VINKO DRAGIČEVIĆ
HUSE FATKIĆ

ODREĐENI I VIŠESTRUKI INTEGRALI

U OBLIKU REPETITORIJA TEORIJE
I METODIČKE ZBIRKE ZADATAKA SA RJEŠENJIMA

II IZDANJE

SOUR „SVJETLOST", OOUR ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA,
SARAJEVO, 1987.

Odgovorni urednik:
RAMIZ DŽANANOVIĆ

Recenzenti:
Akademik prof. dr MAHMUT BAJRAKTAREVIĆ,
redovni profesor Prirodno-matematičkog
fakulteta Univerziteta u Sarajevu
Prof. mr VELJKO VULETIĆ, vanredni profesor
Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu

Lektor:
MILA MALJUKANOVIĆ

Ilustrator:
BATRIĆ PERAZIĆ

Naslovna strana:
MIRA GOGIĆ

Korektor:
GORDANA BOROVČANIN

Izdaje SOUR „SVJETLOST" – OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva,
Sarajevo

Za izdavača:
ABDUSELAM RUSTEMPAŠIĆ

Tiraž: 1500 primjeraka

Štampa: „MINERVA", Izdavačko-štamparska radna organizacija,
OOUR štamparska delatnost Subotica

Za štampariju:
STJEPAN VUKELIĆ graf. inž.

Narodna i univerzitetska biblioteka BiH, Sarajevo
Katalogizacija u publikaciji – CIP

517.43(075.8) (076.2)

DRAGIČEVIĆ, Vinko
Određeni i višestruki integrali : u obliku repetitorija teorije i metodičke zbirke zadataka sa rješenjima / Vinko Dragičević, Huse Fatkić. – 2. izd. – Sarajevo : Svjetlost, 1987. – 257 str. : graf. prikazi ; 24 cm
Bibliografija: str. [258].
ISBN 86-01-00976-X
I. FATKIĆ, Huse

ISBN 86-01-00976-X

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

U ovoj knjizi obrađena su u vidu riješenih zadataka sljedeća područja: određeni integral funkcija jedne promjenljive, nesvojstveni integral funkcija jedne promjenljive, primjena određenog integrala u nekim oblastima geometrije, dvostruki i trostruki integral.

Glavu II ove knjige obradio je H. Fatkić.

Osnova za izradu knjige bio je plan i program Matematike II Elektrotehničkog fakulteta u Sarajevu. Cilj je — pomoći studentima da samostalno rješavaju zadatke i matematičke probleme iz pomenutih oblasti matematike.

Svakom poglavlju prethodi potreban broj definicija i teorema. Poznavanje navedenih definicija i teorema je uvjet bez kojeg ne bi bilo moguće samostalno rješavati zadatke datog programa. Sama činjenica da je naveden nužan broj definicija i teorema ne znači sistematsko izlaganje teorije. S tim pitanjem čitalac će se opširnije upoznati samo ako sistematski prouči određene udžbenike iz više matematike.

Najveći broj postavljenih zadataka riješen je u svim pojedinostima — sistematično i do kraja. Za jedan broj zadataka navedeno je uputstvo, sa rezultatom ili bez rezultata. Također, jedan broj zadataka naveden je bez uputstva, sa rezultatom ili bez rezultata.

Ako čitalac želi da mu ova zbirka zadataka pomogne u izučavanju matematike, ovu knjigu mora proučavati na određen način. Najbolje će biti da čitalac svaki zadatak nastoji riješiti sam, ne gledajući na postupak rješavanja koji je dan u tekstu. Tek nakon toga, ili nakon ponovljenih pokušaja (ako je potrebno), treba da pogleda način na koji je zadatak riješen u knjizi. Jer, samo „čitanje" knjige, odnosno provjeravanje datih postupaka kod riješenih zadataka, je beskorisno.

Ovom zbirkom mogu se koristiti i studenti svih drugih tehničkih fakulteta, kao i studenti fakulteta čiji je program sličan programu matematike na elektrotehničkom fakultetu.

Tekst knjige pregledao je recenzent, akademik dr Mahmut Bajraktarević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, koji je dao niz korisnih primjedbi i sugestija. Zato je autorima bilo moguće da u rukopisu izvrše određene ispravke i dopune, pa je time tekst postao precizniji.

Isto tako, recenzent mr Veljko Vuletić, vanredni profesor Elektrotehničkog fakulteta u Sarajevu, dao je jedan broj primjedbi i sugestija u svrhu poboljšanja konačnog teksta knjige.

Na učinjenom, srdačno zahvaljujemo recenzentima ove knjige.

Bit ćemo zahvalni čitaocima na uočenim i ukazanim nedostacima i propustima u ovoj knjizi.

Autori

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Ovo drugo izdanje udžbenika ODREĐENI I VIŠESTRUKI INTEGRALI (u obliku repetitorija teorije i metodičke zbirke zadataka sa rješenjima) ne razlikuje se bitno od prvoga; u njemu su izvršene samo ispravke nekih primijećenih štamparskih i drugih sitnijih grešaka iz prvog izdanja.

U Sarajevu, 23. aprila 1987.

Autori

SADRŽAJ

II glava

Neke primjene određenog integrala u geometriji

INTEGRALNI RAČUN FUNKCIJA DVIJU I VIŠE PROMJENLJIVIH

III glava

Višestruki integrali

ODREĐENI INTEGRAL — IZRAČUNAVANJE I PRIMJENE

I glava

ODREĐENI INTEGRAL

1. Neki problemi koji dovode do pojma određenog integrala

Postoji niz problema iz oblasti geometrije, fizike, mehanike i drugih prirodnih nauka koji dovode do pojma *određenog integrala*.

Neka je funkcija $f(x)$ definirana i ograničena na *segmentu* $[a, b]$ i neka je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ jedna podjela tog segmenta.

Označimo sa

$$\tau_1 = [x_0, x_1],\ \tau_2 = [x_1, x_2], \dots, \tau_i = [x_{i-1}, x_i], \dots, \tau_n = [x_{n-1}, x_n]$$

podsegmente (*ćelije*) podjele segmenta $[a, b]$, a podjelu $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n$ označimo sa (τ)

Neka su $m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, m_i, \dots, m_{n-1}\, m_n$ *infimumi* skupa svih vrijednosti funkcije $f(x)$ na podsegmentima τ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, a $M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n$ su *supremumi* skupa svih vrijednosti funkcije na odgovarajućim podsegmentima τ_i.

Ako je $f(x)$ nenegativna i ograničena funkcija na segmentu $[a, b]$, tada *zbroj*

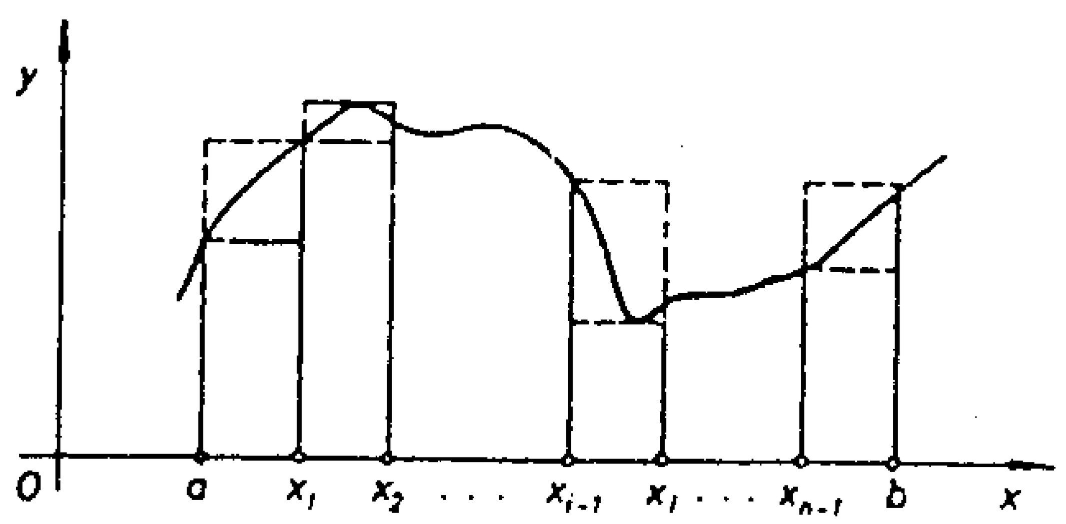
$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \dots + m_i\sigma_i + \dots + m_n\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i,$$

gdje je $\sigma_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, predstavlja površinu (uvjetno kazano površinu) stepenastog poligona upisanog u krivolinijski trapez odozgo omeđen grafikom funkcije $f(x)$, sa strana pravcima $x = a$ i $x = b$, a odozdo segmentom $[a, b]$ x-osi za proizvoljnu podjelu (τ) segmenta $[a, b]$.

Zbroj

$$M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + \dots + M_i\sigma_i + \dots + M_n\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i$$

predstavlja površinu oko navedenog krivolinijskog trapeza opisanog stepenastog poligona za proizvoljnu podjelu (τ) segmenta $[a, b]$.



Sl. 1.1.

Ako je

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = I,$$

tada je *broj I površina datog krivolinijskog trapeza*, pri čemu podjelu segmenta $[a, b]$ produžavamo tako da $\delta_n = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{(x_i - x_{i-1})\} \to 0$ $(n \to +\infty)$.

Zadaci (1.1. — 1.5.)

1.1. Odrediti površinu lika koji je ograničen grafikom funkcije $f(x) = x$, segmentom $[0, 1]$ x-ose, te ordinatama tačaka grafika čije su apscise $x = 0$, $x = 1$.

Rješenje.

Podijelimo segment $[0, 1]$ na n jednakih podsegmenata $\tau_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Funkcija $f(x) = x$ je *monotona — rastuća* funkcija na segmentu $[0, 1]$. Pošto je $f(x) = x$ neprekidna funkcija, to se *donje (gornje) međe* funkcije na podsegmentima τ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ podudaraju sa *najmanjim (najvećim)* vrijednostima funkcije $f(x)$ na odgovarajućim podsegmentima τ_i, tj.

$$m_1 = f(0) = 0,\quad m_2 = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \ldots, m_{i-1} = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{i-1}{n}, \ldots,$$

$$m_n = f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n};$$

$$M_1 = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},\ M_2 = f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}, \ldots, M_i = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n}, \ldots,$$

$$M_n = f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{n}{n}.$$

Pošto smo segment $[0, 1]$ podijelili na n jednakih dijelova, to je dužina svake ćelije τ_i jednaka $\sigma_i = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Prema tome, površina upisanog stepenastog poligona je jednaka

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{i-1}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + (i-1) + \ldots + (n-1)) = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n},$$

a površina opisanog stepenastog poligona je

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{i}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Otuda slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Broj $P = \frac{1}{2}$ je vrijednost površine trokuta ograničenog pravcem $f(x) = x$, segmentom $[0, 1]$ na x-osi, te ordinatama tačaka grafika čije su apscise $x = 0$, $x = 1$.

1.2. Izračunati površinu krivolinijskog trokuta ograničenog grafikom funkcije $f(x) = x^2$, segmentom $[0, 1]$ na x-osi, te ordinatama tačaka grafika čije su apscise $x = 0$, $x = 1$.

Rješenje.

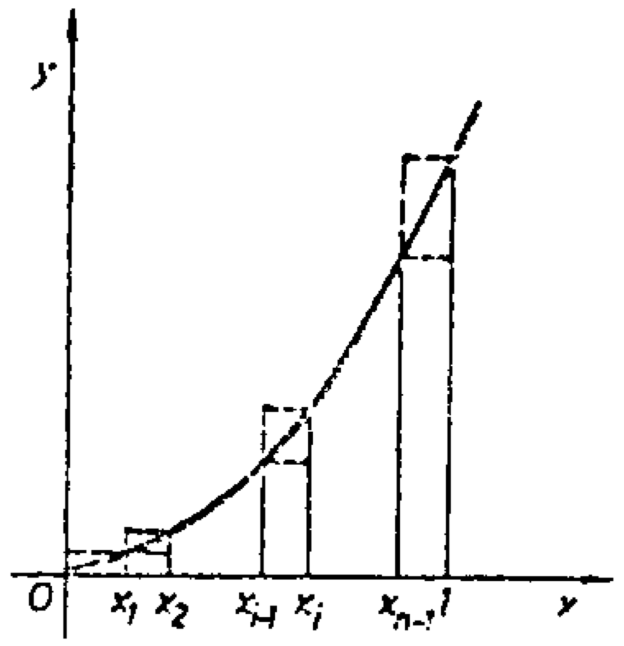
Segment $[0, 1]$ x-ose podijelimo kao i u zadatku 1.1. Iz činjenice da je $f(x) = x^2$ monotono-rastuća i neprekidna funkcija na segmentu $[0, 1]$, slijedi:

$$m_1 = f(0) = 0,\quad m_2 = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}, \ldots, m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{(i-1)^2}{n^2},$$

$$\ldots, m_n = f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2};$$

$$M_1 = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2},\ M_2 = f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{2^2}{n^2}, \ldots,$$

$$M_i = f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^2}, \ldots, M_n = f\left(\frac{n}{n}\right) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{n^2}{n^2}.$$



Sl. 1.2.

Kako je $\sigma_i = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$, imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + \ldots + i^2 + \ldots + (n-1)^2) =$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3};$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + \ldots + i^2 + \ldots + n^2) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Prelaskom na graničnu vrijednost, dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Broj $P = \frac{1}{3}$ je vrijednost površine krivolinijskog trokuta ograničenog grafikom funkcije $f(x) = x^2$, segmentom $[0, 1]$ ose apscisa, te pravama $x = 0$ i $x = 1$.

1.3. Naći površinu krivolinijskog trougla ograničenog grafikom funkcije $f(x) = x^3$, segmentom $[0, 1]$ ose apscisa, te pravcima $x = 0$, $x = 1$.

Uputa.

Ako primijenimo postupak kao u zadacima 1.1. i 1.2., dobijemo:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

1.4. Izračunati površinu krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $f(x) = a^x$ $(0 < a < 1)$, segmentom $[b, c]$ ose apscisa i pravcima $x = b$, $x = c$.

Rješenje.

Ako segment $[b, c]$ podijelimo na n jednakih dijelova, tada će duljina podsegmenta $\tau_i = [x_{i-1}, x_i]$ biti jednaka $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Pošto je funkcija $f(x)$ monotono opadajuća i neprekidna na segmentu $[b, c]$, to je:

$$m_1 = f(x_1) = f\left(b + \frac{c-b}{n}\right) = a^b a^{\frac{c-b}{n}},\ m_2 = f(x_2) = f\left(b + \frac{c-b}{n}\cdot 2\right) =$$

$$= a^b a^{\frac{c-b}{n}\cdot 2}, \ldots, m_n = f(x_n) = f\left(b + \frac{c-b}{n}\cdot n\right) = a^b a^{\frac{c-b}{n}\cdot n};$$

$$M_1 = f(x_0) = f(b) = a^b,\ M_2 = f(x_1) = f\left(b + \frac{c-b}{n}\cdot 1\right) = a^b a^{\frac{c-b}{n}},$$

$$\ldots, M_n = f(x_{n-1}) = f\left(b + \frac{c-b}{n}\cdot(n-1)\right) = a^b a^{\frac{c-b}{n}\cdot(n-1)}.$$

Odavde slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i = a^b\left(a^{\frac{c-b}{n}\cdot 1} + a^{\frac{c-b}{n}\cdot 2} + \ldots + a^{\frac{c-b}{n}\cdot n}\right)\cdot\frac{c-b}{n} =$$

$$= a^b a^{\frac{c-b}{n}} \frac{1 - a^{\frac{c-b}{n}\cdot n}}{1 - a^{\frac{c-b}{n}}} \cdot \frac{c-b}{n} = (a^b - a^c)\frac{a^{\frac{c-b}{n}}}{1 - a^{\frac{c-b}{n}}}\cdot\frac{c-b}{n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = \left(a^b + a^b a^{\frac{c-b}{n}} + \ldots + a^b a^{\frac{c-b}{n}(n-1)}\right)\cdot\frac{c-b}{n} =$$

$$= a^b\,\frac{1 - a^{\frac{c-b}{n}\cdot n}}{1 - a^{\frac{c-b}{n}}}\cdot\frac{c-b}{n} = (a^b - a^c)\frac{\frac{c-b}{n}}{1 - a^{\frac{c-b}{n}}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i = (a^b - a^c)\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{c-b}{n}} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{c-b}{n}}{1 - a^{\frac{c-b}{n}}} = \frac{a^b - a^c}{\ln a};$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i = (a^b - a^c)\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{c-b}{n}}{1 - a^{\frac{c-b}{n}}} = \frac{a^b - a^c}{\ln a}.$$

1.5. Zadatak 1.4. riješiti za: 1°. $a > 1$ i 2°. $a = e$.

2. Gornja i donja Darbouxova suma

Neka je $[a, b]$ $(a < b)$ segment na osi x, a $f(x)$ je realna funkcija definirana i ograničena na $[a, b]$.

Označimo sa m *donju*, a sa M *gornju* među funkcije $f(x)$ na $[a, b]$. Neka je (τ) — jedna podjela segmenta $[a, b]$, m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ donje, a M_i

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ gornje međe $f(x)$ na odgovarajućim podsegmentima τ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ podjele (τ).

$$\underline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \text{ je } donja, \text{ a } \overline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i$$

gornja Darbouxova (Darbu) *suma* za $f(x)$ na $[a, b]$ za podjelu (τ).

Skup svih *donjih* (*gornjih*) *Darbouxovih* suma funkcije ograničena na $[a, b]$ je ograničen, tj. $m(b - a) \leqslant \underline{S}(\tau) \leqslant \overline{S}(\tau) \leqslant M(b - a)$.

Zadaci (2.1.—2.3.)

2.1. Odrediti donju i gornju Darbouxovu sumu funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{za } x \neq 0 \\ 1, & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

za barem dvije različite podjele segmenta $[0, 1]$.

Rješenje.

1°. Segment $[0, 1]$ podijelimo na n jednakih dijelova (ekvidistantna podjela), i ovu podjelu označimo sa (τ'). Funkcija $f(x)$ je neprekidna na $(0, 1]$, a u $x = 0$ ima prekid, jer je $\lim\limits_{n \to 0+} f(x) = 0$, a $f(0) = 1$. Dakle, $f(x)$ ima prekid na segmentu $[0, 1]$ za $x = 0$.

Duljine podsegmenata (ćelija) τ_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ podjele (τ') iznose $\sigma'_i = \dfrac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Zbog toga imamo:

$$\underline{S}(\tau') = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i' = m_1 \sigma_1' + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \sigma_i' = \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} (f(x_1) + \ldots +$$

$$+ f(x_{i-1}) + \ldots + f(x_{n-1})) = \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right) = \frac{1}{n^3} (1 + 2^2 + \ldots + (i-1)^2 + \ldots + (n-1)^2) =$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2};$$

$$\overline{S}(\tau') = \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i' = M_1 \sigma_1' + \sum_{i=2}^{n} f(x_i) \sigma_i' = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} (f(x_2) + \ldots +$$

$$+ f(x_i) + \ldots + f(x_n)) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{i}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + n - 6}{6n^3}.$$

(a) Očigledno je da važi $0 < \underline{S}(\tau') < \overline{S}(\tau') < 1$ za svako $n > 1$.

(b) Pokažimo da niz $\underline{S}_n(\tau') = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ raste, a niz $\overline{S}_n(\tau') =$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + n - 6}{6n^3} \text{ opada.}$$

Zaista,

$$\underline{S}_{n+1}(\tau') - \underline{S}_n(\tau') = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$= \frac{3n^2 + n - 1}{6(n+1)^2 n^2}.$$

S obzirom da je nazivnik uvijek pozitivan, a brojnik je veći od ~~nule~~ za svako $n \geqslant 1$, zaključujemo da niz $\{\underline{S}_n(\tau')\}_1^\infty$ raste.

Na analogan način se pokazuje da niz $\{\overline{S}_n(\tau')\}_1^\infty$ opada.

2°. Segment $[0, 1]$ podijelimo na dva dijela: $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ i $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$. Sada segment $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ dijelimo takvom podjelom da brojevi x_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ rastu u geometrijskoj progresiji, tj.

$$x_1 = \frac{1}{n}, \; x_2 = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n}, \; x_3 = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{n})^2 \ldots, \; x_i = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{n})^{i-1}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{n})^{n-1}, \; x_{n+1} = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{n})^n = 1.$$

Ovu podjelu segmenta $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ označimo sa (τ^*), čije su ćelije $\tau_i^* = [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 2, 3, \ldots, n + 1)$. Duljine ćelija τ_i^* su $\sigma_i^* = x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n} (\sqrt[n]{n})^{i-1} - \dfrac{1}{n} (\sqrt[n]{n})^{i-2} =$

$$= \frac{1}{n} (\sqrt[n]{n})^{i-2} (\sqrt[n]{n} - 1).$$

Sa τ_1 označimo segment $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$.

Neka (τ^*) podjela segmenta $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ i segment $\tau^*_1 = \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ čine podjelu segmenta $[0, 1]$. Ovu podjelu označimo sa (τ''), a podsegmente podjele sa τ_i'' $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$.

(Ako segment $[a, b]$, $0 < a < b$, dijelimo brojevima x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koji rastu u geometrijskoj progresiji, onda stavljamo

$$x_i = aq^i, \; b = x_n = aq^n \Rightarrow q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \; x_i = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\Bigg).$$

Donje i gornje međe funkcije $f(x)$ na ćelijama τ_i'' su:

$$m_0 = 0, \; m_1 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, \ldots, m_i = f(x_i) =$$

$$= f\left(\frac{1}{n} (n)^{\frac{i-1}{n}}\right) = \left(\frac{1}{n} \cdot n^{\frac{i-1}{n}}\right)^2, \ldots, m_n = f(x_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot n^{\frac{n-1}{n}}\right)^2;$$

$$M_0 = f(x_0) = f(0) = 1, \; M_1 = f(x_2) = \left(\frac{1}{n} n^{\frac{1}{n}}\right)^2, \ldots, M_i = f(x_{i+1}) =$$

$$= \left(\frac{1}{n} n^{\frac{i}{n}}\right)^2, \ldots, M_n = f(x_{n+1}) = f(1) = 1.$$

Prema tome,

$$\underline{S}(\tau'') = \sum_{i=0}^{n} m_i \sigma''_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} n^{\frac{i-1}{n}}\right)^2 \frac{1}{n} n^{\frac{i-1}{n}} (\sqrt[n]{n} - 1) =$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3} \cdot n^{-\frac{3}{n}} \sum_{i=1}^{n} n^{\frac{3i}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3} \cdot n^{-\frac{3}{n}} (n^{\frac{3}{n}} + n^{\frac{6}{n}} + \ldots +$$

$$+ n^{\frac{3i}{n}} + \ldots + n^{\frac{3n}{n}}) = \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3} (1 + n^{\frac{3}{n}} + \ldots + n^{\frac{3i-3}{n}} + \ldots + n^{\frac{3n-3}{n}}) =$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3} \cdot \frac{n^3 - 1}{n^{\frac{3}{n}} - 1} = \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3} \cdot \frac{n^3 - 1}{(n^{\frac{1}{n}} - 1)(n^{\frac{2}{n}} + n^{\frac{1}{n}} + 1)} =$$

$$= \frac{n^3 - 1}{n^3 (n^{\frac{2}{n}} + n^{\frac{1}{n}} + 1)};$$

$$\overline{S}(\tau'') = \sum_{i=0}^{n} M_i \sigma''_{i+1} = \frac{1}{n} \cdot 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} n^{\frac{i}{n}}\right)^2 \frac{1}{n} n^{\frac{i-1}{n}} (\sqrt[n]{n} - 1) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3} n^{-\frac{1}{n}} \sum_{i=1}^{n} n^{\frac{3i}{n}} = \frac{1}{n} + \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n^3} \cdot n^{\frac{2}{n}} \frac{n^3 - 1}{n^{\frac{3}{n}} - 1} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{n^{\frac{2}{n}} (n^3 - 1)}{n^3 (n^{\frac{2}{n}} + n^{\frac{1}{n}} + 1)}.$$

(c) Očigledno je da važi $0 < \underline{S}(\tau'') < \overline{S}(\tau'') < 1$.

(d) Pokazati da niz

$$\underline{S}_n(\tau'') = \frac{n^3 - 1}{n^3 (n^{\frac{2}{n}} + n^{\frac{1}{n}} + 1)}$$

raste, a niz

$$\overline{S}_n(\tau'') = \frac{1}{n} + \frac{n^{\frac{2}{n}} (n^3 - 1)}{n^3 (n^{\frac{2}{n}} + n^{\frac{1}{n}} + 1)}$$

opada kad n raste preko skupa prirodnih brojeva.

(e) Odrediti N tako da za svako $n > N$ važe nejednakosti

$$\left|\underline{S}_n(\tau') - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{100}, \quad \left|\overline{S}_n(\tau') - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{100}.$$

2.2. Data je funkcija $f(x) = x + x^2$.

(a) Dijeleći segment $[0, 1]$ na n jednakih dijelova, odrediti donju $\underline{S}_n(\tau)$ i gornju $\overline{S}_n(\tau)$ Darbouxovu sumu.

(b) Ispitati monotonost i konvergenciju nizova $\{\underline{S}_n(\tau)\}_1^{\infty}$, $\{\overline{S}_n(\tau)\}_1^{\infty}$.

(c) Odrediti broj N tako da za svako $n > N$ važe nejednakosti $|\underline{S}_n(\tau) - I| < \varepsilon$, $|\overline{S}_n(\tau) - I| < \varepsilon$, pri čemu je $I = \lim_{n \to +\infty} \underline{S}_n(\tau)$, $I = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}_n(\tau)$.

Uputa.

Koristiti se rezultatima dobivenim u zadacima 1.1. i 1.2.

2.3. Uraditi sve što se traži u zadatku 2.2., ali samo za funkciju $f(x) = x^3 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Određeni integral kao limes sume

Neka je $f(x)$ ograničena funkcija na segmentu $[a, b]$. Segment $[a, b]$ podijelimo na n dijelova τ_i, jednakih ili nejednakih. Označimo sa $\xi_i \in \tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ proizvoljne tačke, ili, što je isto,

$$a = x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n = b.$$

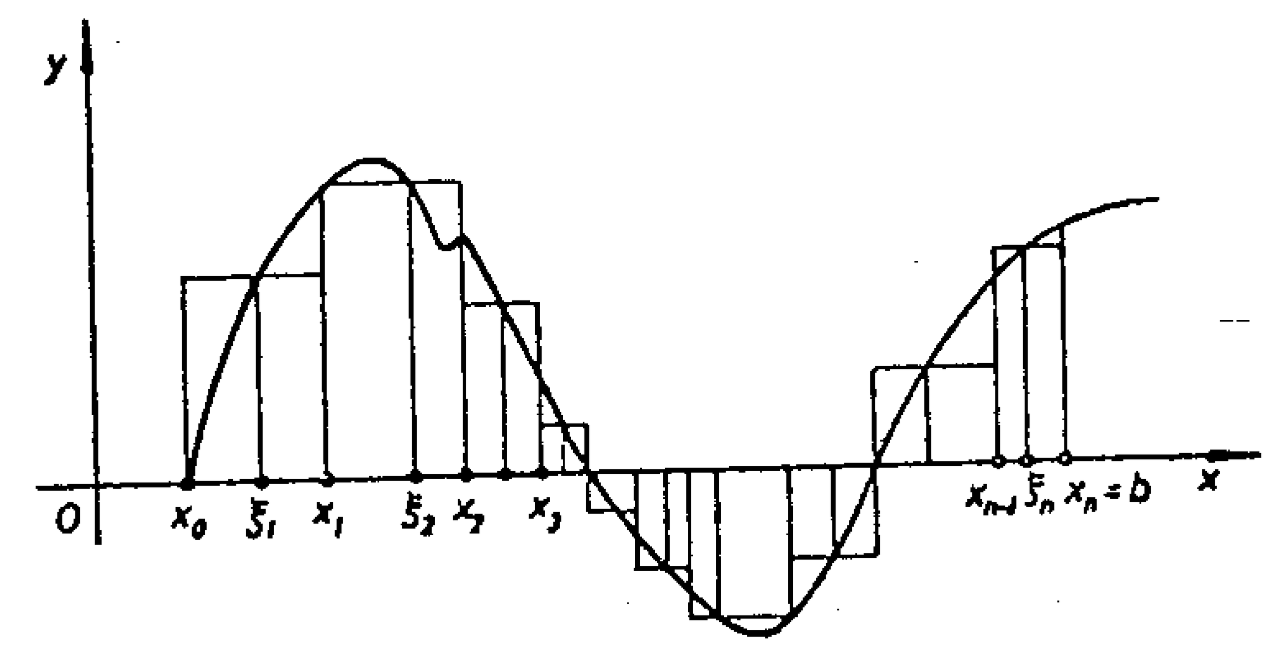
Suma

$$S(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sigma_i$$

zove se *integralna suma (u Rimannovom smislu)* za funkciju $f(x)$ na segmentu $[a, b]$.

Za proizvoljnu (τ)-podjelu važi

$$\underline{S}(\tau) \leqslant S(\tau) \leqslant \overline{S}(\tau).$$



Sl. 3.1.

Funkcija $f(x)$ ograničena na segmentu $[a, b]$ naziva se *integrabilnom* na tome segmentu ako postoji granična vrijednost integralnih suma ove funkcije, tj.

$$I = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\sigma_i\} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sigma_i$$

za bilo koju podjelu segmenta $[a, b]$, nazavisno od izbora tačaka $\xi_i \in \tau_i$.

Broj I naziva se *određenim integralom* funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$, što označavamo na ovaj način

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Za svaku funkciju $f(x)$, definiranu i ograničenu na segmentu $[a, b]$, postoje granične vrijednosti

$$\underline{I} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i, \quad \overline{I} = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i, \qquad \delta_n = \max_{i=1,\ldots,n} \{\sigma_i\},$$

koje se zovu *donji*, odnosno *gornji integral* funkcije $f(x)$ na $[a, b]$.

Da bi funkcija $f(x)$, definirana i ograničena na segmentu $[a, b]$, bila na $[a, b]$ integrabilna, potrebno je i dovoljno da je $\underline{I} = \overline{I}$ i ova zajednička vrijednost je integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Da bi funkcija $f(x)$, ograničena na segmentu $[a, b]$, bila integrabilna na tome segmentu, potrebno je da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega(\tau) = 0$ za svaki niz podjela segmenta $[a, b]$ za koji $\delta_n = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\sigma_i\} \to 0$ $(n \to +\infty)$, i dovoljno je da postoji jedan niz podjela tog segmenta za koji $\delta_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ takav da je za taj niz podjela $\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega(\tau) = 0$. Pri tome je

$$\Omega(\tau) = \overline{S}(\tau) - \underline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\sigma_i,$$

gdje je

$$\omega_i = M_i - m_i$$

oscilacija date funkcije na podsegmentu τ_i.

Zadaci (3.1.—3.6.)

3.1. Koristeći uslov $\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega(\tau) = 0$, pokazati da je funkcija $f(x) = x^2$ integrabilna na segmentu $[0, 1]$.

Rješenje.

Na osnovu rezultata u zadatku 1.2. je

$$\Omega(\tau) = \overline{S}(\tau) - \underline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon, \; n > \frac{1}{\varepsilon},$$

gdje je uzet niz ekvidistantnih podjela na datom segmentu.

3.2.a. Koristeći uvjet $\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega(\tau) = 0$, ispitaj da li je funkcija $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ integrabilna na segmentu $[-1, 3]$.

Rješenje.

Segment $[-1, 3]$ podijelimo na n dijelova na bilo koji način, tako da je $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\sigma_i\} < \delta$ ove podjele koju ćemo označiti sa (τ). Označimo sa ξ_i, odnosno η_i apscisu tačke iz $[x_i, x_{i-1}]$ u kojoj funkcija ima maksimalnu, odnosno minimalnu vrijednost. Tada je

$$\omega_i = f(\xi_i) - f(\eta_i) = \xi_i^3 - 2\,\xi_i^2 + \xi_i - \eta_i^3 + 2\,\eta_i^2 - \eta_i =$$

$$= (\xi_i - \eta_i)(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \xi_i\eta_i - 2\,\xi_i - 2\,\eta_i + 1).$$

Pošto je $|\xi_i| \leqslant 3$, $|\eta_i| \leqslant 3$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, to postoji broj $K > 0$ takav da je

$$|\xi_i^2 + \eta_i^2 + \xi_i\eta_i - 2\,\xi_i - 2\,\eta_i + 1| < K.$$

Kako je $|\xi_i - \eta_i| \leqslant \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}| < \delta$, to na segmentu $[-1, 3]$ važi

$$\Omega(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\sigma_i < K\delta \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = 4\,K\delta.$$

Za po volji mali $\varepsilon > 0$ odaberimo δ takav da bude $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4K}$. Otuda imamo $\Omega(\tau) < \varepsilon$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega(\tau) = 0$. Time smo pokazali integrabilnost funkcije $f(x)$ na segmentu $[-1, 3]$.

3.2.b. Dokaži da funkcija

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \text{ racionalno} \\ -1 & \text{ako je } x \text{ iracionalno} \end{cases}$$

nije integrabilna ni na kojem segmentu $[a, b]$.

Rješenje.

Podijelimo segment $[a, b]$ na n dijelova duljine $\sigma_i = x_i - x_{i-1}$. U svakom od tih intervala $\omega_i = 2$. Zbog toga je

$$\Omega(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\sigma_i = 2\,(b - a).$$

Tvrdnja je dokazana.

3.3. Izračunati po definiciji integral $\int_0^1 e^x\,dx$.

(a) Podijelimo segment $[0, 1]$ na n jednakih dijelova dužine $\dfrac{1}{n}$.

Gornja suma je

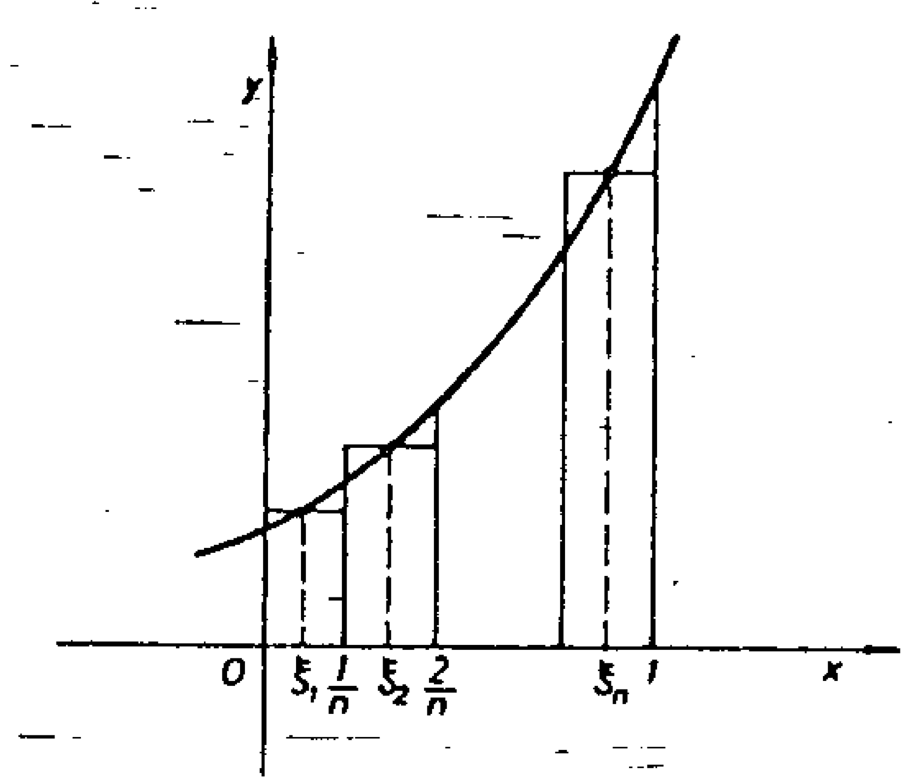
$$\overline{S}(\tau)=\sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i=\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}+e^{\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}.$$

$$\overline{I}=\lim_{n\to+\infty}\overline{S}(\tau)=(e-1)\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=$$

$$=(e-1)\lim_{v\to0}e^{v}\lim_{v\to0}\frac{v}{e^{v}-1}=e-1.$$

Na analogan način dolazimo do $\underline{I}=\lim\limits_{n\to+\infty}\underline{S}(\tau)=e-1$, tj. $\underline{I}=\overline{I}$, pa je $\int\limits_0^1 e^x\,dx=e-1$.



Sl. 3.2.

(b) Riješimo zadatak preko integralnih suma. Neka je (τ) — podjela kao i ranije, tj.

$$\tau_i=\left[\frac{i}{n},\ \frac{i-1}{n}\right].$$

Neka je

$$\xi_i=\frac{1}{2}\left(\frac{i}{n}+\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{2i-1}{n}.$$

$$\int\limits_0^1 e^x\,dx=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i-1}{2n}}\,\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{2n}}+e^{\frac{3}{2n}}+\ldots+e^{\frac{2n-3}{2n}}+e^{\frac{2n-1}{2n}}\right)\cdot\frac{e^{2n}}{n}\,\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}.$$

Limes ovog izraza kad $n\to+\infty$ je

$$\int\limits_0^1 e^x\,dx=e-1.$$

3.4. Odrediti graničnu vrijednost gornjih i donjih integralnih suma (gornji i donji integral) funkcije $f(x)=\log_a x$ na segmentu $[b,c]$.

Rješenje.

Data funkcija nije ograničena u razmaku $(0,+\infty)$ i nije definisana u razmaku $(-\infty,0]$. Zbog toga ćemo uzeti $b>0$. Za ovakvo b funkcija je neprekidna i za $0<a<1$ opadajuća, a za $a>1$ rastuća. Mi ćemo zadatak riješiti za $a>1$.

Podijelimo segment $[b,c]$ na ćelije, tačkama:

$$b,\ bq,\ bq^2,\ldots,\ bq^n,\ (\tau)\text{ — podjela,}$$

gdje je $bq^n=c$, tj. $q=\sqrt[n]{\frac{c}{b}}$, $(q\to1$ ako $n\to+\infty)$.

Pošto je funkcija neprekidna i rastuća, biće:

$$m_i=f(x_{i-1})=f\left(b\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{i-1}{n}}\right)=\log_a\left(b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{i-1}{n}}\right),\quad(i=1,2,\ldots,n);$$

$$M_i=f(x_i)=\left(b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{i}{n}}\right)=\log_a\left(b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{i}{n}}\right),\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Dakle, imamo

$$\underline{S}(\tau)=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}\log_a\left[b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{i-1}{n}}\right]\cdot b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{i-1}{n}}\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right],$$

ili

$$\underline{S}(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\log_a(bq^{i-1})\cdot bq^{i-1}(q-1)=b(q-1)\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}(\log_a b+(i-1)\log_a q)=$$

$$=b(q-1)\left(\log_a b\cdot\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}+\log_a q\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)\,q^{i-1}\right).$$

Iz

$$\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$$

i

$$\sum_{i=1}^{n}iq^{i-1}=\frac{d}{dq}\left(\sum_{i=1}^{n}q^i\right)=\frac{d}{dq}\left(\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right)=\frac{(n+1)\,q^n}{q-1}-\frac{q^{n+1}-1}{(q-2)^2},$$

slijedi:

$$\underline{S}(\sigma)=b(q-1)\left(\log_a b\cdot\frac{q^n-1}{q-1}-\log_a q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+\right.$$

$$\left.+\log_a q\cdot\frac{(n+1)\,q^n}{q-1}-\log_a q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{(q-2)^2}\right)=$$

$$=-b\log_a b+b\log_a b\cdot q^n-b\log_a q\cdot q^n+b\log_a q+b\log_a q\cdot(n+1)\,q^n-$$

$$-\frac{b}{q-1}\log_a q\cdot(q^{n+1}-1)=(c-b)\log_a b-c\log_a q+b\log_a q+$$

$$+(n+1)\,c\log_a q-\frac{cq}{q-1}\log_a q+\frac{b}{q-1}\log_a q=c\log_a c-b\log_a b+$$

$$+b\log_a q-(cq-b)\frac{\log_a q}{q-1}.$$

Na analogan način dobijamo,

$$\overline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \log_a (bq^i) \cdot bq^{i-1}(q-1) =$$

$$= b(q-1) \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} (\log_a b + i \log_a q) =$$

$$= b(q-1)\left(\log_a b \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + \log_a q \cdot \left(\frac{(n+1)q^n}{q-1} - \frac{q^{n+1}-1}{(q-1)^2}\right)\right) =$$

$$= c \log_a b - b \log_a b + (n+1) c \cdot \log_a q - (cq - b) \cdot \frac{\log_a q}{q-1} =$$

$$= c \log_a c - b \log_a b + c \log_a q - (cq - b) \cdot \frac{\log_a q}{q-1}.$$

Otuda,

$$\underline{I} = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(\tau) = c \log_a c - b \log_a b + \lim_{q\to 1}\left(b \log_a q - (cq-b)\frac{\log_a q}{q-1}\right) =$$

$$= c \log_a c - b \log_a b - (c-b) \lim_{q\to 1} \frac{\frac{1}{q \ln a}}{1} =$$

$$= c \log_a c - b \log_a b - \frac{c-a}{\ln a}.$$

Na analogan način dobijamo,

$$\overline{I} = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(\tau) = c \log_a c - b \log_a b - \frac{c-b}{\ln a}, \text{ tj. } \underline{I} = \overline{I}.$$

Dakle, funkcija $f(x) = \log_a x$ je integrabilna na segmentu $[b, c]$, $0 < b < c$ i $a > 1$, pa pišemo

$$\int_b^c \log_a x \, dx = c \log_a c - b \log_a b - \frac{c-b}{\ln a}.$$

3.5. Za $0 < a < 1$, $0 < b < c$ odrediti $\int_b^c \log_a x \, dx$, i to:

(a) pomoću definicije određenog integrala,

(b) koristeći dobiveni rezultat u zadatku 3.4.

3.6. Dokazati da je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x}$ integrabilna na proizvoljnom segmentu $[a, b]$, $0 < a < b$.

Rješenje.

Podijelimo segment $[a, b]$ na ćelije, tačkama

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n,$$

gdje je $aq^n = b$, tj. $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Data funkcija je opadajuća i neprekidna, pa i ograničena na $[a, b]$. Zbog toga je

$$m_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{1}{aq^i}, \; (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$M_i = f(x_{i-1}) = \frac{1}{x_{i-1}} = \frac{1}{aq^{i-1}}, \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Kako je

$$\sigma_i = x_i - x_{i-1} = aq^i - aq^{i-1} = a(q-1)q^{i-1},$$

bit će

$$\underline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{aq^i}(q-1)q^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q-1}{q} = n \cdot \frac{q-1}{q} =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{q}\right) = n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right);$$

$$\overline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{aq^{i-1}}(q-1)q^{i-1} = \sum_{i=1}^{n}(q-1) = n(q-1) =$$

$$= n\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Prema tome, imamo

$$\underline{I} = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(\tau) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{v\to 0_+} \ln\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{\ln(1-v)} =$$

$$= -\ln\frac{a}{b} \cdot \lim_{t\to 0_-} \frac{t}{\ln(1+t)} = \ln b - \ln a;$$

$$\overline{I} = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(\tau) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln\frac{b}{a} \cdot \lim_{v\to 0_+} \frac{v}{\ln(1+v)} =$$

$$= \ln b - \ln a.$$

Dakle,

$$\underline{I} = \bar{I} = I = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a,$$

tj. funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je integrabilna na datom segmentu.

4. Ispitivanje integrabilnosti funkcija na osnovu teorema

Funkcije koje su na segmentu $[a, b]$:

(a) *neprekidne;*

(b) *monotone;*

(c) *ograničene sa konačno mnogo tačaka prekida su integrabilne na tom segmentu.*

Zadaci (4.0.—4.4.)

4.0. Izračunati, po definiciji, određene integrale:

1°. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $0 < a < b$;

2°. $\int_a^b x^k\, dx$, $(0 \leqslant a < b$, k je prirodan broj);

3°. $\int_0^\pi \sin x\, dx$;

4°. $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$;

5°. $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx$.

Rješenja.

1°. Zadatak ćemo riješiti pomoću limesa integralnih suma. Podijelimo segment $[a, b]$ na n dijelova na bilo koji način, uz uvjet da $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{(x_i - x_{i-1})\} \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Neka je $\xi_i = \sqrt{x_{i-1} \cdot x_i}$. Pokažimo da je

$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Provjerićemo da li vrijedi nejednakost

$$x_{i-1} \leqslant \sqrt{x_{i-1} x_i} \leqslant x_i.$$

Kvadriranjem i dijeljenjem ove nejednakosti dobijamo ekvivalentne nejednakosti:

$$x_{i-1}^2 \leqslant x_{i-1} x_i \leqslant x_i^2 / : x_{i-1}, x_i$$

$$x_{i-1} \leqslant x_i, \ x_{i-1} \leqslant x_i,$$

koje su istinite.

Otuda,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} \overset{\text{def.}}{=\!=} \lim_{\substack{n \to +\infty \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{(x_i - x_i - 1)\} \to 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1} x_i}(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

tj.

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

2°. Podijelimo segment $[a, b]$ na n dijelova, pa stavimo

$$\xi_i = \left(x_{i-1}^k + x_{i-1}^{k-1} x_i + \ldots + x_{i-1} x_i^{k-1} + x_i^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Odavde je

$$(k+1)\,\xi_i^k = x_{i-1}^k + x_{i-1}^{k-1} x_i + \ldots + x_{i-1} x_i^{k-1} + x_i^k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (k+1)\,\xi_i^k > (k+1)\,x_{i-1}^k \Rightarrow x_{i-1} < \xi_i \\ (k+1)\,\xi_i^k < (k+1)\,x_i^k \Rightarrow \xi_i < x_i. \end{cases}$$

Prema tome, imamo

$$\int_a^b x^k\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1}^k + x_{i-1}^{k-1} x_i + \ldots + x_{i-1} x_i^{k-1} + x_i^k}{k+1}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1} - x_{i-1}^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \lim_{n \to +\infty} ((x_1^{k+1} - x_0^{k+1}) +$$

$$+ (x_2^{k+1} - x_1^{k+1}) + \ldots + (x_n^{k+1} - x_{n-1}^{k+1})) =$$

$$= \frac{1}{k+1} \lim_{n \to +\infty} (x_n^{k+1} - x_0^{k+1}) = \frac{1}{k+1} \cdot (b^{k+1} - a^{k+1}),$$

tj.

$$\int_a^b x^k\, dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Napominjemo da ovo važi i za $k = 0$.

(a) Riješiti zadatak 2°., ali za $0 < a < b$, dijeleći segment $[a, b]$, tačkama $a, aq, \ldots, aq^i, \ldots, aq^n = b$.

Rješenje.

Pošto je data funkcija neprekidna i monotono rastuća, imamo

$$\int_a^b x^k \, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i = \lim_{\substack{q \to 1 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=1}^{n} (aq^i)^k aq^{i-1}(q-1) =$$

$$= a^{k+1} \lim_{\substack{q \to 1 \\ (n \to +\infty)}} (q-1) \sum_{i=1}^{n} q^{i(k+1)} q^{-1} = a^{k+1} \lim_{\substack{q \to 1 \\ (n \to +\infty)}} q^k (q-1) \frac{q^{n(k+1)} - 1}{q^{k+1} - 1} =$$

$$= a^{k+1} \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{k+1} - 1 \right) \lim_{q \to 1} q^k \lim_{q \to 1} \frac{q-1}{q^{k+1} - 1} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

jer je (primjenom L' Hospitalova teorema)

$$\lim_{q \to 1} \frac{q-1}{q^{k+1} - 1} = \frac{1}{k+1}.$$

(b) Ovaj zadatak riješiti pomoću donjih suma.

(c) Izračunaj $\int_a^b x^k \, dx$, $0 < a < b$:

(1) $k = -4; -3$;

(2) k je realan broj.

Uputstvo.

Segment $[a, b]$ dijeliti tačkama $a, aq, \ldots, aq^n = b$.

