NIZOVI

Definicija Konačni niz elemenata (nepraznog) skupa X je svako preslikavanje (funkcija)$x : M \to X$, gdje je M neki konačan podskup skupa N.
Definicija Beskonačni niz ili, kraće, niz u (nepraznom) skupu X je svako preslikavanje $x : N \to X$, skupa prirodnih brojeva N u skup X. Vrijednost $x(n) \in X$ preslikavanja x u tački $n \in N$ zove se n-ti član toga niza i obično se označava sa x_n, pa se govori o (beskonačnom) nizu $(x_n, n \in N)$. Ako je specificirana zavisnost x_n od n, onda se x_n naziva opšti član niza.

Primjeri:

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ je niz (x_n) čiji je opći član x_n dat sa $x_n = \frac{1}{n}$. Ovo je primjer tzv. harmonijskog niza, tj. niza kod kojeg je svaki član (osim prvog) harmonijska sredina njemu dva susjedna člana.

(b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, ...$ je niz čiji opći član x_n dat sa $argz = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = 1, 2, ..., 9, \\ \frac{1}{10} & n = 10, 11, ... \end{cases}$
Ovaj niz nazivamo *stacionarni niz*. Inače, za (x_n) kažemo da je stacionarni niz ako postoji $n_0 \in N$ takav da je $x_n = C$ ($C-$konstanta) za svaki $n \geq n_0$.

(c) Za (x_n) kažemo da je **aritmetički niz** akko vrijedi $x_{n+1} - x_n = d, \forall (n \in N)$. Osim toga, sumu $S_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$ od n prvih članova aritmetičkog niza izračunavamo po formuli:

$$S_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n) = \frac{n}{2}[2x_1 + (n-1)d]$$

(d) Niz brojeva $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ kod kojeg je svaki član osim prvog jednak proizvodu prethodnog člana i stalnog broja $q \neq 0$, zove se **geometrijski niz**. Taj niz je, dakle određen formulom

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, n = 1, 2, 3, ...$$

Broj q koji je jednak količniku $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zove se količnik geometrijskog niza. Zbir S_n od n prvih članova geometrijskog niza određuje se po formuli:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Definicija Za niz(a_n) u R kažemo da je konvergentan (u R) ako postoji realan broj $a(\in R)$ takav da za svaki realan broj $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za sve prirodne brojeve n veće od n_0 vrijedi

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

U tom slučaju broj a zovemo **granična vrijednost** (ili **limes**) niza (a_n) i pišemo $\lim(a_n) = a$ (ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$). Takođe tada još kažemo da niz (a_n) *konvergira ka* a ili da *teži ka* a kad(a) $n \to \infty$

Definicija Kažemo da niz (a_n) u R ima graničnu vrijednost $+\infty$ (ili da konvergira ka beskonačnosti) i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ako za svaki broj $M \in R^+$ postoji prirodan broj n_0, takav da je $a_n > M$ za svaki prirodan broj n veći od n_0.
Slično se definira i granična vrijednost $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. U ovim slučajevima kaže se i da je niz (a_n) određeno divergentan ili da divergira ka beskonačnosti.

Svaki otvoreni interval u R koji sadrži tačku $x_0 \in R$ zovemo *okolina* (u R) tačke x_0 i označavamo sa $U(x_0)$ ili $O(x_0)$. Pri tome, za svaki $\epsilon > 0$ okolinu tačke x_0 datu sa $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) = x_o \in R : |x - x_0| < \epsilon$ zovemo $\epsilon-$ okolina tačke x_0.

Definicija Neka je (a_n) niz u R i neka je $a \in \bar{R}$. Kažemo da je a **granična vrijednost ili limes** niza (a_n) i pišemo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ako za svaku okolinu U tačke a postoji $n_0 \in N$ takav da $n > n_0$ povlači $a_n \in U$. U slučaju kada je $a \in R$ (tj. kada je a konačan broj), za niz (a_n) kažemo da je **konvergentan**, a u slučaju kada je $a = -\infty$ ili $+\infty$ ili da granična vrijednost ne postoji, kažemo da niz (a_n) **divergira** (u slučaju kada je limes niza (a_n) beskonačan kažemo da taj niz divergira u užem smislu, a u slučaju kada limes od (a_n) ne postoji, kažemo da niz (a_n) divergira u širem smislu li da oscilira).

Definicija Za niz (a_n) u R kažemo da je **nula - niz ili beskonačno mala veličina** (ili infinitezimala) u odnosu na n kad $n \to +\infty$ ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Neki primjeri limesa nizova

(1) $\lim \sqrt[n]{n} = 1.$

(2) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ za svaki $a \in R^+$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + ... + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0 & m < k \\ \frac{a_m}{b_m} & m = k \\ +\infty & m > k \wedge \frac{a_m}{b_m} > 0 \\ -\infty & m > k \wedge \frac{a_m}{b_m} < 0 \end{cases}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 (k \in N, a > 1);$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 (a \in C);$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : e \in (2,3), \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma = 0.577215664901532...$

Definicija Za tačku $a \in \bar{R}$ kažemo da je tačka gomilanja (ili tačka nagomilavanja) skupa $A(\subseteq R)$ ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedna tačka skupa A različita od same tačke a.

Definicija Za tačku $a \in \bar{R}$ kažemo da je tačka gomilanja (ili tačka nagomilavanja) niza a_n u R ako postoji podniz (a_{n_k}) tog niza koji teži ka a kad $k \to \infty$.Primijetimo da postoji razlika između pojma limesa i pojma tačke gomilanja nekog niza, te da imamo i važnu razliku između pojma tačke gomilanja niza (a_n) i tačke gomilanja skupa njegovih vrijednosti $a_n | n \in N$. Tako, npr.m niz $((-1)^n)$ima dvije tačke gomilanja i to -1 i 1, a skup njegovih vrijednosti $(-1)^n | n \in N = -1, 1$ je konačan pa nema tačaka gomilanja.

Definicija Najveća(najmanja tačka gomilanja niza (a_n) realnih brojeva zove se **gornji limes ili limes superior (donji limes ili limes inferior)** niza (a_n) i označava se sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n (\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n)$.

DefinicijaZa niz (a_n) u R kažemo da je Cauchyjev ili fundamentalan ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji indeks $n_0 \in N$ takav da je $|a_m - a_n| < \epsilon$ čim su indeksi m i n veći od n_0.
Lako se dokazuje da Cauchyjevi nizovi imaju ova svojstva:

(i) Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.

(ii) Svaki Cauchyjev niz je ograničen.

(iii) Ako Cauchyjev niz ima konvergentan podniz, on je i sam konvergentan.

Definicja Za niz (a_n) u R kažemo da je **neopadajući** ako je $a_n \leq a_{n+1}$ za svaki $n \in N$, a da je **rastući (strogo rastući)** ako je $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in N$. Analogno se definira **nerastući i opadajući (strogo opadajući)** nizovi. Jednim imenom nizove navedena četiri tipa zovemo **monotoni nizovi**.
Za monotone nizove važi slijedaći veoma jednostavan kriterij konvergencije: Svaki monoton i ograničen niz iz R je i konvergentan u R.