < 1$

$x^2 - 5x + 5 < 0$

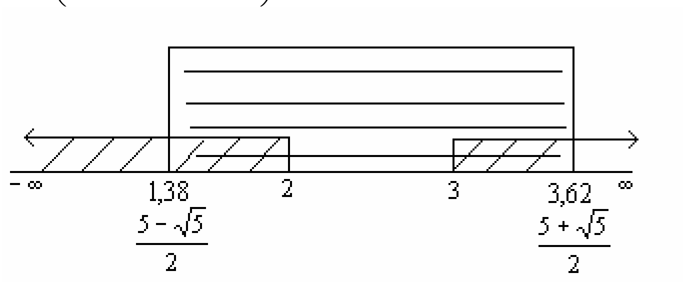
$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3{,}62$

$x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}38$



$x \in \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \right)$ rešenje zadatka konačno rešenje dobijemo kad upakujemo ova dva



Dakle:

$x \in \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, 2 \right) \cup \left(3, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \right)$

b)

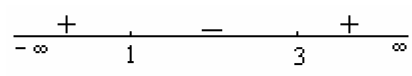
$$\log_{0,5}(x^2-4x+3) \geq -3$$

uslov: $x^2-4x+3>0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}$$

$$x_1=3$$

$$x_2=1$$



$$x^2-4x+3 \leq (0,5)^{-3}$$

$$x^2-4x+3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x^2-4x+3 \leq 2^3$$

$$x^2-4x+3 \leq 8$$

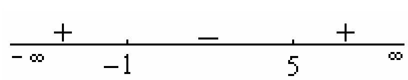
$$x^2-4x+3-8 \leq 0$$

$$x^2-4x-5 \leq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 6}{2}$$

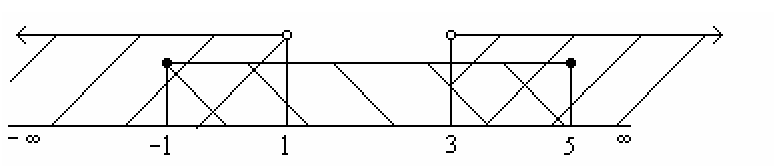
$$x_1=5$$

$$x_2=-1$$



$$x\in[-1,5]$$

Upakujemo rešenja:



$x\in[-1,1)\cup(3,5]$ Konačno