3°. Podijelimo segment $[0, \pi]$ na n jednakih dijelova. Dužina svakog dijela je $\frac{\pi}{n}$. Za ξ_i uzet ćemo tačke x_i, tj.:

$$\xi_0 = x_0 = 0, \; \xi_1 = x_1 = \frac{\pi}{n}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1} = (n-1)\frac{\pi}{n}.$$

Integralna suma je

$$S(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{(i-1)\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} =$$

$$= \frac{\pi}{n} \left(0 + \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} \frac{\sin\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}\right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin \frac{\pi}{2n}} =$$

$$= \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

Prema tome je

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = \lim_{n \to +\infty} S(\tau) = 2 \cdot \lim_{n \to +\infty} \cos \frac{\pi}{2n} \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 2.$$

4°. Riješite sami.

5°. Riješite sami.

4.1. Ispitati integrabilnost funkcija: x^k $(k = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Rješenja:

1°. Funkcija $f(x) = x^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ je neprekidna na proizvoljnom segmentu $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$, pa je i integrabilna na tome segmentu.

2°. Funkcija $f(x) = x^k$ $(k = \ldots -3, -2, -1, 0)$ je neprekidna na svakom konačnom segmentu, koji ne sadrži tačku $x = 0$, pa je integrabilna na tome segmentu.

3°. Funkcija $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ je neprekidna na proizvoljnom segmentu $[b, c] \subset (-\infty, +\infty)$, pa je i integrabilna na tome segmentu.

4°. Funkcija $f(x) = \log_a x$ $(0 < a < 1$ ili $a > 1)$ neprekidna je u intervalu $(0, +\infty)$, pa je integrabilna na svakom segmentu $[b, c] \subset (0, +\infty)$.

5°. Funkcije $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ su neprekidne u $(-\infty, +\infty)$, pa su integrabilne na svakom segmentu $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

6°. Funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ imaju beskonačno mnogo tačaka prekida (u kojima funkcije nisu definisane), ali su neprekidne u intervalima i to:

$$\operatorname{tg} x \text{ u } \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \text{ a } \operatorname{ctg} x \text{ u } (0 + k\pi, \pi + k\pi)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Prema tome, funkcija $\operatorname{tg} x$ je integrabilna na proizvoljnom segmentu $[a, b] \subset \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, a $\operatorname{ctg} x$ na $[a, b] \subset (k\pi, k\pi + \pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

4.2. Odrediti segmente integrabilnosti funkcije $f(x) = \sqrt[n]{x^k}$, pri čemu je n prirodan broj, a k cijeli broj.

4.3. Ispitati integrabilnost ciklometrijskih funkcija.

Rješenje.

1°. Formulom

$$\operatorname{Arc} \sin x = \begin{cases} \arcsin x + 2k\pi \\ \pi - \arcsin x + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{cases}$$

je zadana višeznačna (sa beskonačno mnogo vrijednosti za istu vrijednost argumenta) funkcija. Međutim, integrabilnost u ovom slučaju se dokazuje samo za jednoznačnu funkciju. Naime, funkcije $\arcsin x + 2k\pi$ $(\pi - \arcsin x + 2k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ su neprekidne na segmentu $[-1, 1]$ i jednoznačne su za svako određeno $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, pa su one za svako određeno $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ integrabilne na segmentu $[-1, 1]$. Prema tome, o integrabilnosti funkcije $y = \operatorname{Arc} \sin x$ može se govoriti samo u smislu integrabilnosti funkcija $\arcsin x + 2k\pi$ $(\pi - \arcsin x + 2k\pi)$ za određene $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ i za $-1 \leq x \leq 1$.

2°. Analogno, funkcije

$$y = \operatorname{Arc}\cos x = \begin{cases} \arccos x + 2k\pi \\ -\arccos x + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{cases}$$

za svako određeno $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ $(y \in [k\pi, (k+1)\pi])$ su integrabilne na segmentu $[-1, 1]$.

3°. Grane višeznačne funkcije $\operatorname{Arc tg} x = \operatorname{arc tg} x + k\pi$ za određeno $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ su integrabilne (zbog neprekidnosti) na svakom segmentu $[a, b] \subset (-\infty, \infty)$. Iz istih razloga, svaka grana višeznačne funkcije

$$\operatorname{Arc ctg} x = \operatorname{arc ctg} x + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

je integrabilna na svakom segmentu $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

4.4. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{za } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{2} + \log_a x & \text{za } 1 \leqslant x < a \ (a > 1) \\ x & \text{za } a \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

je integrabilna na segmentu $[0, b]$ kao ograničena funkcija sa konačno mnogo tačaka prekida.

5. Osnovne osobine određenog integrala

(1) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$, tada je ona integrabilna na svakom segmentu $[c, d] \subset [a, b]$ $(a < b)$.

(2) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a < c < b).$$

(3) Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$, tada je ona integrabilna i na $[b, a]$, i važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(4) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ i ako je k bilo koji realan broj, tada je i funkcija $kf(x)$ integrabilna na tome segmentu i vrijedi

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

(5) Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na segmentu $[a, b]$ i ako su μ, ν bilo koji realni brojevi, tada je na tome segmentu integrabilna funkcija $\mu f(x) + \nu g(x)$ i vrijedi

$$\int_a^b (\mu f(x)\,dx + \nu g(x)\,dx) = \mu\int_a^b f(x)\,dx + \nu\int_a^b g(x)\,dx.$$

(6) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ $(a < b)$ i ako je m donja, a M gornja međa funkcije na tome segmentu, tada vrijedi

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

(7) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$ $(a < b)$, i ako je na tome segmentu $f(x) \geqslant 0$ $(f(x) \leqslant 0)$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \ \Big(\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0\Big).$$

(8) Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ $(a < b)$ i ako je $f(x) \geqslant 0$ $(f(x) \leqslant 0)$ za svako $x \in [a, b]$, pa ako postoji bar jedna tačka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) > 0$ $(f(c) < 0)$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \ \Big(\int_a^b f(x)\,dx < 0\Big).$$

(9) Ako su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije na $[a, b]$ $(a < b)$, i ako je na tome segmentu stalno $f(x) \geqslant g(x)$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

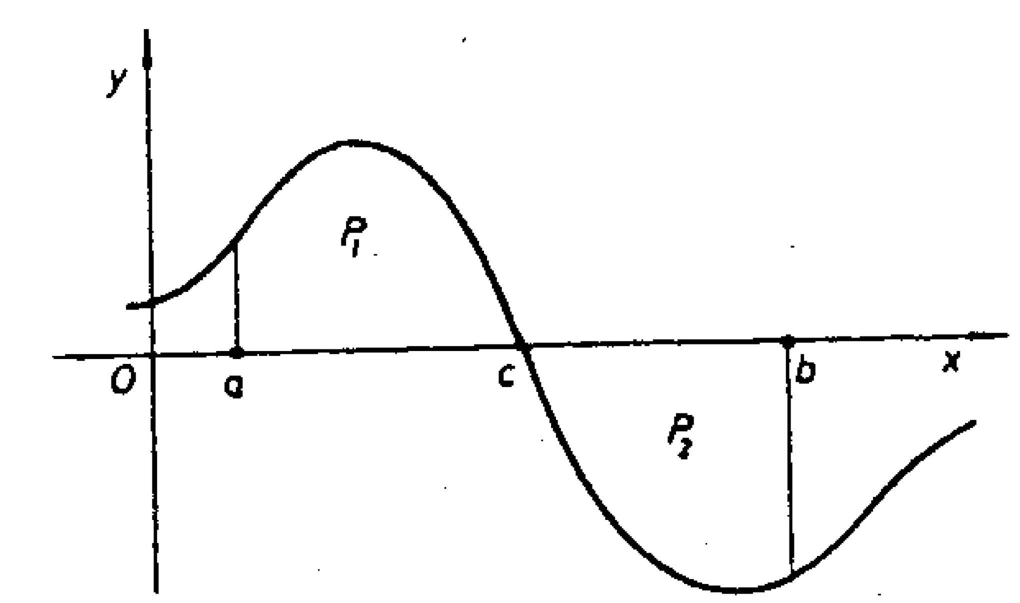
(10) Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne na segmentu $[a, b]$ $(a < b)$, i ako je za svako $x \in [a, b]$ $f(x) \geqslant g(x)$, a uz to postoji bar jedna tačka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) > g(c)$, onda je

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx.$$

(11) Ako je funkcija integrabilna na $[a, b]$ $(a < b)$, tada je na $[a, b]$ integrabilna i funkcija $|f(x)|$ i važi

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Obrat ne važi.



Sl. 5.1.

(12) Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ i ako ona na tome segmentu mijenja predznak, uzmimo da je na segmentu $[a, c]$ nenegativna, a na segmentu $[c, b]$ nepozitivna, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = P_1 - P_2,$$

pri čemu su P_1 i P_2 površine (sl. 5.1).

(13) Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[-a, a]$ $(a > 0)$. Tada je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{ako je } f(x) \text{ parna,} \\ 0, & \text{ako je } f(x) \text{ neparna funkcija.} \end{cases}$$

(14) Ako su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije na segmentu $[a, b]$, tada je na tome segmentu integrabilna i funkcija $f(x)\,g(x)$.

(15) Ako su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije na segmentu $[a, b]$, tada je na tome segmentu integrabilna i funkcija $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$.

(16) Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne, tada ne slijedi da je i funkcija $f[g(x)]$ integrabilna.

Zadaci (5.1.—5.10.)

5.1. Naći granice između kojih se nalaze integrali:

1°. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;

2°. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Rješenja:

Pošto je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ integrabilna na $[1, 2]$, a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ integrabilna na $[0, 1]$, mi ćemo se koristiti osobinom 5. (6).

1°. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je opadajuća funkcija na segmentu $[1, 2]$, pa je $m = f(2) = \frac{1}{2}$ donja, $M = f(1) = 1$ gornja međa funkcije.

Otuda je

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 1.$$

2°. Funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ je opadajuća na segmentu $[0, 1]$ pa je $m = f(1) = \frac{1}{2}$, a $M = f(0) = 1$.

Otuda

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1.$$

5.2. Naći granice između kojih se nalazi integral

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Rješenje.

Funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ na $[0, 2]$ u $x = 0$ uzima vrijednost donje međe $m = 0$, a za $x = 1$ uzima vrijednost gornje međe $M = \frac{1}{2}$.

Otuda je

$$0 \cdot 2 < \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx < \frac{1}{2} \cdot 2.$$

5.3. Procijeniti integrale:

1°. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\sin^2 x}$;

2°. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin x}$;

3°. $\int_0^1 \frac{x^k\,dx}{\sqrt[m]{1+x}}$.

Rješenje.

1°. Pošto je $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, $3 \leqslant 3 + \sin^2 x \leqslant 1 + 3$,

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3+\sin^2 x} \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\sin^2 x} \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

2°. *Uputa.* Podi od $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ na segmentu $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3°. *Uputa.* Podi od $0 \leqslant \frac{x^k}{\sqrt[m]{1+x}} \leqslant x^k$ na $[0, 1]$, pa iskoristiti rezultat zadatka 4.0.2°.

5.4. Utvrditi koji je od integrala veći

$$\int_2^5 \sqrt{\frac{3}{2}x}\,dx \text{ ili } \int_2^5 \sqrt{x^2-1}\,dx,$$

ne izračunavši integrale.

Rješenje.

Na segmentu [2, 5] vrijedi $\sqrt{\frac{3x}{2}} < \sqrt{x^2 - 1}$, što je lako provjeriti. Ako primijenimo osobinu 5.(10), dobit ćemo

$$\int_2^5 \sqrt{x^2 - 1}\, dx > \int_2^5 \sqrt{\frac{3x}{2}}\, dx.$$

5.5. Pokaži da vrijedi

$$\int_0^1 e^{-x}\, dx < \int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$$

5.6. Koji je od integrala

$$\int_0^\pi e^{-x^2} \cos^2 x\, dx \text{ i } \int_0^\pi e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x\, dx$$

veći?

Rješenje.

Pošto je $e^{-x^2} > e^{-(x+\pi)^2}$ za $0 < x < \pi$, to prema osobini 5.(10) vrijedi

$$\int_0^\pi e^{-x^2} \cos^2 x\, dx > \int_0^\pi e^{-(x+\pi)^2} \cos^2 x\, dx.$$

5.7. Odrediti znak određenih integrala:

(a) $\int_0^\pi \sin x\, dx;$

(b) $\int_0^\pi (x - \pi) \sin x\, dx;$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x + 1}\, dx;$

(d) $\int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx;$

(e) $\int_{-2}^2 \sqrt{x}\, dx;$

(f) $\int_0^{-1} \sqrt[3]{x^2} \ln (2 + x)\, dx.$

Rješenja:

(a) Funkcija $f(x) = \sin x > 0$ za $0 < x < \pi$, ali za svako $x \in (0, \pi)$ je $\sin x > 0$. Prema osobini 5.(8) slijedi

$$\int_0^\pi \sin x\, dx > 0.$$

(b) Funkcija $f(x) = (x - \pi) \sin x \leqslant 0$ na segmentu $[0, \pi]$, ali je $(x - \pi) \sin x < 0$ za svako $x \in (0, \pi)$. Zato, prema osobini 5.(8), imamo

$$\int_0^\pi (x - \pi) \sin x\, dx < 0.$$

Za zadatke (c), (d), (e) izvedite sami zaključak.

(f) Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \ln (x + 2) \geqslant 0$ na segmentu $[-1, 0]$. Pošto je $\sqrt[3]{x^2} \ln (x + 2) > 0$ za svako $x \in (-1, 0)$, to, prema osobini 5.(8), imamo

$$\int_0^{-1} \sqrt[3]{x^2} \ln (x + 2)\, dx = - \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x^2} \ln (x + 2)\, dx < 0.$$

5.8. Neka je funkcija $f(x)$ ograničena i konkavna (konveksna) na segmentu $[a, b]$. Dokaži da je

$$(b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

$$\left((b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}\right).$$

Dokaz.

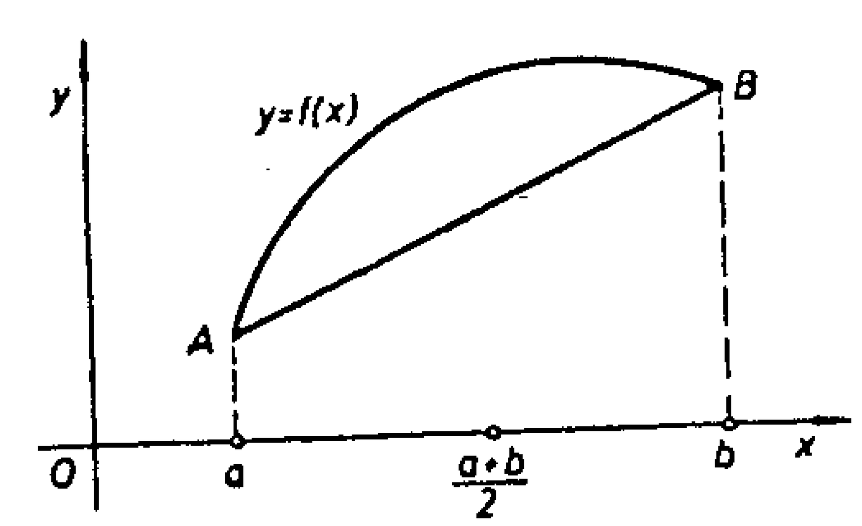
Pošto je funkcija $f(x)$ konkavna na segmentu $[a, b]$, to je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \leqslant f(x) \leqslant f'\left(\frac{a + b}{2}\right) \left(x - \frac{a + b}{2}\right) + f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Ako na ovu nejednakost primijenimo 5.(6), 5.(4), te rezultat zadatka 4.0.2°. za $k = 1$ i $k = 0$, dobijamo

$$(b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Na sličan način izvodimo dokaz za funkciju $f(x)$ koja je konveksna na $[a, b]$.



Sl. 5.2.

5.9. Ako je funkcija $|f(x)|$ integrabilna na segmentu $[a, b]$, iz toga ne slijedi da je $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$.

Npr., za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \text{ racionalan broj} \\ -1, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj} \end{cases}$$

imamo $|f(x)| = 1$, pa je $\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b dx = (b - a)$. Međutim, u zadatku 3.2. (b) pokazali smo da $\int_a^b f(x)\,dx$ ne postoji.

5.10. Pokazati da funkcija $f(\varphi(x))$, gdje je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x = 0 \\ 1 & \text{za } x \neq 0 \end{cases},$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x = 0 \\ 0 & \text{za } x \text{ iracionalan} \\ \dfrac{1}{n} & \text{za } x = \dfrac{m}{n} \\ 1 & \text{za } x = 1 \end{cases}$$

(m i n uzajamno prosti cijeli brojevi: $0 < m < n$) nije integrabilna na segmentu $[0, 1]$, iako su $f(x)$ i $\varphi(x)$ integrabilne na $[0, 1]$.

Rješenje.

Očigledno je da je $f(x)$ integrabilna funkcija. Prepuštamo čitaocu da pokaže da je i $\varphi(x)$ integrabilna funkcija.

Iz definicije funkcija $f(x)$ i $\varphi(x)$ slijedi

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \text{ iracionalan broj,} \\ 1 & \text{za } x \text{ racionalan broj,} \end{cases}$$

a to znači da $f(\varphi(x))$ nije integrabilna na $[0, 1]$.

6. Teorema o srednjoj vrijednosti

Neka su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije na segmentu $[a, b]$ $(a \gtrless b)$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ na $[a, b]$, a $g(x)$ ne mijenja predznak u intervalu (a, b), tj. $g(x) \geqslant 0$ ili $g(x) \leqslant 0$. Tada je

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

gdje je $m \leqslant \mu \leqslant M$ (m je donja, a M gornja međa funkcije f na $[a, b]$).

Neka je $g(x) \equiv 1$. Ako je $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, tada je $f(c) = \mu$ za neki $c \in [a, b]$.

Za navedene uvjete imamo

$$(M) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Vrijednost $f(c)$ naziva se *srednja vrijednost* funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$.

Zadaci (6.1.—6.10.)

6.1. Naći srednju vrijednost funkcija x, x^2, x^3 na segmentu $[0, 1]$, kao i apscise tačaka srednjih vrijednosti.

Rješenja:

1°. Funkcija $f(x) = x$ je neprekidna, pa je i integrabilna na $[0, 1]$. Na osnovu formule (M), te zadatka 4.0.2°, za $k = 1$, imamo

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(c)(b - a), \text{ tj. } \int_0^1 x\,dx = f(c)\cdot 1 = c,$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \text{ tj. } \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Srednja vrijednost funkcije je $f(c) = \frac{1}{2}$ u tački $c = \frac{1}{2}$.

2°. Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna na $[0, 1]$. Na osnovu formule (M) i zadatka 4.0.2°, za $k = 2$ imamo

$$f(c) = \frac{1}{1 - 0}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

što predstavlja srednju vrijednost date funkcije. Iz $c^2 = \frac{1}{3}$ slijedi $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3°. Sami riješite.

6.2. Nađi srednju vrijednost i apscisu tačke te vrijednosti za

$$f(x) = 1 - \frac{\pi}{2}\sin x \text{ na } [0, \pi].$$

Rješenje.

$$f(c) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(1 - \frac{\pi}{2}\sin x\right) dx.$$

Prema zadatku 4.0.2°. i 4.0.3°. dobijamo

$$f(c) = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\cdot 2\right) = 0.$$

Iz $1 - \frac{\pi}{2}\sin c = 0$ slijedi $c = \arcsin\frac{2}{\pi}$ $\left(f\left(\arcsin\frac{2}{\pi}\right) = 0\right)$.

6.3. Za koje b je srednja vrijednost funkcije $f(x) = \ln x$ na segmentu $[1, b]$ jednaka srednjoj brzini mijenjanja funkcije na tom segmentu.

Rješenje.

Srednja vrijednost je $\mu = f(c) = \frac{1}{b-1}\int\limits_1^b \ln x \, dx$. Na osnovu zadatka 3.4. $(a = e)$ imamo

$$\mu = \frac{1}{b-1}\left(b \ln b - 1 \cdot \ln 1 - \frac{b-1}{\ln e}\right) = \frac{1}{b-1}(b \ln b - b + 1).$$

Srednja brzina mijenjanja funkcije je

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\ln b - \ln 1}{b-1} = \frac{\ln b}{b-1}.$$

Da bismo dobili broj b, treba riješiti jednačinu

$$\frac{b \ln b - b + 1}{b-1} = \frac{\ln b}{b-1} \quad (b \neq 1).$$

Odavde je $(b-1)(\ln b - 1) = 0$. Kako tražimo $b \neq 1$, to je $\ln b - 1 = 0$, tj. $b = e$.

6.4. Odrediti srednje vrijednosti funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0, 10]$;
(b) $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$.

6.5. Odrediti srednju vrijednost recipročnih veličina svih realnih brojeva $0 < a \leqslant x \leqslant b$.

Uputstvo.

Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ predstavlja sve recipročne pozitivne realne brojeve.

6.6. Na duži AB duljine a uzeti tačku C. Naći srednju vrijednost površine pravougaonika čije su stranice duži AC i CB.

6.7. Koristeći se teoremom o srednjoj vrijednosti, procijeniti integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx \ (a > 1)$; b) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{e^x\sqrt{1+x}}{x^2}\, dx$;

c) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^5}{\sqrt{x+2}}\, dx$; d) $\displaystyle\int\limits_1^{10} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$;

e) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\, dx$.

Rješenja:

a) Procjenu integrala izvest ćemo na tri načina:

(1) Uzmimo da je $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \log_a x$. Funkcija $f(x)$ je integrabilna, a $g(x) > 0$.

Prema teoremi o srednjoj vrijednosti je

$$\int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx = \mu \int\limits_1^{10} \log_a x\, dx = \mu\left(10\log_a 10 - 1 \cdot \log_a 1 - \frac{10-1}{\ln a}\right)$$

$$= \mu\left(10 \log_a 10 - \frac{9}{\ln a}\right).$$

Kako je $m = f(10) = \frac{1}{10}$, $M = f(1) = 1$, to je $\frac{1}{10} < \mu < 1$, pa je

$$\log_a 10 - \frac{9}{10\ln a} < \int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx < 10 \log_a 10 - \frac{9}{\ln a}.$$

(2) Uzmimo da je $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \frac{1}{x}$;

$m = f(1) = \log_a 1 = 0$, $M = f(10) = \log_a 10$;

$$\int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx = \mu \int\limits_1^{10} \frac{dx}{x} \overset{(3.6)}{=} \mu(\ln 10 - \ln 1) = \mu \ln 10;$$

$$0 < \mu < \log_a 10, \quad 0 < \frac{1}{\ln 10}\int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx < \log_a 10;$$

tj.

$$0 < \int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx < \ln 10 \log_a 10.$$

(3) Neka je $f(x) = \frac{\log_a x}{x}$, $g(x) = 1$; $m = f(1) = 0$, $M = f(10) = \frac{\log_a 10}{10}$;

$$\int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx = \mu \int\limits_1^{10} dx = 9 \cdot \mu; \quad 0 < \mu < \frac{\log_a 10}{10},$$

tj.

$$0 < \int\limits_1^{10} \frac{\log_a x}{x}\, dx < \frac{9}{10}\log_a 10.$$

Uporedite ove procjene za $a = 10$.

b) Funkcije $f(x) = e^x\sqrt{1+x}$ i $g(x) = \frac{1}{x^2}$ su integrabilne na $[1, 2]$, a $g(x) > 0$ na segmentu $[1, 2]$, pa je, prema teoremi o srednjoj vrijednosti,

$$\int_1^2 f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_1^2 g(x)\,dx = \mu\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \mu\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{2}.$$

Kako je $m = f(1) = e\sqrt{2}$, $M = f(2) = e^2\sqrt{3}$, to je

$$e\sqrt{2} \le \mu \le e^2\sqrt{3}, \quad \text{tj.} \quad \frac{e\sqrt{2}}{2} \le \int_1^2 \frac{e^x\sqrt{1+x}}{x^2} \le \frac{e^2\sqrt{3}}{2}.$$

c) Funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ i $g(x) = x^5$ su integrabilne na $[0, 1]$ i $g(x) \geq 0$, pa prema teoremi o srednjoj vrijednosti imamo

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_0^1 g(x)\,dx = \mu\int_0^1 x^5\,dx = \frac{\mu}{6}.$$

Kako je za $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ na $[0, 1]$:

$$m = f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad M = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

to je

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \le \mu \le \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\sqrt{3}}{18} \le \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x+2}}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

d) *Uputstvo za rješenje.* Uzeti:

1°. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, $g(x) = 1$;

2°. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$;

3°. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = e^{-x}$.

Uporedi dobivene procjene.

e) Neka je

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

tada je

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\,dx = f(c)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{x} = f(c)\left(\ln\frac{3\pi}{2} - \ln\frac{\pi}{2}\right).$$

Pošto je

$$m = f(\pi) = \cos\pi = -1, \quad M = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

to je

$$-1 \le f(c) \le 0, \quad \text{tj.} \quad \ln\pi - \ln 3\pi \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\,dx \le 0.$$

6.8. Naći

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^n + 1},$$

n je prirodan broj.

Rješenje. Stavljajući $f(x) = \frac{1}{\varepsilon x^n + 1}$, $g(x) = 1$, prema teoremi o srednjoj vrijednosti, dobijamo:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon\cdot x^n + 1} = \mu\int_0^1 dx = \mu.$$

Kako je

$$m = f(1) = \frac{1}{\varepsilon + 1}, \quad M = f(0) = 1,$$

imamo

$$\frac{1}{\varepsilon + 1} \le \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^n + 1} \le 1.$$

Odavde slijedi

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^n + 1} = 1.$$

6.9. Dokazati jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\,dx = 0$$

koristeći se teoremom srednje vrijednosti.

Uputstvo.

Uzeti

$$f(x)=\frac{1}{1+x^n},\ g(x)=x^n.$$

6.10. Neka je $\int\limits_0^x f(t)\,dt = x f(\theta x)$. Nađi θ, ako je $f(t)=t^n$, $(n>-1)$.

Rješenje.

$$xf(\theta x)=\int\limits_0^x t^n\,dt=\frac{x^{n+1}}{n+1},\ f(\theta x)=\frac{x^n}{n+1},$$

pa je

$$(\theta x)^n=\frac{x^n}{n+1}\Rightarrow \theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

7. Određeni integral kao funkcija svoje donje i gornje granice

(1) Ako je u $[a,b]\,(b>a)$ integrabilna funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $x\in(a,b)$, tada je

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt=f(x);\quad \frac{d}{dx}\int\limits_x^b f(t)\,dt=-f(x).$$

(2) Neka su $\psi(x)$ i $\varphi(x)$ neprekidne funkcije sa neprekidnim izvodima $\psi'(x)$ i $\varphi'(x)$. Ako je $f(t)$ neprekidna funkcija, tada je

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\,\psi'(x).$$

Zadaci (7.1.—7.4.)

7.1. Naći izvode:

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int\limits_a^b \sin^3 t\,dt$; b) $\dfrac{d}{db}\displaystyle\int\limits_a^b \sin^3 t\,dt$;

c) $\dfrac{d}{da}\displaystyle\int\limits_a^b \sin^3 t\,dt$.

Rješenja:

a) Budući da je $\int\limits_a^b \sin^3 t\,dt$ funkcija od a i b, to je

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin^3 t\,dt=0;$$

b) $$\frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin^3 t\,dt=\sin^3 b;$$

c) $$\frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin^3 t\,dt=-\sin^3 a.$$

7.2. Nađi $\dfrac{d\,F(x)}{dx}$ ako je:

a) $F(x)=\displaystyle\int\limits_1^x \ln t\,dt\ (x>0)$; b) $F(x)=\displaystyle\int\limits_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

c) $F(x)=\displaystyle\int\limits_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}\,dt$; d) $F(x)=\displaystyle\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt.$

Rješenja:

a) $$\frac{d}{dx}\int\limits_1^x \ln t\,dt=\ln x\ (x>0).$$

b) $$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}\left(\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt=f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\right).$$

c) $$\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^0\sqrt{1+t^2}\,dt=-\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt=-2x\sqrt{1+x^4}.$$

d) $$\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt=\int\limits_{\sin x}^{a}\cos(\pi t^2)\,dt+\int\limits_a^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt=$$

$$=-\int\limits_a^{\sin x}\cos(\pi t^2)\,dt+\int\limits_a^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt;$$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt=-\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\sin x}\cos(\pi t^2)\,dt+\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt=$$

$$=-\cos(\pi\sin^2 x)\frac{d(\sin x)}{dx}+\cos(\pi\cos^2 x)\frac{d(\cos x)}{dx}=$$

$$=-\cos(\pi\sin^2 x)\cos x-\sin x\cos(\pi\cos^2 x).$$

Kako je $\cos(\pi(1-\cos^2 x)) = \cos(\pi - \pi\cos^2 x) = -\cos(\pi\cos^2 x)$, to je

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt = (\cos x - \sin x)\cos(\pi\cos^2 x).$$

Na ovaj zadatak primijeni direktno jednakost pod (2).

7.3. Naći granične vrijednosti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

Rješenja:

Za postavljene zadatke ispunjeni su uvjeti za primjenu L' Hospitalovog pravila.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} =$

$\displaystyle = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\,e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$

c) Izračunajte sami.

7.4. Pokazati da je

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 f(tx)\,dx = a,$$

ako je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

i ako je f neprekidna na $[0, +\infty)$.

8. Izračunavanje određenog integrala neprekidnih funkcija pomoću neodređenog

Ako je $F(x)$ bilo koja primitivna funkcija za funkciju $f(x)$, definiranu i neprekidnu na $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ovo je *osnovna formula integralnog* računa i zove se *Leibniz-Newtonova* formula.

Funkciju $F(x)$ nalazimo metodom za računanje neodređenih integrala.

Zadaci (8.1—8.8.)

8.1. Primjenom Leibniz-Newtonove formule izračunati određene integrale:

a) $\displaystyle\int_a^b x^k\,dx \ (k \neq -1)$;

b) $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}\ (x > 0)$;

c) $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$;

e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{3\,dx}{1+x^2}$;

f) $\displaystyle\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

g) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$;

h) $\displaystyle\int_0^1 (e^x+1)^2 e^x\,dx$;

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4}}$;

j) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

k) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$;

l) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\ (0 < \alpha < \pi)$.

Rješenja:

a) $\int_a^b x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$

b) $\int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x,$

(ako je x argument, onda je određeni integral funkcija tog argumenta — svoje gornje granice).

c) $\int_a^b e^x\,dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a.$

d) $\int_0^\pi \sin x\,dx = -[\cos x]_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$

e) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{3\,dx}{1+x^2} = 3\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = 3\cdot[\operatorname{arc\,tg} x]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} =$

$= 3\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}.$

f) $\int_{\mathrm{sh}1}^{\mathrm{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]_{\mathrm{sh}1}^{\mathrm{sh}2} = \ln\left|\mathrm{sh}2+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 2}\right| - \ln\left|\mathrm{sh}1 +\right.$

$\left.+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 1}\right| =$

$= \ln\frac{\mathrm{sh}\,2+\mathrm{ch}\,2}{\mathrm{sh}\,1+\mathrm{ch}\,1} = \ln\frac{2e^2}{2e} = \ln e = 1.$

g) $\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx -$

$-\int_1^2 (1-x)\,dx =$

$= [x]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [x]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1.$

h) $\int_0^1 (e^x+1)^2 e^x\,dx = \int_0^1 (e^x+1)^2\,d(e^x+1) = \left[\frac{(e^x+1)^3}{3}\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{3}((e^1+1)^3 - (e^0+1)^3) = \frac{(e+1)^3-2^3}{3}.$

i) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4}} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{3}\,d(x^3)}{\sqrt{(x^3)^2+4}} = \frac{1}{3}\left[\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+4}\right|\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{3}\left(\ln\left|1+\sqrt{5}\right| - \ln 2\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

j) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^e (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+\ln x) = 2\left[(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}\right]_1^e =$

$= 2(\sqrt{2}-1).$

k) Uradite sami.

l) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2+1-\cos^2\alpha} =$

$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\int_{-1}^{1} \frac{d\left(\frac{x}{\sin\alpha}\right)}{\left(\frac{x}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)^2+1} =$

$= \frac{1}{\sin\alpha}\int_{-1}^{1} \frac{d\left(\frac{x}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)}{\left(\frac{x}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)^2+1} = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)\right]_{-1}^{1} =$

$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arct\,tg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} - \operatorname{arc\,tg}\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$

$= \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right) =$

$= \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$

8.2. Izračunati integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sgn}(ab)\,dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$

Rješenja:

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sgn}(ab)\,dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \operatorname{sgn}(ab)\cdot\frac{1}{b^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 x + 1} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(ab)}{|ab|}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\frac{|a|}{|b|}\operatorname{tg} x\right)}{\left(\frac{|a|}{|b|}\operatorname{tg} x\right)^2 + 1} = \frac{1}{ab}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\left|\frac{a}{b}\right|\operatorname{tg} x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{a}{b}\right| - \operatorname{arc\,tg} 0\right) = \frac{\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{a}{b}\right|}{ab}.$$

b) Rezultat:

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{a}{b}\right|}{|ab|}.$$

8.3. Naći integral

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x}, \quad (|a| < 1).$$

Rješenje.

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-a)\sin^2\frac{x}{2} + (1+a)\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Provedemo li postupak iz zadatka 8.2., a), odnosno b), dobit ćemo

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x} = \frac{2}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

8.4. Naći integral

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1 + a\operatorname{ch} 2x} \quad (a > 1).$$

Rješenje.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1 + a\operatorname{ch} 2x} = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1 + a(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x)} =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{(a-1)\operatorname{sh}^2 x + (a+1)\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{a+1}\int_0^{\ln 2} \frac{\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}}{\frac{a-1}{a+1}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{a+1}\int_0^{\ln 2} \frac{\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}}{\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{th} x\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a-1)(a+1)}}\int_0^{\ln 2} \frac{d\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{th} x\right)}{\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{th} x\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{th} x\right)\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}.$$

8.5. Naći

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 + 3x + 2}.$$

Rješenje.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = -\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -[\ln(x+1)]_0^1 + 2[\ln(x+2)]_0^1 = \left[\ln\frac{(x+2)^2}{x+1}\right]_0^1 =$$

$$= \ln\frac{9}{2} - \ln 4 = \ln\frac{9}{8}.$$

8.6. Pomoću integralnog računa izračunati granične vrijednosti:

1°. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n^2};$$

2°. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^3}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3};$$

3°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$;

4°. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(i-1)^2+n^2}$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i-1+(i-1)^2}$;

5°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{e^i}}{n}$;

6°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\sin\frac{(i-1)\pi}{n^2}$;

7°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{(i-1)\pi}{n}$;

8°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$.

Rješenja:

1°. Polazimo od identiteta

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

i zaključujemo da se na desnoj strani ovog identiteta nalazi donja suma za funkciju $f(x)=x$ na segmentu $[0, 1]$, koja odgovara podjeli ovog segmenta na n jednakih dijelova. Na osnovu definicije određenog integrala imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}m_i\sigma_i=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

2°. Rezultat: $\frac{1}{3}$.

3°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$.

Suma

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

je gornja suma za funkciju $f(x)=\frac{1}{1+x}$ na segmentu $[0, 1]$, koji je podijeljen na n jednakih dijelova.

Zbog toga je

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2.$$

4°. a) Kako je

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(i-1)^2+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{n},$$

to je

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{n}$$

donja suma za funkciju $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ na segmentu $[0, 1]$ podijeljen na n jednakih dijelova.

Zbog toga je

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(i-1)^2+n^2}=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

b) *Uputstvo*: Staviti

$$\xi_i^2=\frac{i-1+(i-1)^2}{n^2}\left(\xi_i\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\right).$$

5°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{e^i}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$,

gdje je

$$\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

gornja suma za funkciju $f(x)=e^x$ na segmentu $[0, 1]$, koji je podijeljen na n jednakih dijelova. Otuda imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{i}{n}}}{n}=\int_0^1 e^x\,dx=e-1.$$

6°. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\sin\frac{(i-1)\pi}{n^2}=$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)n\sin\frac{(i-1)\pi}{n^2}\cdot\frac{1}{n};$$

$$\sin x=\sin 0+\frac{x}{1!}\cos 0-\frac{x^2}{2!}\sin 0-\frac{x^3}{3!}\cos\theta x\ (0<\theta<1);$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin x=x-\frac{x^3}{6}\cos\theta x\\&x=\frac{(i-1)\pi}{n^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sin\frac{(i-1)\pi}{n^2}=\frac{(i-1)\pi}{n^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(i-1)^3\pi^3}{n^6}\cos\left[\theta_n\frac{(i-1)\pi}{n^2}\right].$$

Odavde slijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\sin\frac{(i-1)\pi}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\frac{(i-1)\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\frac{(i-1)^3\pi^3}{n^5}\cos\left[\theta_n\cdot\frac{(i-1)\pi}{n^2}\right]\cdot\frac{1}{n}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\pi\sum_{i=1}^{n}(1+\xi_{i-1})\,\xi_{i-1}(x_i-x_{i-1})\right\}-$$

$$-\frac{1}{6}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\frac{(i-1)^3\pi^3}{n^5}\cos\left(\theta_n\cdot\frac{(i-1)\pi}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}\Big\}.$$

Procijenimo drugi sabirak na desnoj strani:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\frac{(i-1)^3\pi^3}{n^5}\cos\left(\theta_n\cdot\frac{(i-1)\pi}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}\right|<$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\frac{(i-1)^3\pi^3}{n^6}<2\pi^3\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^3}{n^6}=$$

$$=\frac{2\pi^3}{n^6}(1+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3)=2\pi^3\frac{(n-1)^2n^2}{4n^6}\to 0$$

$(n\to+\infty)$.

Otuda je

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\sin\frac{(i-1)\pi}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\pi\sum_{i=1}^{n}(1+\xi_{i-1})\,\xi_{i-1}(x_i-x_{i-1})=$$

$$=\pi\int_0^1(x+x^2)\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{5\pi}{6}.$$

7°. Ovdje se radi o donjoj sumi za funkciju $f(x)=\sin(\pi x)$ na segmentu $[0,1]$.
Rezultat, $\dfrac{2}{\pi}$.

8°. Rezultat, $\dfrac{1}{p+1}$.

8.7. Koristeći se aproksimacijom ekvivalentnih beskonačno malih veličina (višeg reda) i primjenom određenog integrala, naći graničnu vrijednost

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

Rezultat, $\dfrac{1}{\ln 2}$.

8.8. Pomoću određenog integrala naći

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}\right).$$

Rezultat, $\ln(1+\sqrt{2})$.

9. Parcijalna integracija

Ako su $u(x)$ i $v(x)$ neprekidne funkcije s neprekidnim izvodima na segmentu $[a,b]$, tada je

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Zadaci (9.1.—9.5.)

9.1. Izračunaj integrale:

1°. $\displaystyle\int_0^x\ln(1+t)\,dt$;

2°. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}x\,e^{-x}\,dx$;

3°. $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$;

4°. $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-\lambda x}\sin x\,dx$;

5°. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}x\operatorname{arc\,tg}x\,dx$;

6°. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$;

7°. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$;

8°. $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln x}{x^5}\,dx$;

9°. $\displaystyle\int_0^{2\pi}x^2\cos x\,dx$.

Rješenja:

1°. $$\int_0^x \ln(1+t)\,dt = \left| \begin{array}{l} u=\ln(1+t),\ dv = dt, \\ du = \dfrac{dt}{1+t},\ v = t. \end{array}\right| =$$

$$= [t\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{t\,dt}{1+t} = x\ln(1+x) - \int_0^x \frac{t+1-1}{1+t}\,dt =$$

$$= x\ln(1+x) - \int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = x\ln(1+x) - [t-\ln(1+t)]_0^x =$$

$$= x\ln(1+x) - (x - \ln(1+x) + \ln(1+0)) =$$

$$= x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

2°. $$\int_0^{\ln 2} x e^{-x}\,dx = \left|\begin{array}{l} x=u,\ e^{-x}dx = dv \\ dx = du,\ v = -e^{-x}\end{array}\right| = [-xe^{-x}]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx =$$

$$= -\ln 2\, e^{-\ln 2} - [e^{-x}]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\ln 2 - e^{-\ln 2} + e^0 =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

3°. $$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} u=x,\ dv=\sin x\,dx, \\ du = dx,\ v = -\cos x\end{array}\right| =$$

$$= [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi.$$

4°. $$\int_0^\pi e^{-\lambda x}\sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = e^{-\lambda x},\ dv = \sin x\,dx \\ du = -\lambda e^{-\lambda x}dx,\ v = -\cos x\end{array}\right| =$$

$$= [-e^{-\lambda x}\cos x]_0^\pi - \lambda\int_0^\pi e^{-\lambda x}\cos x\,dx = -(e^{-\lambda\pi}\cos\pi - e^{-0}\cos 0) -$$

$$-\lambda\int_0^\pi e^{-\lambda x}\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = e^{-\lambda x},\ dv = \cos x\,dx \\ du = -\lambda e^{-\lambda x}dx,\ v=\sin x\end{array}\right| = (e^{-\lambda\pi}+1) -$$

$$-\lambda\left\{[e^{-\lambda x}\sin x]_0^\pi + \lambda\int_0^\pi e^{-\lambda x}\sin x\,dx\right\} = (e^{-\lambda\pi}+1) - \lambda^2\int_0^\pi e^{-\lambda x}\sin x\,dx,$$

tj. $(1+\lambda^2)\int_0^\pi e^{-\lambda x}\sin x\,dx = e^{-\lambda\pi}+1.$

Odavde je

$$\int_0^\pi e^{-\lambda x}\sin x\,dx = \frac{e^{-\lambda\pi}+1}{\lambda^2+1}.$$

5°. $$\int_0^{\sqrt{3}} x\,\text{arc tg}\,x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = \text{arc tg}\,x,\ dv = x\,dx, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = \dfrac{x^2}{2}\end{array}\right| =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\,\text{arc tg}\,x\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\,\text{arc tg}\,\sqrt{3} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}[x - \text{arc tg}\,x]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6°. $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -[x\ln x - x]_{\frac{1}{e}}^{1} + [x\ln x - x]_1^e =$$

$$= -\left(-1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) + (e - e + 1) = 2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

7°. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x,\ dv = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \dfrac{d(\sin x)}{\sin^3 x}, \\ du = dx, \\ \qquad v = -\dfrac{1}{2\sin^2 x}\end{array}\right| =$$

$$= \left[\frac{-x}{2\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\frac{\pi}{4}}{2\cdot\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}[\text{ctg}\,x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\text{ctg}\,\frac{\pi}{2} - \text{ctg}\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

8°. Sami riješite.

9°. Sami riješite.

9.2. Pokazati da za prirodan broj $n \geqslant 2$ vrijedi formula rekurzije

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Rješenje.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx, \left|\begin{matrix} \sin^{n-1}x = u, & \sin x\,dx = dv \\ (n-1)\sin^{n-2} x \cos x = du, & -\cos x = v\end{matrix}\right|.$$

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$$

Iz jednakosti

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

slijedi

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

9.3. Izračunati $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx$, ako je n prirodan broj.

Rješenje.

Ako u relaciji $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ uzmemo za n neparan prirodan broj, tj. $2n+1$, odnosno $2n-1$, dobit ćemo

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1},\quad I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3},$$

tj.

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3}.$$

Ako ovaj postupak nastavimo, uzimajući u obzir da je

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

to je

$$(*)\qquad I_{2n+1} = \frac{2n\cdot(2n-2)(2n-4)\dots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3}.$$

Pokažimo da ova relacija važi za svaki prirodan broj n.
Za $n=1$ imamo

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2}{3}.$$

Pretpostavimo da važi relacija

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3}.$$

Odavde je

$$I_{2n+3} = \frac{(2n+2)\,2n(2n-2)\dots 4\cdot 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\dots 5\cdot 3}.$$

Kako je, prema formuli iz zadatka 9.2,

$$I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1},$$

to pomoću indukcione pretpostavke dobijamo

$$I_{2n+3} = \frac{(2n+2)\,2n(2n-2)\dots 4\cdot 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\dots 5\cdot 2}.$$

Relacija (*) je dokazana za svaki prirodan broj n.

9.4. Izračunati $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx$, n je prirodan broj.

Rezultat, $I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

X **9.5.** Izračunati vrijednost integrala

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx,\quad (n = 1, 2, \dots).$$

Rješenje.

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \left|\begin{matrix} u = (1-x^2)^n, & dv = dx \\ du = -2n(1-x^2)^{n-1} x\,dx, & v = x\end{matrix}\right| =$$

$$= [(1-x^2)^n x]_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx = 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,dx -$$

$$-2n\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = 2n I_{n-1} - 2n I_n,$$

tj.

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1},\quad (n = 1, 2, \dots).$$

Otuda je

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}\cdot I_{n-2} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1}{2(n-1)+1}\cdot\frac{2(n-2)}{2(n-2)+1}\cdot I_{n-3} = \dots = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdot\frac{2(n-2)}{2n-3}\cdots\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2+1}I_1 =$$

$$= \frac{2^n\cdot n!}{1\cdot 2\cdot 3\dots(2n+1)} = \frac{2^n n!\,(2\cdot 4\dots 2n)}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!},$$

jer je

$$I_1 = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

10. Zamjena promjenljive u određenom integralu

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$, a $x = \varphi(t)$ monotona (bilo da raste, bilo da opada) i ima neprekidan izvod $\varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$, pri čemu je $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Tada je složena funkcija $f(\varphi(x))$ definirana i neprekidna na $[\alpha, \beta]$, te vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Zadaci (10.1.—10.13.)

10.1. Izborom pogodne zamjene promjenljive, naći slijedeće integrale:

1°. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; 2°. $\displaystyle\int_1^4\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$;

3°. $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$; 4°. $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x(1+x^4)}$;

5°. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$; 6°. $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$;

7°. $\displaystyle\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$; 8°. $\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{x^2-2ax+2a^2}}$.

Rješenja:

1°. $$\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}} = \left|\begin{array}{l} 5-4x = t^2 \\ x = \dfrac{5-t^2}{4} \\ dx = -\dfrac{t\,dt}{2}\end{array}\quad\begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ t & 3 & 1\end{array}\right| = -\frac{1}{8}\int_3^1\frac{5-t^2}{t}\,t\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^3(5-t^2)\,dt = \frac{1}{8}\left[5t - \frac{t_3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{6}.$$

2°. $$\int_1^4\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}} = \left|\begin{array}{l}\sqrt{x} = t \\ dx = 2t\,dt\end{array}\quad\begin{array}{c|cc} x & 1 & 4 \\ t & 1 & 2\end{array}\right| = 2\int_1^2\frac{t^2}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int_1^2\frac{(t^2-1)+1}{1+t}\,dt = 2\left(\int_1^2(t-1)\,dt + \int_1^2\frac{dt}{1+t}\right) =$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right]_1^2 = 1 + \ln\frac{9}{4}.$$

3°. **Uputstvo.** Uvesti smjenu, $\dfrac{1-x}{1+x} = t.$

4°. a) Ako uvedemo smjenu: $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{t-1}}$ imat ćemo

$$\int_1^2\frac{dx}{x(1+x^4)} = -\frac{1}{4}\int_2^{\frac{17}{16}}\frac{dt}{t}.$$

b) Riješite ovaj zadatak bez uvođenja nove promjenljive rastavljanjem $\dfrac{1}{x(1+x^4)}$ na sumu razlomaka.

5°. $$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}1+x^2 = t^2 \\ x\,dx = t\,dt\end{array}\quad\begin{array}{c|cc} x & 0 & \sqrt{3} \\ t & 1 & 2\end{array}\right| = \int_1^2(t^2-t^4)\,dt = \frac{58}{15}.$$

6°. $$I = \int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{l}x = \pi - t \\ dx = -\,dt\end{array}\quad\begin{array}{c|cc} x & 0 & \pi \\ t & \pi & 0\end{array}\right| = -\int_\pi^0\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi\int_0^\pi\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int_0^\pi\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt,$$

pa je

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\pi\int_0^{\pi}\frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t} = -\pi\,[\operatorname{arc\,tg}(\cos t)]_0^{\pi} =$$

$$= -\pi\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2},\ \text{tj.}\ \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

7°. $$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \int_0^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx = \left|\begin{array}{l|l} x-a = a\sin t & x \mid 0 \quad 2a \\ dx = a\cos t\,dt & t \mid -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\end{array}\right| =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

8°. Uvesti: $x-a=t$. Rezultat, $\ln(\sqrt{2}+1)$.

10.2. Izračunati integrale:

(a) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

(b) $\int_{-b}^{b}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(|b|<a)$.

Rješenja:

(a) Pošto je funkcija $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ parna funkcija, to na osnovu 5.(13), slijedi

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\int_0^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l|l} x = a\sin t, & x \mid 0 \quad a \\ dx = a\cos t\,dt, & t \mid 0 \quad \frac{\pi}{2}\end{array}\right| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = a^2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Napomena. Iz jednačine $x=a\sin t$, za $x=0$ imamo $\sin t=0 \Rightarrow t=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \dots)$, a za $x=a$ je $\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\dots)$.

Za izračunavanje datog određenog integrala mi smo za oblast integracije uzeli samo segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. To je učinjeno zbog toga, što je $\varphi(t)=a\sin t$ monotona (neprekidna) funkcija na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i $\varphi(t)$ preslikava taj segment na segment $[0, a]$. Ima još takvih segmenata, npr. $2\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$. Međutim, ako uzmemo $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$, tada $\varphi(t)$ ovaj skup preslikava na $[0, -a]$.

(b) $$\int_{-b}^{b}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\int_0^{b}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\int_0^{b}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\left(a^2\int_0^{b}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int_0^{b}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\right);$$

$$I_1 = \int_0^{b}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{b} = \arcsin\frac{b}{a},$$

$$I_2 = \int_0^{b}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left|\begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ v = -\sqrt{a^2-x^2} \\ du = dx, & \end{array}\right| =$$

$$= -\left[x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^{b} + \int_0^{b}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -b\sqrt{a^2-b^2} + \int_0^{b}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Sada je

$$\int_{-b}^{b}\sqrt{a^2-x^2} = 2a^2 I_1 - 2I_2 = 2a^2\arcsin\frac{b}{a} + 2b\sqrt{a^2-b^2} - 2\int_0^{b}\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

pa je

$$\int_{-b}^{b}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\arcsin\frac{b}{a} + b\sqrt{a^2-b^2}.$$

10.3. Izračunati određene integrale:

a) $\int_{-a}^{a}x^2\sin x\,dx$;

b) $\int_{-1}^{1}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx.$

Rješenja:

a) Pošto je $f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=x^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$, tj. $f(x)$ je neparna funkcija, to na osnovu 5.(13) slijedi

$$\int_{-a}^{a}x^2\sin x\,dx = 0.$$

b) **Rezultat,** 0.

10.4. Izračunati integrale:

$$1^\circ.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\,dx; \qquad 2^\circ.\ \int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx;$$

$$3^\circ.\ I=\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0); \qquad 4^\circ.\ \int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}};$$

$$5^\circ.\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}; \qquad 6^\circ.\ \int_0^{1/\sqrt{2}} \arcsin x\,dx.$$

Rješenja:

$$1^\circ.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3x}{\cos^3x+\sin^3x}\,dx=\left|\begin{array}{l|l} x=\frac{\pi}{2}-t & \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0\end{array} \\ dt=-dt & \end{array}\right|=$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\sin^3 t+\cos^3 t}\,dt.$$

Odavde slijedi

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x}{\sin^3x+\cos^3x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2},\ \text{tj.}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin^3x+\cos^3x}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

$$2^\circ.\ \int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx=\int_0^{4\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{4\pi}\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx=$$

$$=\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx-\int_{2\pi}^{4\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx\right)=\sqrt{2}\left(\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi}+\left[2\cos\frac{x}{2}\right]_{2\pi}^{4\pi}\right)=$$

$$=8\cdot\sqrt{2}.$$

Objasniti zašto nismo stavili $\int_0^{4\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{4\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx.$

$$3^\circ.\ \text{a)}\ I=\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\left|\begin{array}{ll} x=a\cos t, & \begin{array}{c|cc} x & 0 & a \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0\end{array} \\ dx=-a\sin t\,dt, & \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt.$$

S druge strane imamo

$$I=\left|\begin{array}{ll} x=a\sin t, & \begin{array}{c|cc} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2}\end{array} \\ dx=a\cos t\,dt, & \end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt.$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2},\ \text{tj.}$$

$$I=\frac{\pi}{4}.$$

b) Da li smo u integralu $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt$ mogli unijeti zamjenu $\operatorname{tg} t=v$?

$$4^\circ.\ \int_1^2\frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}=\int_1^2\frac{dx}{1+\sqrt{1-(1-x)^2}}=\left|\begin{array}{l} 1-x=\sin t \\ -dx=\cos t\,dt\end{array}\right|=$$

$$=-\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\cos t}\,dt=-\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\cos^2\frac{t}{2}}-\int_0^{-\frac{\pi}{2}}dt=$$

$$=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}}-[t]_0^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

$$5^\circ.\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=\left|\begin{array}{ll}\arcsin\sqrt{x}=t & \begin{array}{c|cc} x & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4}\end{array} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=dt & \end{array}\right|=$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}t\,dt=\frac{5\pi^2}{144}.$$

6°. $$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} \arcsin x = u, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= [x \arcsin x]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} 1 - x^2 = t^2 \\ -x\,dx = t\,dt \end{matrix} \right| = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t\,dt}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - 1.$$

10.5. Izračunati integral $I(t)$ i nacrtati njegov grafik, smatrajući ga funkcijom parametra t, ako je

$$I = I(t) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2t\cos x + t^2}}\,dx.$$

Rješenje.

$1 - 2t\cos x + t^2 > 0$, jer je diskriminanta $\cos^2 t - 1 < 0$ za svako $t \in (-\infty, +\infty)$.

Zato imamo

$$I(t) = \left| \begin{matrix} 1 - 2t\cos x + t^2 = u^2,\ t\sin x\,dx = u\,du,\ \sin x\,dx = \dfrac{u\,du}{t}, \\ \text{za } x = 0:\ u^2 = (1-t)^2 \Rightarrow u = \begin{cases} 1 - t, & t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ t - 1, & t > 1, \end{cases} \\ \text{za } x = \pi:\ u^2 = (1+t)^2 \Rightarrow u = \begin{cases} 1 + t, & t \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ -(1+t), & t < -1. \end{cases} \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{1-t}^{1+t} du = \dfrac{1}{t}\,[u]_{1-t}^{1+t} = 2,\ t \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{1-t}^{-1-t} du = \dfrac{1}{t}\,[u]_{1-t}^{-1-t} = -\dfrac{2}{t},\ (-\infty < t < -1), \\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{t-1}^{1+t} du = \dfrac{1}{t}\,[u]_{t-1}^{1+t} = \dfrac{2}{t},\ (1 < t < +\infty). \end{cases}$$

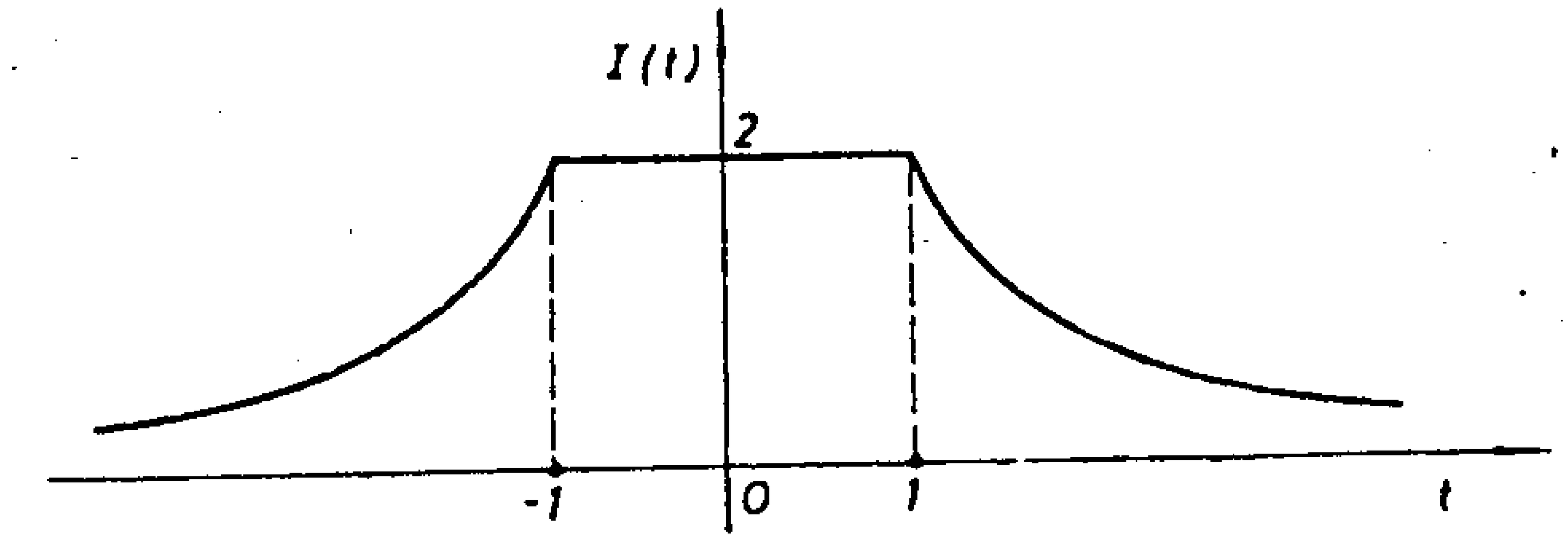
$$I(1) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{2 - 2\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = 2 \quad (t = 1),$$

$I(-1) = 2 \quad (t = -1),\ I(0) = 2 \quad (t = 0).$

Prema tome, funkcija $I(t)$ ima analitički oblik:

$$I(t) = \begin{cases} 2, & |t| < 1 \\ \dfrac{2}{|t|}, & |t| > 1. \end{cases}$$

Njen grafik je



Sl. 10.1.

10.6. Izračunaj integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx.$$

Rješenje.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\sqrt{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\cos x}\,dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t, & x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ -\sin x\,dx = dt, & t & 1 & 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{4}{3}.$$

Da li je podintegralna funkcija datog integrala integralibna na segmentu $[-\pi, \pi]$?

10.7. Izborom pogodne zamjene promjenljive, naći slijedeće integrale:

1°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$; 2°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$:

3°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x\sin\sqrt{x}\,dx$; 4°. $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{arc\,ctg}\sqrt{x}\,dx$;

5°. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} + \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\right)dx.$

Rješenja:

Uputstvo: 1°. Smjena $\operatorname{tg} x = t$. 2°. Smjena $x = t^2$. 3°. Smjena $\sqrt{x} = t$. 4°. Sami riješite.

5°. $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)dx = \left|\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - t \\ dx = -dt \end{array}\right| =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t} + \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\right)dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{1+\sin^2 x} + \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)dx - I,$$

tj.

$$I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{1+\sin^2 x} + \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)dx = \left|\begin{array}{ll} \sin x = t, & \cos x = \tau \\ \cos x\,dx = dt; & -\sin x\,dx = d\tau \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^0 \frac{d\tau}{1+\tau^2}\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} t\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

10.8. Primjenom pogodne zamjene, naći vrijednosti integrala:

1°. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx;$

2°. $$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}};$$

3°. $$\int_1^{\frac{5}{4}} \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

10.9. U integralu

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

uvesti zamjenu promjenljive $\sin x = t$.

Rješenje.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) f(x)\cos x\,dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l|l} \sin x = t, & \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \\ \cos x\,dx = dt, & \end{array}\right| = \int_0^1 f(\arcsin t)\,dt;$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l|l} \sin(\pi - x) = t, & \begin{array}{c|cc} x & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \\ \cos x\,dx = dt, & \end{array}\right| = \int_1^0 f(\pi - \arcsin t)\,dt;$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l|l} \sin(\pi - x) = t, & \begin{array}{c|cc} x & \pi & \frac{3\pi}{2} \\ \hline t & 0 & -1 \end{array} \\ \cos x\,dx = dt, & \end{array}\right| = \int_0^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,dt;$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l|l} \sin(x - 2\pi) = t, & \begin{array}{c|cc} x & \frac{3\pi}{2} & 2\pi \\ \hline t & -1 & 0 \end{array} \\ \cos x\,dx = dt, & \end{array}\right| = \int_{-1}^0 f(2\pi + \arcsin t)\,dt.$$

Odavde slijedi

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^1 (f(\arcsin t)\,dt - f(\pi - \arcsin t))\,dt +$$

$$+ \int_{-1}^0 (f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t))\,dt.$$

10.10. Objasniti, zašto formalna zamjena promjenljive x sa funkcijom $\varphi(t)$ dovodi do pogrešnog rezultata, ako provedemo supstituciju:

1°. $t = x^{\frac{2}{3}}$ u integralu $\int_{-1}^{1} dx;$

2°. $x = \frac{1}{t}$ u integralu $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2};$

3°. $\operatorname{tg} x = t$ u integralu $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$

Rješenja:

1°. Funkcija $t = x^{\frac{2}{3}}$ nije monotona u $[-1, 1]$; ali je u $[-1, 0]$ monotono opadajuća, a u $[0, 1]$ rastuća. Pošto je $x = -\sqrt{t^3}$ za $x \in [-1, 0]$ i $x = \sqrt{t^3}$ za $x \in [0, 1]$, bit će

$$\int_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx = -\frac{3}{2}\int_{1}^{0} t^{\frac{1}{2}} dt + \frac{3}{2}\int_{0}^{1} t^{\frac{1}{2}} dt = 3\int_{0}^{1} t^{\frac{1}{2}} dt = 2.$$

Ako provedemo formalno računanje datog integrala pomoću supstitucije $t = x^{\frac{2}{3}}$, dobijamo

$$\int_{-1}^{1} dx = \pm\frac{3}{2}\int_{1}^{1} t^{\frac{1}{2}} dt = 0,$$

što je pogrešan rezultat.

2°. Funkcija $t = \frac{1}{x}$ nije monotona na segmentu $[-1, 1]$, a ima i prekid u tački nula (gdje nije ni definisana); ali je u $[-1, 0)$ monotono opadajuća ($t \in (-\infty, -1]$ i u $(0, 1]$ opada ($t \in [1, +\infty)$).

Ako provedemo formalno računanje datog integrala pomoću supstitucije $x = \frac{1}{t}$ dobijamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1 + t^2} = -\left[\operatorname{arc\,tg} t\right]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2},$$

što je pogrešan rezultat.

Ispravan postupak je

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Međutim, uvedenom zamjenom, provodeći odgovarajući postupak, dati integral se može riješiti. (Vidjeti zadatak 13.11.6°., *nesvojstveni integrali.*).

3°. Funkcija $t = \operatorname{tg} x$ nije monotona na $[0, \pi]$, a ima i prekid u tački $\frac{\pi}{2}$. Ali ona je u $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ monotono rastuća ($0 < t < +\infty$), a u $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ rastuća ($-\infty < t < 0$).

Ako provedemo formalno računanje datog integrala pomoću zamjene $t = \operatorname{tg} x$, dobit ćemo nulu, što je pogrešan rezultat.

Međutim, datom zamjenom, provodeći odgovarajući postupak, dati integral se može riješiti. (Vidjeti zadatak 13.11.7°., *nesvojstveni integrali.*)

10.11. Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[0, 1]$, dokaži da važi:

1°. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx;$

2°. $\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx.$

Rješenja; — **Uputstvo:** za 1°., smjena $x = \frac{\pi}{2} - t$; a za 2°., smjena $x = \pi - t$.

10.12. Primjenom formule 2°. iz zadatka 10.11., izračunajte integral

$$\int_{0}^{\pi} x \sin^3 x \cos^2 x\, dx.$$

10.13. Ako za neprekidnu funkciju $f(x)$ na $[a, b]$ važi $f(a + b - x) = f(x)$, dokaži da je

$$\int_{a}^{b} x f(x)\, dx = \frac{a + b}{2}\int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Rješenje.

a) $$\int_{a}^{b} x f(x)\, dx = \left| \begin{array}{cc|cc} a + b - x = t & x & a & b \\ dt = -dx, & t & b & a \end{array} \right| = -$$

$$-\int_{b}^{a} (a + b - t) f(a + b - t)\, dt = \int_{a}^{b} (a + b - t) f(t)\, dt =$$

$$= (a + b)\int_{a}^{b} f(x)\, dx - \int_{a}^{b} x f(x)\, dx.$$

Imamo,

$$\int_{a}^{b} x f(x)\, dx = \frac{a + b}{2}\int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

b) Ovu formulu primijeniti na izračunavanje integrala

$$\int_{0}^{\pi} x \sin x\, dx.$$

(Vidjeti rezultat zadatka 9.1., 3°.).

11. Izračunavanje neodređenih i određenih integrala ograničenih prekidnih funkcija

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ i

$$F(x) = C + \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

neodređeni integral, tada je funkcija $F(x)$ neprekidna u svim tačkama neprekidnosti funkcije $f(x)$ i u tim tačkama ona ima izvod $F'(x) = f(x)$.

Međutim, u tačkama prekida funkcije $f(x)$, izvod funkcije $F(x)$ ne mora nužno postojati.

Zadaci (11.1.–11.2.)

11.1. Naći neodređene integrale:

1°. $\int f(x)\,dx,\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ za } x = \dfrac{1}{n},\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 \text{ za } x \neq \dfrac{1}{n}; \end{cases}$

2°. $\int \operatorname{sgn} x\,dx;$

3°. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx;$

4°. $\int [x]\,dx \quad (x \geqslant 0);$

5°. $\int (-1)^{[x]}\,dx.$

Rješenja:

1°. $F(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt = C + 0 = C,$

$F'(x) = 0$ za svako x.

2°. Funkcija $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ima prekid u $x = 0$.

$$F(x) = C + \int_a^x \operatorname{sgn} x\,dx = C - a + |x|$$

$$F'(x) = (C - a + |x|)' = \operatorname{sgn} x \text{ za } x \neq 0.$$

Za $x = 0$ izvod $F'(x)$ ne postoji.

3°. Neka je npr. $a = 0$ i $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, imamo

$$F(x) = C + \int_0^{\pi} dt - \int_{\pi}^{2\pi} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} dt + \ldots + \int_{k\pi}^{x} (-1)^k\,dt =$$

$$= \begin{cases} C + x - k\pi, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ C - x + (k+1)\pi, & k = 1, 3, 5, \ldots. \end{cases}$$

Analogno za $x \in [-(k+1)\pi, -k\pi]$, imamo

$$F(x) = \int_x^{-k\pi} (-1)^{k+1}\,dt + \ldots + \int_{-2\pi}^{-\pi} dt - \int_{-\pi}^{0} dt + C =$$

$$= \begin{cases} C + x + k\pi, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ C - x - (k+1)\pi, & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Prema tome, $F(x) = C + \arccos(\cos x)$.

4°. $\int [x]\,dx = F(x) = C + \int_0^x [t]\,dt =$

$$= C + \int_0^1 0 \cdot dt + \int_1^2 1 \cdot dt + \int_2^3 2 \cdot dt + \ldots + \int_{[x]-1}^{[x]} ([x]-1)\,dt + \int_{[x]}^{x} [x]\,dt =$$

$$= C + 1 + 2 + \ldots + ([x]-1) + [x](x - [x]) =$$

$$C + \frac{([x]-1)[x]}{2} + [x](x - [x]) = C + \frac{[x]}{2}(2x - [x] - 1).$$

5°. a) Neka je $a = 0$ i $x \in [[x], [x]+1)\ (x > 0)$, bit će

$$\int (-1)^{[x]}\,dx = F(x) = C + \int_0^1 (-1)^0\,dt + \int_1^2 (-1)^1\,dt + \int_2^3 (-1)^2\,dt + \ldots +$$

$$+ \int_{[x]-1}^{[x]} (-1)^{[x]-1}\,dt + \int_{[x]}^{x} (-1)^{[x]}\,dx = C + (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{[x]-1}) + (-1)^{[x]}(x - [x]) \underset{=}{\overset{([x]=k)}{=}}$$

$$\begin{cases} C + x - k, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ C - x + k + 1, & k = 1, 3, 5, \ldots, \end{cases} \quad F(x) = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x) + C.$$

b) Naći rješenje za $x < 0$.

11.2. Izračunati određene integrale ograničenih prekidnih funkcija:

1°. $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{[x]}{1 + |x|}\,dx;$

2°. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x)\,dx;$

3°. $\displaystyle\int_0^{2} [e^x]\,dx;$

4°. $\displaystyle\int_1^{n+1} \ln [x]\,dx \quad (n \in N);$

5°. $\displaystyle\int_0^{3} \operatorname{sgn}(x - x^3)\,dx.$

Rješenja:

$$1^\circ.\quad \int_{-1}^{4} \frac{[x]}{1+|x|}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{-1}{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{0}{1+x}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{1+x}\,dx + \int_{2}^{3} \frac{2}{1+x}\,dx + \int_{3}^{4} \frac{3}{1+x}\,dx =$$

$$= -\left[-\ln(1-x)\right]_{-1}^{0} + \left[\ln(1+x)\right]_{1}^{2} + 2\left[\ln(1+x)\right]_{2}^{3} + 3\left[\ln(1+x)\right]_{3}^{4} =$$

$$= 3\ln 5 - 2\ln 4 - \ln 3.$$

$$2^\circ.\quad \int_{0}^{\pi} x \,\mathrm{sgn}(\cos x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

3°. Kako je

$e^x = 1$ za $x = 0$,

$1 < e^x < 2$ za $0 < x < \ln 2$,

$2 < e^x < 3$ za $\ln 2 < x < \ln 3$,

$6 < e^x < 8$ za $\ln 6 < x < \ln 7$,

$7 < e^x < 8$ za $x = 2$,

to imamo

$$\int_{0}^{2} [e^x]\,dx = \int_{0}^{\ln 2} 1\,dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\,dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3\,dx + \int_{\ln 4}^{\ln 5} 4\,dx + \int_{\ln 5}^{\ln 6} 5\,dx +$$

$$+ \int_{\ln 6}^{\ln 7} 6\,dx + \int_{\ln 7}^{2} 7\,dx = 14 - \ln(7!).$$

4°. ***Rezultat,*** $\ln(n!)$;

5°. ***Rezultat,*** -1.

12. Razni zadaci (12.1.–12.22.)

12.1. Izračunati

$$\int_{1}^{2} \frac{x}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2}\,dx.$$

Rješenje.

Primjenom Hornerove sheme pokazujemo da $x \in \{-1, -2\} \Rightarrow x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$, pa je $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)(x^2+1)$.

$$\frac{x}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{2}{5},\ C = \frac{1}{10},\ D = \frac{3}{10}.$$

$$\int_{1}^{2} \frac{x}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{dx}{x+1} + \frac{2}{5}\int_{1}^{2}\frac{dx}{x+2} +$$

$$+ \frac{1}{10}\int_{1}^{2}\frac{x+3}{x^2+1}\,dx = \frac{25\ln 2 - 18\ln 3 + \ln 5}{20} + \frac{3}{10}\left(\mathrm{arc\,tg}\,2 - \frac{\pi}{4}\right).$$

12.2. Izračunati integral

$$\int_{2}^{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx.$$

Rješenje.

$$\int_{2}^{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{lll} x = \frac{2}{\sin t}; & x = 2, & t = \frac{\pi}{2}, \\ dx = -\frac{2\cos t}{\sin^2 t}\,dt; & x = \frac{4\sqrt{3}}{3}, & t = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\,\mathrm{cotg}\,t \cdot \sin^2 t \cdot 2\cos t}{4\sin^2 t}\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) dt = \left[\ln \mathrm{tg}\,\frac{t}{2} + \cos t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 3 - 1).$$

12.3. Izračunati integrale:

$$1^\circ.\quad I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^4+1};$$

$$2^\circ.\quad I_1 = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^4+1)^2};\qquad I_2 = \int_{0}^{1} \frac{x+1}{(x^4+1)^2}\,dx.$$

Rješenja:

1°. $$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+1)^2-2x^2}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1};\quad A=\frac{\sqrt{2}}{4},\ B=\frac{1}{2},$$

$$C=\frac{-\sqrt{2}}{4},\ D=\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx;$$

$$\sqrt{2}x+2=\frac{\sqrt{2}}{2}(2x+\sqrt{2})+1;\quad -\sqrt{2}x+2=\frac{-\sqrt{2}}{2}(2x-\sqrt{2})+1.$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^1\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^1\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1};$$

$$\int_0^1\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\left[\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)\right]_0^1=\ln(2+\sqrt{2}),$$

$$\int_0^1\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=\left[\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)\right]_0^1=\ln(2-\sqrt{2}),$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)\right]_0^1=$$

$$=\sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\right]_0^1=$$

$$=\sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{4}\right].$$

Otuda je

$$I=\int_0^1\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln(2+\sqrt{2})-\ln(2-\sqrt{2})\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3+2\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi).$$

2°. $$\int_0^1\frac{dx}{x^4+1}=\left|\begin{matrix}u=\dfrac{1}{x^4+1}\\ dv=dx\end{matrix}\right|=\left[\frac{x}{x^4+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{4x^4}{(x^4+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}+4\int_0^1\frac{dx}{x^4+1}-4\int_0^1\frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

Odavde imamo

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{(x^4+1)^2}=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}I=\frac{3\pi\sqrt{2}+4}{32}+\frac{3\sqrt{2}}{32}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

3°. Naći $\int_0^1\frac{dx}{(x^4+1)^3}$ koristeći se postupkom i rezultatom iz 1°. i 2°.

Da li se ovaj postupak može generalizirati?

4°. **Uputstvo.** $I_2=I_1+\int_0^1\frac{x\,dx}{(x^4+1)^3}$.

12.4. Izračunati integral

$$I(a)=\int_a^3\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}dx,\quad (a>0).$$

Naći izvod funkcije $I(a)$. Pokaži da $I(a)\to\infty\ (a\to 0)$.

Rješenje.

Uzmimo novu promjenljivu $t=\sqrt{1+x}-1$, pa se dobija

$$I(a)=2\int_{\sqrt{1+a}-1}^{1}\frac{t+2}{t}(t+1)\,dt=2\int_{\sqrt{1+a}-1}^{1}\left(t+3+\frac{2}{t}\right)dt=$$

$$=11-a-4\sqrt{1+a}-4\ln(\sqrt{1+a}-1).$$

Provjeriti tačnost rezultata, na taj način što će se naći

$$I'(a) = (11 - a - 4\sqrt{1+a} - 4\ln(\sqrt{1+a} - 1))'.$$

Lako je pokazati, $\lim_{a\to 0} I(a) = +\infty$.

✓ **12.5.** Izračunati integral

$$I(x) = \int_1^x \frac{2t\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Rješenje.

$$\int_1^x \frac{2t\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} u = \ln t \\ dv = \dfrac{2t}{(t^2+1)^2}dt \end{array} \right| = \left[\frac{-\ln t}{t^2+1}\right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \frac{-\ln x}{x^2+1} + \ln x - \frac{1}{2}[\ln(x^2+1) - \ln 2], \text{ tj.}$$

$$I(x) = \frac{-\ln x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2}{x^2+1}\right).$$

12.6. Izračunati integral

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx \quad (a < b).$$

Rješenje.

$$0 < (x-a)(b-x) = (a+b)x - x^2 - ab = -(x^2 - (a+b)x) - ab =$$

$$= -\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a+b}{2}\right) - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

što upućuje na uvođenje smjene

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos t;$$

$$x = a,\ t = \pi \text{ i } x = b,\ t = 0 \ (0 < t < \pi);$$

$$dx = -\frac{b-a}{2}\sin t\,dt; \quad \sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{b-a}{2}\sin t > 0.$$

Konačno dobijamo

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \int_0^\pi \frac{(b-a)^2\sin^2 t}{4}\,dt = \frac{(b-a)^2}{8}\int_0^\pi (1 - \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{8}(b-a)^2.$$

12.7. Neka je

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

1°. Pokazati da je

$$I(a,b) = -I(-a,-b);$$

2°. Ako su a i b istog znaka, tada je

$$I(a,b) = I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right);$$

3°. Pokazati da je

$$I\left(a, \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Rješenja:

1°. Smjena $t = -x$ daje

$$I(a,b) = -\int_{-a}^{-b} \frac{(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} = -I(-a,-b).$$

2°. Ako su a i b istog predznaka, tada zamjena $x = \frac{1}{t}$ daje

$$I(a,b) = -\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\,dt}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}} = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} = I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right);$$

3°. Ako je $b = \frac{1}{a}$, iz 2°. slijedi

$$I\left(a, \frac{1}{a}\right) = I\left(\frac{1}{a}, a\right) = -I\left(a, \frac{1}{a}\right),$$

a odavde

$$I\left(a, \frac{1}{a}\right) = 0.$$

12.8. Pokazati da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

12.9. Izračunati integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x)\,dx.$$

Rješenje.

Prema zadatku 12.8., imamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)dx.$$

Odavde

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\frac{3-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\right)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln 4\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\,dx,$$

i konačno je

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{3}\ln 2.$$

12.10. Izračunati integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

ako je $f(0)=1$,

$$f'(x) = \cos x + \sin x \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right);$$

$$f'(x) = \sin x - \cos x + \sqrt{2} \qquad \left(\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

pri čemu je funkcija $f(x)$ neprekidna na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje.

Iz $f'(x) = \cos x + \sin x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$ slijedi $f(x) = \sin x - \cos x + C_1$. Kako je $f(0)=1$, imamo:

$$C_1 = 2,\ f(x) = \sin x - \cos x + 2.$$

Iz $f'(x) = \sin x - \cos x + \sqrt{2}$ $\left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ slijedi

$$f(x) = -\cos x - \sin x + \sqrt{2}x + C_2.$$

Za $x = \frac{\pi}{4}$ imamo $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2$. Kako je $f(x)$ neprekidna u tački $\frac{\pi}{4}$, to je $2 = -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + C_2$, tj. $C_2 = 2 + \sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

Otuda je

$$f(x) = -(\cos x + \sin x) + \sqrt{2}x + \left(2+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Prema tome, treba naći integral funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x + 2 \ \text{za}\ 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ -(\cos x + \sin x) + \sqrt{2}x + \left(2+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right) \ \text{za}\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dakle, imamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x + 2)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-(\cos x + \sin x) + \sqrt{2}x + \right.$$

$$\left. + \left(2+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\,dx +$$

$$+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos + \sin x)\,dx + \frac{3\sqrt{2}\pi^2}{32} + \left(4+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{\pi}{4} =$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx + \frac{3\sqrt{2}\pi^2}{32} + \left(4+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{\pi}{4},\ \text{tj.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = -\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}\pi^2}{32} + \left(4+\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{\pi}{4}.$$

12.11. Naći granice između kojih se nalazi integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x + \sin x)\,dx.$$

Rješenje.

(a) Kako je $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ i

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < 1 \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \text{to je}$$

$$1 < \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \sqrt{2} \text{ i } 0 < \ln(\sin x + \cos x) < \frac{1}{2}\ln 2.$$

Na osnovu 5. (6) slijedi

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x + \cos x)\,dx < \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(b) Pošto je $1 < \sin x + \cos x < \sqrt{2}$ i $\ln(\sin x + \cos x) = 0$ za $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$, slijedi da je $m = 0$ donja međa podintegralne funkcije na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Odredimo gornju među pomoću izvoda podintegralne funkcije.

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(\cos x + \sin x)^2}.$$

Funkcija $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$ u $x = \frac{\pi}{4}$ ima maksimum $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$. Zato dobijamo rezultat iz (*a*).

12.12. Koristeći se teoremom o srednjoj vrijednosti, ocijeniti integral

$$\int_{-3}^{5} \frac{xe^x}{x^2 + 4}\,dx.$$

Rješenje.

Neka je $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$, a $g(x) = e^x$.

Lako je utvrditi da funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ u tački $x = -2$ ima *minimum* $f(-2) = -\frac{1}{4}$, a u tački $x = 2$ ima *maximum* $f(2) = \frac{1}{4}$. Pošto je $m = -\frac{1}{4}$, a $M = \frac{1}{4}$, to je

$$-\frac{1}{4} < \mu < \frac{1}{4}.$$

$$\text{Iz } \int_{-3}^{5} \frac{xe^x}{x^2 + 4}\,dx = \mu \int_{-3}^{5} e^x\,dx = \mu\frac{e^8 - 1}{e^3},$$

slijedi

$$\mu = \frac{e^3}{e^8 - 1}\int_{-3}^{5} \frac{xe^x}{x^2 + 4}\,dx.$$

Zato je

$$\frac{1 - e^8}{4e^3} < \int_{-3}^{4} \frac{xe^x}{x^2 + 4}\,dx < \frac{e^8 - 1}{4e^3}.$$

12.13. Koristeći se teoremom o srednjoj vrijednosti, ocijeniti integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{x + 2}\,dx.$$

12.14. Odrediti jedan interval u kojem se nalazi

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,dx.$$

Rješenje.

Pošto je $1 - \frac{2}{\pi}x < \cos x < 1$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\left(y = 1 - \frac{2}{\pi}x\right.$ je tetiva luka krive $y = \cos x$ za $\left.0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, imamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

tj.

$$\frac{\pi}{3} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,dx < \frac{\pi}{2}.$$

12.15. Naći najmanju i najveću vrijednost funkcije

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{t - 1}{t^2 + 1}\,dt \text{ na segmentu } [0, \sqrt{3}].$$

Rješenje.

$$F'(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

Potreban uvjet za ekstremum je $F'(x) = 0$. Dakle, $x = 1 \Leftrightarrow F'(x) = 0$.

Još treba naći $F(0)$, $F(1)$ i $F(\sqrt{3})$, pa zatim dobivene vrijednosti uporediti.

$$F(0) = 0;$$

$$F(1) = \int_0^1 \frac{t-1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}[\ln(t^2+1)]_0^1 - [\operatorname{arc\,tg} t]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} = \ln\sqrt{2} - \ln e^{\frac{\pi}{4}} = \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{e^\pi}};$$

$$F(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{\pi}{3} = \ln\sqrt{4} - \ln e^{\frac{\pi}{3}} = \ln\frac{2}{e^{\frac{\pi}{3}}}.$$

Pošto je $e^\pi > 4$, to je $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{e^\pi}} < 1$. Zato je $F(1) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} < 0$.

Kako je $2^3 < e^\pi$, tj. $2 < e^{\frac{\pi}{3}}$, to je $\frac{2}{e^{\frac{\pi}{3}}} < 1$. Otuda je $F(\sqrt{3}) = \ln\frac{2}{e^{\frac{\pi}{3}}} < 0$.

Dakle, najveća vrijednost funkcije $F(x)$ je $F(0) = 0$, a najmanja

$$F(1) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

12.16. Izračunati integral

$$\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x}\right) dx.$$

Uputstvo.

Funkcije $f(x) = 1 - \cos 2x$, $\varphi(x) = 1 + \sin 2x$ transformiraj u proizvod trigonometrijskih funkcija.

12.17. Izračunati

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b).$$

Uputstvo.

Vidjeti zadatak 12.6.

12.18. Izračunati

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2+\sin x}.$$

Uputstvo.

Uvesti zamjenu $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = t$.

12.19. Naći $\lim\limits_{x\to 1-} F(x)$, ako je

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

12.20. Po x riješiti jednačinu

$$\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}.$$

12.21. Koristeći se teoremom o srednjoj vrijednosti integrala, procijeniti integrale:

1°. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}}{\sin x}\,dx;$ 2°. $\displaystyle\int_{\ln 5}^{\ln 10} \frac{x\sqrt{6-x}}{e^x-2};$

3°. $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \frac{e^x\sqrt{2-x}}{x^2-2}\,dx;$ 4°. $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x}{e^x}\,dx.$

12.22. Izračunati integrale:

1°. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\operatorname{tg}\left(a + \frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\,dx;$

2°. $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi);$

3°. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ za $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant t \\ \dfrac{t}{1-t}(1-x), & t \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$

4°. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$

$\left(\text{Smjena } t = x + \dfrac{1}{x}\right.$, pri tome imati u vidu da $t = x + \dfrac{1}{x}$ opada kad x raste od $\dfrac{1}{2}$ do 1, i raste kad x raste od 1 do $\left.2\right)$.

13. Nesvojstveni integrali

1. *Nesvojstveni integrali sa beskonačnim granicama* (I *vrste*)

Neka je funkcija $f(x)$ definirana na razmaku $[a, +\infty)$ i integrabilna na svakom njegovom konačnom segmentu $[a, t]$ $(t > a)$.

Ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = I, \tag{1}$$

onda uzimamo da je

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = I, \tag{2}$$

i kažemo da je integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konvergentan* (*postoji, ima smisla*), a funkcija $f(x)$ *integrabilna* na $[a, +\infty)$.

Ako limes (1) ne postoji ili je $+\infty$ ili $-\infty$, kažemo da integral *divergira* (*ne postoji, nema smisla*).

Integral (2) je *nesvojstveni* (*nepravi*) I *vrste.*

Na analogan način definira se nesvojstveni integral:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx \ (t < a);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{h \to -\infty} \int_h^a f(x)\,dx + \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Za nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ kažemo da postoji ako postoji svaki od dva nesvojstvena integrala na desnoj strani. U tom slučaju, kad postoji, njegova vrijednost je jednaka sumi oba nesvojstvena integrala na desnoj strani.

Da bi integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergirao, potrebno je i dovoljno, da se za svako $\varepsilon > 0$ može naći $n_0(\varepsilon) > a$ takav da za $a' > n_0(\varepsilon)$ i $a'' > n_0(\varepsilon)$ važi

$$\left| \int_a^{a''} f(x)\,dx - \int_a^{a'} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{a'}^{a''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Ako konvergira $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, kaže se da $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *apsolutno konvergira.*

Ako je integral *apsolutno* konvergentan, onda je on i konvergentan.

Ako je integral $\int_a^{+\infty} f(x)$ konvergentan, ali ne i apsolutno konvergentan, onda kažemo da on *uvjetno konvergira.*

Kriteriji konvergencije:

(1). Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane na intervalu $[a, +\infty)$ i integrabilne na svakom njegovom konačnom segmentu $[a, t]$ $(t > a)$. Ako za svako $x \geqslant x_0 > a$ važi nejednakost $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, tada ako konvergira integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, onda konvergira i integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i vrijedi

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Ako divergira integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, tj. ako je $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, onda divergira i integral $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

(2). Ako su $f(x)$ i $g(x)$ pozitivne funkcije na $[a, +\infty)$ i ako postoji $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \ (0 < c < +\infty)$, tada oba integrala $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konvergiraju ili oba divergiraju u *užem smislu* i imaju vrijednost $+\infty$.

(3). Ako je $\alpha > 1$ $(\alpha \leqslant 1)$ i ako za sve dovoljno velike vrijednosti x važi $|f(x)| \leqslant cx^{-\alpha}$ $(c > 0)$ $(f(x) \geqslant x^{-\alpha})$, onda integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ apsolutno konvergira (divergira u užem smislu i ima vrijednost $+\infty$).

(4). Ako se funkcija $f(x)$, za dovoljno veliko x, može napisati u vidu

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^{\alpha}} \ (\alpha > 0), \ (f(x) \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0 \text{ i integrabilne}),$$

onda: za $\alpha > 1$ i $g(x) \leqslant c < +\infty$ $(\alpha \leqslant 1$ i $g(x) \geqslant c > 0)$ integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $(a > 0)$ konvergira (divergira).

(5). Ako konvergiraju integrali $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, onda konvergira i integral funkcije $\lambda f(x) + \mu g(x)$ na $[a, +\infty)$ i važi

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

(6). Neka je funkcija $f(x)$ definirana u intervalu $[a, +\infty)$ i integrabilna na svakom njegovom segmentu $[a, t]$ $(a < t < \infty)$. Ako funkcija $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ u cijelom intervalu $[a, +\infty)$, onda je na osnovu *Newton-Leibnizove* formule

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = F(t) - F(a).$$

Integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira onda i samo onda ako postoji $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ i tada je

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a).$$

Analogno, za integrale:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - \lim_{t\to-\infty} F(t),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} F(t) - \lim_{h\to-\infty} F(h).$$

2. *Nesvojstveni integrali neograničenih funkcija* (II *vrste*)

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena i integrabilna na svakom segmentu $[a, b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$ i neograničena na svakom segmentu $[b-\varepsilon, b]$. Ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = I \tag{3}$$

onda uzimamo da je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

i kažemo da integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergira* na $[a, b]$ (*postoji, ima smisla*).

Ako limes (3) ne postoji ili je $+\infty$ ili $-\infty$, tada se kaže da dati integral *divergira* (*ne postoji, nema smisla*). Tačka b naziva se *singularnom*. Integral (4) je *nesvojstveni* (*nepravi, uopšteni*) II *vrste*.

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena i integrabilna na svakom segmentu $[a+\varepsilon', b]$ $(0 < \varepsilon' < b-a)$ i neograničena na svakom segmentu $[a, a+\varepsilon']$. Tačka a je singularna. Tada se, na analogan način, definira

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{a+\varepsilon'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Neka je c $(a < c < b)$ *singularna tačka funkcije* $f(x)$ na $[a, b]$. Ako je $f(x)$ ograničena i integrabilna na $[a, c-\varepsilon]$ i na $[c+\varepsilon', b]$ $(0 < \varepsilon < c-a,$ $0 < \varepsilon' < b-c)$, onda je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

ako i samo ako postoje oba integrala na desnoj strani, pri čemu $\varepsilon \to 0$ i $\varepsilon' \to 0$ neovisno jedan od drugog.

Definicija važi za *konačan broj singularnih* tačaka $x \in [a, b]$. Neka su a, c, b $(a < c < b)$ *singularne* tačke funkcije $f(x)$. Ako je $f(x)$ integrabilna na svakom segmentu $[a+\varepsilon_1, c-\varepsilon_2]$, odnosno na segmentu $[c+\varepsilon_3, b-\varepsilon_4]$ $(\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0,\ \varepsilon_3 > 0,\ \varepsilon_4 > 0$ dovoljno mali brojevi), tada je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{a+\varepsilon_1}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{d}^{c-\varepsilon_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_3\to 0} \int_{c+\varepsilon_3}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_4\to 0} \int_{h}^{b-\varepsilon_4} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$(a < d < c < h < b)$ ako i samo ako postoje sva četiri integrala na desnoj strani.

Da bi integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (gdje je b singularna tačka) konvergirao, nužno je i dovoljno, da za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav broj $n_0(\varepsilon)$ da za $0 < \eta < n_0(\varepsilon)$ i $0 < \eta' < n_0(\varepsilon)$ vrijedi

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Ako konvergira $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, kaže se da $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *apsolutno konvergira*.

Ako je integral apsolutno konvergentan, onda je on i konvergentan. Obrat ne mora biti istinit.

Kriteriji konvergencije:

(7). Ako je $0 < \alpha < 1$ $(\alpha \geqslant 1)$ i ako za svako x iz jedne desne okoline tačke a vrijedi nejednakost $|f(x)| \leqslant (x-a)^{-\alpha}$ $(|f(x)| \geqslant (x-a)^{-\alpha})$, tada integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ apsolutno konvergira (divergira).

(8). Neka funkcija $f(x)$ za svako x — iz jedne lijeve okoline tačke b ima oblik

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^{\alpha}} \quad (\alpha > 0).$$

Ako je $\alpha < 1$ i $g(x) \leqslant c < +\infty$ ($\alpha \geqslant 1$ i $g(x) \geqslant c > 0$), tada integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira (divergira).

(9). Ako konvergiraju integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$, onda konvergira i integral funkcije $\lambda f(x) + \mu g(x)$ na $[a, b]$ i vrijedi

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

(10). Neka je $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ na $[a, b]$, tada ako konvergira integral $\int_a^b g(x)\,dx$ onda konvergira i $\int_a^b f(x)\,dx$, te vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \; (a < b).$$

(11). Neka je funkcija $f(x)$ definirana na $[a, b]$ i integrabilna u običnom smislu na svakom intervalu $[a, b - \varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < b - a)$, gdje je b singularna tačka. Ako funkcija $f(x)$ na $[a, b)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$, tada je

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(b - \varepsilon) - F(a).$$

Nesvojstveni integral (4) postoji onda i samo onda ako postoji $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(b - \varepsilon)$ i tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(b - \varepsilon) - F(a).$$

Analogno

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\varepsilon \to 0} F(a + \varepsilon) \; (a \text{ singularna tačka, } 0 < \varepsilon < b - a).$$

3. *Glavna vrijednost integrala*

U nekim slučajevima limesi na desnoj strani jednakosti 2.(6) ne postoje, ali postoji

$$V.\,P. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right]. \tag{8}$$

$V.\,P. \int_a^b f(x)\,dx$, kad postoji, zove se *glavna vrijednost* (*valeur principale*) nesvojstvenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Analogno se definiše *glavna vrijednost* integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ kao

$$V.\,P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Kod glavne vrijednosti integrala singularnu tačku c obuhvatili smo simetričnim intervalom $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, dok smo kod nesvojstvenog integrala tačku c obuhvatili proizvoljnim intervalom. Zbog toga, ako je nesvojstveni integral konvergentan, tada postoji i njegova glavna vrijednost koja je jednaka vrijednosti samog nesvojstvenog integrala. Ali, iz egzistencije glavne vrijednosti nesvojstvenog integrala ne slijedi nužno egzistencija tog nesvojstvenog integrala.

Ako glavna vrijednost postoji, onda vrijedi

$$V.\,P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ako je } f(x) \text{ neparna} \\ 2 \int_0^{+\infty} f(x)\,dx, & \text{ako je } f(x) \text{ parna.} \end{cases} \tag{10}$$

Za izračunavanje nesvojstvenih integrala moguća je primjena parcijalne integracije, odnosno uvođenje novih promjenljivih (čime se, ponekad, dobiva običan integral). Pri tome treba voditi računa da svaki od, dobivenih, sabiraka ima smisla.

Zadaci (13.1.—13.13.)

13.1. Izračunati integrale:

1°. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$; 2°. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ $(a \neq 0)$;

3°. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1 + x)^2}$; 4°. $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$;

5°. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2}$; 6°. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}\,dx$ $(\lambda > 0, n$ prirodan broj$)$;

7°. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ $(a > 0)$; 8°. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$.

Rješenja:

1°. Funkcija $f(x)=e^{-\lambda x}$ je integrabilna na svakom $[0, t]$ $(a < t < +\infty)$ i ima primitivnu funkciju na $[0, +\infty)$. Zato je:

1. za $\lambda > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}\lim_{t\to+\infty}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^t = -\frac{1}{\lambda}\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-\lambda t}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda};$$

2. za $\lambda = 0$,

$$\int_0^{+\infty} dx = +\infty;$$

3. za $\lambda < 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}\lim_{t\to+\infty}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^t = +\infty.$$

Dakle, imamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & \text{za } \lambda > 0 \\ +\infty, & \text{za } \lambda < 0. \end{cases}$$

2°. $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{|a|}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{|a|}\right]_0^t =$$

$$=\frac{1}{|a|}\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{|a|} = \frac{\pi}{2\,|a|} \quad (a \neq 0).$$

3°. $$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{\sqrt{t}}\frac{2z^2\,dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{z}{1+z^2}\right]_1^{\sqrt{t}} + \lim_{t\to+\infty}\int_1^{\sqrt{t}}\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} + \lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} z\right]_1^{\sqrt{t}} =$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

4°. $$\int_0^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \cos x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\sin t - \sin 0 = \lim_{t\to+\infty}\sin t.$$

Pošto $\lim\limits_{t\to+\infty}\sin t$ ne postoji, slijedi da dati integral divergira.

5°. $$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2}}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2}}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{t\to+\infty}\left[\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right]_2^t =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

6°. $$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t x^n e^{-\lambda x}\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^n \\ dv = e^{-\lambda x}\,dx\end{matrix}\right| =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^n e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^t + \frac{n}{\lambda}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\frac{t^n e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx.$$

Za izračunavanje $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^n e^{-\lambda t}}{\lambda}$ primijenimo L' Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^n}{\lambda e^{\lambda t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{n\,t^{n-1}}{\lambda^2 e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{n(n-1)\,t^{n-2}}{\lambda^3 e^{\lambda t}} = \ldots = \lim_{t\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^{n+1}e^{\lambda t}} = 0.$$

Stavimo li $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda t}\,dx$, onda je

$$I_n = \frac{n}{\lambda}I_{n-1} = \frac{1}{\lambda^2}n(n-1)I_{n-2} = \ldots = \frac{1}{\lambda^n}(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot I_0 =$$

$$=\frac{n!}{\lambda^n}\cdot I_0.$$

Kako je $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = -\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{e^{-\lambda t}-1}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{\lambda}$, imamo

$$I_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

7°. Razlikovat ćemo tri slučaja:

a) $a = 1$,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln x\right]_a^t = \lim_{t\to+\infty}(\ln t) - \ln a = +\infty;$$

b) $\alpha < 1$,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) = +\infty;$$

c) $\alpha > 1$,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{t\to+\infty} t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Dakle, integral $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$ konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$.

8°. **Uputstvo.** Funkciju $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ rastavi na sumu pravih racionalnih funkcija.

13.2. Izračunati integrale:

1°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda x}\,dx;$

2°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a \neq 0)$;

3°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

Rješenja:

1°. (a) za $\lambda > 0$,

$$\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda x}\,dx = \lim_{h\to-\infty}\int_h^a e^{\lambda x}\,dx = \lim_{h\to-\infty}\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_h^a = \frac{e^{\lambda a}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\lim_{h\to-\infty} e^{\lambda h} = \frac{e^{\lambda a}}{\lambda};$$

(b) za $\lambda = 0$,

$$\int_{-\infty}^{a} dx = +\infty;$$

(c) za $\lambda < 0$,

$$\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda x}\,dx = \lim_{h\to-\infty}\int_h^a e^{\lambda x}\,dx = +\infty.$$

Dakle, imamo

$$\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda x}\,dx = \begin{cases}\dfrac{e^{\lambda a}}{\lambda}, & \text{za } \lambda > 0\\ +\infty, & \text{za } \lambda \leq 0.\end{cases}$$

2°. Rezultat, $\dfrac{\pi}{2|a|}$ $(a \neq 0)$.

3°. $$\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left|\begin{matrix} x = -t\\ dx = -dt\end{matrix}\right| = \int_{+\infty}^{0}\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\int_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= -\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\lim_{u\to+\infty}\left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^u = -\lim_{u\to+\infty}\sqrt{u^2+1}+1 = -\infty.$$

13.3. Izračunati integrale:

1°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a \neq 0)$;

2°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2};$

3°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

Rješenja:

1°. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{a^2+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2|a|} + \frac{\pi}{2|a|} = \frac{\pi}{|a|}.$$

(Vidjeti zadatke 13.1., 2°. i 13.2., 2°.).

2°. $$\int_h^t\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\ln(1+t^2) - \ln(1+h^2)).$$

Pošto se izraz u zagradi, za $t \to +\infty$, $h \to -\infty$, javlja u obliku $\infty - \infty$, zaključujemo da integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}$ ne postoji.

3°. ***Rezultat,*** π.

13.4. Ispitaj konvergenciju nesvojstvenih integrala:

1°. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin\lambda x\,dx \quad (\lambda>0)$; 2°. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$;

3°. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$; 4°. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$;

5°. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx\ (a>1)$.

Rješenja:

1°. Kako je $|e^{-\lambda x}\sin\lambda x| \le e^{-\lambda x}$, a integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$ za $\lambda>0$ konvergira, to na osnovu poznatog kriterija slijedi da konvergira i integral

$$\int\limits_0^{+\infty}|e^{-\lambda x}\sin\lambda x|\,dx,$$

a ovo znači da dati integral apsolutno konvergira.

Ostavljamo čitaocu da izračuna dati integral.

2°. Integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$ uporedit ćemo sa integralom $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ (13.1., 7°.).

Uzmimo, $f(x)=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ i $g(x)=\frac{1}{x^n}$ $(x>1)$, $f(x)>0$ i $g(x)>0$. Primijenimo kriterij $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$ $(0<c<+\infty)$, pa imamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}}{\dfrac{1}{x^n}}=\lim_{x\to+\infty}(x^{n-1}\cdot\operatorname{arc\,tg} x).$$

Odredimo n tako da ova granična vrijednost bude konačna i različita od nule. Očigledno $\left(\text{pošto je } \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}\right)$, to će biti za $n-1=0$, tj. za $n=1$.

Pošto integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ divergira, slijedi da divergra i integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$.

3°. Pošto važi nejednakost $x^2-\lambda x+\lambda^2>0$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$, ili $-x^2<-\lambda x+\lambda^2$, slijedi da važi $e^{-x^2}<e^{-\lambda x}\cdot e^{\lambda^2}$.

Na osnovu već pokazanog da $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx$ konvergira $(\lambda>0)$, slijedi da i integral $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ konvergira.

4°. Pošto je $\frac{|\cos x|}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}$, a, kako znamo, integral $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ konvergira, zaključujemo (na osnovu datog kriterija) da je konvergentan integral $\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\cos x|}{1+x^2}\,dx$, pa integral $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ apsolutno konvergira.

5°. Iz $\left|\frac{\sin x}{x^a}\right|<\frac{1}{x^a}$ $(x>0)$ slijedi $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^a}\,dx<\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a}$. Integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a}$ je konvergentan (zadatak 13.1., 7°.) za $\alpha>1$, pa je takav i integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^a}\,dx\,(\alpha>1)$.

Prema tome, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx\,(\alpha>1)$ apsolutno konvergira.

13.5. Pomoću potrebnog i dovoljnog uslova pokazati da integral $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,(\alpha>0, a>0)$ konvergira.

Rješenje.

Neka je $\varepsilon>0$ po volji mali (pozitivan) broj i neka su $a', a''>a$. Tada je

$$\int\limits_{a'}^{a''}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{x^\alpha}\\ dv=\sin x\,dx\end{array}\right|=\left[-\frac{\cos x}{x^\alpha}\right]_{a'}^{a''}-\alpha\int\limits_{a'}^{a''}\frac{\cos x\,dx}{x^{\alpha+1}},$$

odakle je za $a'<a''$:

$$\left|\int\limits_{a'}^{a''}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right|<\left|\frac{\cos a'}{(a')^\alpha}-\frac{\cos a''}{(a'')^\alpha}\right|+\alpha\int\limits_{a'}^{a''}\frac{|\cos x|}{x^{\alpha+1}}\,dx<$$

$$<\frac{1}{(a')^\alpha}+\frac{1}{(a'')^\alpha}+\alpha\int\limits_{a'}^{a''}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}<\frac{2}{(a')^\alpha}+\frac{2}{(a'')^\alpha}<\frac{4}{(a')^\alpha}<\varepsilon\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a')^\alpha>\frac{4}{\varepsilon},\ a'>\sqrt[\alpha]{\frac{4}{\varepsilon}}=n_0(\varepsilon).$$

Ovo znači da će za sve $a', a'' > n_0(\varepsilon)$ biti

$$\left|\int_{a'}^{a''} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| < \varepsilon,$$

a što, dalje, znači da dati integral konvergira.

13.6. Pomoću potrebnog i dovoljnog uvjeta pokazati da integral

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha > 0, a > 0)$$

konvergira.

13.7. Ispitati apsolutnu konvergenciju integrala

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad (a > 0).$$

Rješenje.

U zadatku 13.5. ($\alpha = 1$) pokazano je da dati integral konvergira. Mi ćemo sada pokazati da ne konvergira apsolutno.

Iz $|\sin x| \geq \sin^2 x$ slijedi

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right) \quad (x > 0).$$

Pošto integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ divergira, a integral $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ (zadatak 13.6., $\alpha = 1, \beta = 2$) konvergira, slijedi da integral $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ divergira.

13.8. Pokazati da integral $\int_1^{+\infty} \sin x^2\,dx$ konvergira.

Uputstvo.

Uvesti smjenu $x^2 = t$ i zatim se pozvati na zadatak 13.5.

13.9. Ispitati konvergenciju integrala

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Rješenje.

Za $1 \leq x < +\infty$ važi:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, \quad 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} > 1,$$

$$\frac{1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Pošto integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ divergira, slijedi da i $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ divergira.

13.10. Izračunati nesvojstvene integrale:

1°. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2°. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $(a < b, \alpha > 0)$;

3°. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4°. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$;

5°. $\int_{-1}^0 \frac{2x}{1-x^2}\,dx$; 6°. $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$;

7°. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

Rješenja:

1°. Funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je integrabilna na segmentu $[0, 1-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$, $x = 1$ je singularna tačka), pa je

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} [\arcsin x]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Isto tako, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{\varepsilon \to 0+} \arcsin(-1+\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$

2°. a) Neka je $\alpha = 1$, tada je

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0_+} [\ln(b-x)]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln\varepsilon - \ln(b-a) = +\infty;$$

b) Ako je $\alpha \neq 1$, onda je

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{\varepsilon\to 0_+} [(b-x)^{1-\alpha}]_a^{b-\varepsilon} =$$

$$\frac{1}{\alpha-1}(\lim_{\varepsilon\to 0_+} \varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha} & \text{za } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{za } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dakle, za $0 < \alpha < 1$ dati integral konvergira, a za $\alpha > 1$ divergira.

3°. ***Rezultat***, $\dfrac{\pi^2}{2}$ ($x = 1$ je singularna tačka).

4°. $$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} [\ln\ln x]_{1+\varepsilon}^e = -\lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln\ln(1+\varepsilon) = +\infty.$$

5°. $$\int_{-1}^0 \frac{2x}{1-x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{2x}{1-x^2}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0_+} [\ln(1-x^2)]_{-1+\varepsilon}^0 =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln(2\varepsilon - \varepsilon^2) = (2\varepsilon - \varepsilon^2,\ 0 < \varepsilon < 1) = -\infty.$$

6°. ***Uputstvo.***

Uvesti zamjenu $x = \cos t$.

7°. Za $a \neq 1$ imamo

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a}(1 - \varepsilon^{1-a})\ (0 < \varepsilon < 1).$$

(a) Za $0 < a < 1$, imamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-a}(1-\varepsilon^{1-a}) = \frac{1}{1-a};$$

(b) Za $a = 1$, bit će

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln\varepsilon = -\ln\varepsilon,\ -\ln\varepsilon \to +\infty\ (\varepsilon \to 0_+);$$

(c) Za $a > 1$, imamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-a}(1-\varepsilon^{1-a}) = +\infty.$$

Prema tome je

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}, & \text{za } 0 < a < 1, \\ +\infty, & \text{za } a > 1. \end{cases}$$

13.11. Izračunati nesvojstvene integrale:

1°. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$;

2°. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

3°. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$;

4°. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$;

5°. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$;

6°. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$ $\left(\text{uvođenjem zamjene } x = \dfrac{1}{t}\right)$;

7°. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (uvođenjem zamjene $t = \operatorname{tg} x$).

Rješenja:

1°. Pošto je $x = 0$ singularna tačka, dati integral izračunavamo na slijedeći način

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\eta\to 0_+} \int_\eta^{+1} \frac{dx}{x} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} [\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\eta\to 0_+} [\ln x]_\eta^{+1} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln\varepsilon - \lim_{\eta\to 0_+} \ln\eta.$$

Zato što je $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \ln\varepsilon = -\infty$, $\lim\limits_{\eta\to 0_+} \ln\eta = -\infty$, zaključujemo da integral $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ divergira.

2°. ***Rezultat***, 6.

3°. $$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_{-2}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}+\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_{-2}^{-1-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}+\lim_{\substack{\varepsilon_2\to0\\ \varepsilon_3\to0}}\int_{-1+\varepsilon_3}^{1-\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon_4\to0}\int_{1+\varepsilon_4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0}\left[\ln\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{-2}^{-1-\varepsilon_1}+\lim_{\substack{\varepsilon_2\to0\\ \varepsilon_3\to0}}[\arcsin x]_{-1+\varepsilon_3}^{1-\varepsilon_2}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_4\to0}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{1+\varepsilon_4}^{2}=\pi+2\ln(2+\sqrt{3}).$$

4°. $$\int_{-1}^{+1}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{matrix}\right|=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t}{(\sin^2 t+1)\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\sin^2 t+1}\right)dt=$$

$$=\pi-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^2 t+1}=\pi-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\cos^2 t+2\sin^2 t}=$$

$$=\pi-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\cos^2 t\,(1+2\,\mathrm{tg}^2\,t)}=\left|\begin{matrix}\mathrm{tg}\,t=u\\ \dfrac{dt}{\cos^2 t}=du\end{matrix}\right|=\pi-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+2u^2}=$$

$$=\pi-\lim_{\substack{h\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_h^t\frac{du}{1+2u^2}=\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{\substack{h\to-\infty\\ t\to+\infty}}\left[\mathrm{arc\,tg}\sqrt{2}\,u\right]_h^t=$$

$$=\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

5°. *Rezultat*, 0.

6°. $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\left[\begin{matrix}x=\dfrac{1}{t}\\ dx=-\dfrac{1}{t^2}\,dt\end{matrix}\right]=$$

$$=-\int_{-1}^{-\infty}\frac{dt}{1+t^2}-\int_{+\infty}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{1+t^2}+\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{dt}{1+t^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\mathrm{arc\,tg}\,t]_a^{-1}+\lim_{b\to+\infty}[\mathrm{arc\,tg}\,t]_1^b=$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\lim_{a\to-\infty}\mathrm{arc\,tg}\,a+\lim_{b\to+\infty}\mathrm{arc\,tg}\,b-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

7°. $$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\left[\begin{matrix}t=\mathrm{tg}\,x\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right]=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+2t^2}+\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+2t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}+\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{d(\sqrt{2}\,t)}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}+\int_{-\infty}^{0}\frac{d(\sqrt{2}\,t)}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{d(\sqrt{2}\,t)}{1+(\sqrt{2}\,t)}-\lim_{b\to-\infty}\int_0^b\frac{d(\sqrt{2}\,t)}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{a\to+\infty}\mathrm{arc\,tg}\sqrt{2}\,a-\lim_{b\to-\infty}\mathrm{arc\,tg}\sqrt{2}\,b\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

13.12. Pomoću potrebnog i dovoljnog uslova pokazati da konvergira integral $\int_0^1 \ln x\,dx$.

Rješenje.

Tačka $x = 0$ je singularna tačka.

$$\left|\int_{0+\eta}^{0+\eta'}\ln x\,dx\right|=\left|[x\ln x-x]_{\eta}^{\eta'}\right|=|\eta'\ln\eta'-\eta\ln\eta-(\eta'-\eta)|.$$

Kako je $\lim\limits_{t\to 0_+} t \ln t = 0$, slijedi da se desna strana prethodne jednakosti može učiniti po volji malom, što znači da $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$ konvergira.

Izračunati $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

13.13. Izračunati:

1°. $V.P. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; 2°. $V.P. \int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}\ (a < c < b)$;

3°. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$; 4°. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Rješenja:

1°. $$\text{V. P.} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x}\right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \left([\ln |x|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\ln |x|]_{\varepsilon}^{+1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

Međutim, u zadatku 13.11., 1°. pokazali smo da je $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ divergentan.

2°. $$\text{V. P.} \int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-c}\right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left([\ln |x-c|]_a^{c-\varepsilon} + [\ln |x-c|]_{c+\varepsilon}^{b}\right) = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Međutim,

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\eta}^{b} \frac{dx}{x-c}\right) = \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}} \ln \frac{\varepsilon}{\eta}$$

ne postoji.

3°. $$\text{V. P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{-t}^{t} \sin x\,dx = \lim_{t\to+\infty} (\cos(-t) - \cos t) = 0,$$

iako integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$$

divergira.

4°. $$\text{V. P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{-t}^{t} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \ln(t^2+1) = 0.$$

Međutim, u zadatku 13.3., 2°. pokazali smo da ovaj integral divergira.

14. Razni zadaci (14.1.—14.24.)

14.1. Ispitati konvergenciju nesvojstvekog integrala

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Rješenje.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

je neprekidna na segmentu $[0, 1]$, pa je na tome segmentu integrabilna.

S obzirom na činjenicu da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = 1$$

i da integral

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

(zadatak 13.1., 7°.) divergira slijedi da zadani integral divergira.

14.2. Ispitati konvergenciju integrala

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2 - 2x + 3}.$$

Rješenje.

Funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$ je nenegativna na $[1, +\infty)$.

Pošto je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^2-2x+3}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

a integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

divergira, slijedi da zadani integral divergira.
Provjeri ovu činjenicu izračunavši zadani integral.

14.3. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}.$$

14.4. Izračunati integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

Rješenje.

Uvedimo smjenu $\sqrt{x^2+1} = x + t$. Odavde je:

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad dx = -\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt; \quad x = 0, \ t = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0.$$

Zbog parnosti podintegralne funkcije, imamo

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$I = -2\int_1^0 \frac{4t}{1-t^2+t^4}\,dt = \left| \begin{matrix} t^2 = v \\ 2t\,dt = dv \end{matrix} \right| = 4\int_0^1 \frac{1}{v^2-v+1}\,dv =$$

$$= 4\int_0^1 \frac{1}{\left(v-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dv = \frac{8}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{2v-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}.$$

14.5. Izračunati integral

$$\int_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Rješenje.

Singularne tačke su: $x = -1$ i $x = 1$.

$$\int_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln\frac{1+x}{1-x} \\ dv = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{matrix} \right|$$

$$= -\left[\ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

jer je

$$\lim_{x\to+1} \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2} - \lim_{x\to-1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2} = 0.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + 2)\,dt = \frac{5\pi}{2}.$$

Zato je

$$\int_{-1}^{+1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5\pi}{3}.$$

14.6. Izračunati nesvojstveni integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$$

Uputstvo.

Smjenom $\frac{1+x}{1-x} = t^2$ dolazi se do rezultata, $\frac{\pi}{3} + \ln(2+\sqrt{3})$.

14.7. Izračunati nesvojstveni integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Rješenje.

Singularna tačka je $x = 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left| \begin{matrix} x=\operatorname{sh} t & x\to+\infty,\ t\to+\infty; \\ dx = \operatorname{ch} t\,dt & x=1,\ t=\ln(1+\sqrt2)\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{\ln(1+\sqrt2)}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{(\operatorname{sh} t-1)\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}}\,dt = \int_{\ln(1+\sqrt2)}^{+\infty}\frac{1}{\operatorname{sh} t-1}\,dt =$$

$$= \int_{\ln(1+\sqrt2)}^{+\infty} \frac{1}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}-1}\,dt = 2\int_{\ln(1+\sqrt2)}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t}-2e^t-1}\,dt =$$

$$= 2\int_{\ln(1+\sqrt2)}^{+\infty} \frac{e^t}{(e^t-1)^2-2}\,dt = \left|\begin{matrix} e^t-1=v\\ e^t\, dt = dv\end{matrix}\right| =$$

$$=2\int_{\sqrt2}^{+\infty}\frac{1}{v^2-2}\,dv = \frac{1}{\sqrt2}\left[\ln\left|\frac{v-\sqrt2}{v+\sqrt2}\right|\right]_{\sqrt2}^{+\infty}.$$

Kako je

$$\lim_{v\to+\infty}\ln\left|\frac{v-\sqrt2}{v+\sqrt2}\right| - \lim_{\varepsilon\to0}\ln\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2\sqrt2}\right| = +\infty,$$

zaključujemo da zadani integral divergira.

14.8. Izračunati nesvojstveni integral

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

Rješenje.

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx = \left|\begin{matrix}x^2=t\\2x\,dx=dt\end{matrix}\right| = \int_0^{+\infty}\frac{\frac12\ln\sqrt t}{(1+t)^3}\,dt =$$

$$=\frac14\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt = \left|\begin{matrix}u=\ln t, & dv=\dfrac{dt}{(1+t)^3},\\ du=\dfrac{dt}{t}, & v=-\dfrac{1}{2(1+t)^2}\end{matrix}\right| =$$

$$=\frac14\left(-\left[\frac12\,\frac{\ln t}{(1+t)^2}\right]_0^{+\infty}+\frac12\int_0^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)^2}\,dt\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\dfrac{1}{t(1+t)^2}=\dfrac At+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{C}{(1+t)^2}\\ A=1,\ B=-1,\ C=-1\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac14\left(-\left[\frac12\,\frac{\ln t}{(1+t)^2}\right]_0^{+\infty}+\frac12\left[\ln t-\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}\right]_0^{\infty}\right)=$$

$$=\frac14\left(\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac12\,\frac{\ln b}{(1+b)^2}+\frac12\left[\ln b-\ln(b+1)+\frac{1}{b+1}\right]\right)\right)-$$

$$-\frac14\left(\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac12\,\frac{\ln\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}+\frac12\left[\ln\varepsilon-\ln(\varepsilon+1)+\frac{1}{\varepsilon+1}\right]\right)\right)=$$

$$=\frac14\left(\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac12\,\frac{\ln b}{(1+b)^2}+\frac12\ln\frac{b}{b+1}+\frac12\,\frac{1}{b+1}\right)\right)+$$

$$+\frac14\left(\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac12\ln\varepsilon\cdot\frac{1-(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2}+\frac12\ln(\varepsilon+1)-\frac12\,\frac{1}{\varepsilon+1}\right)\right).$$

Pošto je:

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{\ln b}{(1+b)^2}=\lim_{b\to+\infty}\frac{\frac1b}{2(1+b)}=0;\quad \lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{1+b}=0;\quad \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1+b}=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\ln\varepsilon\cdot\frac{-2\varepsilon-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{-2\varepsilon-\varepsilon^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\frac1\varepsilon}{\frac{2+2\varepsilon}{(-2\varepsilon-\varepsilon^2)^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon(-2-\varepsilon)^2}{2+2\varepsilon}=0;\quad \lim_{\varepsilon\to0}\ln(\varepsilon+1)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon+1}=1,$$

zaključujemo da je

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx=-\frac18.$$

14.8. 1°. Izračunati nesvojstveni integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+\frac12\right)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Uputstvo.

Uvesti smjenu $\sqrt{x^2+1} = x + t$.

14.8. 2°. Izračunati

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) \mathrm{d}x.$$

Rješenje.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) \mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2^{-1}} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\varepsilon}}} - \frac{1}{1+2^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

14.9. Izračunati:

1°. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; 2°. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Rješenja:

1°. Kako je

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n! - \ln n} = e^{\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \dots + \ln\frac{n}{n}\right)},$$

onda je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \dots + \ln\frac{n}{n}\right)}.$$

$$L = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \dots + \ln\frac{n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = \mathrm{d}x, \\ du = \frac{\mathrm{d}x}{x}, & v = x. \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}[x\ln x]_{\varepsilon}^{1} - \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\ln\varepsilon - \lim_{\varepsilon\to 0}[x]_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 = -\lim_{\varepsilon\to 0+}(-\varepsilon) - 1 = -1.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

2°. *Rezultat, e.*

14.10. 1.° Dokazati da je

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2 + 2x\,\mathrm{ch}\,a + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{\mathrm{sh}\,a},$$

$(a \neq 0)$.

Dokaz.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2 + 2x\,\mathrm{ch}\,a + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+\mathrm{ch}\,a)^2 - (\mathrm{ch}^2 a - 1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+\mathrm{ch}\,a)^2 - \mathrm{sh}^2 a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{x+\mathrm{ch}\,a}{\mathrm{sh}\,a}\right)^2 - 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\,a}{\mathrm{sh}^2 a}\cdot\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\frac{x+\mathrm{ch}\,a}{\mathrm{sh}\,a} - 1}{\frac{x+\mathrm{ch}\,a}{\mathrm{sh}\,a} + 1}\right|\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{sh}\,a}\left[\ln\left|\frac{x+\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a}{x+\mathrm{ch}\,a+\mathrm{sh}\,a}\right|\right]_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,a}\ln\left|\frac{\mathrm{ch}\,a - \mathrm{sh}\,a}{\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a}\right| = -\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,a}\ln e^{-2a} = \frac{a}{\mathrm{sh}\,a}\left(= \frac{|a|}{\mathrm{sh}\,|a|}\right)\ (a \neq 0).$$

Za $a = 0$, imamo

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 1} = 1.$$

14.10. 2°. Izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x}\,dx.$$

14.11. Izračunati integrale:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx,$$

$(ab \neq 0)$.

Uputstvo.

Dokazati da je

$$a^2 I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2b}, \quad b^2 I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2a}.$$

Dalje, ispitati slučajeve kad je:

$a = 0,\ b \neq 0;\ a \neq 0,\ b = 0;\ a = 0,\ b = 0.$

14.12. Izračunati integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}.$$

Uputstvo.

Uvesti smjenu $x = t^2$.

14.13. Pokazati da je

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2} n! \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Uputstvo.

Izvršiti zamjenu $x^2 = t$.

14.14. Izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x)^2}\,dx$$

Rezultat,

$$\frac{\pi}{4}.$$

14.15. Izračunati integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)}\,dx.$$

Uputstvo.

Izvršiti smjenu $x^4 = t$, a zatim primijeniti parcijalnu integraciju.

14.16. Neka je $a > 0$ i $\lambda > 0$. Pokazati da konvergiraju integrali:

$$I_1(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+\lambda x)}\,dx; \quad I_2(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+\lambda x)}\,dx.$$

Rješenje.

Za svako $x \in [1, +\infty)$ važi

$$0 < \frac{1}{(1+x^a)(1+\lambda x)} < \frac{1}{x^a(1+\lambda x)} < \frac{1}{\lambda x^{a+1}}.$$

Kako je integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\lambda x^{a+1}}$$

konvergentan za $a + 1 > 1$, slijedi da su konvergentni i integrali

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+\lambda x)}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^a)(1+\lambda x)}.$$

14.17. Ako je $0 < a < 1$ i $\lambda > 0$, pokazati da integral

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+\lambda x)}\,dx \text{ konvergira.}$$

Rješenje.

Za $0 < a < 1$ i $0 < x < +\infty$ vrijedi

$$0 < \frac{1}{x^a(1+\lambda x)} < \frac{1}{x^a}.$$

Pošto je integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} \quad (0 < a < 1)$$

konvergentan (zadatak 13.10., 7°.) slijedi da konvergira i integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a(1+\lambda x)}.$$

Odavde i na osnovu zadatka 14.16. zaključujemo da konvergira i integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+\lambda x)} \quad (a>0).$$

14.18. Ispitati konvergenciju integrala

$$I = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^4}}.$$

Rješenje.

U tački $x = 1$ podintegralna funkcija nije definirana. Za $0 < x < 1$ funkcija

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^4}}$$

je nenegativna;

$$\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (0 < x < 1).$$

Otuda, pošto konvergira integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

slijedi konvergencija i integrala

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^4}}.$$

Uvjerimo se u konvergenciju neposrednim računanjem integrala. Uvedemo li zamjenu $x^2 = t$, imat ćemo

$$I = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \sin u = t \\ du = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\sin u} = \left[u = \frac{\pi}{2} - v\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{1+\cos v} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

14.19. Ispitati konvergenciju integrala

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx.$$

Rješenje.

Tačka $x = 0$ je singularna tačka. Zamjenom $x = \frac{\pi}{2} - u$ pokazujemo da je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx.$$

Otuda je

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

tj.

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \begin{bmatrix} 2x = u \\ dx = \dfrac{du}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{2} + v \\ dx = dv \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 = I - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Otuda je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

14.20. Pokazati da vrijedi:

1°. $$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2+1}} \quad (a > 0);$$

2°. $$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}}\, dx = \frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}} \quad (0 < a < 1).$$

14.21. Ispitati konvergenciju integrala:

1°. $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{1+x^\alpha}\, dx \; (\alpha \geqslant 0);$$

2°. $$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\, dx;$$

3°. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\, dx;$$

4°. $$\int_0^{1} \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^4}}\, dx.$$

14.22. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\, dx.$$

14.23. Izračunati integrale:

1°. $$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arc\,tg} x\, dx;$$

2°. $$V.P. \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

14.24. Dokazati formule:

1°. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

2°. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

3°. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

II glava

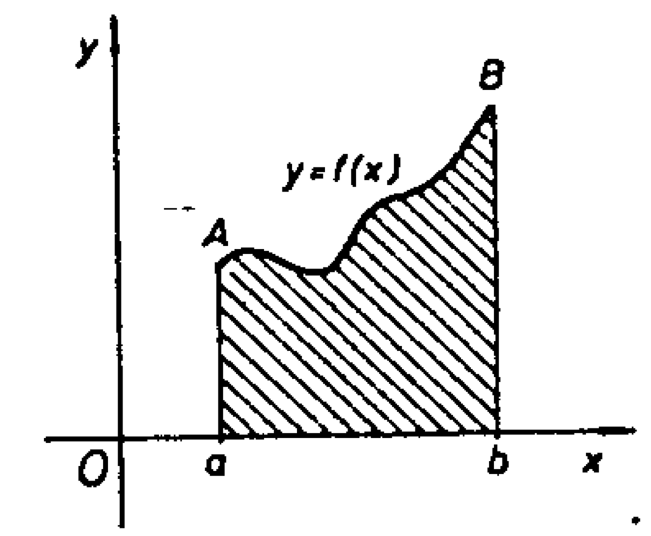
NEKE PRIMJENE ODREĐENOG INTEGRALA U GEOMETRIJI

1. Izračunavanje površine likova u ravni

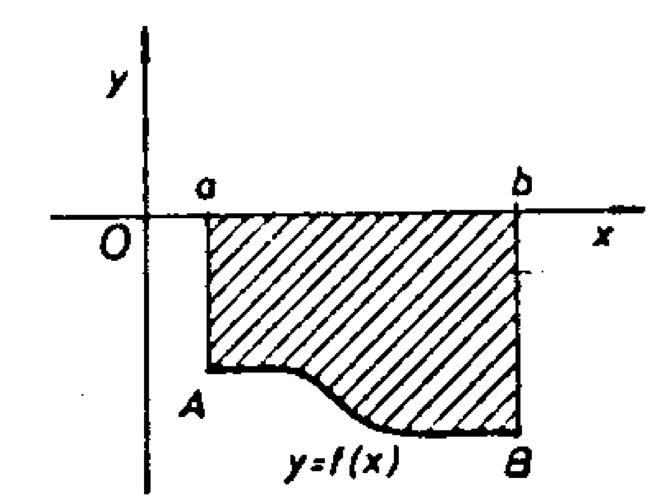
1°. Površina lika u pravouglim koordinatama

Neka je data *kriva linija* $y = f(x)$, gdje je *funkcija* f *nenegativna* i *integrabilna* na *segmentu* $[a, b]$. Tada je **površina lika** ograničenog *lukom* $\widehat{AB}$ krive, dijelom ose Ox (za $x \in [a, b]$) i ordinatama tačaka A i B (sl. 1.1) data obrascem:

$$P = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$



Sl. 1.1.



Sl. 1.2.

Ako je na segmentu $[a, b]$ funkcija $f(x) \leqslant 0$, tada je *površina krivolinijskog trapeza* (sl. 1.2) data obrascem

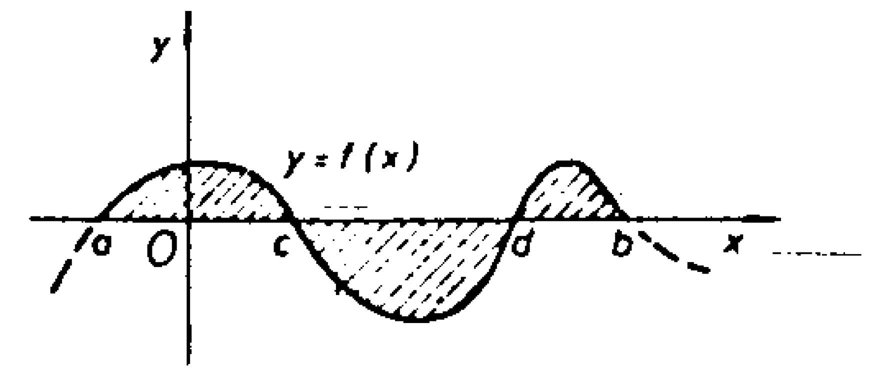
$$P = -\int_a^b f(x)\, dx \qquad \left(= \left|\int_a^b f(x)\, dx\right|\right). \tag{2}$$

Ako funkcija f mijenja znak na segmentu $[a, b]$ (kriva linija presijeca x osu) *konačno mnogo puta* ili najviše *prebrojivo mnogo puta*, onda treba segment

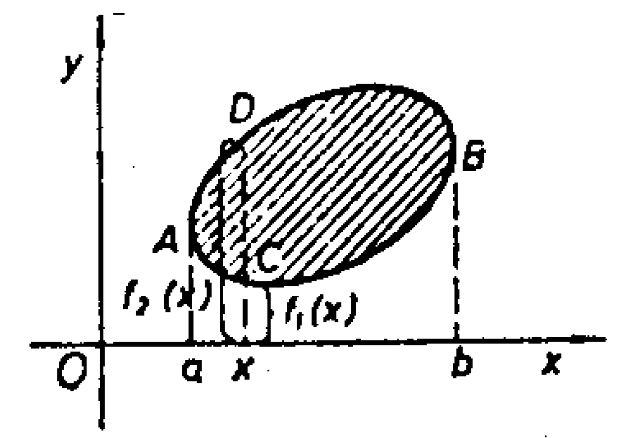
$[a, b]$ razbiti na odgovarajuće segmente tako da je na njima funkcija f stalnog znaka. Tako npr., u slučaju datom na sl. 1.3, imamo

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx, \qquad (3)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_2 + P_3.$$



Sl. 1.3.

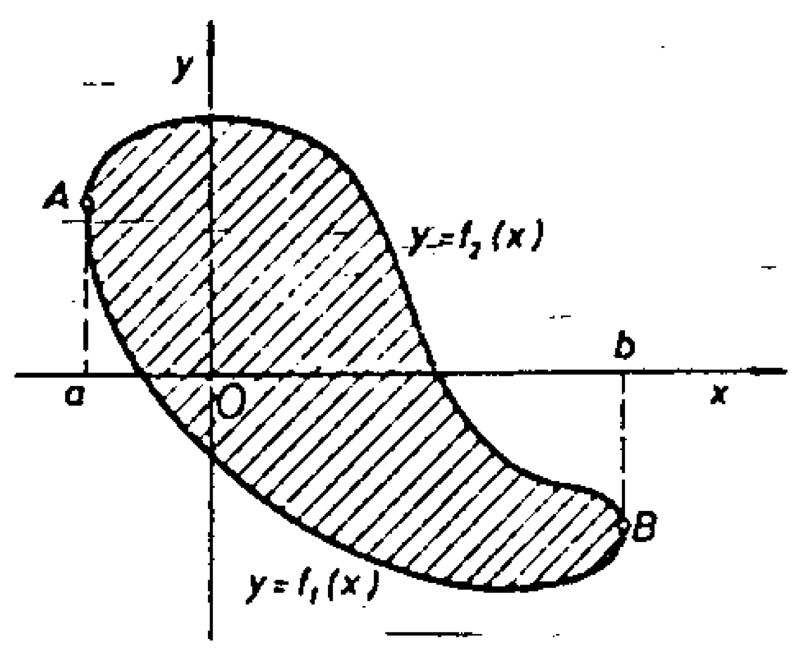


Sl. 1.4.

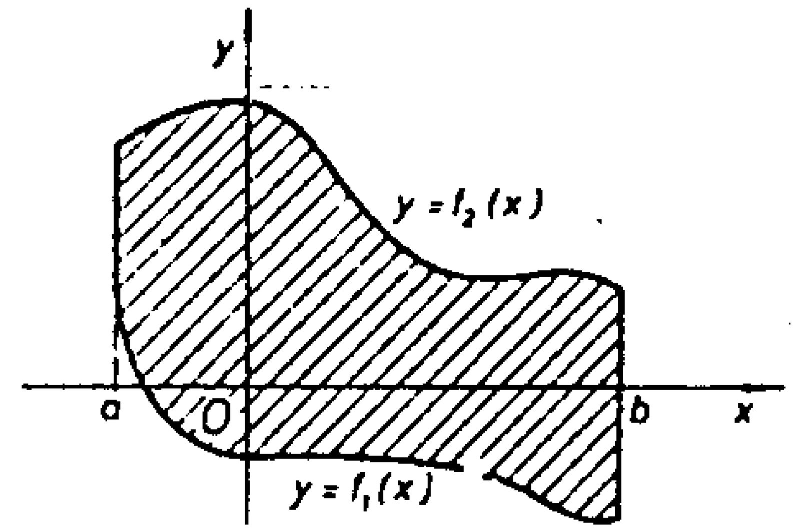
Neka je data *zatvorena kriva* C (sl. 1.4), tako da svaka prava koja je paralelna sa osom y a koja se nalazi između pravih $x = a$ i $x = b$ siječe krivu C tačno u dvije tačke (prave $x = a$ i $x = b$ imaju sa krivom C samo jednu zajedničku tačku). Neka je jednačina donjeg luka $y = f_1(x)$, a gornjeg $y = f_2(x)$, gdje su f_1 i f_2 integrabilne na $[a, b]$. Tada je površina lika, koji omeđuje kriva C, data obrascem

$$P = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \qquad (4)$$

Napomenimo da formula (4) ostaje ista i u slučaju da kriva C nije sva „iznad" x ose (sl. 1.5), kao i u slučaju kada jedna od pravih (ili obje) $x = a$ i $x = b$ nema samo jednu tačku zajedničku sa krivom C, nego ima (imaju) kao zajedničke tačke sve tačke jednog segmenta (sl. 1.6).



Sl. 1.5.



Sl. 1.6.

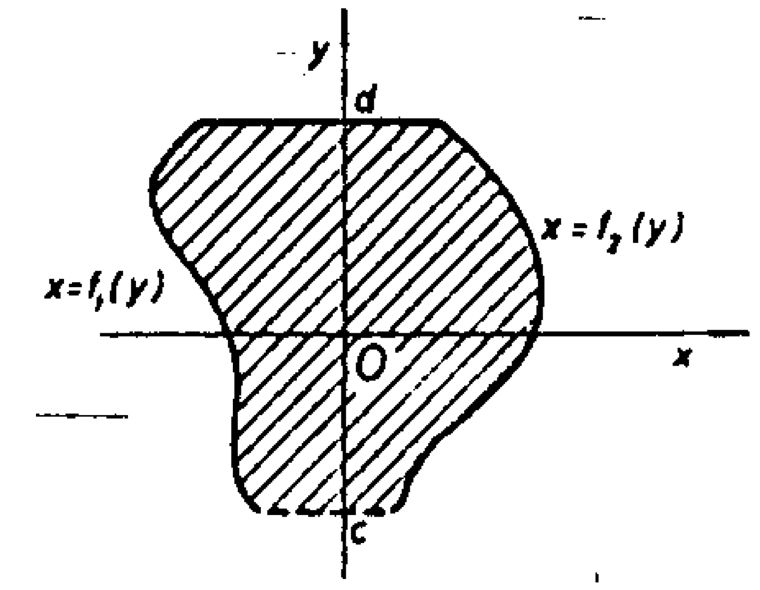
Ako se zamijene uloge koordinatnih osa, onda umjesto sl. 1.6. imamo sl. 1.7, a formula (4) postaje

$$P = \int_c^d [f_2(y) - f_1(y)]\,dy, \qquad (5)$$

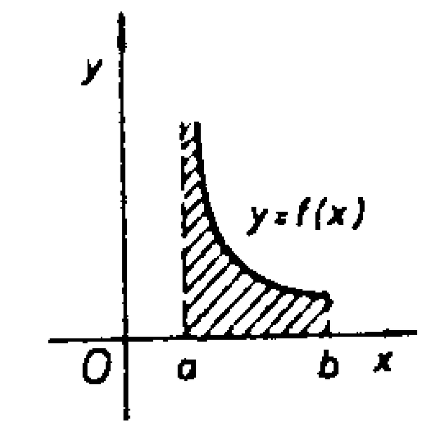
gdje su $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$ jednačine lijevog, odnosno desnog luka krive C.

U slučaju kao što je na sl. 1.8, imamo

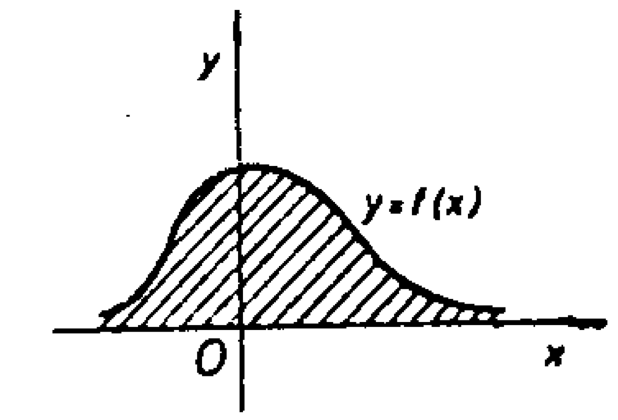
$$P = \lim_{\varepsilon \to a_+} \int_\varepsilon^b f(x)\,dx, \qquad \left(P = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right), \qquad (6)$$



Sl. 1.7.



Sl. 1.8.



Sl. 1.9.

a u slučaju kao što je na sl. 1.9. vrijedi

$$P = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (7)$$

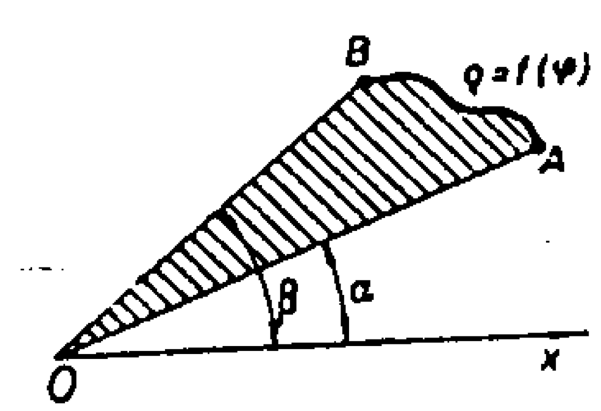
ukoliko navedeni *nesvojstveni integrali* postoje.

Ako zatvorena kriva C ima komplikovaniji oblik nego što je slučaj na sl. 1.6, 1.7, 1.8. i 1.9, onda lik ograničen krivom C treba izdijeliti na dijelove navedenih oblika.

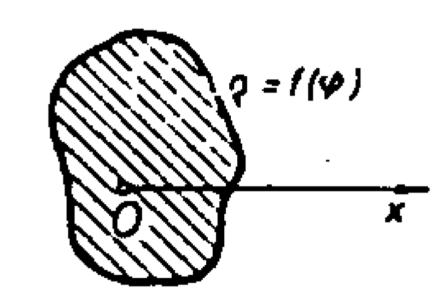
2°. Površina lika u polarnim koordinatama

Neka je data kriva linija $\varrho = f(\varphi)$, gdje je f integrabilna funkcija od φ na segmentu $[\alpha, \beta]$ čija *dužina* nije veća od 2π. Tada je *površina krivolinijskog sektora*, omeđenog lukom $\widehat{AB}$ date krive i potezima OA i OB (sl. 1.10), data sa

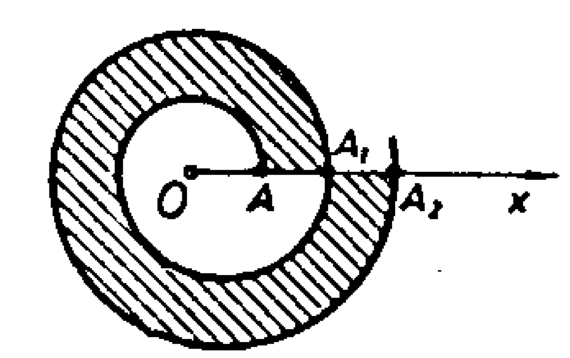
$$P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi. \qquad (8)$$



Sl. 1.10.



Sl. 1.11.



Sl. 1.12.

U slučaju kada se *ishodište nalazi unutar zatvorene krive* C (sl. 1.11), onda je površina lika omeđenog krivom $\varrho = f(\varphi)$, data sa

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\varphi)]^2\,d\varphi. \qquad (9)$$

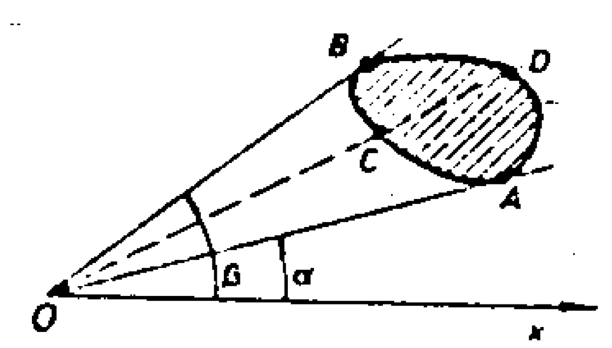
Ako je lik omeđen sa dvije krive (sl. 1.12), onda je njegova površina

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)]\,d\varphi. \qquad (10)$$

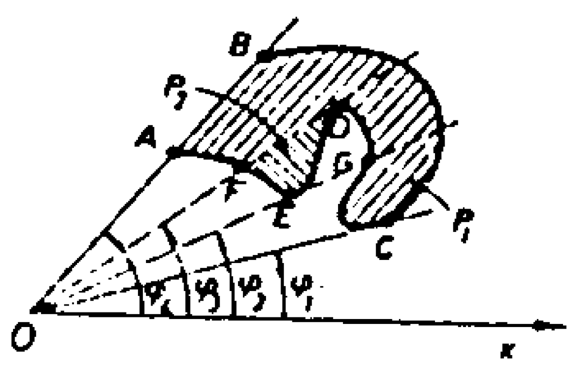
Neka je data *zatvorena kriva linija koja ne obilazi koordinatni početak* i koju svaki poteg siječe u dvije tačke (sl. 1.13), osim krajnjih potega, od kojih svaki sa krivom C može imati zajedničke sve tačke jednog segmenta. Ovaj segment može se svesti i samo na jednu tačku.

Tada je površina lika ograničenog krivom C data sa

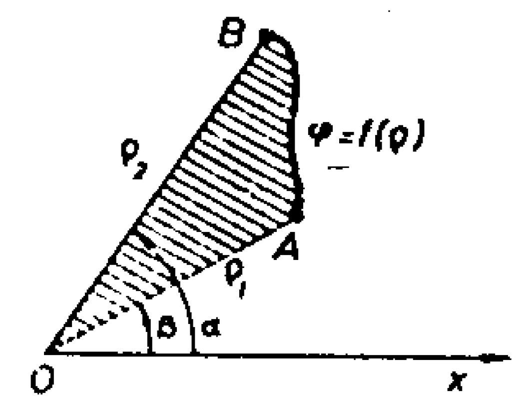
$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\beta} [f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)]\,d\varphi. \qquad (11)$$



Sl. 1.13.



Sl. 1.14.



Sl. 1.15.

Ako je zatvorena kriva C komplikovanijeg oblika nego što je slučaj na sl. 1.11 — 1.13, onda lik (omeđen datom krivom C) treba podijeliti na dijelove pogodnog oblika. Tako, u slučaju sl. 1.14, imamo

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_4} \varrho_4^2\,d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} \varrho_3^2\,d\varphi - \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \varrho_1^2\,d\varphi\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2)\,d\varphi.$$

Neka je data kriva $\varphi = f(\varrho)$ (u polarnim koordinatama), gdje je f' *neprekidna* funkcija i stalnog znaka (tj. f ili stalno opada ili stalno raste) na segmentu $[\varrho_1, \varrho_2]$. Tada je *površina isječka* OAB (sl. 1.15) data sa

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\beta} \varrho^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \varrho^2 f'(\varrho)\,d\varrho. \qquad (12)$$

3°. Površina sektora u parametarskom obliku

Neka je kriva C (sl. 1.10) data u obliku

$$\varrho = \varrho(t), \ \varphi = \varphi(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2).$$

Tada je **površina sektora** OAB ($\varphi'(t)$ i $\varrho(t)$ integrabilne) data sa

$$P = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \varrho^2(t)\,\varphi'(t)\,dt \quad (\alpha = \varphi(t_1),\ \beta = \varphi(t_2)). \qquad (13)$$

Ako je kriva zadana jednačinama

$$x = x(t),\ y = y(t),\ (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),\ (x(t),\ y(t),\ \dot x,\ \dot y \text{ integrabilne}),$$

onda je površina sektora OAB (sl. 1.10) data sa

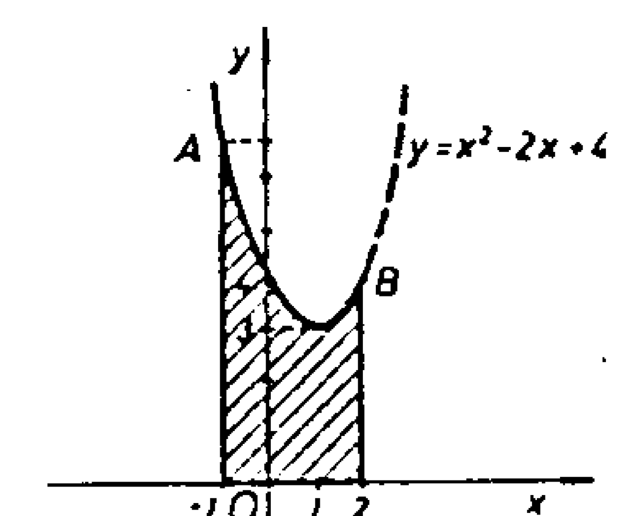
$$P = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot x(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\dot y(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x(t)\,\dot y(t) - y(t)\,\dot x(t))\,dt. \qquad (14)$$

Napomenimo, na kraju, da *zatvorena kriva C može biti zadana jednačinom* $F(x, y) = 0$. Ako je moguće ovu jednačinu riješiti po x ili po y (granice odrediti određujući oblast definisanosti), ili pak pogodnim izborom funkcije $x = x(t)$ odrediti $y = y(t)$ iz date jednačine, pa postupiti kao u slučaju kada je kriva data u parametarskom obliku. Pri tome se često koristi simetričnost figure.

Zadaci (1.1—1.35)

1.1. Odrediti površinu lika ograničenog lukom $\overset{\frown}{AB}$ krive, dijelom ose Ox $(-1 \leqslant x \leqslant 2)$ i ordinatama tačaka A i B (sl. 1.16):



Sl. 1.16.

Rješenje.

Kako je funkcija $f(x) = x^2 - 2x + 4$ nenegativna i intergrabilna (jer je, očigledno, neprekidna) na $[-1, 2]$, to imamo (prema (1)):

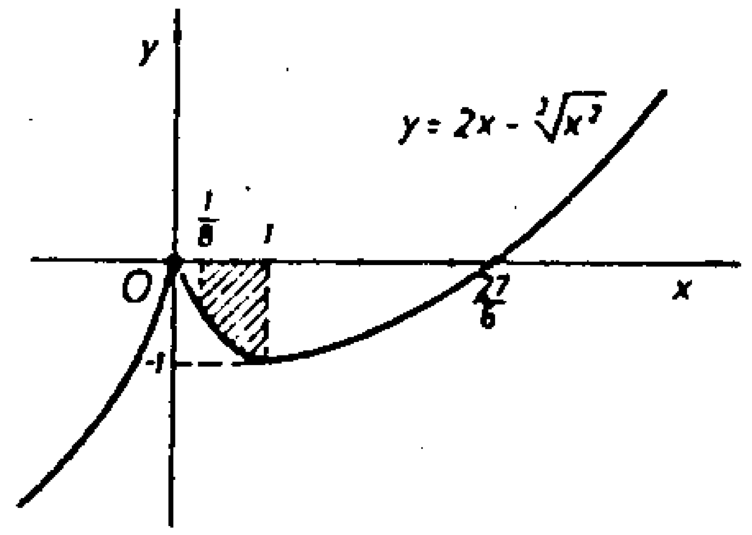
$$P = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = 12.$$

1.2. Izračunati površinu lika omeđenog krivom*) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, x osom i pravama: $x = \frac{1}{8}$, $x = 1$.

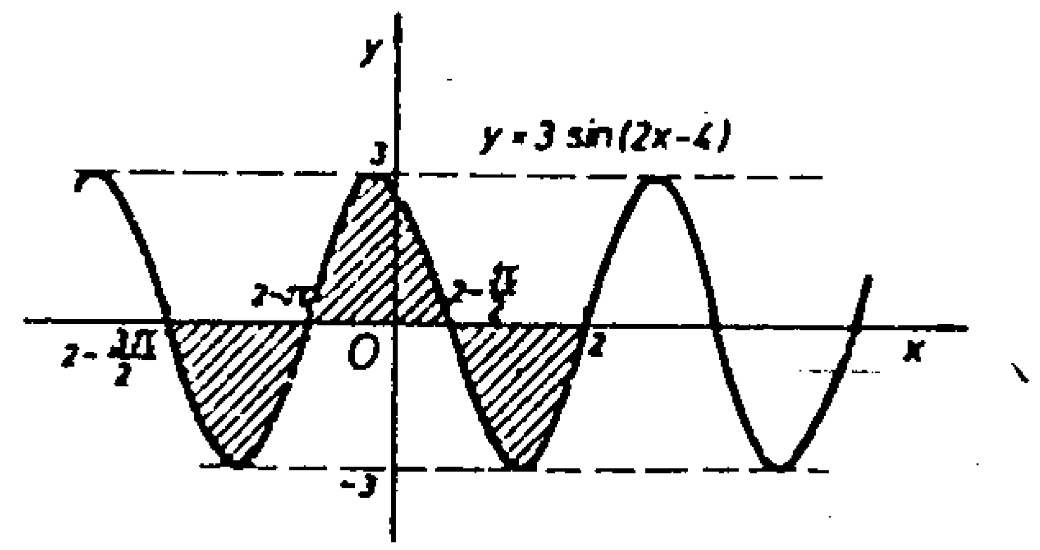
* Iza riječi „krivom" treba da stoji „*datom u pravouglom Descartesovom koordinatnom sistemu Oxy jednačinom*". Ova primjedba je valjana za mnoge slučajeve navedene u ovoj knjizi. Međutim, navedene riječi su izostavljene, jer je tako uobičajeno u praksi.

Rješenje.

Nacrtajmo grafik date funkcije. Definisana je na R. Nule su u $x = 0$ i $x = \frac{27}{8}$. Povratna tačka je $(0, 0)$, $y_{\min} = y(1) = -1$, $f(x) < 0$ za $x < \frac{27}{8}$. Grafik je dat na sl. 1.17.



Sl. 1.17.



Sl. 1.18.

Kako je $f(x) < 0$ i f integrabilna na $\left[\frac{1}{8}, 1\right]$, to, prema obrascu (2), imamo

$$P = -\int_{\frac{1}{8}}^{1} f(x)\,dx = -\int_{\frac{1}{8}}^{1} (2x - 3\sqrt[3]{x^2})\,dx = -\left[x^2 - \frac{9}{5}x^{5/3}\right]_{\frac{1}{8}}^{1} = \ldots = \frac{243}{320}.$$

1.3. Izračunati površinu lika ograničenog krivom $y = 3\sin(2x - 4)$ i odsječkom $\left[2 - \frac{3\pi}{2}, 2\right]$ x-ose.

Rješenje.

Lako se vidi da data kriva ima oblik dat na sl. 1.18. Kako je f integrabilna na datom segmentu i kako f mijenja znak u $x = 2 + k\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, to, dijeleći dati segment na dijelove na kojima f ima stalan znak, imamo (prema (3)):

$$P = -\int_{2-\frac{3\pi}{2}}^{2-\pi} f(x)\,dx + \int_{2-\pi}^{2-\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx - \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)\,dx.$$

No, data figura se sastoji od tri, po veličini jednake površine, pa vrijedi

$$P = -3\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)\,dx = -9\int_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} \sin(2x - 4)\,dx = \frac{9}{2}\cos(2x - 4)\Big|_{2-\frac{\pi}{2}}^{2} = 9.$$

1.4. Izračunati površinu lika ograničenog krivom $y = 2 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Rješenje.

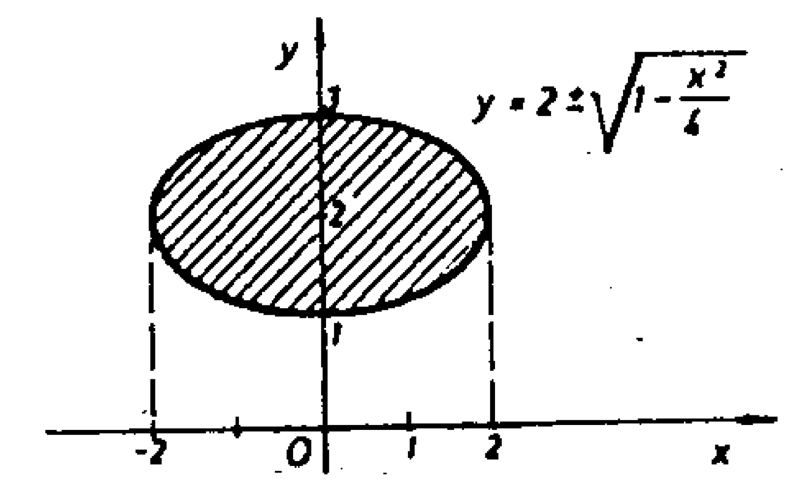
Data kriva je *elipsa* (sl. 1.19). Kriva je zatvorena, pa, stavljajući

$$f_1(x) = 2 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \text{ i } f_2(x) = 2 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

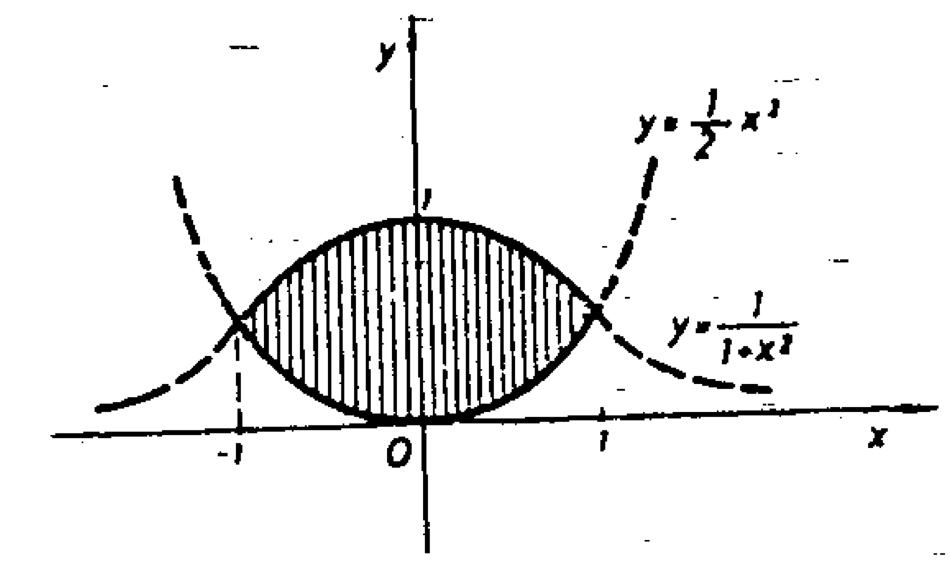
imamo

$$P = \int_{-2}^{2} [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = 2\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx = 4\int_{0}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{x}{2} = \sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{matrix} \right| = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = 2\pi.$$



Sl. 1.19.



Sl. 1.20.

1.5. Izračunati površinu lika ograničenog krivuljama $y = \frac{1}{1 + x^2}$ i $y = \frac{1}{2}x^2$.

Rješenje.

Granice integracije odredićemo tražeći presječne tačke krivih (sl. 1.20):

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{2}\right) \Leftrightarrow (x^4 + x^2 - 2 = 0) \Leftrightarrow [(x = -1) \vee (x = 1)].$$

$$P = \int_{-1}^{1} [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left[\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

1.6. Izračunati površinu lika ograničenog krivim linijama

$$y = \sqrt{9 - (x - 1)^2} \text{ i } y = -\sqrt{1 - \left(\frac{x - 1}{3}\right)^2}.$$

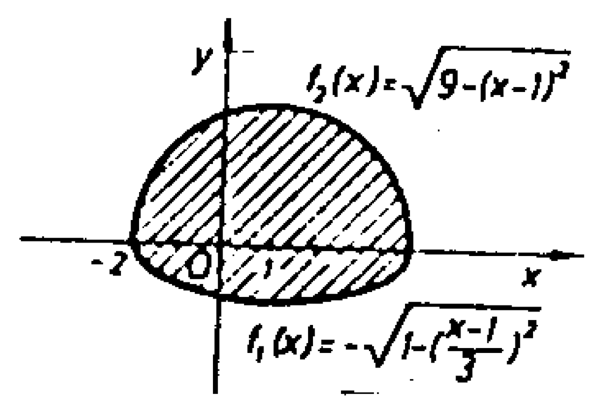
Rješenje.

Grafik funkcije $f_2(x)=\sqrt{9-(x-1)^2}$ je „gornja" polovina *kružnice* $(x-1)^2+y^2=9$, dok je grafik funkcije $f_1(x)=-\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}$ „donja" polovina elipse $\frac{(x-1)^2}{9}+y^2=1$ (sa centrom u $(1,0)$, sl. 1.21).

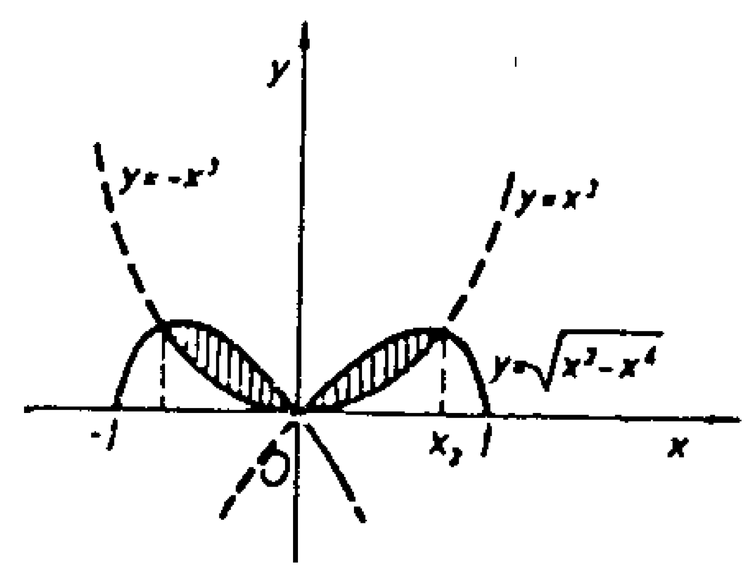
Iz $f_1(x)=f_2(x)$ slijedi da su granice integracije $x_1=-2$, $x_2=4$, pa imamo

$$P=\int_{-2}^{4}[f_2(x)-f_1(x)]\,dx=2\int_{1}^{4}\left(\sqrt{9-(x-1)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}\right)dx=$$

$$=8\int_{1}^{4}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}\,dx=\left|\frac{x-1}{3}=\sin t\right|=12\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6\pi.$$



Sl. 1.21.



Sl. 1.22.

1.7. Izračunati veličinu površine ograničene krivuljama $y=\sqrt{x^2-x^4}$, $y=x^3$ i $y=-x^3$.

Rješenje.

Funkcija $y=\sqrt{x^2-x^4}$ je definisana na $[-1,1]$. $y=0$ za $x=-1$, $x=0$ i $x=1$. Zbog *simetrije* dovoljno je posmatrati presjek krivih $f_2(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ i $f_1(x)=x^3$ (sl. 1.22). Iz $f_1(x)=f_2(x)$ slijedi $x_1=0$ i $x_2=\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}$, pa imamo

$$P=2\int_{0}^{x_2}(\sqrt{x^2-x^4}-x^3)\,dx=\left|\begin{matrix}1-x^2=t^2\\ x\,dx=-t\,dt\end{matrix}\right|=-\frac{x^4}{2}\Big|_0^{x_2}-2\int_{1}^{\sqrt{1-x_2^2}}t^2\,dt=$$

$$=-\frac{1}{8}(\sqrt5-1)^2-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^{\frac32}-1\right]=\frac{2}{3}-\frac{3-\sqrt5}{4}-$$

$$-\frac{1}{3\sqrt2}(3-\sqrt5)^{\frac32}.$$

1.8. Izračunati veličinu površine ograničene krivuljama $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$ i $y=\arccos x$ i pravama koje su paralelne sa y osom a prolaze kroz krajnje tačke krive $y=\arccos x$.

Rješenje.

Funkcija $f_1(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$ je definisana na R, $f_1(x)=0$ za $x=2$,

$y_{\min}=y(-1)=-\sqrt3$,

prevojne tačke su $\left(1,-\frac{\sqrt3}{3}\right)$ i $\left(-2,-\frac{2}{3}\sqrt6\right)$.

Grafik funkcije f_1 ima *asimptote paralelne osi* Ox: $y=-1$ $(x\to-\infty)$ i $y=1$ $(x\to+\infty)$. Funkcija $f_2(x)=\arccos x$ je definisana na $[-1,1]$, $f_2(x)=0$ za $x=1$, $f_2(0)=\frac{\pi}{2}$. Krajnje tačke grafika (sl. 1.23) su: $(-1,\pi)$ i $(1,0)$. Otuda imamo

$$P=\int_{-1}^{1}\left(\arccos x-\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx.$$

Kako je

$$\int\arccos x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\arccos x & dv=dx\\ du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v=x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C_1,$$

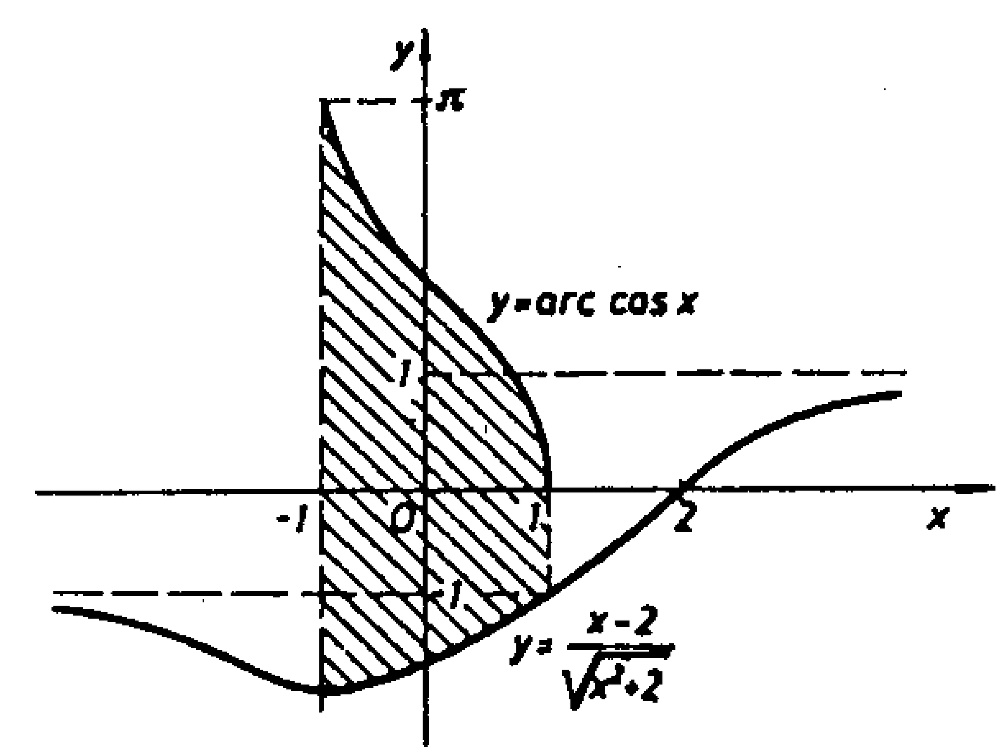
$$\int\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx-2\ln(x+\sqrt{x^2+2})=\sqrt{x^2+2}-$$

$$-2\ln(x+\sqrt{x^2+2})+C_2,$$

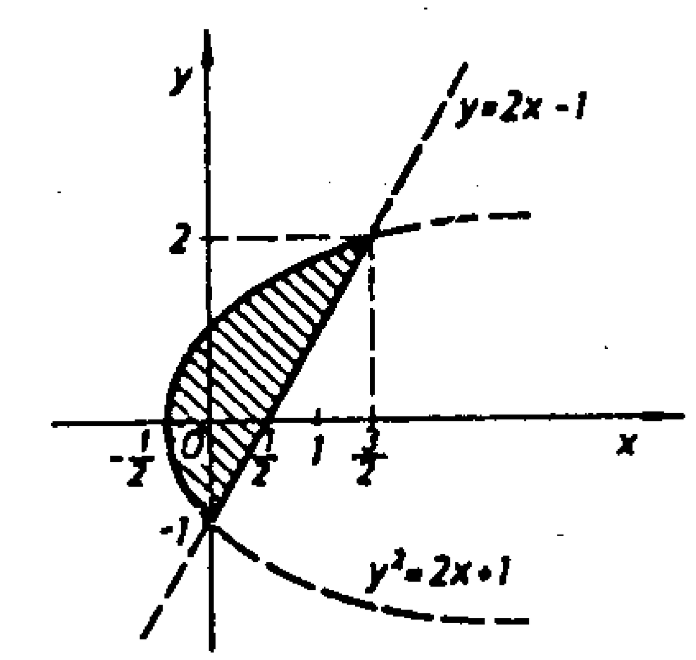
to imamo

$$P=[x\arccos x-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2+2}+2\ln(x+\sqrt{x^2+2})]_{-1}^{1}=\pi+$$

$$+2\ln(2+\sqrt3).$$



Sl. 1.23.



Sl. 1.24.

1.9. Naći veličinu površine ograničene linijama $y^2=2x+1$, $y=2x-1$.

Rješenje.

U ovom slučaju (sl. 1.24) je zgodnije vršiti *integraciju duž y ose*, pa je

$$P=\int_{-1}^{2}[x_2(y)-x_1(y)]\,dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}(y+1)-\frac{y^2-1}{2}\right]dy=\frac{9}{4}.$$

1.10. Naći veličinu površine ograničene krivim $y=(x+1)^2$, $x=\sin\pi y$, $y=0$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$.

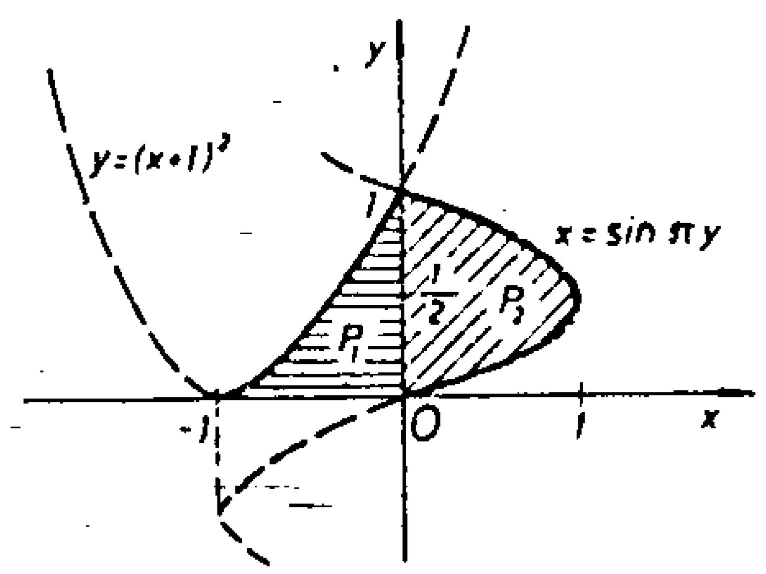
Rješenje.

Kriva $y=(x+1)^2$ ja *parabola* sa tjemenom $T(-1,0)$, dok je $x=\sin\pi y$ *sinusoida* (uz y osu) (sl. 1.25). Imamo

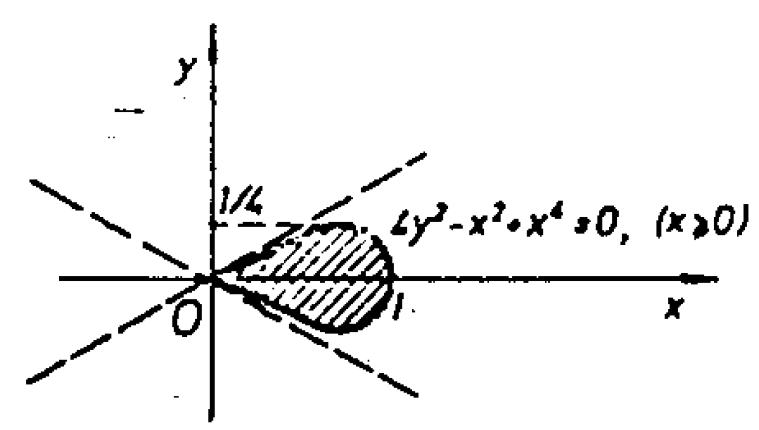
$$P_1=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx=\frac{(x+1)^3}{3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3},\quad P_2=\int_{0}^{1}x\,dy=\int_{0}^{1}\sin\pi y\,dy=\frac{2}{\pi},$$

pa je

$$P=P_1+P_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}.$$



Sl. 1.25.



Sl. 1.26.

1.11. Izračunati površinu lika ograničenog krivom linijom $4y^2-x^2+x^4=0$, $(x\geqslant 0)$.

Rješenje.

Funkcije

$$y_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-x^4}$$

su definisane za

$$x^2(1-x^2)\geqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1,$$

ali, zbog uslova zadatka $(x\geqslant 0)$, posmatramo ih samo na $[0,1]$. Imamo

$$y'_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\,\frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{x^2-x^4}}=0$$

za

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y''_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\,\frac{x^4(2x^2-3)}{(x^2-x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y''_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$$

pa je

$$y_{\max}=y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4},\quad y'(1)=\infty$$

(prava $x=1$ je tangenta krive u tački $(1,0)$),

$$(y'_{1,2}(0))_+=\lim_{x\to 0+}\frac{y_{1,2}(x)-y_{1,2}(0)}{x-0}=\pm\frac{1}{2}.$$

Dakle, zbog simetrije figure, slijedi (sl. 1.26):

$$P=2\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\sqrt{x^2-x^4}\,dx=\left|\begin{matrix}1-x^2=t^2\\ x\,dx=-t\,dt\end{matrix}\right|=\int_{0}^{1}t^2\,dt=\frac{1}{3}.$$

1.12. Izračunati površinu lika ograničenog krivom C čija je jednačina $y^2=x^3(1-x)$.

Rješenje.

Data jednačina se može riješiti po y, pa imamo

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{x^3(1-x)}.$$

Funkcije su definisane za $x^3(1-x)\geqslant 0$, tj. za $0\leqslant x\leqslant 1$. Dalje je

$$y=0 \text{ za } x=0 \text{ ili } x=1,\quad y'_{1,2}=\pm\frac{3x^2-4x^3}{2\sqrt{x^3-x^4}}=0 \text{ za } x=\frac{3}{4},$$

$$y'_+(0)=0,\quad y'(1)=\infty.$$

Koristeći simetričnost figure (sl. 1.27), imamo:

$$P=2\int_{0}^{1}\sqrt{x^3(1-x)}\,dx=\left|\begin{matrix}x=\sin^2 t\\ dx=2\sin t\cos t\,dt\end{matrix}\right|=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=$$

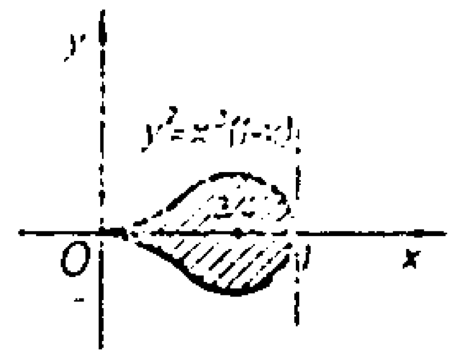
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)(1-\cos 2t)^2\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 2t)\cos 2t\,dt\right]=$$

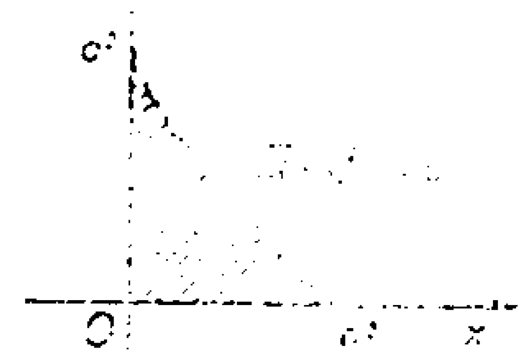
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4t}{4}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin 2t}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2t\,d(\sin 2t)}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

1.13. Izračunati površinu lika ograničenog krivom $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ $(a > 0)$ i koordinatnim osama.



Sl. 1.27.



Sl. 1.28.

Rješenje.

Riješimo jednačinu po y. Imamo $y = a^2 + x - 2a\sqrt{x}$. Funkcija je definisana za $x \geqslant 0$ i $a - \sqrt{x} \geqslant 0$ (jer mora biti $y \geqslant 0$), tj. za $0 \leqslant x \leqslant a^2$.

Otuda

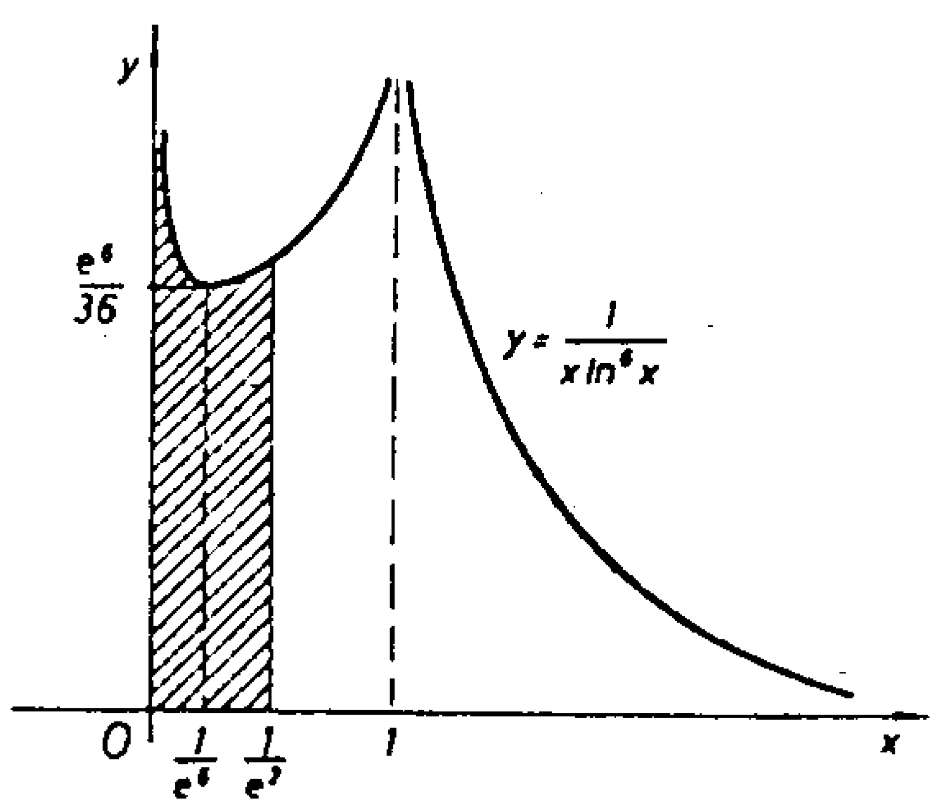
$$P = \int_0^{a^2} (a^2 + x - 2a\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \left[a^2 x + \frac{x^2}{2} - \frac{4a}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2} = \frac{a^4}{6} \text{ (sl. 1.28).}$$

1.14. Naći površinu lika ograničenog lukom krive $y = \dfrac{1}{x \ln^6 x}$ i pravama: $x = 0$, $x = e^{-2}$, $y = 0$.

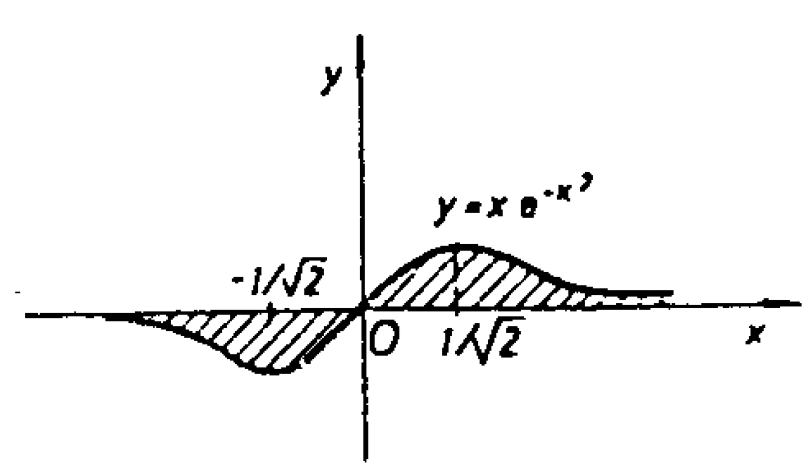
Rješenje.

Funkcija $y = \dfrac{1}{x \ln^6 x}$ je definisana na $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Dalje je:

$$\lim_{x \to 0+} y = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\ln^6 x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-1}{x}}{6 \ln^5 x} = \ldots = +\infty, \quad \lim_{x \to 1} y = +\infty$$



Sl. 1.29.



Sl. 1.30.

(pa su $x = 0$ i $x = 1$ *asimptote paralelne osi Oy*); $y' = -\dfrac{\ln x + 6}{x^2 \ln^7 x} = 0$ za $x = e^{-6}$, $y''(e^{-6}) > 0$ pa $y_{min} = y(e^{-6}) = \dfrac{e^6}{36}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$, tj. $y = 0$ je asimptota paralelna osi Ox (sl. 1.29). Sada imamo

$$P = \int_0^{e^{-2}} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^6 x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^{e^{-2}} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^6 x} = \begin{vmatrix} \ln x = t, \ \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t \\ a = \ln \varepsilon \to -\infty \ (\varepsilon \to 0_+) \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^{-2} \frac{\mathrm{d}t}{t^6} = \frac{1}{160}.$$

1.15. Izračunati površinu lika omeđenog krivom $y = xe^{-x^2}$ i njenom asimptotom.

Rješenje.

Funkcija je definisana na R, $y = 0$ za $x = 0$, $y' = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$ za $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y'' = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3) = 0$ za $x = \pm\sqrt{3/2}$ (apscise prevojnih tačaka), $y''\left(\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \lessgtr 0$ pa $y_{max} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y_{min} = y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0,$$

tj. $y = 0$ je asimptota (sl. 1.30).

Otuda imamo

$$P = -\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^{x^2}} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \lim_{a \to +\infty} \int_0^{a^2} \frac{\mathrm{d}t}{e^t} = -\lim_{a \to +\infty} [e^{-t}]_0^{a^2} = 1.$$

1.16. Izračunati površinu lika ograničenog krivom $y = e^{-x}|\sin x|$ $(x \geqslant 0)$ i njenom asimptotom.

Rješenje.

$$y = \begin{cases} e^{-x}\sin x & \text{za } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots) \\ -e^{-x}\sin x & \text{za } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots), \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} -e^{-x}(\sin x - \cos x) \\ e^{-x}(\sin x - \cos x) \end{cases}, \quad y' = 0 \text{ za } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$y''(x) = \begin{cases} -2e^{-x}\cos x \\ 2e^{-x}\cos x \end{cases}, \quad y''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) < 0 \Rightarrow y_{max} = y\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{|\sin x|}{e^x} = 0 \ \left(\text{jer } |\sin x| \leqslant 1, \ \frac{1}{e^x} \to 0\right), \text{ tj. } y = 0$$

je asimptota krive (paralelna osi Ox) (sl. 1.31).

Otuda imamo (razbijajući $[0, +\infty)$ na prebrojivo mnogo segmenata):

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_k + \ldots,$$

gdje je

$$P_1 = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx, \; P_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x \, dx, \; \ldots, \; P_k = (-1)^{k-1} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x} \sin x dx, \ldots$$

Kako je

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} e^{-x} = u, & dv = \sin x \, dx \\ du = -e^{-x} \, dx, & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -\cos x \, e^{-x} - \int e^{-x} \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-x}, & dv = \cos x \, dx \\ du = -e^{-x} \, dx, & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -e^{-x} (\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x \, dx,$$

tj.

$$I = -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) + C,$$

to imamo

$$P_1 = -\frac{e^{-\pi}}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi}),$$

$$P_2 = \frac{e^{-2\pi}}{2} - \frac{e^{-\pi}}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} (e^{-2\pi} + e^{-\pi}), \ldots,$$

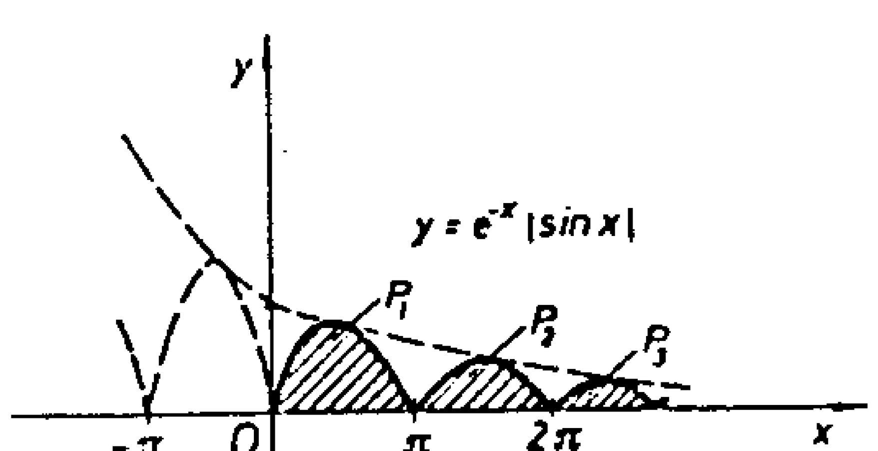
$$\ldots, P_k = (-1)^{k-1} \left[-\frac{e^{-k\pi}}{2} \cdot (-1)^k + \frac{e^{-(k-1)\pi}}{2} \cdot (-1)^{k-1} \right] = \frac{1}{2} (e^{-k\pi} + e^{-(k-1)\pi}), \ldots$$

odnosno $\left(\text{koristeći } a + aq + \ldots + aq^k + \ldots = \frac{a}{1-q}; \; |q| = e^{-\pi} < 1, \; a = e^{-\pi}\right)$:

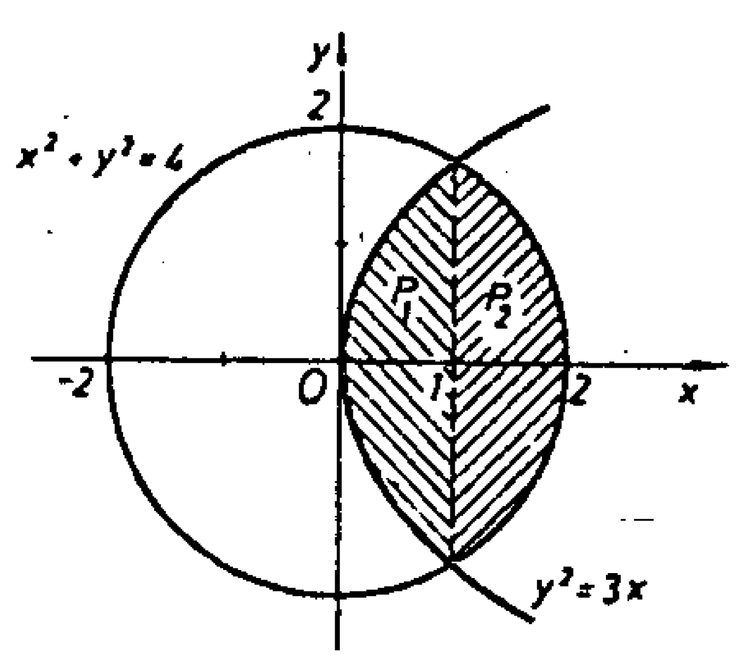
$$P = \frac{1}{2} [(1 + e^{-\pi}) + (e^{-2\pi} + e^{-\pi}) + \ldots + (e^{-k\pi} + e^{-(k-1)\pi}) + \ldots] =$$

$$= \frac{1 + e^{\pi}}{2} (e^{-\pi} + e^{-2\pi} + \ldots + e^{-k\pi} + \ldots) = \frac{1 + e^{\pi}}{2} \cdot \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \approx 0{,}546.$$



Sl. 1.31.



Sl. 1.32.

1.17. Parabola $y^2 = 3x$ dijeli *krug* $x^2 + y^2 \leq 4$ na dva dijela. Naći površinu manjeg dijela.

Rješenje.

Presječne tačke kružnice i parabole dobiju se rješavanjem sistema jednačina

$$y^2 = 3x, \; x^2 + y^2 = 4;$$

odakle je $x = 1$, $y = \pm\sqrt{3}$.

Koristeći simetriju date figure (sl. 1.32), imamo

$$P = P_1 + P_2 = 2 \int_0^1 \sqrt{3x} \, dx + 2 \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx.$$

Kako je

$$\int \sqrt{3x} \, dx = \sqrt{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + C,$$

$$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t \, dt \end{array} \right| = 4 \int \cos^2 t \, dt =$$

$$= 2 \int (1 + \cos 2t) \, dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = 2 (t + \sin t \cos t) + C =$$

$$= 2 \left(\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right) + C,$$

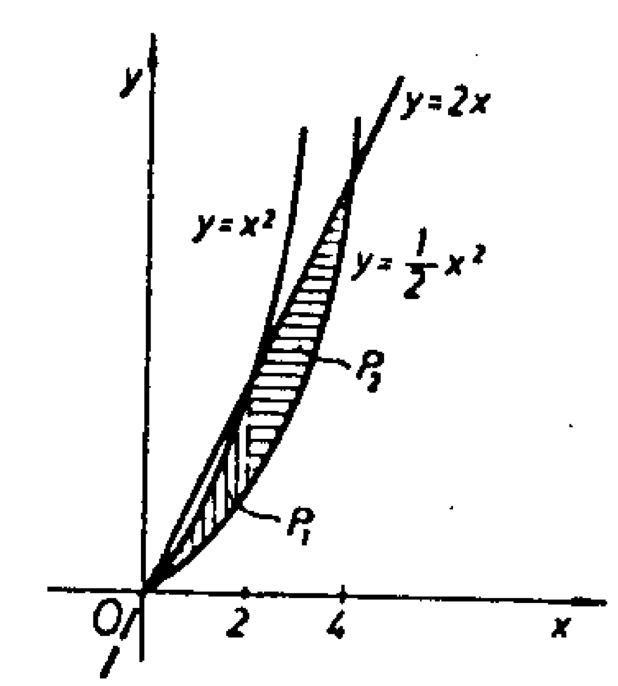
to imamo

$$P = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}.$$

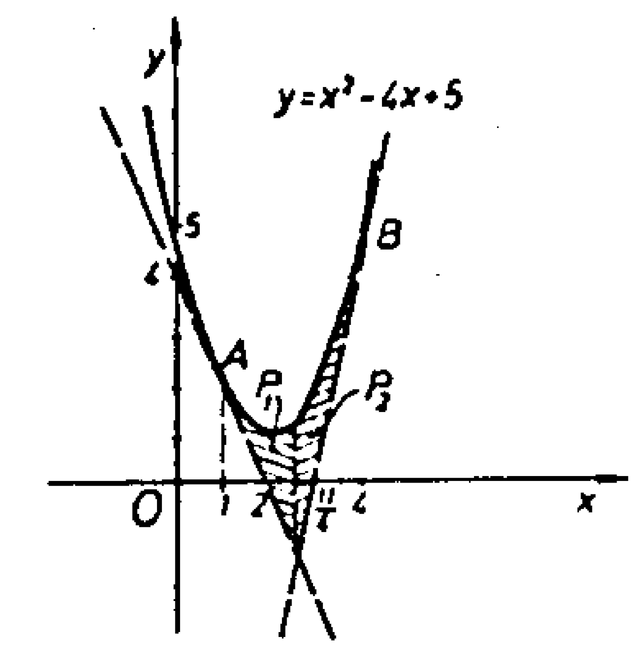
1.18. Naći površinu lika omeđenog parabolama $y = x^2$, $y = \frac{1}{2} x^2$ i pravom $y = 2x$.

Rješenje.

Prava $y = 2x$ siječe parabolu $y = x^2$ u tački $A(2, 4)$, a parabolu $y = \frac{1}{2} x^2$ u tački $B(4, 8)$ (sl. 1.33).



Sl. 1.33.



Sl. 1.34.

Dati lik podijelimo na dva dijela (P_1 i P_2), pa imamo

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \ldots = 4.$$

1.19. U presječnim tačkama prave $y = x + 1$ i parabole $y = x^2 - 4x + 5$ povučene su tangente na parabolu. Odrediti površinu lika ograničenog parabolom i tangentama.

Rješenje.

Prava $y = x + 1$ siječe parabolu $y = x^2 - 4x + 5$ u tačkama $A(1, 2)$ i $B(4, 5)$. Jednačine tangenata u A i B su:

$$t_A \ldots y - 2 = y'(1)(x - 1), \text{ tj. } y = -2x + 4,$$

$$t_B \ldots y - 5 = y'(4)(x - 4), \text{ tj. } y = 4x - 11.$$

Presjek tangenata je u tački $C\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ (sl. 1.34).

Imamo

$$P = P_1 + P_2 = \int_1^{5/2} [x^2 - 4x + 5 - (-2x + 4)]\, dx +$$

$$+ \int_{5/2}^4 [x^2 - 4x + 5 - (4x - 11)]\, dx = \frac{9}{4}.$$

1.20. Znajući da kriva $y = x^2 + bx + c$ dodiruje pravu $y = x$ za $x = 2$, odrediti površinu lika ograničenog datom krivom, pravom $y = x$ i x osom.

Rješenje.

Zamjenom $x = 2$ u $y = x$ dobije se dodirna tačka $D(2, 2)$. Kako je koeficijent date prave $k = 1$, to zbog uslova zadatka (da je data prava tangenta parabole) mora biti $y'(2) = 1$. Takođe mora biti $y(2) = 2$, pa imamo sistem jednačina $2b + c = -2$, $b = -3$, tj. data funkcija ima oblik $y = x^2 - 3x + 4$. Sada je

$$P = \int_0^2 (x^2 - 3x + 4 - x)\, dx = \ldots = \frac{8}{3}.$$

1.21. U tačkama presjeka prave $y = 0$ i parabole $y = x^2 - 4$ povučene su normale na parabolu. Naći površinu lika omeđenog parabolom i dobivenim normalama.

Rješenje.

$y = 0 \wedge y = x^2 - 4 \Rightarrow (x = -2 \vee x = 2)$, tj. presječne tačke su $N_1(-2, 0)$ i $N_2(2, 0)$. Jednačine normala su:

$$(n_1) \ldots y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \quad (n_2) \ldots y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Sada imamo (sl. 1.35) (zbog odgovarajuće simetrije):

$$P = 2\int_0^2 \left[-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - (x^2 - 4)\right] dx = \ldots = \frac{35}{3}.$$

1.22. Znajući da kriva $y = \dfrac{ax^2 + 3x + b}{x^2 + 5x + c}$ siječe x-osu u tački $\left(0, \frac{3}{7}\right)$ i ima ekstrem u tački $(-3, 3)$, odrediti površinu lika ograničenog datom krivom, x-osom i ordinatama tačaka ekstremuma date krive.

Rješenje.

Zamjenom $x = 0, y = \frac{3}{7}$ u jednačinu date krive dobivamo $\frac{b}{c} = \frac{3}{7}$. Takođe, zamjenom $x = -3$, $y = 3$ imamo $9a + b - 3c = -9$.

Iz

$$y' = \frac{(5a - 3)x^2 + (2ac - 2b)x + (3c - 5b)}{(x^2 + 5x + c)^2}$$

slijedi $y'(-3) = 0$ za $45a - 6ac + b + 3c - 27 = 0$.
Rješavajući sistem od dobivene tri jednačine (sa tri nepoznate), dobivamo $a = 1$, $b = 3$, $c = 7$.

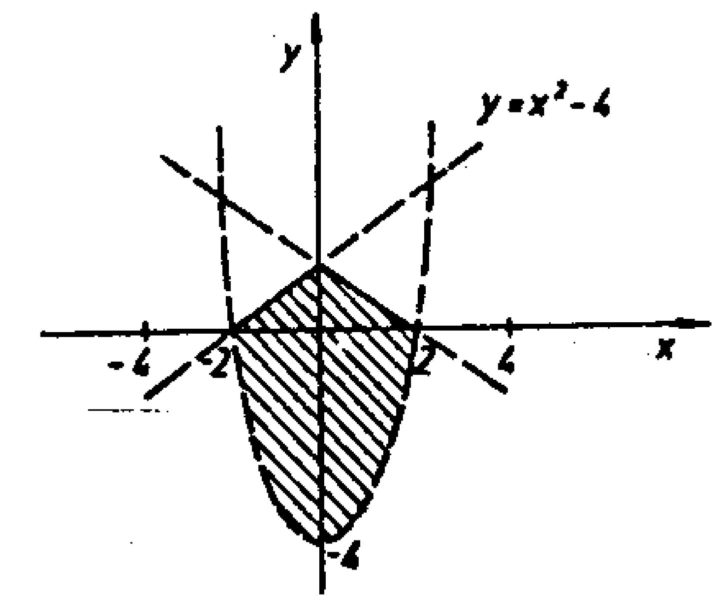
Dobivena funkcija $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 5x + 7}$ je definisana na R (jer je uvijek $x^2 + 5x + 7 > 0$ zbog $D = 25 - 28 < 0$) i uvijek je $y > 0$. Asimptota paralelna osi Ox:

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 5x + 7} = 1.$$

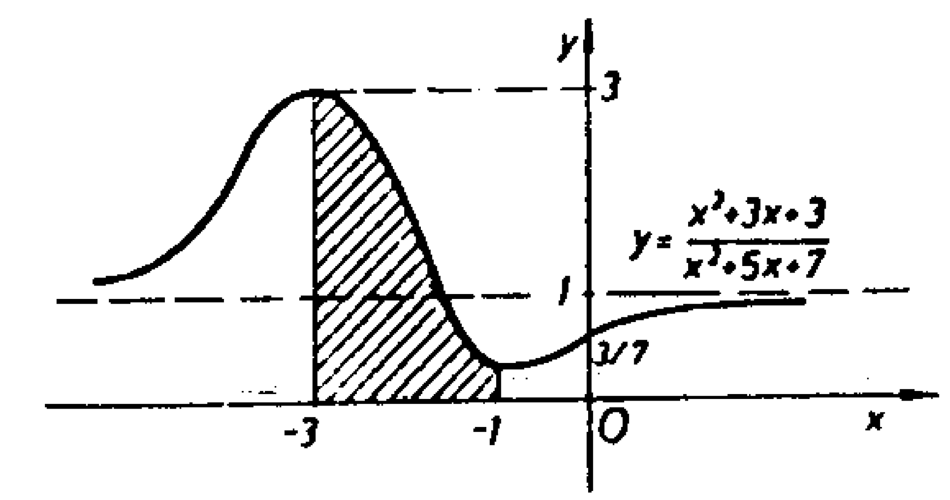
$$y' = \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x^2 + 5x + 7)^2} = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \vee x = -1);$$

$$y'' = -4\frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 1}{(x^2 + 5x + 7)^3}, \quad y''(-1) > 0 \Rightarrow y_{min} = y(-1) = \frac{1}{3},$$

$y''(-3) < 0$, pa je $y_{max} = y(-3) = 3$, (sl. 1.36).



Sl. 1.35.



Sl. 1.36.

$$P = \int_{-3}^{-1} \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 5x + 7} dx = \int_{-3}^{-1} \left(1 - \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 7} + \frac{1}{x^2 + 5x + 7}\right) dx =$$

$$= \left| x + \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t \right| = \ldots = 2 - \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

1.23. Izračunati površinu lika ograničenog krivom $y=[\arcsin(e^x-2)]/e^x$ i koordinatnim osama.

Rješenje.

Funkcija je definisana za $-1 < e^x - 2 < 1$, tj. za $0 < x < \ln 3$, $y = 0$ za $e^x - 2 = 0$, tj. za $x = \ln 2$, $y(0) = -\frac{\pi}{2}$. Sada imamo (sl. 1.37):

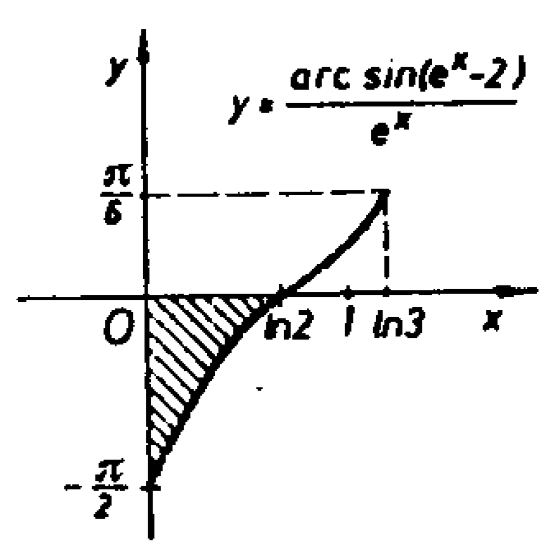
$$P = -\int_0^{\ln 2} \frac{\arcsin(e^x-2)}{e^x}\,dx = \left| e^x - 2 = t,\ dx = \frac{dt}{2+t}\right| = \int_0^{-1}\frac{\arcsin t}{(2+t)^2}\,dt =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u=\arcsin t,\quad du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ dv = \frac{dt}{(2+t)^2},\quad v = -\frac{1}{2+t}\end{array}\right| = -\frac{1}{2+t}\arcsin t \Big|_0^{-1} +$$

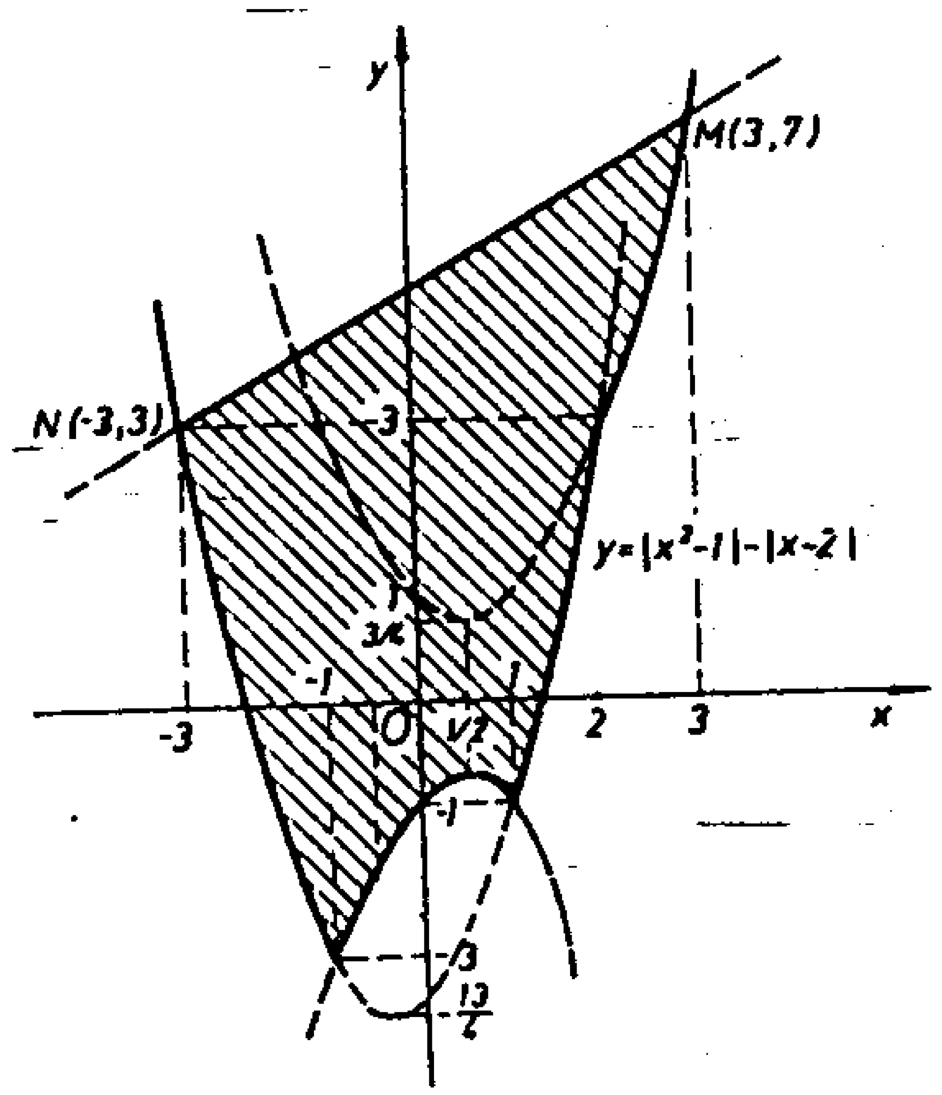
$$+ \int_0^{-1} \frac{dt}{(2+t)\sqrt{1-t^2}} = \left|2+t=\frac1z,\ dt = -\frac{1}{z^2}\,dz\right| = \frac{\pi}{2} -$$

$$- \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{-3z^2+4z-1}} = \left|\begin{array}{l}3\left(z-\frac23\right)=t\\ dz=\frac13\, dt\end{array}\right| = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt3}{3}\int_{-1/2}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt3}{3}\arcsin t\Big|_{-1/2}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi\sqrt3}{9}.$$



Sl. 1.37.



Sl. 1.38.

1.24. Naći veličinu površine koju određuju luk krive $y = |x^2-1| - |x-2|$ i ona njena *sječica* koja je siječe u tački $M(3,y)$ a paralelna je pravoj $2x - 3y + a = 0$.

Rješenje.

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 1$	$1 \quad 2$	$2 \quad +\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	$-(x^2-1)$	x^2-1	x^2-1
$\lvert x-2\rvert$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$y = \lvert x^2-1\rvert - \lvert x-2\rvert$	x^2+x-3	$-x^2+x-1$	x^2+x-3	x^2-x+1
	y_1	y_2	y_3	y_4

1°. $y_{1,3} = 0$ za $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, $(x_1 \approx 1,2;\ x_2\approx -2,2)$;

$$(x_T, y_T) = \left(-\frac12, -\frac{13}{4}\right).$$

2°. $y_2 < 0$ (jer $D = 1-4<0$ i $a = -1 < 0$); $(x_T,y_T) = \left(\frac12, -\frac34\right)$.

3°. $y_4 > 0$, $(\forall x \in R)$; $(x_T,y_T) = \left(\frac12, \frac34\right)$.

$x = 3 \Rightarrow y = |9-1| - |3-2| = 7$, tj. $M(3,7)$.

Kako je sekanta paralelna pravoj $2x-3y+a=0$, to je koeficijent smjera $K_s = \frac23$, pa je jednačina sekante (kroz tačku $M(3,7)$):

$$y - 7 = \frac23(x-3), \text{ tj. } y = \frac23 x + 5.$$

Presjek krive i sekante:

$$\left(y = \frac23x+5 \wedge y = |x^2-1| - |x-2|\right) \Rightarrow M(3,7) \wedge N(-3,3).$$

Sada imamo (dijeleći figuru na odgovarajuće dijelove, sl. 1.38):

$$P = \int_{-3}^{-1}\left[\frac23x+5-(x^2+x-3)\right]dx + \int_{-1}^{1}\left[\frac23x+5-(-x^2+x-1)\right]dx +$$

$$+\int_1^2 \left[\frac23x+5-(x^2+x-3)\right]dx +$$

$$+\int_2^3\left[\frac23x+5-(x^2-x+1)\right]dx = \ldots = \frac{85}{3}.$$

1.25. Izračunati površinu lika ograničenog krivim čije su jednačine u polarnim koordinatama:

a) $\rho = 3 + 2\cos\varphi$;

b) $\varrho = 3 + 2\cos\varphi$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, odnosno $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$;

c) $\varrho = 2$ (*kružnica*), odnosno $\varrho = 3\cos\varphi$;

d) $\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi$;

e) $\varrho = a\sin 3\varphi$;

f) $\varrho = 2\operatorname{tg}\varphi$, odnosno $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$;

g) $\varrho = \dfrac{1}{\varphi}$, odnosno $\varrho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$, $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$;

h) $\varphi = \varrho - \sin\varrho$ odnosno $\varphi = \pi$.

Rješenje.

a) Dovoljno je uzeti $\varphi \in [0, 2\pi]$ (mada je funkcija definisana za sve vrijednosti φ);

$$\varrho' = -2\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots);$$

$$\varrho'' = -2\cos\varphi,\ \varrho''(0) < 0,\ \varrho''(2\pi) < 0,\ \varrho''(\pi) = 2 > 0,$$

tj. funkcija ima

$$\varrho_{max} = \varrho(0) = \varrho(2\pi) = 5,\ \varrho_{min} = \varrho(\pi) = 1 \text{ (sl. 1.39).}$$

Dakle, imamo

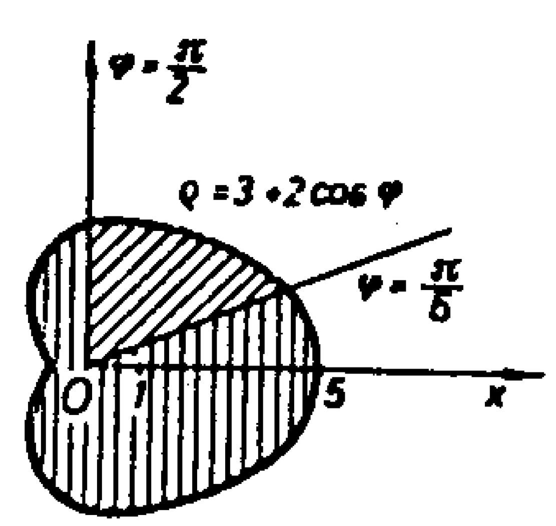
$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (9 + 12\cos\varphi + 4\cos^2\varphi)\, d\varphi = \ldots = 11\pi.$$

b) $$P = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \varrho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (9 + 12\cos\varphi + 4\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

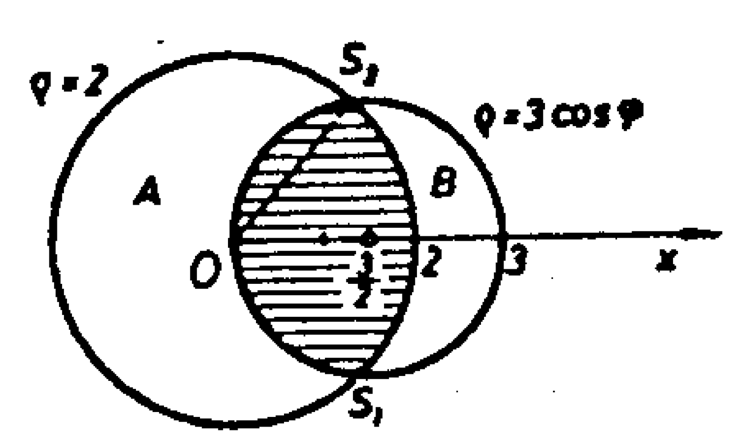
$$= \frac{1}{2}\left[9\varphi + 12\sin\varphi + 2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{11\pi}{6} + 3 - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

c) Jednačina $\varrho_1 = 2$ predstavlja jednačinu kružnice sa centrom u ishodištu, dok je $\varrho_2 = 3\cos\varphi$ jednačina kružnice sa centrom u $(\varrho, \varphi) = \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ (sl. 1.40).

Moguća su tri slučaja. Ako označimo krugove sa A, odnosno B, može se tražiti površina svakog od tri lika $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Nađimo površinu lika $A \cap B$.



Sl. 1.39.



Sl. 1.40.

Presječne tačke kružnica se dobiju rješavanjem sistema $\varrho = 2$, $\varrho = 3\cos\varphi$, tj. $2 = 3\cos\varphi$, odakle je $\varphi = \operatorname{Arc\,cos}\dfrac{2}{3}$, pa su presječne tačke $S_1\left(2, -\arccos\dfrac{2}{3} + 2k\pi\right)$ i $S_2\left(2, \arccos\dfrac{2}{3} + 2k\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Zbog simetrije figure, slijedi

$$P = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\int_0^{\arccos\frac{2}{3}} \varrho_1^2\, d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\pi/2} \varrho_2^2\, d\varphi\right) = \int_0^{\arccos\frac{2}{3}} 4\, d\varphi +$$

$$+ \int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\pi/2} 9\cos^2\varphi\, d\varphi = \ldots = \frac{9\pi}{4} - \sqrt{5} - \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}.$$

Neka čitalac odredi površine dijelova $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

d) Iz $\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi\ (a > 0)$ slijedi $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (tzv. *lemniskata*). Funkcija je definisana za $\cos 2\varphi > 0$, tj.

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < \varphi < \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

No, dovoljno je posmatrati funkciju na

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

$$\varrho_{min} = \varrho\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \varrho\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \varrho\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0,\ \varrho_{max} = \varrho(0) = \varrho(\pi) = a \text{ (sl. 1.41).}$$

Koristeći simetriju imamo

$$P = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \varrho^2\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2\left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/4} = a^2.$$

e) Funkcija $\varrho = a\sin 3\varphi$ je definisana za $\sin 3\varphi > 0$, tj. za

$$0 + 2k\pi < 3\varphi < \pi + 2k\pi,$$

odnosno za

$$\frac{2k\pi}{3} < \varphi < \frac{2k+1}{3}\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

No, dovoljno je posmatrati funkciju na segmentima (za $k = 0, 1, 2$):

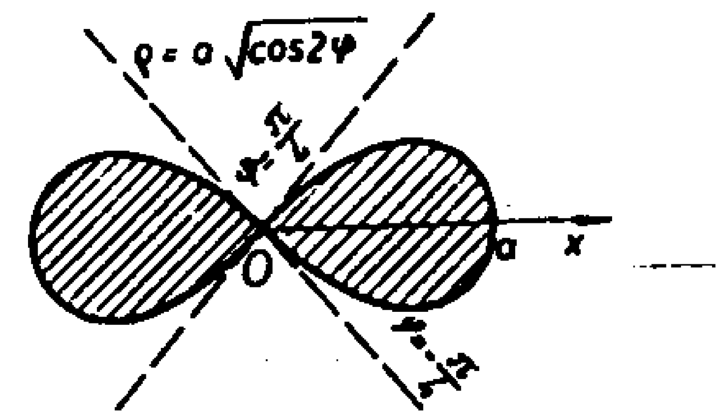
$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right],\ \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \text{ i } \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right].$$

$$\varrho_{min} = 0,\ \varrho_{max} = \varrho\left(\frac{\pi}{6}\right) = \varrho\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \varrho\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a.$$

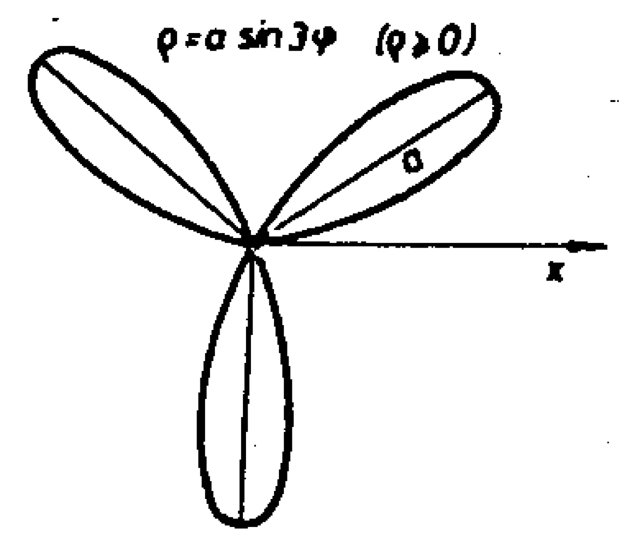
Zbog simetrije krive (tzv. *trolisna ruža*, sl. 1.42) imamo

$$P=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\varrho^2\,d\varphi=\frac{3}{2}\,a^2\int_0^{\pi/3}\sin^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{3a^2}{4}\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{3a^2}{4}\left[\varphi-\frac{\sin 6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{a^2}{4}\pi.$$



Sl. 1.41



Sl. 1.42.

f) Funkcija $\varrho=2\operatorname{tg}\varphi$ je definisana za $\operatorname{tg}\varphi>0$, tj. za $0+k\pi<\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$, ali je dovoljno posmatrati na intervalima $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ i $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (sl. 1.43). $\varrho_{\min}=\varrho(0)=\varrho(\pi)=0$. Kriva ima *asimptotu* $\varrho\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=2$.

Imamo

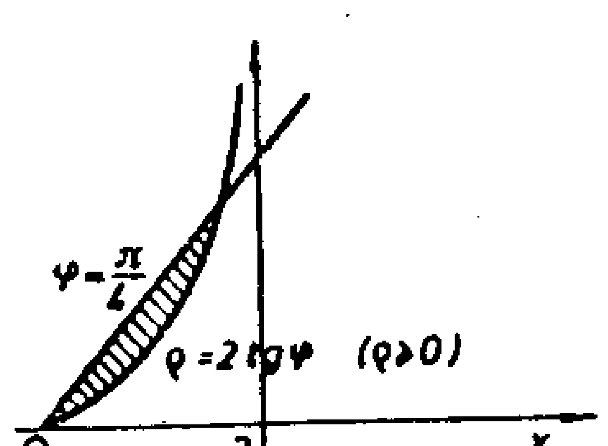
$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\varrho^2\,d\varphi=2\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi=2\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)d\varphi=2-\frac{\pi}{2}.$$

g) Grafik funkcije $\varrho_2=\frac{1}{\sin\varphi}$ je prava (sl. 1.44), dok je grafik funkcije $\varrho_1=\frac{1}{\varphi}$ *hiperbolna zavojnica* čija je asimptota $\varrho\sin\varphi=1$ (upravo data prava u zadatku). Obje funkcije su definisane na datom intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, pa imamo

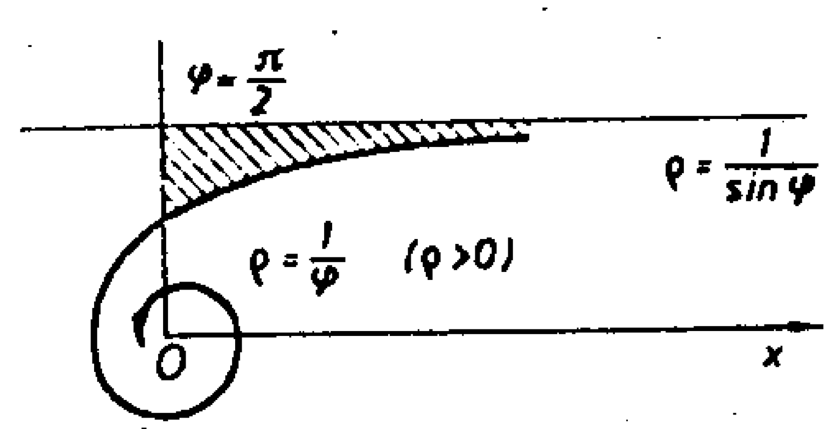
$$P=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\varepsilon^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[-\operatorname{ctg}\varphi+\frac{1}{\varphi}\right]_\varepsilon^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\frac{2}{\pi}+\operatorname{ctg}\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{\varepsilon\cos\varepsilon-\sin\varepsilon}{\varepsilon\sin\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{-\varepsilon\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon+\varepsilon\cos\varepsilon}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{-\sin\varepsilon}{\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}+\cos\varepsilon}=\frac{1}{\pi}.$$



Sl. 1.43.



Sl. 1.44.

h) Presjek krive $\varphi=\varrho-\sin\varrho$ sa polupravom $\varphi=\pi$ dobije se rješavanjem sistema jednačina: $\varphi=\varrho-\sin\varrho$, $\varphi=\pi$, odakle je, (očigledno) $\varrho=\pi$. Kako je $\varphi'(\varrho)=1-\cos\varrho>0$ za svako ϱ, to je $\varphi(\varrho)$ rastuća funkcija, a kako je još i neprekidna, to vrijedi (prema(12))

$$P=\frac{1}{2}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\varrho^2\varphi'(\varrho)\,d\varrho=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\varrho^2-\varrho^2\cos\varrho)\,d\varrho.$$

Dalje, iz

$$\int\varrho^2\cos\varrho\,d\varrho=\left|\begin{array}{l}\varrho^2=u,\ du=2\varrho\,d\varrho\\ dv=\cos\varrho\,d\varrho,\ v=\sin\varrho\end{array}\right|=$$

$$=\varrho^2\sin\varrho-2\int\varrho\sin\varrho\,d\varrho=|u=\varrho,dv=-\sin\varrho\,d\varrho|=\varrho^2\sin\varrho+$$

$$+2(\varrho\cos\varrho-\sin\varrho)+C$$

slijedi

$$P=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{3}+2\pi\right)=\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right).$$

1.26. Data je kriva (*Arhimedova spirala*) $\varrho=a\varphi$ $(a>0)$. Izračunati površinu lika ograničenog:

a) *prvim zavojem* date krive i polarnom osom;

b) n-tim i $(n+1)$-im zavojem date krive $(n\in N)$ i polarnom osom.

Rješenje.

Funkcija je definisana za $\varphi\geqslant 0$; $\varrho=0$ za $\varphi=0$ (sl. 1.45).

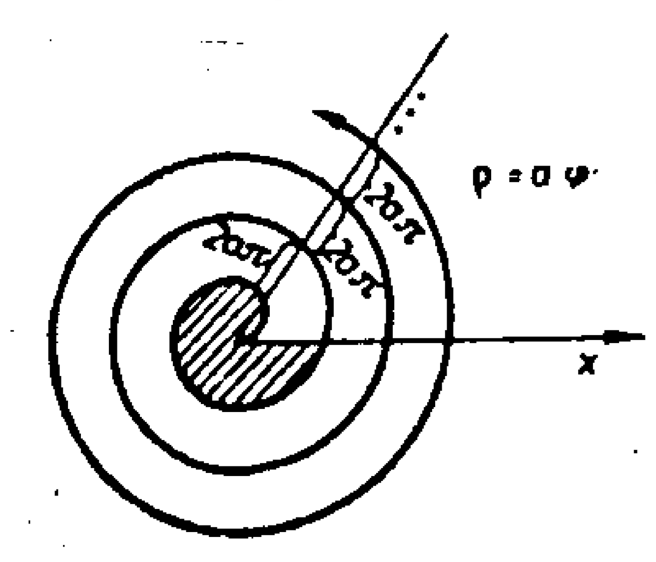
a) $P=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\varphi^2\,d\varphi=\ldots=4a^2\frac{\pi^3}{3}.$

b) Jednačina n-tog zavoja je $\varrho_1=(n-1)2a\pi+a\varphi$, a $(n+1)$-og:

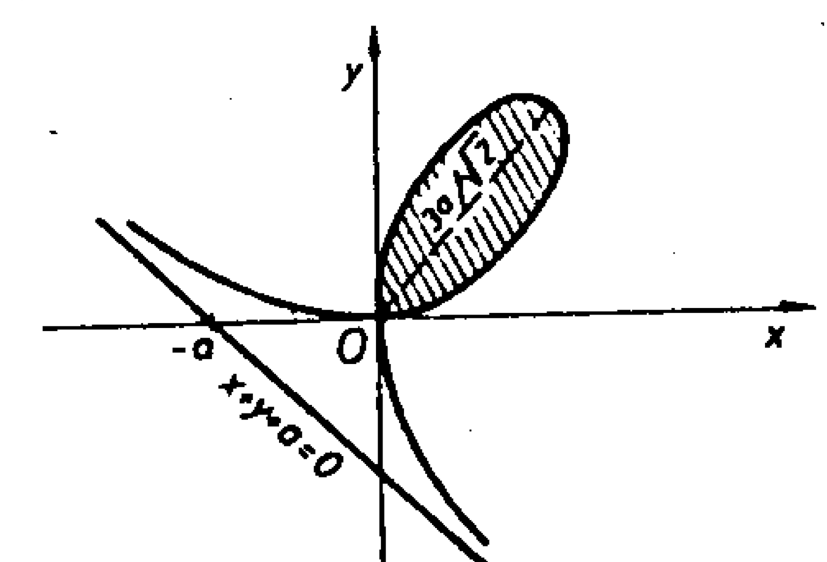
$\varrho_2=n\cdot 2a\pi+a\varphi\qquad(n=1,2,3,\ldots).$

(*To slijedi iz osobine date krive!*)
Sada je (prema 10)):

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\varrho_2^2-\varrho_1^2]\,d\varphi=2a^2\pi\int_0^{2\pi}[(2n-1)\pi+\varphi]\,d\varphi=8na^2\pi^3.$$



Sl. 1.45.



Sl. 1.46.

1.27. Izračunati površinu ograničenu petljom *Descartesovog lista* $x^3 + y^3 = 3axy$.

Rješenje.

Prelaskom na polarne koordinate (sl. 1.46) data jednačina postaje

$$\varrho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi},$$

pa imamo

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2\, d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = -\frac{3a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\mathrm{tg}^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

1.28. Izračunati površinu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Rješenje.

Stavljajući $x = a\cos t$ data jednačina se transformiše na (tzv. *parametarske jednačine*):

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Sada imamo (prema (14)]:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot y - y\dot x)\, dt = \ldots = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = ab\,\pi.$$

1.29. Naći površinu lika ograničenog krivom, zadanom u parametarskom obliku:

a) $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$;

b) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$.

Rješenje.

a) Nacrtajmo grafik funkcije $x(t) = 2t - t^2$ (sl. 1.47). Sa grafika vidimo da x varira u intervalu $(-\infty, 1]$ i da svakom x iz ovog intervala odgvaraju dvije vrijednosti za t, pa će odgovarati i dvije vrijednosti za y. Dakle, parametarske jednačine definišu dvije funkcije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ na $(-\infty, 1]$ i to: jednoj odgovara svako $t \in (-\infty, 1]$ a drugoj svako $t \in [1, +\infty)$. Ispitajmo svaku od ovih funkcija posebno. Imamo: $y_1 = 0$ za $t = 0$, $y_2 = 0$ za $t = 2$.

Kako je

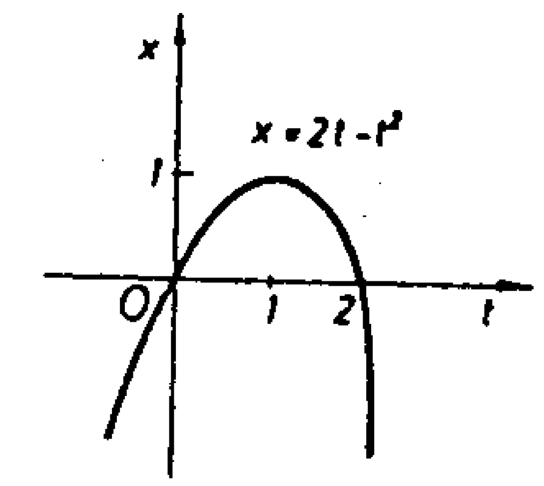
$$y'_x = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{4t - 3t^2}{2 - 2t} = 0 \text{ za } t_1 = 0 \text{ ili } t_2 = \frac{4}{3},\ \left(x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{9}\right),$$

$$y''_x = \frac{\ddot y\dot x - \dot y\ddot x}{\dot x^3} = \ldots = \frac{3t^2 - 6t + 4}{4(1-t)^3},\ y''_x(0) > 0,\ y''_x\left(\frac{4}{3}\right) < 0, \text{ to je}$$

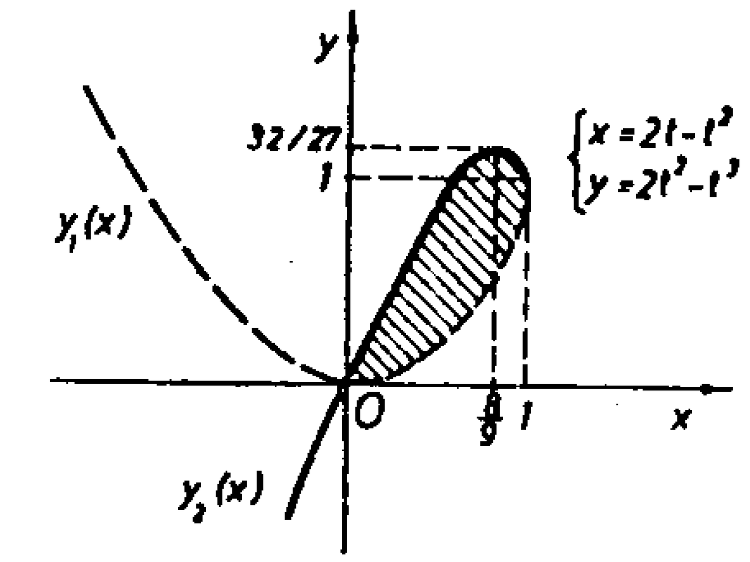
$$(y_1)_{\max} = y(0) = 0,\ (y_2)_{\min} = y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{27}.$$

Sa grafika (sl. 1.48) vidimo da

$$P = \frac{1}{2}\int_0^2 (x\dot y - y\dot x)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (4t^2 + t^4 - 4t^3)\, dt = \left[2\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5}\right]_0^2 = \frac{8}{15}.$$



Sl. 1.47.



Sl. 1.48.

b) $P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot y - y\dot x)\, dt = 3\int_0^{2\pi} (1 - \cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t)\, dt =$

$$= 3\int_0^{2\pi} [1 - \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2\sin^2 t\cos t]\, dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\, dt = 3[t - \sin t]_0^{2\pi} = 6\pi.$$

1.30. Naći površinu lika ograničenog krivom $x = 1 + \frac{1}{t^3}$, $y = \frac{t^3}{2t^3 + 1}$ i njenim asimptotama.

Rješenje.

Asimptota paralelna osi Ox (*horizontalna*) je $y = 0$ ($x \to +\infty$, $t \to 0$), dok je asimptota paralelna osi Oy (*vertikalna*) $x = 1$ ($y \to \pm\infty$, $t \to \pm\infty$). Zbog simetrije (sl. 1.49) imamo

$$P = 2\int_1^{+\infty} y\, dx = 2\int_{+\infty}^0 \frac{t^3}{2t^3+1}\frac{-2}{t^3}\, dt = 4\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2t^2+1} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{2}\,t\Big|_0^{+\infty} = \pi\sqrt{2}.$$

1.31. Izračunati površinu oblasti $D = \{(x, y) : x^4 + y^4 \leqslant ax^2y, a > 0\}$.

Rješenje.

Napišimo jednačinu $x^4 + y^4 - ax^2y = 0$ u parametarskom obliku. Stavljajući $y = tx$, imamo

$$x^3[x(1 + t^4) - at] = 0,$$

tj.

$$x = \frac{at}{1+t^4},\ y = \frac{at^2}{1+t^4}.$$

Funkcija $y = y(x)$ je dvoznačna i parna funkcija. $y = 0$ za $x = 0$ ($t = 0$ ili $t \to \pm\infty$). Grafik funkcije $y(x)$ omeđuje dvije simetrične figure u odnosu na y osu (naći ostale neophodne elemente, pa skicirati grafik!), pa imamo

$$P_D = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x\dot{y} - y\dot{x})\,dt = a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^2}\,dt.$$

Kako je

$$\int\frac{t^2}{(1+t^4)^2}\,dt = \left|\begin{matrix} t = u, & \dfrac{t}{(1+t^4)^2}\,dt = dv, \quad v = \dfrac{1}{4}\left(\text{arc tg}\, t^2 + \dfrac{t^2}{1+t^4}\right) \\ dt = du, & \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\,t\,\text{arc tg}\, t^2 + \frac{1}{4}\,\frac{t^3}{1+t^4} - \frac{1}{4}\left(\int\text{arc tg}\, t^2\,dt + \int\frac{t^2}{1+t^4}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{t^3}{1+t^4} + \frac{1}{4}\int\frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \left|\begin{matrix}\dfrac{t^2}{1+t^4} = \dfrac{At+B}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} + \dfrac{-At-B}{t^2-\sqrt{2}\,t+1} \\ A = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ B = 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{1+t^4} + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,dt +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\,dt\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{1+t^4} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} +\right.$$

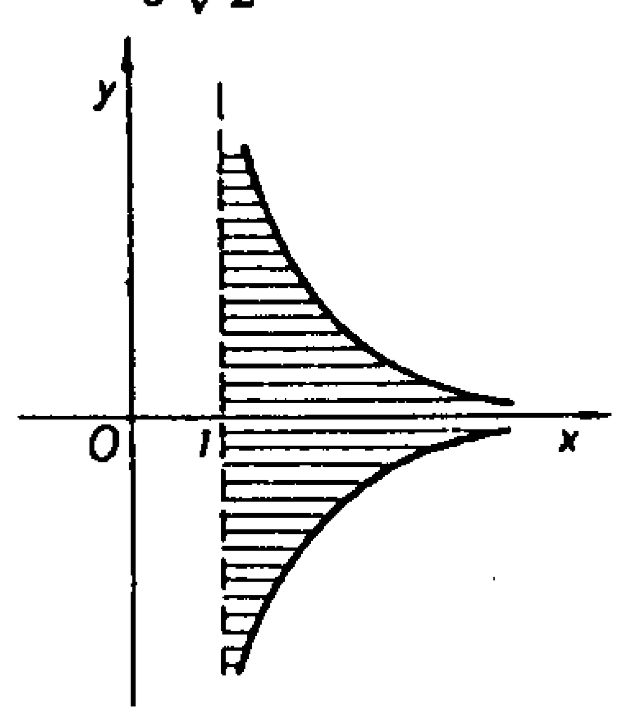
$$\left. + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{1+t^4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,(t\sqrt{2}+1) +\right.$$

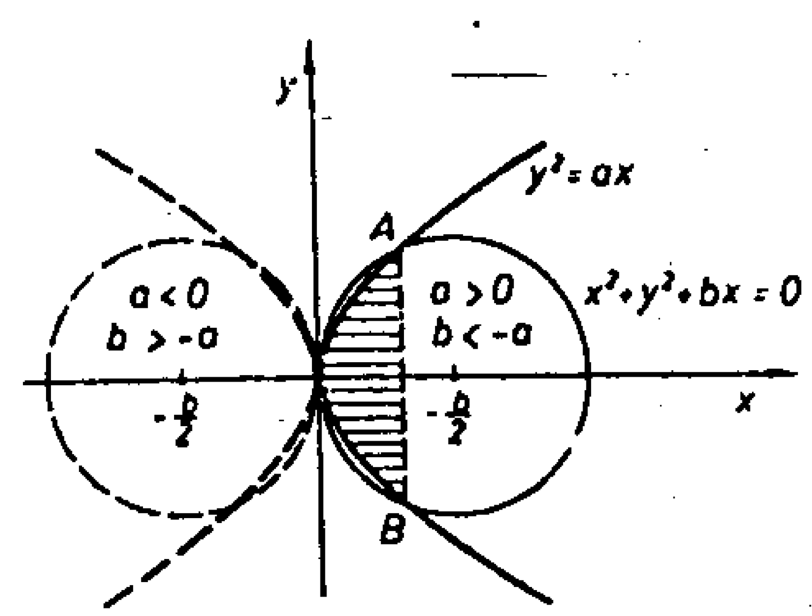
$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,(t\sqrt{2}-1)\right] + C,$$

to imamo

$$P_D = \frac{a^2}{8\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}.$$



Sl. 1.49.



Sl. 1.50.

1.32. Odredite parametar a tako da površina lika ograničenog parabolom $y^2 = ax$ i tetivom AB, gdje su A i B presječne tačke parabole i kružnice $x^2 + y^2 + bx = 0$, bude maksimalna.

Rješenje.

Da bi se data parabola sjekla sa datom kružnicom u dvije tačke (različite), neophodno je da vrijedi $a > 0$, $b < -a$ ili $a < 0$, $b > -a$. Pretpostavićemo da je $a > 0$ i $b < -a$ (sl. 1.50). Presječne tačke se dobiju rješavanjem sistema $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 + bx = 0$, odakle se dobije $A(-a-b, \sqrt{a(-a-b)})$, $B(-a-b, -\sqrt{a(-a-b)})$ i $O(0, 0)$. Otuda

$$P(a) = 2\int_0^{-a-b} y\,dx = 2\sqrt{a}\int_0^{-a-b}\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{a}\sqrt{-(a+b)^3},$$

$$\frac{dP(a)}{da} = \frac{2}{3\sqrt{a}}\sqrt{-a-b}\,(-b-4a) = 0 \text{ za } a = -\frac{b}{4},$$

$\dfrac{d^2P(a)}{da^2}\left(-\dfrac{b}{4}\right) < 0$, tj. površina datog lika je maksimalna za $a = -\dfrac{b}{4}$.

Za $a < 0$, $b > -a$ se dobije $P(a) = \dfrac{4}{3}\sqrt{-a}\sqrt{(a+b)^3}$, $P_{\max} = P\left(-\dfrac{b}{4}\right)$.

(Provjerite!)

1.33. Izračunati površinu lika ograničenog krivim linijama:

a) $y = \dfrac{x^2+1}{(x+2)^2}$, $y = 1$, $x = 0$;

b) $y = \ln x$, $x = \dfrac{1}{e}$, $x = e$;

c) $y^2 = x(x-1)^2$;

d) $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$, $x = a\ (>0)$;

e) $(y-x)^2 = x^3$, $y = 0$;

f) $y = |\log(x+1)|$, $x = -0{,}9$, $x = 9$, $y = 0$;

g) $x = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} - \sqrt{1-y^2}$, $y = 0$;

h) $|y| = \dfrac{x^{n/2}}{1+x^{n+2}}$, $(x > 0,\ n+2 > 0)$;

i) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$;

j) $x = \cos t$, $y = \dfrac{\sin^2 t}{2 + \sin t}$;

k) $\varrho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ *(parabola)*, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$;

l) $\varrho^2 + \varphi^2 = 1$;

m) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$;

n) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Rezultat.

a) $2 \cdot \ln\dfrac{64}{25} - \dfrac{3}{2}$; b) $2 - \dfrac{2}{e}$; c) $\dfrac{8}{15}$; d) $\dfrac{3a^2}{4}\pi$; e) $\dfrac{1}{10}$;

f) $9{,}9 - 8{,}1 \cdot \log e$; g) $\dfrac{\pi}{2}$; h) $\dfrac{2\pi}{n+2}$; i) $3\pi a^2$; j) $\pi\left(\dfrac{16}{\sqrt{3}} - 9\right)$;

k) $\dfrac{p^2}{6}(3 + 4\sqrt{2})$; l) $\dfrac{2}{3}$; m) $\pi\sqrt{2}$; n) $\dfrac{3}{8}\pi$.

1.34. Odrediti parametre a, b, c i d tako da *hiperbola* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ prolazi kroz ishodište, ima za asimptotu pravu $x = 2$ i sa pravom $x + y + 1 = 0$ ograničava lik površine $P = 4\sqrt{2} + 2 \cdot \ln(3 - \sqrt{2})$.

Rezultat.

$a = c = 1$, $b = 0$, $d = -2$.

1.35. Odrediti parametar λ tako da kriva $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x^2+1}{x^2+\lambda}$ ima prevojnu tačku sa apscisom $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Zatim odrediti površinu lika ograničenog tom krivom i pravama $y = 0$, $x = 1$.

Rezultat.

$\lambda = -1$, $P = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2} - 1)$. (*Uputstvo:* Prvo provjeriti da vrijedi $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = -\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} x^2$ za $-1 < x < 1$. Vidi zad. 1.31.)

2. Izračunavanje dužine luka krive linije u ravni (rektifikacija krive)

Neka je dat luk C jednačinama: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, gdje su x i y neprekidne funkcije od t u $[t_0, T]$ i pri čemu je *korespondencija* između tačaka luka C i odgovarajućih vrijednosti parametra $t \in [t_0, T]$ *obostrano jednoznačna.*

Ako su $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ integrabilne funkcije na $[t_0, T]$, onda je **dužina luka** C (sl. 2.1) data obrascem

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \tag{1}$$

Ako je *luk C gladak*, tj. ako su $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ neprekidne funkcije (i $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$), onda je

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \text{ ili } ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2}$$

Napomenimo da je *brzina tačke* koja prelazi put s upravo data sa

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Neka je luk C dat jednačinom $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, gdje je $f'(x)$ integrabilna funkcija na $[a, b]$. Tada je dužina luka C data sa

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx. \tag{3}$$

(Ako je, pak, luk C dat sa $x = g(y)$, $(c \leqslant y \leqslant d)$, onda je

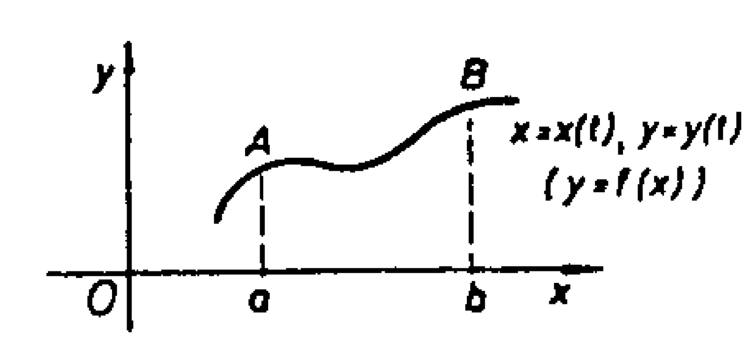
$$s = \int_c^d \sqrt{[x'(y)]^2 + 1}\, dy.)$$

Neka je luk C dat jednačinom $\varrho = \varrho(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, pri čemu je $\varrho'(\varphi)$ integrabilna funkcija na $[\alpha, \beta]$. Tada je dužina luka C data sa (ϱ i φ polarne koordinate)

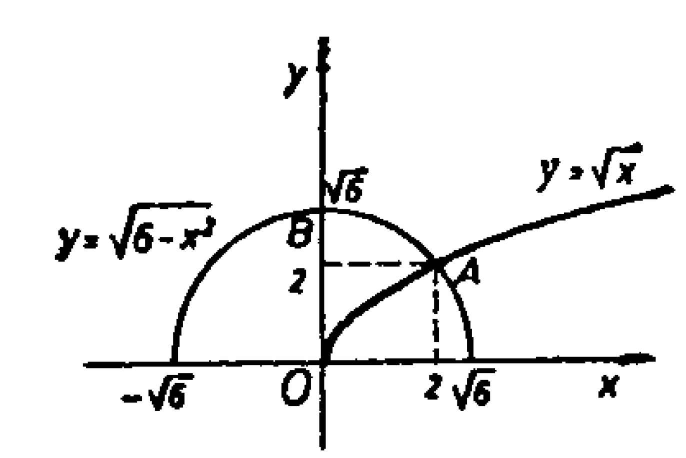
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\varphi. \tag{4}$$

Ako je luk C dat sa $\varphi = \varphi(\varrho)$ $(\varrho_1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_2)$, $\varphi'(\varrho)$ integrabilna na segmentu $[\varrho_1, \varrho_2]$, onda je dužina luka C data sa

$$s = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sqrt{1 + \varrho^2[\varphi'(\varrho)]^2}\, d\varrho. \tag{5}$$



Sl. 2.1.



Sl. 2.2.

Zadaci (2.1—2.21)

2.1. Izračunati dužinu luka krive $y = x^{3/2}$ od njene tačke A apscise 0 do njene tačke B apscise 1.

Rješenje.

Funkcija $y = x^{\frac{3}{2}}$ je definisana za $x \geq 0$ i ima izvod $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ koji je integrabilan na $[0, 1]$, pa imamo (prema (3))

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{9} + x}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 \left(\frac{4}{9} + x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{4}{9} + x\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 = \left(\frac{4}{9} + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{27} (\sqrt{13^3} - 8).$$

2.2. Odrediti *obim* kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$.

Rješenje.

$y_{1,2} = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, ali, zbog simetrije, posmatraćemo samo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ za $0 < x < r$. Kako je $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, to imamo

$$s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \arcsin \frac{x}{r} \Bigg|_0^r = \frac{r\pi}{2},$$

pa je obim $O = 4s = 2r\pi$.

2.3. Neka je kriva C data jednačinom $f(x) = \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Naći dužinu krive C od njene tačke A apscise 1 do njene tačke B apscise 2.

Rješenje.

Provjerimo da li je f diferencijabilna na $[1, 2]$. Zaista,

$$f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x (e^x + 1) - (e^x - 1) e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

postoji za svako $x \neq 0$. Osim toga, $f'(x)$ je neprekidna funkcija na $[1, 2]$, pa je i integrabilna, te imamo

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = t,\ 2x = \ln t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{t} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^4} \frac{t + 1}{t(t - 1)}\, dt = \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^4} \frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^4} \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t}\right) dt = \ln \frac{e^2 + 1}{e}.$$

2.4. Naći *opseg* lika omeđenog krivim, datim u *pravouglom Descartes-ovom koordinatnom sistemu* jednačinama

$$y = \sqrt{6 - x^2},\ y = \sqrt{x},\ x = 0.$$

Rješenje.

Sa slike 2.2. vidimo da je opseg krivolinijskog trougla OAB dat sa

$$O = s(\widehat{OA}) + s(\widehat{AB}) + s(\overline{BO}),$$

gdje je

$$s(\overline{BO}) = \sqrt{6},\ s(\widehat{OA}) = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{[x'(y)]^2 + 1}\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy,$$

$$s(\widehat{AB}) = \int_0^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{6 - x^2}}\, dx = \sqrt{6} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}}.$$

Kako je

$$I_1 = \int \sqrt{4y^2 + 1}\, dy = \int \frac{4y^2 + 1}{\sqrt{4y^2 + 1}}\, dy = \frac{1}{2} \ln (2y + \sqrt{4y^2 + 1}) +$$

$$+ 4 \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{4y^2 + 1}} = \left| \begin{array}{ll} u = y, & dv = \frac{4y\, dy}{\sqrt{4y^2 + 1}},\ v = \sqrt{4y^2 + 1} \\ du = dy, & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (2y + \sqrt{4y^2 + 1}) + y \sqrt{4y^2 + 1} - \int \sqrt{4y^2 + 1}\, dy,$$

tj.

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln (2y + \sqrt{4y^2 + 1}) + y \sqrt{4y^2 + 1}\right] + C_1,$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{6 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2}} = \left| \frac{x}{\sqrt{6}} = t \right| = \arcsin \frac{x}{\sqrt{6}} + C_2,$$

to imamo

$$s(\widehat{OA}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln (2\sqrt{2} + 3) + 3\sqrt{2}\right],\ s(\widehat{AB}) = \sqrt{6} \arcsin \frac{2}{\sqrt{6}},$$

odnosno

$$O = \frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{2\sqrt{2} + 3} + 3\sqrt{2}\right) + \sqrt{6} \left(1 + \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

2.5. Odrediti dužinu luka krive $y = a \ln \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}$, $(a > 0)$, od njene tačke $A(0, y)$ do njene tačke $B\left(\dfrac{a}{2}, y\right)$.

Rješenje.

Kako je $y' = \frac{2ax}{a^2 - x^2}$ integrabilna funkcija na $\left[0, \frac{a}{2}\right]$,

to imamo

$$s = \int_0^{a/2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^{a/2} \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{a/2} \frac{2a^2 - (a^2 - x^2)}{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2a^2 \int_0^{a/2} \frac{dx}{a^2 - x^2} - \int_0^{a/2} dx = -\frac{a}{2} + 2 \int_0^{a/2} \frac{dx}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\frac{a}{2} +$$

$$+ a \ln \left. \frac{1 + \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{a}} \right|_0^{a/2} = a\left(\ln 3 - \frac{1}{2}\right).$$

2.6. Odrediti dužinu luka krive $|y - \arcsin x| = \sqrt{1 - x^2}$.

Rješenje.

Funkcije $y_{1,2} = y_{1,2}(x) = \arcsin x \pm \sqrt{1 - x^2}$ su definisane na $[-1, 1]$.

$$y'_{1,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 \mp x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

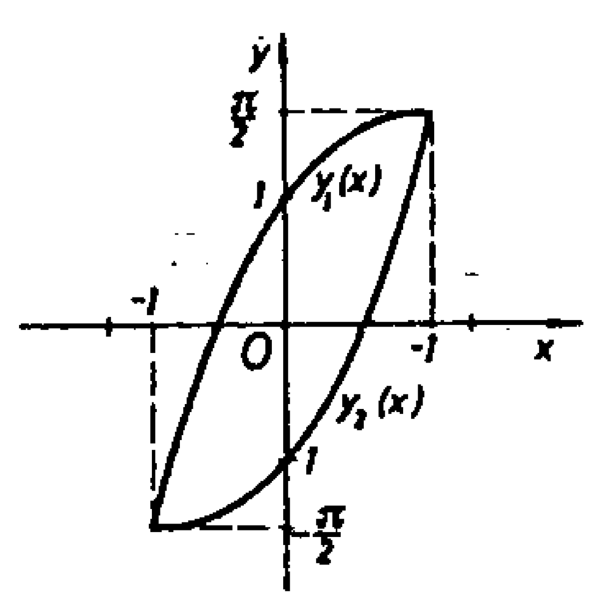
pa imamo

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y_1'^2}\,dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y_2'^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{1 + x}}\,dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{1 - x}}\,dx =$$

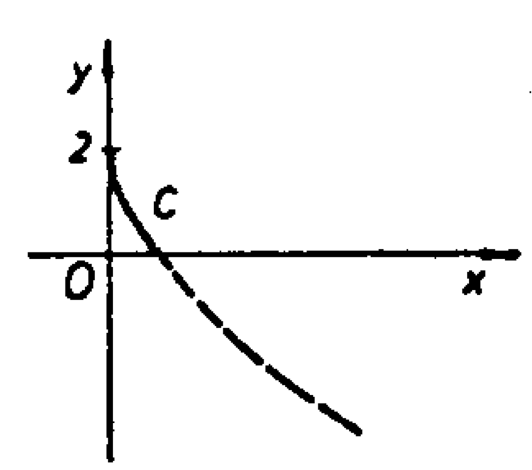
$$= \sqrt{2} \int_{-1}^{1} [(1 + x)^{-1/2} + (1 - x)^{-1/2}]\,dx = 2\sqrt{2}\,[(1 + x)^{1/2} - (1 - x)^{1/2}]\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 8.$$

Napomenimo da je grafik funkcije $y_1(x)$ simetričan grafiku funkcije $y_2(x)$ u odnosu na pravu $y = \frac{\pi}{2}\,x$ (*simetrala lika*, sl. 2.3), pa se moglo računati $s = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y_1'^2}\,dx$.



Sl. 2.3.



Sl. 2.4.

2.7. Odrediti dužinu luka

$$C = \left\{(x, y) : \left(x = \frac{t^6}{6}\right) \wedge \left(y = 2 - \frac{t^4}{4}\right) \wedge \left(0 \leqslant t \leqslant \sqrt[4]{8}\right)\right\}.$$

Rješenje.

Funkcija $y = y(x)$ je definisana za $x > 0$. $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{1}{t^2} < 0$, tj. $y(x)$ stalno opada i $y'(x) \to -\infty$ $(x \to 0)$. $y = 0$ za $t = \sqrt[4]{8}$, $y(0) = 2$ (sl. 2.4). No, izvodi $\dot{x} = t^5$ i $\dot{y} = -t^3$ su neprekidni na $[0, \sqrt[4]{8}]$ pa su tu i integrabilni, te imamo

$$s = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3 \sqrt{t^4 + 1}\,dt = |t^4 + 1 = u^2, 4t^3\,dt = 2u\,du| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 u^2\,du = \frac{1}{6} u^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{6}(27 - 1) = \frac{13}{3}.$$

2.8. Dokazati da je dužina luka elipse $x = a \sin t$, $y = b \cos t$ jednaka dužini jednog *talasa sinusoide* $y = \sqrt{a^2 - b^2} \sin \frac{x}{b}$, $(a > b > 0)$.

Dokaz.

Dužina luka date elipse je

$$s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 t}\,dt,$$

a dužina jednog talasa date sinusoide (*perioda* $T = 2\pi b$):

$$s_2 = \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \frac{x}{b}}\,dx = \left|\frac{x}{b} = t\right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 t}\,dt, \text{ tj. } s_1 = s_2.$$

Napomenimo da su dobiveni integrali *eliptički* i da se ne mogu *elementarno* izračunati (u *konačnom obliku*).

2.9. Odrediti krive čiji luk od njihove tačke $A(0, y)$ do njihove tačke $B(x, y)$ ima dužinu $s = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, $(a > 0, x \geqslant 0)$.

Rješenje.

$$s = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} = \int_0^x \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = \int_0^x \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \frac{x}{a}}\,dx \Rightarrow y' = \pm\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} \Rightarrow y =$$

$$= \pm\,a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} + C,$$

gdje je C proizvoljna (*realna*) konstanta. Dakle, tražene krive predstavljaju *familiju* tzv. *lančanica*.

2.10. Izračunati dužinu luka (*kružne evolvente*) krive

$$x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

od $x = a$ do $x = \frac{a}{2}\pi \quad (a > 0)$.

Rješenje.

$$s = \int_{a}^{\frac{a\pi}{2}} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = a\int_0^{\pi/2} t\,dt = \frac{a\pi^2}{8}.$$

2.11. *Rektificirati* parabolu

$$y^2 = 2px.$$

Rješenje.

$$x = \frac{y^2}{2p},\quad dx = \frac{y\,dy}{p}$$

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + (x'_y)^2}\,dy = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2}\,dy = p\int_0^{\mathrm{Arsh}\frac{y}{p}} \mathrm{ch}^2 t\,dt =$$

$$= \frac{p}{2}\left[\mathrm{sh}t\cdot\mathrm{ch}t + t\right]_0^{\mathrm{Arsh}\frac{y}{p}} = \frac{p}{2}\left[\frac{y}{p}\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2} + \mathrm{Arsh}\frac{y}{p}\right] =$$

$$= \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2}\,\mathrm{Arsh}\frac{y}{p}.$$

2.12. Na prvom luku *cikloide* nađite tačku koja ga dijeli u omjeru 1: 5.

Rješenje.

Jednačine cikloide u parametarskom obliku glase: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$s_1 : s_2 = 1 : 5 \Rightarrow s_2 = 5s_1,$$

$$s_2 = 5\cdot s_1 = 5\int_0^{t_0} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt =$$

$$= 5\int_0^{t_0} \sqrt{4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = 10a\int_0^{t_0} \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 20a\int_0^{t_0/2} \sin x\,dx =$$

$$= -20a\left[\cos x\right]_0^{t_0/2} = 20a\left(1 - \cos\frac{t_0}{2}\right).$$

S druge strane,

$$s_2 = \int_{t_0}^{2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 2a\int_{t_0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -4a\left(\cos\pi - \cos\frac{t_0}{2}\right) = 4a\left(1 + \cos\frac{t_0}{2}\right)$$

Prema tome imamo:

$$20a\left(1 - \cos\frac{t_0}{2}\right) = 4a\left(1 + \cos\frac{t_0}{2}\right),$$

$$6\cos\frac{t_0}{2} = 4,$$

$$\cos\frac{t_0}{2} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{t_0}{2} = \arccos\frac{2}{3}$$

$$t_0 = 2\arccos\frac{2}{3}.$$

2.13. Izračunati dužinu *kardioide*

$$r = 2a(1 + \cos\varphi).$$

Rješenje.

$$r' = -2a\sin\varphi,$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 + 8a^2\cos\varphi + 4a^2\cos^2\varphi + 4a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\varphi}\,d\varphi = 2a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 8a\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx =$$

$$= 8a\left(\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\right) =$$

$$= 8a\left\{\left[\sin x\right]_0^{\pi/2} - \left[\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = 8a\{1 - (0 - 1)\} = 16a.$$

2.14. Izračunati dužinu luka krivih linija:

a) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\ (1\leqslant y\leqslant e)$;

b) $y=\ln\cos x,\quad \left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t$;

d) $r=\frac{1}{\varphi},\ \left(\frac{3}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{4}{3}\right)$;

e) $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\ (1\leqslant r\leqslant 3)$.

f) $r=a\sin^5\frac{\varphi}{5}\qquad(a>0)$,

gdje su r i φ polarne koordinate.

Rješenje.

a) $$s=\int_1^e\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^e\sqrt{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_1^e\left(y+\frac{1}{y}\right)dy=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2+\ln y\right]_1^e=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

b) $$s=\int_0^a\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}\,dx=\int_0^a\frac{dx}{\cos x}=\int_0^a\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=$$

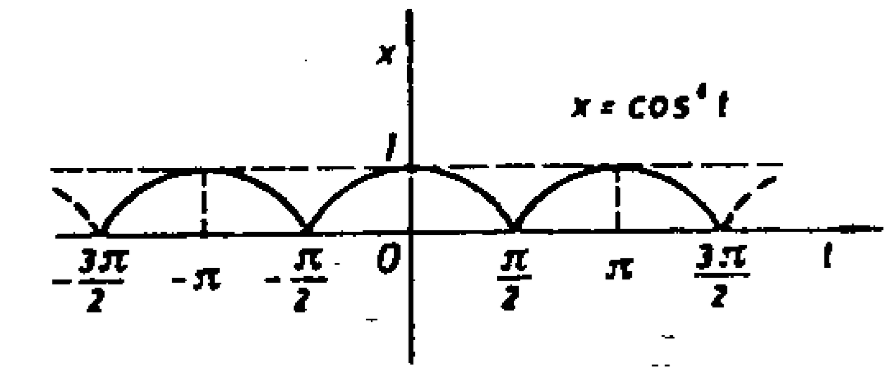
$$=\left|\frac{\pi}{2}+x=t\right|=\int_{\pi/2}^{\pi/2+a}\frac{dt}{\sin t}=\int_{\pi/2}^{\pi/2+a}\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\int_{\pi/2}^{\pi/2+a}\frac{1/\cos^2\frac{t}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi/2+a}\frac{d\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}=\left[\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|\right]_{\pi/2}^{\pi/2+a}=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right).$$

c) Funkcije $x(t)=\cos^4 t$ i $y(t)=\sin^4 t$ su definisane za svako realno t. No, funkcija $y(x)$ je definisana za $0\leqslant x\leqslant 1$ (jer $0\leqslant\cos^4 t\leqslant 1$ za svako $t\in R$). Sa grafika funk-

cije $x(t)=\cos^4 t$ (sl. 2.5) vidimo da x poprima sve vrijednosti iz $[0,1]$ dok t prođe kroz *skup* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Takođe vrijedi tablica *toka* funkcija $x(t)$ i $y(t)$:

t	...	$0\nearrow\pi/2$	$\nearrow\pi$	...
x	...	$1\searrow 0$	$\nearrow 1$	...
y	...	$0\nearrow 1$	$\searrow 0$	...



Sl. 2.5.

Dakle, dovoljno je uzeti $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, pa imamo (jer su $\dot{x}$ i $\dot{y}$ neprekidne)

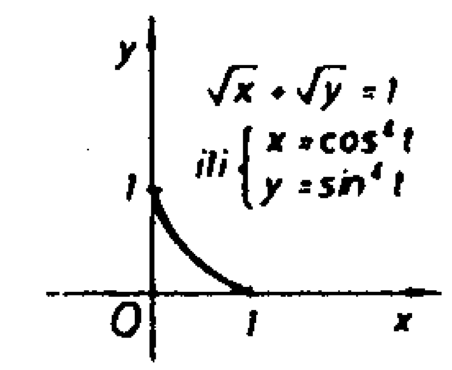
$$s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^6 t\sin^2 t+\sin^6 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{\sin^4 t+\cos^4 t}\,dt=|\sin^2 t=u|=2\int_0^1\sqrt{(1-u)^2+u^2}\,du=$$

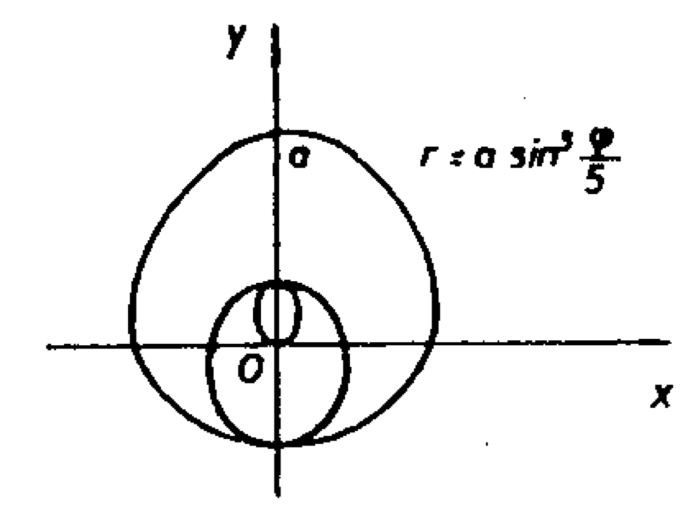
$$=2\int_0^1\sqrt{1-2u+2u^2}\,du=2\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,du=\left|u-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}z\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^1\sqrt{z^2+1}\,dz=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1+z^2}\,dz=\ldots=1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

Primijetimo da je $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (sl. 2.6).



Sl. 2.6.



Sl. 2.7.

d) Kako je $r'=-\frac{1}{\varphi^2}$ neprekidna funkcija na $\left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$, to je ona tu i integrabilna, pa vrijedi

$$s=\int_{3/4}^{4/3}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\int_{3/4}^{4/3}\left(\sqrt{1+\varphi^2}/\varphi^2\right)d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\varphi=\mathrm{sh}\,t,\ d\varphi=\mathrm{ch}\,t\,dt\\ t=\mathrm{Arsh}\,\varphi=\ln(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\end{array}\right|=$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}(\mathrm{cth}\,t)^2\,dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 t}+1\right)dt=[-\mathrm{cth}\,t+t]_{\ln 2}^{\ln 3}=$$

$$=\left[-\frac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}{\mathrm{sh}\,t}+t\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=\left(-\frac{\sqrt{1+(4/3)^2}}{4/3}+\frac{\sqrt{1+(3/4)^2}}{3/4}+\ln 3-\ln 2\right)=$$

$$=\left(-\frac{5}{4}+\frac{5}{3}+\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}.$$

e) Funkcija $\varphi' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$ je neprekidna na [1,3], pa je tu i integrabilna, te vrijedi/prema obrascu(5)/:

$$s = \int_1^3 \sqrt{1 + r^2 \cdot [\varphi'(r)]^2}\, dr = \int_1^3 \sqrt{1 + r^2 \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2}\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{r^2 + 2 + \frac{1}{r^2}}\, dr = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2}\, dr = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(r + \frac{1}{r}\right) dr =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{r^2}{2} + \ln r\right]_1^3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 3.$$

f) Funkcija $r = a\sin^5\frac{\varphi}{5}$ je definisana (*jer se uzima* $r > 0$) za $0 + 2k\pi < \frac{\varphi}{5} < \pi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, tj. za $10k\pi < \varphi < 5\pi + 10k\pi$. No, dovoljno je uzeti $0 < \varphi < 5\pi$, jer je čitava kriva opisana tačkom (r, φ) kada se φ mijenja od 0 do 5π:

φ	$0 \nearrow \pi/2$	$\nearrow \pi$	$\nearrow 3\pi/2$	$\nearrow 2\pi$	$\nearrow 5\pi/2$	$\nearrow 3\pi$	$\ldots$	$\nearrow 5\pi$
r	$0 \nearrow a\sin^5\frac{\pi}{10}$	$\nearrow a\sin^5\frac{\pi}{5}$	$\nearrow a\sin^5\frac{3\pi}{10}$	$\nearrow a\sin^5\frac{2\pi}{5}$	$\nearrow a$	$\searrow a\sin^5\frac{2\pi}{5}$	$\ldots$	$\searrow 0$

$\left(\text{Iskoristili smo: } \sin\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5}.\right)$ Sada nije teško skicirati grafik date krive (sl. 2.7).

Dakle, imamo $\left(\text{jer } r' = a\sin^4\frac{\varphi}{5}\cos\frac{\varphi}{5} \text{ neprekidna na } [0, 5\varphi]\right)$:

$$s = \int_0^{5\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \int_0^{5\pi} \sqrt{a^2\sin^{10}\frac{\varphi}{5} + a^2\sin^8\frac{\varphi}{5}\cos^2\frac{\varphi}{5}}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{5\pi} \sin^4\frac{\varphi}{5}\, d\varphi = \left|\frac{\varphi}{5} = t\right| = 5a\int_0^{\pi} \sin^4 t\, dt = \left|\sin^4 t \equiv \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2\right| =$$

$$= 5a\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cdot\frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= 5a\left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t\right]_0^{\pi} = \frac{15a\pi}{8}.$$

2.15. Tačka M se kreće po krivoj $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$. Odrediti *brzinu* tačke M (u m/s) u momentu $t = 30\,sec$, kao i *put* s (u metrima) koji pređe tačka od početka kretanja pa do tog momenta.

Rješenje.

Kako je

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = t, \quad (\sqrt{t^2} = |t| = t, \text{ jer } t > 0),$$

to imamo

$$v(30) = 30, \quad s(t) = \int_0^t v(t)\, dt = \int_0^t t\, dt = \frac{1}{2}t^2, \quad s(30) = 450.$$

2.16. Odrediti dužinu luka krive

$$\varphi = \int_0^{\varrho} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\, dt, \quad (0 \leqslant \varrho \leqslant 1).$$

Rješenje.

Kako je $\varphi'(\varrho) = \frac{\operatorname{sh}\varrho}{\varrho}$ integrabilna na [0, 1], (ima samo *prekid* I *vrste* u $\varrho = 0$), to imamo

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \varrho^2 \cdot [\varphi'(\varrho)]^2}\, d\varrho = \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\varrho}\, d\varrho = \int_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2\varrho}\, d\varrho =$$

$$= \int_0^1 \operatorname{ch}\varrho\, d\varrho = [\operatorname{sh}\varrho]_0^1 = \operatorname{sh}1 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

2.17. Odrediti dužinu luka krivih linija:

a) $y = \arcsin\frac{1}{e^x}$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

b) $y = \ln\sin(x + 5)$ $\quad \left(\frac{\pi}{3} - 5 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} - 5\right)$;

c) $x = \ln\sec y$ $\left(0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3}\right)$;

d) $x = a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right)$, $y = a\sin t$ $\quad (x \geqslant 0,\ 0 < b \leqslant y \leqslant a)$ (*traktrisa*);

e) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*astroida*);

f) $\varrho = a\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$;

g) $\varrho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$;

h) $\varphi = \sqrt{\varrho}$ $\quad (0 \leqslant \varrho \leqslant 5)$;

i) $\varrho = 1 + \cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Rezultat.

a) $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$; b) $\frac{1}{2}\ln 3$; c) $\ln(2+\sqrt{3})$; d) $a\ln\frac{a}{b}$; e) $6a$;

f) $\frac{a}{2}[(\pi\sqrt{1+\pi^2}+\ln(\pi+\sqrt{1+\pi^2})]$; g) $\frac{3\pi a}{2}$; h) $\frac{19}{3}$; i) $\frac{\pi}{2}$.

2.18. Data je jednačina krive $9ay^2 = x(x-3a)^2$. Odrediti vrijednost parametra a tako da dužina luka zatvorenog dijela date krive iznosi $s=\sqrt{3}$.

Rezultat.

$$a = \frac{1}{4}.$$

2.19. Odrediti krive čiji luk od njihove tačke $(0, y)$ do njihove tačke (x, y) $(x > 0)$ ima dužinu

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}\,dx.$$

Rezultat.

$y = \pm \arccos x + C$, gdje je C proizvoljna (realna) konstanta.

2.20. Tačka M se kreće po krivoj $x = \frac{3}{2}\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$. Odrediti brzinu tačke M i put s za $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Rezultat.

$$v(t) = \frac{9}{2}|\sin 2t|\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2 t},\quad s = \int_0^{\pi} v(t)\,dt = 7.$$

3. Izračunavanje površine rotacionih površi (komplanacija obrtnih površi)

Neka je (*glatki*) *luk* $\widehat{AB}$ dat sistemom jednačina $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant S)$ (gdje je S dužina luka $\widehat{AB}$). Tada je **površina rotacione površi,** nastale *rotacijom* oko osi Ox luka $\widehat{AB}$, data sa

$$(1)\qquad P_x = 2\pi\int_0^S |y(s)|\,ds.$$

Površina (*obrtne*) *površi* koju opisuje luk krive $y = f(x)$, (gdje $f(x)$ ima integrabilan izvod $f'(x)$ u $[a, b]$ između tačaka $A(a, y)$ i $B(b, y)$ $(a < b)$ rotacijom oko osi Ox (za *ugao* od 360°), data je obrascem

$$(2)\qquad P_x = 2\pi\int_a^b |y|\frac{ds}{dx}\,dx = 2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx,$$

(gdje je ds — diferencijal luka krive).

Ako, pak, kriva $y = f(x)$ rotira oko osi Oy i ako f ima inverznu funkciju $f^{-1}: x = f^{-1}(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$, onda je površina nastale obrtne površi data obrascem

$$(3)\qquad P_y = 2\pi\int_c^d |x(y)|\sqrt{x'^2(y)+1}\,dy\ \left(= 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\right).$$

Može se dogoditi da funkcija $y = f(x)$ na segmentu $[c, d]$ ne ispunjava uslove za postojanje njene inverzne funkcije, ali se segment $[c, d]$ može podijeliti na nekoliko manjih segmenata tako, da na svakom od njih funkcija ima inverznu funkciju. U tom slučaju treba primijeniti relaciju (3) za svaku od dobivenih inverznih funkcija pa dobivene površine sabrati.

Neka se zatvorena kriva C sastoji iz lukova krivih $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ za $a \leqslant x \leqslant b$. Tada je površina površi koja nastaje rotacijom krive C oko osi Ox data sa

$$(4)\qquad P_x = \begin{cases} 2\pi\int_a^b [|f_1(x)|\sqrt{1+f_1'^2(x)} + |f_2(x)|\sqrt{1+f_2'^2(x)}]dx, \\ \text{za } f_1(x) \pm f_2(x) \neq 0\ (\forall x \in [a, b], \textit{ izuzev u konačno mnogo tačaka}), \\ 2\pi\int_a^b |f_1(x)|\sqrt{1+f_1'^2(x)}\,dx, \text{ za } f_1(x) \pm f_2(x) = 0\ (\forall x \in [a, b]), \end{cases}$$

a u slučaju kada je kriva simetrična u odnosu na osu Ox na jednom ili više segmenata, koji su podskupovi posmatranog segmenta $[a, b]$, treba segment $[a, b]$ podijeliti na odgovarajuće segmente (koji zadovoljavaju uslove iz (4)), primijeniti na svaki formulu (4) i dobivene površine sabrati.

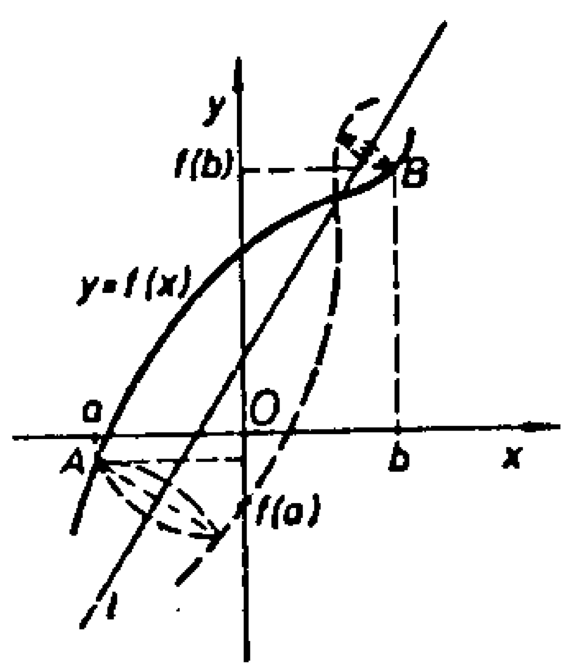
Analogno se postupa ako se vrši rotacija oko y ose, a i u slučaju kada je kriva definisana sa više od dvije funkcije.

Neka luk $\widehat{AB}$ krive $y = f(x)$ (za $a \leqslant x \leqslant b$), pri čemu postoji integrabilan izvod $f'(x)$ u $[a, b]$, rotira oko prave l: $Ax + By + C = 0$. Ako proizvoljna normala date prave siječe dati luk u najviše jednoj tački (sl. 3.1), *onda je površina dobivene obrtne površi data sa*

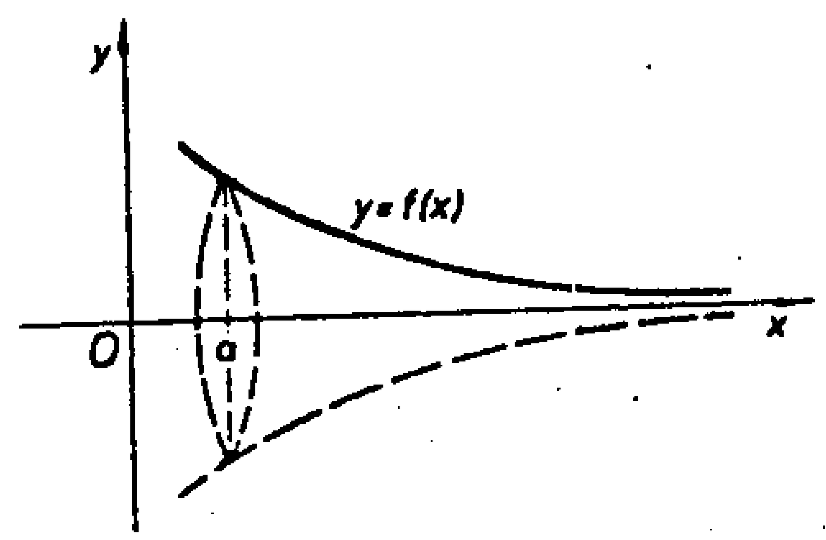
$$(5)\qquad P_l = 2\pi\int_a^b r(f, l)\,ds = 2\pi\int_a^b r(f, l)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

gdje je $r(f, l)$ rastojanje proizvoljne tačke $M(x, f(x))$ date krive od date prave l, tj. $r(f, l) = \dfrac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Napomenimo da se može izvršiti i transformacija koordinatnog sistema (rotacija i translacija), tako da se prava l poklopi sa nekom od koordinatnih osa, pa primijeniti formule (2) ili (3).



Sl. 3.1.



Sl. 3.2.

Ako je luk $\widehat{AB}$ dat jednačinama u parametarskom obliku: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ (uz uslov da su $\dot{x}$ i $\dot{y}$ integrabilni na $[t_1, t_2]$) tada, umjesto (2) i (3), imamo

$$P_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt, \quad P_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \tag{6}$$

Ako je luk AB dat u polarnim koordinatama jednačinom $\varrho = f(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, uzimajući $t = \varphi$, dobivamo

$$P_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varrho\, |\sin \varphi| \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\varphi. \tag{7}$$

(Analogno za

$$\varphi = \varphi(\varrho)\ (\varrho_1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_2) : P_x = 2\pi \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \varrho\, |\sin \varphi| \sqrt{1 + \varrho^2 \varphi'^2}\, d\varrho.)$$

Ako je kriva data jednačinom $F(x, y) = 0$, onda datu jednačinu treba (ako je moguće) riješiti po x ili po y, pa za svako rješenje primijeniti odgovarajuće prethodne formule /(2) – (5)/. Takođe se može preći na parametarski oblik, pa primijeniti obrazac (6) ili (7) (vodeći računa o eventualnoj simetriji date krive i o neophodnoj podjeli na dijelove).

Ako kriva $y = f(x)$ $(a \leqslant x < +\infty)$ rotira oko osi Ox, pri čemu joj je osa Ox asimptota (kad $x \to +\infty$) (sl. 3.2), tada je

$$P_x = 2\pi \int_{a}^{+\infty} |y| \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{8}$$

pod uslovom da postoji ovaj nesvojstveni integral.

Analogno važi ako je osa Ox asimptota date krive kad $x \to -\infty$ (ili, pak, ako se zamijene uloge koordinatnih osa).

Ako je $T(\xi, \eta)$ *težište homogenog luka* $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, tada vrijedi

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx}, \quad \eta = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx},$$

odakle imamo

$$s \cdot 2\pi |\eta| = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + y'^2}\, dx = P_x, \tag{9}$$

tj. *površina obrtne površi nastale rotacijom luka ravninske krive oko ose koja je u istoj ravni s krivom, ali je ne siječe, jednaka je proizvodu dužine luka s obimom kružnice koju opisuje težište luka krive* (tzv. *drugi Guldinov teorem*).

Zadaci (3.1–3.10)

3.1. Izračunati površinu obrtne površi koja nastaje rotacijom oko ose Ox luka krive $y = e^x$ između tačaka $A(1, e)$ i $B(2, e^2)$.

Rješenje.

Funkcija $y = e^x$ ima neprekidan izvod $y' = e^x$ (koji je tim prije integrabilan na $[1, 2]$, pa imamo /prema (1)/:

$$P = 2\pi \int_1^2 |y| \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_1^2 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = |e^x = t| =$$

$$= 2\pi \int_e^{e^2} \sqrt{1 + t^2}\, dt = \ldots = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2}\right]_e^{e^2} =$$

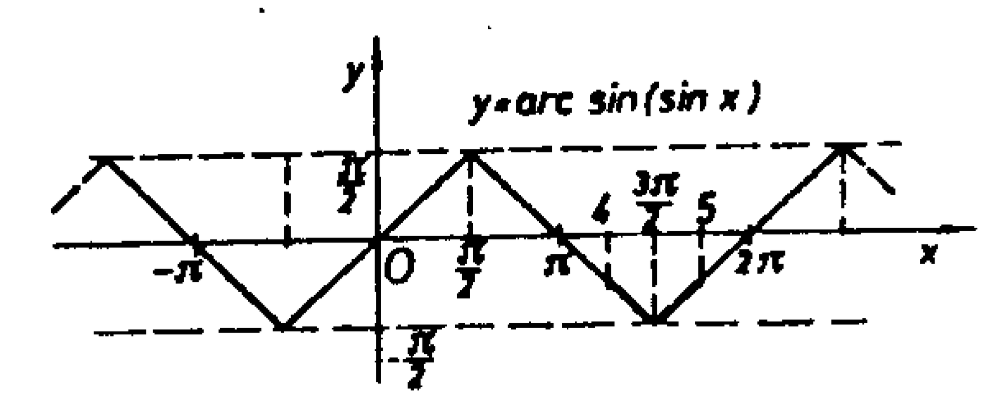
$$= \pi \left(\ln \frac{e^2 + \sqrt{1 + e^4}}{e + \sqrt{1 + e^2}} + e^2\sqrt{1 + e^4} - e\sqrt{1 + e^2}\right).$$

3.2. Izračunati površinu obrtne površi koja nastaje rotacijom oko ose Ox luka krive $y = \arcsin(\sin x)$, $(4 \leqslant x \leqslant 5)$.

Rješenje.

Datu funkciju možemo prikazati i u obliku (sl. 3.3):

$$y = \begin{cases} \vdots \\ x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \\ x - 2\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]. \\ \vdots \end{cases}$$



Sl. 3.3.

Dakle, dati luk (koji se sastoji iz dva glatka dijela) je definisan sa dvije funkcije: $y_1(x) = \pi - x$ za $x \in \left[4, \frac{3\pi}{2}\right]$, $y_2(x) = x - 2\pi$ za $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 5\right]$. Data funkcija nema izvod u tački $\frac{3\pi}{2} \in [4, 5]$ $\left(\text{jer } -1 = y'_-\left(\frac{3\pi}{2}\right) \neq y'_+\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1\right)$, tj. izvod $y'(x)$ na segmentu $[4, 5]$ ima prekid I vrste samo u tački $\frac{3\pi}{2}$, pa je on integrabilan na $[4, 5]$, s tim što se segment integracije $[4, 5]$ mora podijeliti na dva dijela: $\left[4, \frac{3\pi}{2}\right]$ i $\left[\frac{3\pi}{2}, 5\right]$. Zato imamo

$$P_x = 2\pi \int_4^5 |y| \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \left[\int_4^{3\pi/2} |y_1(x)| \sqrt{1 + y_1'^2(x)}\, dx + \right.$$

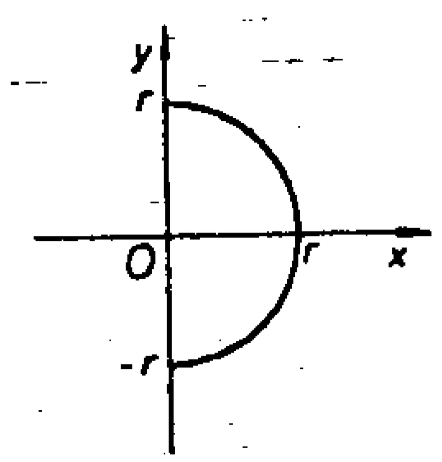
$$\left. + \int_{3\pi/2}^5 |y_2(x)| \sqrt{1 + y_2'^2(x)}\, dx\right] = 2\pi \left[\int_4^{3\pi/2} |\pi - x| \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{3\pi/2}^5 |x - 2\pi| \sqrt{1 + 1^2}\, dx\right] = 2\pi\sqrt{2}\left[\int_4^{3\pi/2} (x - \pi)\, dx + \int_{3\pi/2}^5 (2\pi - x)\, dx\right] =$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left(\left[\frac{1}{2}x^2 - \pi x\right]_4^{3\pi/2} + \left[2\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_{3\pi/2}^5\right) =$$

$$= \pi\sqrt{2}\left(28\pi - 41 - \frac{9\pi^2}{2}\right).$$

3.3. Izračunati površinu *lopte* datog poluprečnika r.



Sl. 3.4.

Rješenje.

Neka se *polukružnica* (sl. 3.4)

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ obrće oko y-ose.

Tada imamo:

$$P = 2\pi \int_{y_0}^{y_1} x\sqrt{1 + (x')^2}\, dy = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dy = 2r\pi\, [y]_{-r}^{r} = 2r\pi\,(r + r) = 4r^2\pi.$$

3.4. Izračunati površinu obrtne površi, koja nastaje rotacijom luka *kubne parabole*

$$y = \frac{1}{3}x^3 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \text{ oko ose } Ox.$$

Rješenje.

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1 + x^4}\, dx = \left|\begin{matrix} 1 + x^4 = t \\ 4x^3\, dx = dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{6}\int_1^2 t^{1/2}\, dt = \frac{\pi}{6}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\right] = \frac{\pi}{9}(2^{3/2} - 1).$$

3.5. Izračunati površinu *vretenaste* površi, koja nastaje rotacijom jednog svoda sinusoide oko ose Ox.

Rješenje.

$$P = 2\pi \int_0^\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{matrix}\right| = 2\pi \int_1^{-1} -\sqrt{1 + t^2}\, dt = \left|\begin{matrix} t = \operatorname{sh} x \\ dt = \operatorname{ch} dx \end{matrix}\right| =$$

$$= 2\pi \int_{\ln(-1+\sqrt{2})}^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{2\pi}{2}\left[x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}\right]_{\ln(-1+\sqrt{2})}^{\ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \pi\,[x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x]_{\ln(-1+\sqrt{2})}^{\ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \pi\left[\operatorname{Arsh} t + t\sqrt{1 + t^2}\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\operatorname{Arsh}1 - \operatorname{Arsh}(-1) + \sqrt{2} + \sqrt{2}\right] =$$

$$= \pi\left(\ln\frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\right) = \pi\left[\ln(3 + 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\right].$$

3.6. Izračunati površinu obrtne površi nastale obrtanjem kružnice

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

oko ose Ox.

Rješenje.

$$y_1 = 1 + \sqrt{1 - x^2},$$

$$y_2 = 1 - \sqrt{1 - x^2};$$

$$P = 2\pi \int_{-1}^{1} \left(y_1 \sqrt{1 + (y'_1)^2} + y_2 \sqrt{1 + (y'_2)^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{2dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi \cdot 4 \,[\text{arc sin } x]_{-1}^{1} =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi^2.$$

3.7. Data je jednačina kružnice $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Odrediti površinu obrtne površi koja nastaje rotacijom date kružnice oko ose Ox.

Rješenje.

Razlikovaćemo tri slučaja: $0 < r < |b|$ (sl. 3.5), $b = 0 < r$ (sl. 3.6) i $0 < |b| < r$ (sl. 3.7). Očigledno, parametar a ne utiče na veličinu površine, tj. a može biti proizvoljan (realan) broj.

1°. U slučaju $0 < r < |b|$ ispunjeni su uslovi za primjenu *Guldinovog teorema* (jer kriva leži u istoj ravni s osom rotacije i ne siječe je), pa imamo (obrazac za površinu, dobivenog, *torusa*):

$$P_x = s \cdot 2\pi |\eta| = 2r\pi \cdot 2\pi |b| = 4\pi^2 r |b|,$$

jer je dužina kružnice $s = 2r\pi$, a ordinata težišta kružnice je $\eta = b$.

2°. U slučaju $b = 0 < r$ kružnica opisuje *sferu* radijusa r čija je površina, kao što znamo (Vidi zad. 3.3.), $P_x = 4r^2\pi$. Napomenimo da je, u ovom slučaju, kružnica simetrična u odnosu na osu rotacije, pa je dovoljno posmatrati rotaciju „gornje" (ili „donje") polukružnice. (U tom slučaju polukružnica ispunjava uslove *Guldinovog teorema*, pa je

$$P_x = s \cdot 2\pi |\eta| = r\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi} = 4r^2\pi, \text{ jer } s = r\pi,\ |\eta| = \frac{2r}{\pi}\Big).$$

3°. U slučaju $0 < |b| < r$ imamo da je jedan dio date kružnice $y_{1,2} = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$, ispod ose Ox, pa treba voditi računa da su ordinate na tom dijelu negativne. Smatraćemo da je $b > 0$ (jer se i za $b < 0$, očigledno, dobije ista obrtna površ), te da je $a = 0$ (jer se i za $a \neq 0$ dobije, očiegledno, ista vrijednost površine obrtne površi; može se izvršiti translacija koordinatnog sistema: $x - a = x_1$, $y = y_1$). Dakle, imamo $y_1 = b - \sqrt{r^2 - x^2}$, $y_2 = b + \sqrt{r^2 - x^2}$, $y_1 = 0$ za $r^2 - x^2 = b^2$, tj. za $x_{1,2} = \pm\sqrt{r^2 - b^2}$. Kako je

$$y'_1 = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},\quad y'_2 = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},\quad |y_2| = y_2,$$

$$|y_1| = \begin{cases} y_1, \text{ za } x \in [-r, -\sqrt{r^2 - b^2}] \cup [\sqrt{r^2 - b^2}, r] \\ -y_1, \text{ za } x \in [-\sqrt{r^2 - b^2}, \sqrt{r^2 - b^2}], \end{cases}$$

to imamo /prema (4)/:

$$P_x = 2\pi \int_{-r}^{r} \left[|y_2| \sqrt{1 + y'^2_2} + |y_1| \sqrt{1 + y'^2_1}\right] dx =$$

$$= 2\pi \Bigg[\int_{-r}^{r} (b + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx + 2 \int_{\sqrt{r^2 - b^2}}^{r} (b - \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx +$$

$$+ \int_{-\sqrt{r^2 - b^2}}^{\sqrt{r^2 - b^2}} -(b - \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \Bigg] = 2\pi \left\{ \left[rb \text{ arc sin } \frac{x}{r} + rx \right]_{-r}^{r} + \right.$$

$$\left. + 2 \left[rb \text{ arc sin } \frac{x}{r} - rx \right]_{\sqrt{r^2 - b^2}}^{r} - \left[rb \text{ arc sin } \frac{x}{r} - rx \right]_{-\sqrt{r^2 - b^2}}^{\sqrt{r^2 - b^2}} \right\} =$$

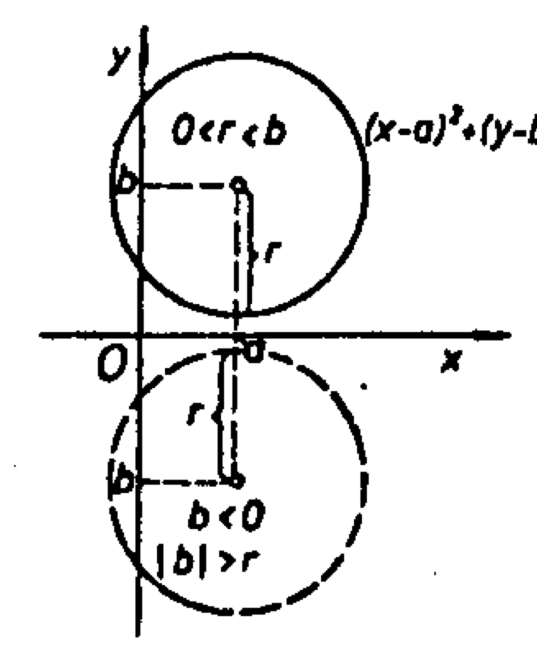
$$= 2\pi^2 rb + 4r^2\pi + 4\pi \left(rb \frac{\pi}{2} - rb \text{ arc sin } \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r} - r^2 + r\sqrt{r^2 - b^2} \right) -$$

$$- 2\pi \left(2rb \text{ arc sin } \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r} - 2r\sqrt{r^2 - b^2} \right) = 4\pi^2 rb + 8\pi r \sqrt{r^2 - b^2} -$$

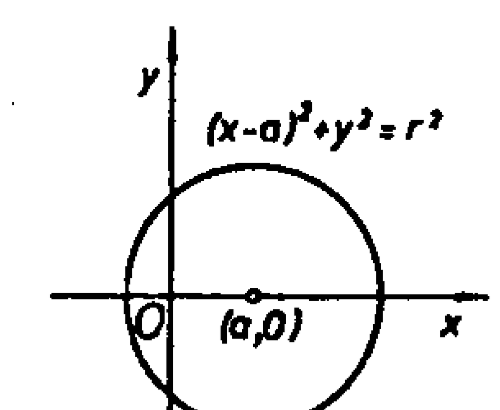
$$- 8rb\pi \text{ arc sin } \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{arc sin } \dfrac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r} = \text{arc sin } \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{r}\right)^2} = \left| \dfrac{b}{r} = \sin t \right| = \\ = \text{arc sin} (\cos t) = \dfrac{\pi}{2} - \text{arc cos} (\cos t) = \dfrac{\pi}{2} - t = \dfrac{\pi}{2} - \text{arc sin } \dfrac{b}{r} \end{array} \right| =$$

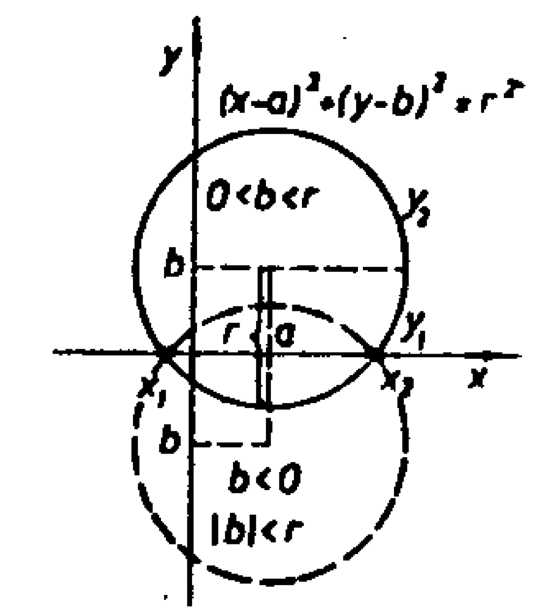
$$= 8r\pi \left(\sqrt{r^2 - b^2} + b \text{ arc sin } \frac{b}{r} \right).$$



Sl. 3.5.



Sl. 3.6.



Sl. 3.7.

Napomenimo da je pogodno datu jednačinu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ napisati u parametarskom obliku: $x=a+r\cos t$, $y=b+r\sin t$, $(0<t<2\pi)$. (Kako je $y=0$ za $t_1=\pi+\arcsin\frac{b}{r}$ i $t_2=2\pi-\arcsin\frac{b}{r}$, $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=r$, to vrijedi

$$P_x = 2\pi r\left[\int_0^{\pi+\arcsin\frac{b}{r}}(b+r\sin t)\,dt + \int_{\pi+\arcsin\frac{b}{r}}^{2\pi-\arcsin\frac{b}{r}} -(b+r\sin t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{2\pi-\arcsin\frac{b}{r}}^{2\pi}(b+r\sin t)\,dt\right].\Big)$$

3.8. Izračunati površine obrtnih površi koje nastaju rotacijom krivih datih *analitički* sa:

a) $4x^2+9y^2=36$, oko x ose;

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(0<b<a)$ oko y ose;

c) $y^3=x-1$, $(1\leqslant x\leqslant a)$ oko x ose;

d) $y=e^x$, oko x ose (za $x\leqslant 0$);

e) $y=\min\{\sin 2x, \operatorname{tg} x\}$, $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$ oko x ose;

f) $y^2=-2x$ $(-2\leqslant x\leqslant 0)$ oko y ose;

g) $|x|=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$, oko x ose;

h) $\varrho=2a(1+\cos\varphi)$, oko polarne ose;

i) $x^2+y^2=a\sqrt{x^2-y^2}$, $(a>0)$ oko x ose.

Rješenje.

a) Iz $4x^2+9y^2=36$ slijedi $y_{1,2}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Funkcija je definisana za $9-x^2>0$, tj. za $-3<x<3$. Kako je osa rotacije ujedno i osa simetrije date krive, to će obrtnu površ obrazovati „gornji" (ili „donji") luk elipse. Izvod $y'_1=-\frac{2x}{3\sqrt{9-x^2}}$

ima *prekid II vrste* u $x=\pm 3$, ali je on integrabilan na svakom segmentu $[X, Y]$ za $\forall X, Y\in(-3,3)$, te imamo

$$P_x = 2\pi\lim_{\substack{X\to-3+\\ Y\to 3-}}\int_X^Y y_1(x)\sqrt{1+y_1'^2(x)}\,dx =$$

$$= 2\pi\lim_{\substack{X\to-3+\\ Y\to 3-}}\int_X^Y \frac{2\sqrt{9-x^2}}{3}\sqrt{1+\frac{4x^2}{9(9-x)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{8\pi}{9}\int_0^3\sqrt{81-5x^2}\,dx = 8\pi\int_0^3\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{9}x\right)^2}\,dx =$$

$$\left|\frac{\sqrt{5}}{9}x=\sin t\right| = \frac{72\pi}{\sqrt{5}}\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}}\cos^2 t\,dt = \frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}} =$$

$$= \frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left[t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right]_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{36\pi}{\sqrt{5}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{5}{9}}\right) = 8\pi+\frac{36\pi}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

b) Parametarske jednačine date elipse su:

$x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$.

Koristeći simetriju date krive imamo ($\dot{x}$ i $\dot{y}$ su neprekidni pa i integrabilni):

$$P_y = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = 4\pi\int_2^{\pi/2}a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 4a\pi\int_0^{\pi/2}\cos t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\,dt = \left|\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right| =$$

$$= 4ab\pi\int_0^{\pi/2}\cos t\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\varepsilon\sin t\right)^2}\,dt = \left|\frac{a}{b}\varepsilon\sin t=u\right| = \frac{4b^2\pi}{\varepsilon}\int_0^{\frac{a\varepsilon}{b}}\sqrt{1+u^2}\,du.$$

Kako je

$$\int\sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+u\sqrt{1+u^2}\right]+C,$$

to imamo

$$P_y = \frac{2b^2\pi}{\varepsilon}\ln\frac{a(1+\varepsilon)}{b}+2\pi a^2.$$

c) Iz $y^2 = x - 1$ slijedi $y_{1,2} = \pm\sqrt{x-1}$. Krive $y_1 = \sqrt{x-1}$ i $y_2 = -\sqrt{x-1}$ obrazuju istu obrtnu površ (sl. 3.8), pa imamo (uzimajući u obzir da je $y'_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ integrabilan na svakom segmentu $[X, a]$ za $\forall X \in (1, a]$):

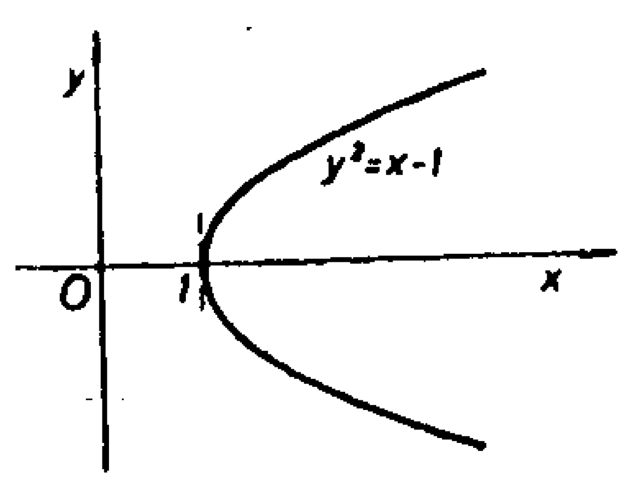
$$P_x = 2\pi \lim_{X\to 1_+} \int_X^a \sqrt{x-1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}\,dx = \pi\int_1^a \sqrt{4x-3}\,dx =$$

$$= |4x-3=t^2| = \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{4a-3}} t^2\,dt = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(4a-3)^3}-1\right).$$

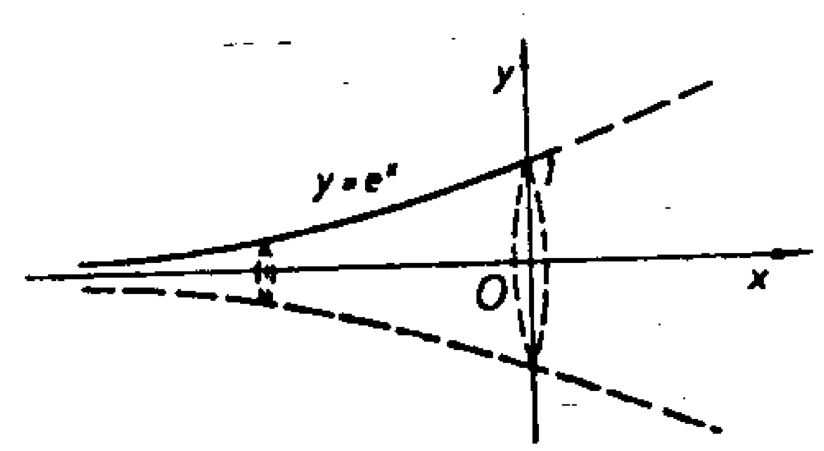
d) $y' = e^x$ je neprekidna funkcija (pa i integrabilna) na svakom segmentu $[a, 0] \subset (-\infty, 0]$ (sl. 3.9), pa imamo

$$P_x = 2\pi \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = 2\pi\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx =$$

$$= |e^x = t| = 2\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt = \ldots = \pi\left[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$



Sl. 3.8.



Sl. 3.9.

e) $$y = \min\{\sin 2x, \operatorname{tg} x\} = \begin{cases} \operatorname{tg} x, \text{ za } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ \sin 2x, \text{ za } x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right] \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 1/\cos^2 x, \; x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \\ 2\cos 2x, \; x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right] \end{cases}, \quad 2 = y'_-\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq y'_+\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

tj. izvod y' ima prekid I vrste u $x = \dfrac{\pi}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, ali je (kao takav) integrabilan na $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, pa imamo (sl. 3.10):

$$P_x = 2\pi\int_0^{\pi/3} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\left(\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg} x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx\right).$$

Kako je

$$I_1 = \int_0^{\pi/4}\operatorname{tg} x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx = |\cos x = t| = -\int_1^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^3}\,dt =$$

$$= |1+t^4 = t^4 z^2| = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{z^2-1+1}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}\right),$$

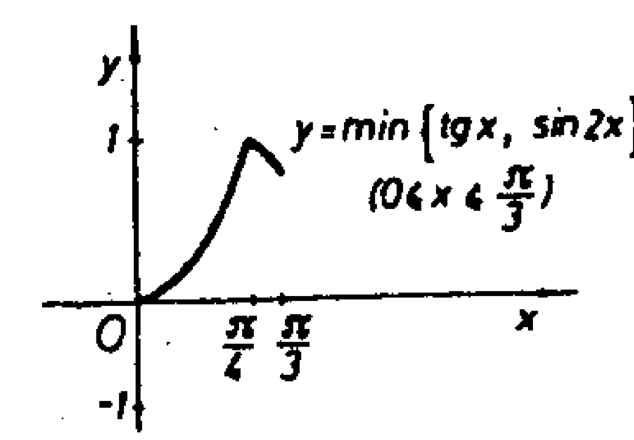
$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx = |2\cos 2x = t| = -\frac{1}{4}\int_0^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= \ldots = \frac{1}{8}\left[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+t\sqrt{1+t^2}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{2}-\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right] =$$

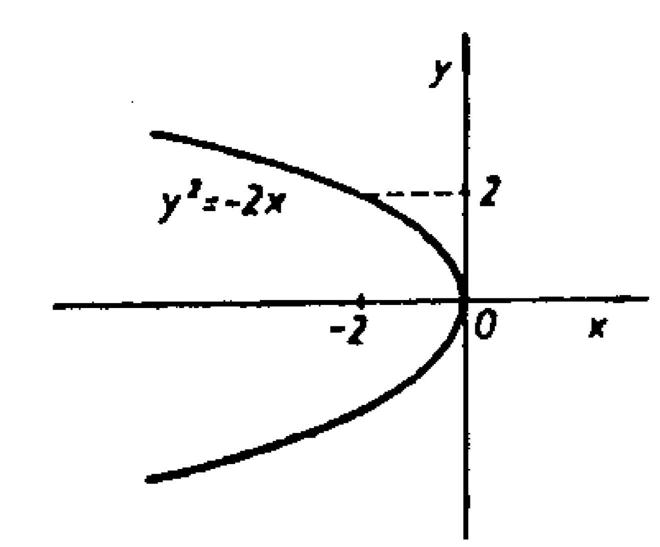
$$= \frac{1}{8}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right],$$

to imamo

$$P = \pi\left[\sqrt{5}-\frac{3}{4}\sqrt{2}+\ln\frac{(1+\sqrt{2})^{\frac{5}{4}}(\sqrt{5}-1)}{2}\right].$$



Sl. 3.10.



Sl. 3.11.

f) $y^2 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow x'(y) = -y \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2+1}\,dy = \sqrt{y'^2+1}\,dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_y = 2\cdot 2\pi\int_0^2 |x(y)|\sqrt{x'^2+1}\,dy = 4\pi\int_0^2\left|-\frac{1}{2}y^2\right|\sqrt{y^2+1}\,dy =$$

$$= 2\pi\int_0^2 y^2\sqrt{y^2+1}\,dy = |y = \operatorname{sh} t| = 2\pi\int_0^{\operatorname{Arsh}2}\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^2 t\,dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{\operatorname{Arsh}2}\frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}2t+1}{2}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\operatorname{Arsh}2}(\operatorname{ch}^2 2t-1)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\operatorname{Arsh}2}\left(\frac{\operatorname{ch}4t+1}{2}-1\right)dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\operatorname{sh}4t}{4}-t\right]_0^{\operatorname{Arsh}2} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2t}{4}-t\right]_0^{\operatorname{Arsh}2} = \frac{\pi}{4}\left[\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t(\operatorname{ch}^2t+\operatorname{sh}^2t)-t\right]_0^{\operatorname{Arsh}2} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[2\sqrt{1+4}\,(1+4+4)-\operatorname{arsh}2\right] = \frac{\pi}{4}\left[18\sqrt{5}-\ln(2+\sqrt{5})\right] \text{ (sl. 3.11)}$$

g) $x_{1,2} = \pm\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)$

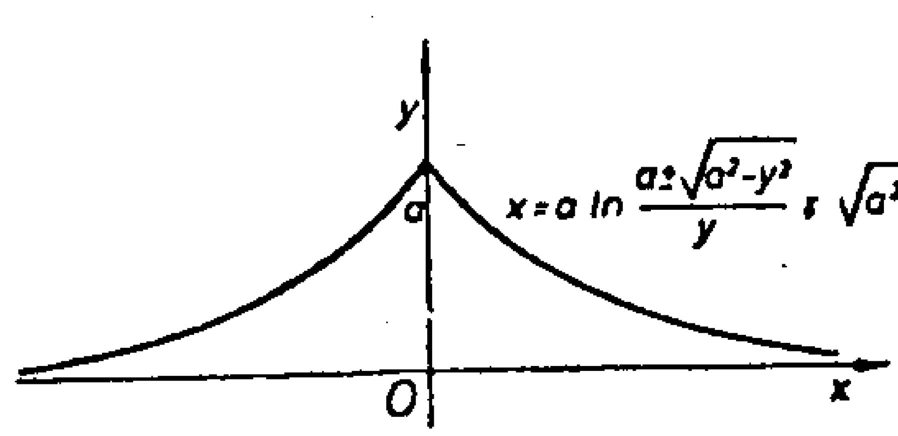
je definisano za $0 < y < a$, $(-\infty < x < +\infty)$.

$$x_1'(y) = a\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\cdot\frac{-y^2/\sqrt{a^2-y^2}-(a+\sqrt{a^2-y^2})}{y^2}+\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} =$$

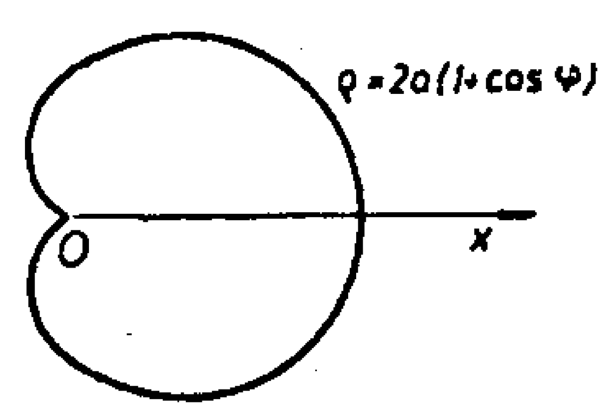
$$= \ldots = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \Rightarrow ds = \sqrt{1+x'^2(y)}\,dy = \sqrt{1+\frac{a^2-y^2}{y^2}}\,dy = \frac{a}{y}\,dy \Rightarrow$$

$$P_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{+\infty} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = 4\pi\int_0^a y\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy =$$

$$= 4\pi\int_0^a y\,\frac{a}{y}\,dy = 4\pi a\int_0^a dy = 4\pi a^2 \text{ (sl. 3.12).}$$



Sl 3.12.



Sl. 3.13.

h) $\varrho = 2a(1+\cos\varphi) \Rightarrow \varrho' = -2a\sin\varphi \Rightarrow ds = \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi =$

$$= \sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2+4a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi = 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2\pi\int_0^{\pi} y(\varphi)\,ds(\varphi) = 2\pi\int_0^{\pi}\varrho\sin\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 8a\pi\int_0^{\pi}2a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 64a^2\pi\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \left|\cos\frac{\varphi}{2} = t\right| = \frac{128}{5}a^2\pi \text{ (sl. 3.13).}$$

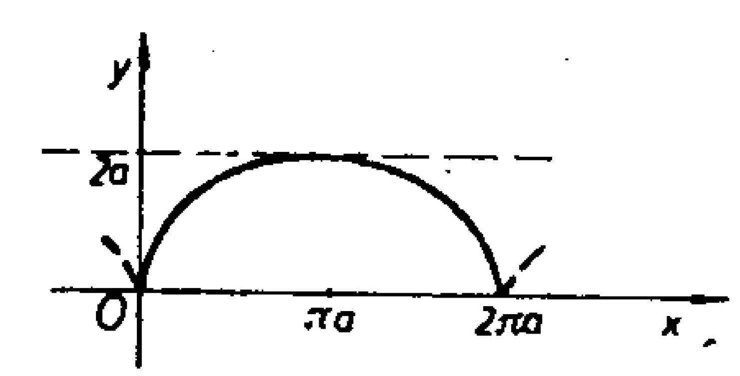
i) Jednačina krive (tzv. *lemniskate*) $x^2+y^2 = a\sqrt{x^2-y^2}$ u polarnim koordinatama ima oblik $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (sl. 1.41.). Kako je

$$ds = \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi+\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi,$$

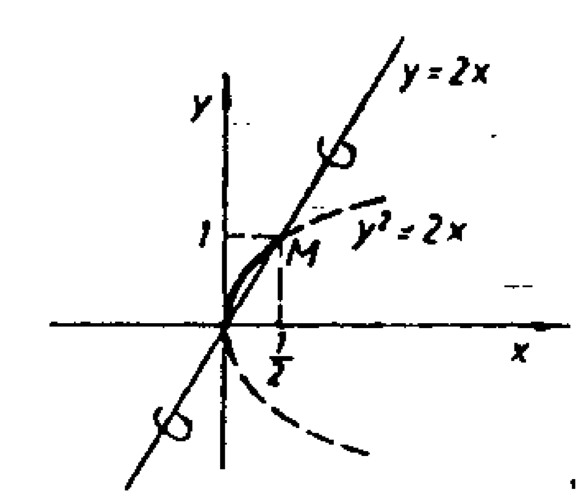
to imamo

$$P = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varrho\sin\varphi\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\,d\varphi = -4\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 4\pi a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$



Sl. 3.14.



Sl. 3.15.

3.9. Izračunati površine obrtnih površi koje nastaju rotacijom krivih datih analitički sa:

a) $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ oko prave $y = 2a$;

b) $y^2 = 2x$, (luk između presječnih tačaka sa pravom $y = 2x$) oko prave $y = 2x$;

c) $\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi$ oko ose $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje.

a) Prema obrascu (5) imamo

$$P_l = 2\pi \int_a^b r(f,l)\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_a^b |y-2a|\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(2a - y(t))\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi}\cos^2\frac t2 \sin\frac t2\,dt = \left|\cos\frac t2 = z\right| = -16\pi a^2\int_1^{-1} z^2\, dz =$$

$$= \frac{16\pi a^2}{3} z^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{3}\pi a^2 \quad \text{(sl. 3.14).}$$

b) Presječne tačke su (sl. 3.15): $O(0,0)$ i $M\left(\frac12, 1\right)$. Prema (5) imamo

$$P_l = 2\pi\int_0^{\frac12} r(f,l)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \left| \begin{array}{l} r(f,l) = \dfrac{|Ax+Bf(x)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \dfrac{|2x-f(x)|}{\sqrt5} \\ l: 2x-y=0,\ f(x)=\sqrt{2x},\ f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2x}} \end{array}\right| =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt{2x}-2x}{\sqrt5}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt5}\int_0^{\frac12}(1-\sqrt{2x})\sqrt{2x+1}\,dx.$$

Kako je

$$\int\sqrt{2x+1}\,dx = |2x+1=t^2| = \int t^2\, dt = \frac13(2x+1)^{\frac32}+C,$$

$$\int\sqrt{2x}\sqrt{2x+1}\,dx = |\sqrt{2x}=\operatorname{sh} t| = \int \operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac14\int(\operatorname{ch}^2 2t - 1)\,dt =$$

$$=\frac14\int\left(\frac{1+\operatorname{ch}4t}{2}-1\right)dt = \frac18\left(\frac{\operatorname{sh}4t}{4}-t\right)+C=$$

$$=\frac18[\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t(\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}^2t)-t]+C,$$

to imamo

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt5}\left[\frac{2\sqrt2-1}{3}+\frac18\ln(1+\sqrt2)-\frac{3\sqrt2}{8}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt5}\left[\frac{7\sqrt2-8}{3}+\ln(1+\sqrt2)\right].$$

c) Funkcija $\varrho^2 = a^2\cos2\varphi$ je definisana za $\cos2\varphi \geqslant 0$, tj. za

$$-\frac\pi4 + k\pi < \varphi < \frac\pi4 + k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

No, dovoljno je uzeti

$$\varphi\in\left[-\frac\pi4,\frac\pi4\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right].$$

Zbog simetrije krive (sl. 1.41.), imamo (prema (5)):

$$P_l = 2\cdot 2\pi\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4} r(f,l)\,ds = \left|\begin{array}{l} l:\varphi=\dfrac\pi4 \text{ ili } x-y=0,\ r(f,l)=\dfrac{|x-f(x)|}{\sqrt2}\\ =\dfrac{|\varrho\cos\varphi-\varrho\sin\varphi|}{\sqrt2} = \varrho\left|\cos\left(\varphi+\dfrac\pi4\right)\right| \\ ds = \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\,d\varphi\end{array}\right| =$$

$$=4\pi\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\varrho\left|\cos\left(\varphi+\frac\pi4\right)\right|\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\,d\varphi = 4\pi a^2\int_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4}\cos\left(\varphi+\frac\pi4\right)d\varphi=$$

$$=4\pi a^2\sin\left(\varphi+\frac\pi4\right)\Big|_{-\frac\pi4}^{\frac\pi4} = 4\pi a^2.$$

3.10. Izračunati površine obrtnih površi koje nastaju rotacijom krivih datih analitički sa:

a) $y = \cos\frac{\pi x}{a}$ $(|x| \leqslant a)$, oko x ose;

b) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(|x| \leqslant a)$, oko y ose;

c) $xy = 1$ $(1 \leqslant x \leqslant \sqrt2)$, oko x ose;

d) $y^2 = 2px$ $(p > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a)$, oko x ose;

e) $9y^2 = x(3-x)^2$ (petlje), oko x ose;

f) $x = a(t - \sin t)$, $a = a(1-\cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, oko:
1°. y ose, 2°. ose simetrije;

g) $\varrho^2 = a\cos2\varphi$, oko ose $\varphi = \frac\pi2$;

h) $x^2 - 8x + y^2 + 6y + 24 = 0$, oko prave l date jednačinom $3x + 4y - 12 = 0$.

Rezultat.

a) $4\left(\sqrt{\pi^2+a^2}+\frac{a^2}{\pi}\ln\frac{\pi+\sqrt{\pi^2+a^2}}{a}\right);$

b) $2\pi a^2(1-1/e);$

c) $\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right);$

d) $\frac{2\pi}{3}[(2a+p)\sqrt{2ap+p^2}-p^2];$

e) $3\pi;$

f) 1°. $16\pi a^2$, 2°. $8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2;$

g) $2\pi a(2-\sqrt{2});$

h) $\frac{48\pi^3}{5}$

(primijeniti *Guldinovu teoremu* ili obrazac (5)).

4. Izračunavanje zapremine rotacionih tijela (kubatura obrtnih tijela)

Neka je kriva linija data jednačinom $y=f(x)$, pri čemu je funkcija f definisana i integrabilna na segmentu $[a,b]$. Tada je *zapremina obrtnog tijela*, koje nastaje obrtanjem oko ose Ox (ili ose Oy) *ravnog lika S*, ograničenog datom krivom, dijelom ose Ox (za $x\in[a,b]$) i ordinatama tačaka $A(a,f(a))$ i $B(b,f(b))$ (sl. 4.1), data obrascem

$$(1)\quad V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx\ \left(\text{ili}\ V_y=2\pi\int_a^b |xf(x)|\,dx,\ \text{ako}\ \widehat{AB}\ \text{ne siječe}\ Oy\right).$$

Analogno, zapremina tijela nastalog rotacijom oko ose Ox (odnosno oko ose Oy) lika ograničenog krivom datom jednačinom $x=g(y)$, dijelom ose Oy i pravama $y=c$ i $y=d$, $(c<d)$ data je sa

$$(2)\quad V_y=\pi\int_c^d g^2(y)\,dy\ \left(\text{odnosno}\ V_x=2\pi\int_c^d |yg(y)|\,dy\right).$$

Ako je, pak, lik S ograničen krivim linijama datim jednačinama $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ (f_1 i f_2 integrabilne na $[a,b]$) i pravama $x=a$, $x=b$, onda je zapremina obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem lika S oko ose Ox (odnosno ose Oy) data sa

$$(3)\quad V_x=\pi\int_a^b |f_2^2(x)-f_1^2(x)|\,dx$$

$$\left(\text{odnosno}\ V_y=2\pi\int_a^b |x[f_2(x)-f_1(x)]|\,dx\right),$$

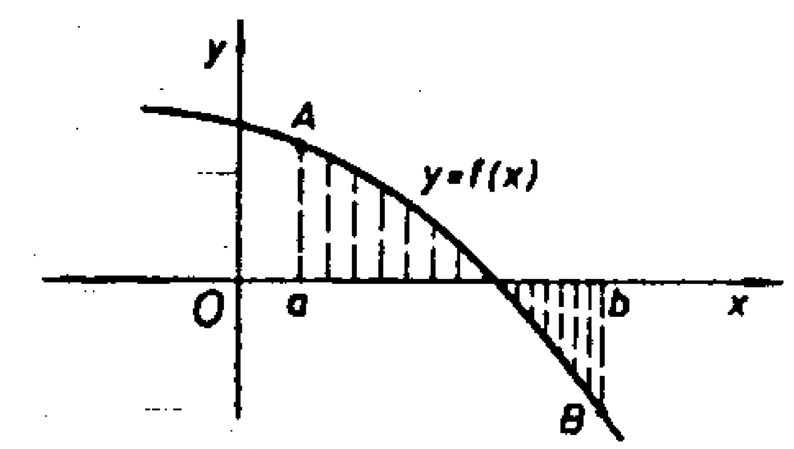
ako je lik S s jedne strane ose Ox (odnosno Oy) (sl. 4.2).

Ako je lik S ograničen krivom datom jednačinom $y=f(x)$, pravom l, i normalama povučenim kroz tačke $A(a,f(a))$ i $B(b,f(b))$ na pravu l datu jednačinom $Ax+By+C=0$, onda je zapremina obrtnog tijela, koje nastaje obrtanjem lika S oko prave l, (tako da svaka normala date prave siječe luk $\widehat{AB}$ u najviše dvije tačke), data sa

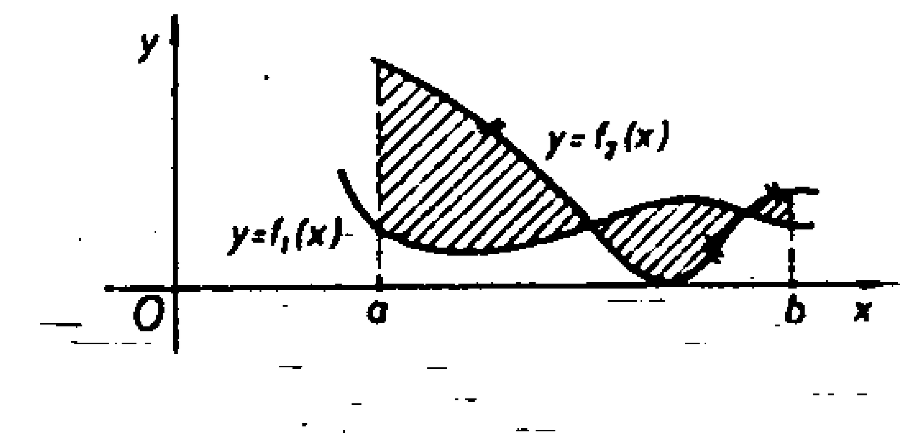
$$(4)\quad V_l=\begin{cases}\pi\displaystyle\int_a^b r^2(f,l)\frac{1}{|\cos\alpha|}\,dx, & \text{za}\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] \pi\displaystyle\int_a^b r^2(f,l)\,dy, & \text{za}\ \alpha=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

gdje je $r(f,l)$ rastojanje proizvoljne tačke $M(x,f(x))$ od date prave l, tj.

$$r(f,l)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \alpha=\sphericalangle(Ox,l),\ (\text{sl. } 4.3).$$



Sl. 4.1.



Sl. 4.2.

Neka je luk AB dat sistemom jednačina

$$x=x(t),\ y=y(t),\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

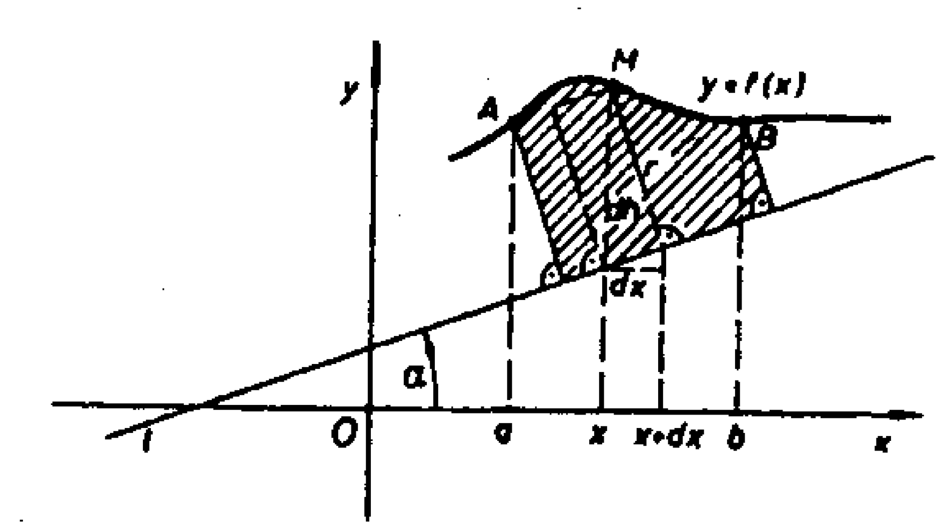
Tada, umjesto formule (1), imamo

$$(5)\quad V_x=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\,|x'(t)|\,dt,$$

$$\left(\text{odnosno}\ V_y=2\pi\int_\alpha^\beta |x(t)\,y(t)\,x'(t)|\,dt\right).$$

Zapremina obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem oko polarne ose lika datog nejednačinama $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varrho\leqslant\varrho(\varphi)$, ($\varrho$ i φ — polarne koordinate), data je sa

$$(6)\quad V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \varrho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$



Sl. 4.3.

Prethodna formula je podesna pri izračunavanju zapremine obrtnih tijela koja nastaju obrtanjem oko polarne ose lika ograničenog nekom zatvorenom krivom (simetričnom u odnosu na polarnu osu).

Kako su koordinate težišta lika, omeđenog krivom datom jednačinom $y = f(x)$ (f neprekidna na $[a, b]$), x-osom i pravama čije su jednačine $x = a$ i $x = b$, date sa

$$\xi = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx},$$

to imamo

$$2\pi|\eta|\,P = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx = V_x.$$

Dakle, *zapremina obrtnog tijela koje nastaje rotacijom ravninskog lika oko neke ose koja leži u ravni lika (s jedne strane), jednaka je proizvodu površine tog lika i dužine kružnice koju opisuje težište lika* (tzv. *Guldinov teorem*).

Zadaci (4.1—4.5)

4.1. Izračunati zapreminu obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem lika ograničenog krivim datim analitički sa:

a) $y = \sqrt{x^3}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$, oko: 1°. ose Ox, 2°. ose Oy;

b) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = 0$, $|x| = 1$, oko: 1°. ose Ox, 2°. ose Oy;

c) $y = x^2 - 4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$, oko: 1°. ose Ox, 2°. ose Oy;

d) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, oko: 1°. ose Ox, 2°. ose Oy, 3°. prave l: $x = 1$;

e) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi$, oko: 1°. ose Ox, 2°. ose Oy;

f) $y = e^{-|x|}$, $y = 0$, oko: 1°. ose Ox, 2°. ose Oy;

g) $x^2 + 2y^2 = 5$, oko ose Ox;

h) $x = \dfrac{y}{1 + y^2}$ (x između apscise srednje prevojne tačke i x_{max}), oko ose Oy;

i) $x = a \ln \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}$, ($y > 0$) oko ose Ox;

j) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, ($|b| \geqslant r$) oko ose Ox;

k) $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0$ oko ose Oy.

Rješenje.

a) Funkcija $y = \sqrt{x^3}$ je neprekidna na $[1, 2]$ (tim prije je i integrabilna) pa imamo

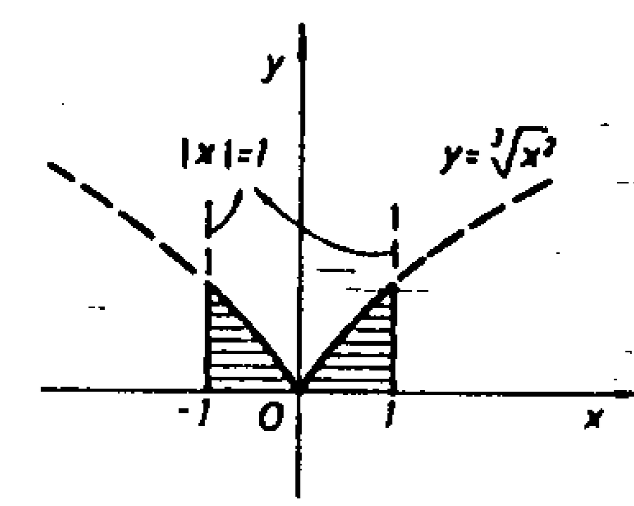
$$1°.\ V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx = \pi\int_1^2 x^3\,dx = \pi\,\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}(16 - 1) = \frac{15}{4}\pi.$$

$$2°.\ V_y = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx = 2\pi\int_1^2 x\sqrt{x^3}\,dx = 2\pi\,\frac{x^{7/2}}{7/2}\Big|_1^2 = \frac{4\pi}{7}(2^{7/2} - 1).$$

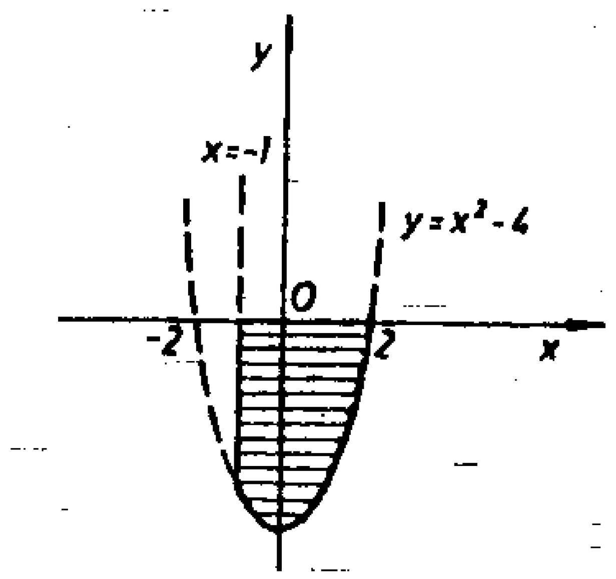
b) $|x| = 1 \Rightarrow (x = -1 \vee x = 1)$ pa imamo, zbog simetrije (sl. 4.4):

$$1°.\ V_x = \pi\int_{-1}^1 f^2(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt[3]{x^4}\,dx = 2\pi\,\frac{x^{7/3}}{7/3}\Big|_0^1 = \frac{6}{7}\pi;$$

$$2°.\ V_y = 2\pi\int_0^1 x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 x\sqrt[3]{x^2}\,dx = 2\pi\,\frac{x^{8/3}}{8/3}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{4}.$$



Sl. 4.4.



Sl. 4.5.

c) $$1°.\ V_x = \pi\int_{-1}^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_{-1}^2 (x^2 - 4)^2\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 8\,\frac{x^3}{3} + 16x\right]_{-1}^2 = \frac{153}{5}\pi.$$

$$2°.\ V_y = 2\pi\int_0^2 |x f(x)|\,dx = 2\pi\int_0^2 x\,|x^2 - 4|\,dx = 2\pi\int_0^2 x(4 - x^2)\,dx =$$

$$= 2\pi\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 8\pi \quad \text{(sl. 4.5)}.$$

d) $$1°.\ V_x = \pi\int_0^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2\,dx = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

$$2°.\ V_y = 2\pi\int_0^2 x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^2 x(2x - x^2)\,dx = 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

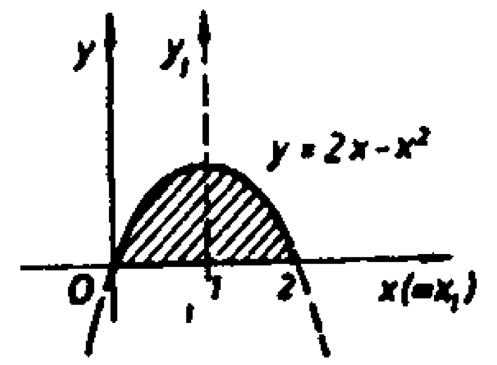
3°. Izvršimo translaciju koordinatnog sistema Oxy (u $O_1x_1y_1$): $x = x_1 + 1$, $y = y_1$. U novom sistemu $O_1x_1y_1$ jednačina $y = 2x - x^2$ posmatrane krive ima oblik:

$$y_1 = 2(x_1 + 1) - (x_1 + 1)^2 = 1 - x_1^2,$$

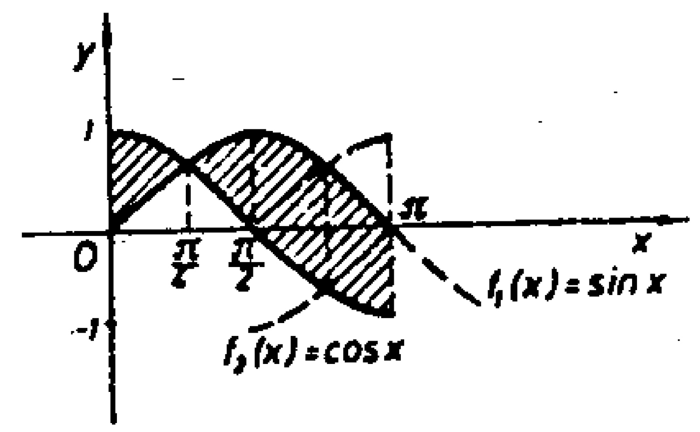
pa imamo (sl. 4.6):

$$V_l = V_{y_1} = 2\pi\int_0^1 x_1 y_1(x_1)\,dx_1 = 2\pi\int_0^1 x_1(1-x_1^2)\,dx_1 = 2\pi\left[\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_1^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

(Napomenimo da se može zadatak riješiti i primjenom (4).)



Sl. 4.6.



Sl. 4.7.

e) 1°. U ovom slučaju možemo primijeniti obrazac (3) samo na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. No, sa slike 4.7. vidimo da vrijedi

$$V_x = \pi\int_0^{\pi/2} |f_2^2(x) - f_1^2(x)|\,dx + \pi\int_{\pi/2}^{\pi} f_1^2(x)\,dx + \pi\int_{3\pi/4}^{\pi}[f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx =$$

$$= \pi\left[\int_0^{\pi/4}(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2 x\,dx +\right.$$

$$\left. + \int_{3\pi/4}^{\pi}(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx\right] = \pi\left[\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2}(-\cos 2x)\,dx +\right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx + \int_{3\pi/4}^{\pi}\cos 2x\,dx\right] = \frac{\pi}{4}(6+\pi).$$

2°. $$V_y = 2\pi\int_0^{\pi}|x[f_2(x) - f_1(x)]|\,dx = 2\pi\left[\int_0^{\pi/4}x(\cos x - \sin x)\,dx +\right.$$

$$\left. + \int_{\pi/4}^{\pi}x(\sin x - \cos x)\,dx\right] = \ldots = \pi^2(2+\sqrt{2}).$$

f) 1°. $$V_x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\pi\int_a^b f^2(x)\,dx = 2\pi\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}\,dx = 2\pi\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^b = \pi;$$

2°. $$V_y = \lim_{a\to+\infty}2\pi\int_0^a x f(x)\,dx = 2\pi\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}\,dx =$$

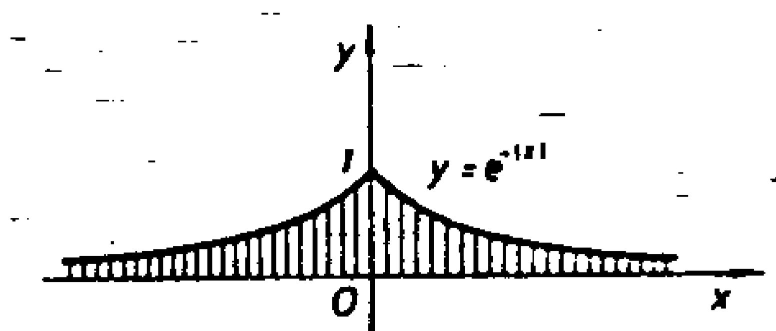
$$= 2\pi\lim_{a\to+\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^a = -2\pi\left[\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - 1\right] = 2\pi \text{ (sl. 4.8).}$$

g) $$x^2 + 2y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = \frac{5-x^2}{2} \Rightarrow V_x = \pi\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} y^2\,dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{5}}\frac{5-x^2}{2}\,dx =$$

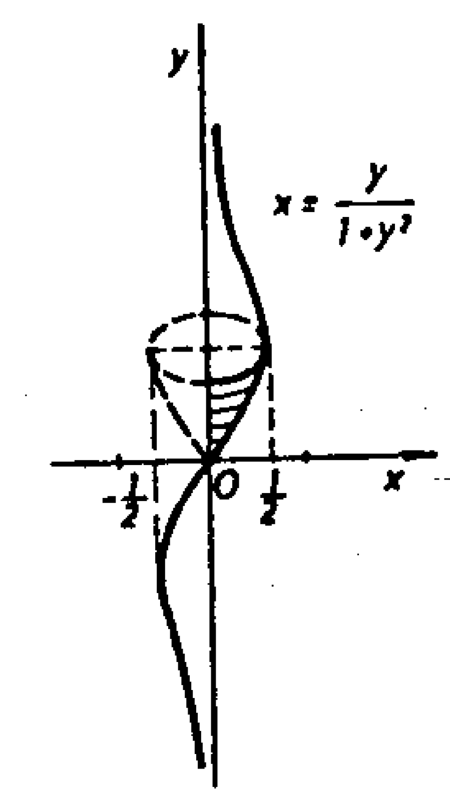
$$= \pi\int_0^{\sqrt{5}}(5-x^2)\,dx = \pi\left[5x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{3}\pi.$$

h) Kako je $x' = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$, $x'' = \frac{2y^3-6y}{(1+y^2)^3}$, $x' = 0$ za $y = \pm 1$, $x''(-1) = 1 > 0$, $x''(1) = -1 < 0$, $x'' = 0$ za $y_1 = 0$, $y_{2,3} = \pm\sqrt{3}$, to zaključujemo da funkcija ima maksimum $x_{\max} = x(1) = \frac{1}{2}$ i da njen grafik ima srednju prevojnu tačku $O(0,0)$ (sl. 4.9). Zato imamo

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy = \pi\int_0^1\frac{y^2}{(1+y^2)^2}\,dy = \ldots = \frac{\pi}{8}(\pi - 2).$$



Sl. 4.8.



Sl. 4.9.

i) Iz $x = a\ln\frac{a\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2-y^2}$ slijedi $\frac{dx}{dy} = \frac{\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, pa imamo (sl. 3.12)

$$V_x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\pi\int_a^b f^2(x)\,dx = 2\lim_{b\to+\infty}\pi\int_0^b y^2(x)\,dx = 2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{a} y^2\,dx(y) =$$

$$= 2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{a}\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy = \frac{-2\pi}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sqrt{(a^2-y^2)^3}\right]_{\varepsilon}^{a} = \frac{2}{3}a^3\pi,$$

tj. zapremina tijela koje ograničava tzv. *pseudosfera* jednaka je polovini zapremine *kugle* poluprečnika *a*.

j) Budući da se krug $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ ($|b| > r$) nalazi sa jedne strane ose rotacije i u istoj ravni kao i osa, to možemo primijeniti *Guldinovu teoremu;*

$$V_x = 2\pi|\eta|\,P = 2\pi|b|\,r^2\pi = 2|b|\,r^2\pi^2.$$

U to se možemo uvjeriti i direktnim izračunavanjem:

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \Rightarrow (y_1 = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \wedge y_2 =$$

$$= b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \Rightarrow V_x = \pi \int_{a-r}^{a+r} |f_2^2(x) - f_1^2(x)|\, dx =$$

$$= \pi \int_{a-r}^{a+r} |4b\sqrt{r^2 - (x-a)^2}|\, dx = 4|b|r\pi \int_{a-r}^{a+r} \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{r}\right)^2}\, dx =$$

$$= \left|\frac{x-a}{r} = \sin t\right| = 2|b|r^2\pi \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2|b|r^2\pi^2.$$

k) Riješiti samostalno.

4.2. Izračunati zapreminu obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem lika:

a) $S = \{(x, y) : x^4 \leqslant y^2 \leqslant x\}$ oko prave $l: x - y = 0$;

b) $S = \{(x, y) : [x = a(t - \sin t)] \wedge [0 \leqslant y \leqslant a(1 - \cos t)] \wedge$
$\wedge (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)\}$ oko prave $l: y = 2a$;

c) $S = \{(x, y) : (x^2 + y^2 - 2ax)^2 \leqslant 4a^2(x^2 + y^2)\}$ oko prave $y = 0$.

Rješenje.

a) Prema obrascu (4) imamo ($x^4 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$):

$$V_l = \pi \int_0^1 r^2(f, l) \frac{1}{|\cos a|}\, dx = \left| \begin{array}{l} a = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ r(f, l) = \dfrac{|x - f(x)|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|x - \sqrt{x}|}{\sqrt{2}} \left(= \dfrac{|x - x^2|}{\sqrt{2}} \right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (x - \sqrt{x})^2\, dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{60}.$$

b) $$V_l = \pi \int_0^{2a\pi} r^2(f, l) \frac{1}{|\cos a|}\, dx = \left| \begin{array}{ll} a = 0, & r(f, l) = \dfrac{|y - 2a|}{\sqrt{1}} \\ \cos a = 1 & \end{array} \right| =$$

$$= \pi \int_0^{2a\pi} (y - 2a)^2\, dx = \pi \int_0^{2\pi} [y(t) - 2a]^2 x'(t)\, dt =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos t)^2 a(1 - \cos t)\, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t (1 + \cos t)\, dt = a^3\pi^2.$$

c) $$V_x = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \varrho^3 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (2a)^3 (1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{16\pi}{3} a^3 \left[\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos^2\varphi + \cos^3\varphi + \frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^3.$$

4.3. Izračunati zapreminu obrtnog tijela koje nastaje obrtanjem lika ograničenog krivim datim analitički sa:

a) $y = 2px$, $y = R$, $x = h$ $(p, R, h > 0)$, oko ose Ox;

b) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$, $y = 0$, $|x| = a$, oko ose Ox;

c) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$, oko: 1°. ose Ox, 2°. ose Oy, 3°. prave $x = a\pi$;

d) $y = x^2$, $y^2 = x$, oko ose Ox;

e) $x^2 - y^2 = a^2$, $x = b$, $(b < a < 0)$ oko ose Ox;

f) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, oko ose Oy;

g) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = 0$, oko ose Ox;

h) $y = e^x\sqrt{\sin x}$ $(x \leqslant 0)$, $y = 0$, oko ose Ox;

i) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, oko prave $y = x$;

j) $\varphi = \pi\varrho^3$, $\varphi = \pi$, oko polarne ose.

Rezultat.

a) $\dfrac{\pi R^2 h}{2}$; b) $a^3\pi(1 + \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1)$;

c) 1°. $5\pi^2 a^3$, 2°. $6\pi^3 a^3$, 3°. $\dfrac{1}{6}\pi a^3 (9\pi^2 - 16)$;

d) $0{,}3\pi$; e) $\dfrac{\pi}{3}(a - b)(b - ab - a^2)$;

f) $\dfrac{32a^3\pi}{105}$; g) $\dfrac{\pi^2}{2}$;

h) $\dfrac{\pi}{5(e^{2\pi} - 1)}$; i) $\dfrac{\pi^2 a^3}{4}$;

j) $\dfrac{2}{3}\pi$.

4.4. Dat je lik $S = \left\{(x, y) : \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 \leqslant x \leqslant 1\right\}$. Izračunati površinu i zapreminu tijela koje nastaje obrtanjem datog lika S oko prave $y = -2$.

Rezultat.

$$P = 8\pi[2 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})], \quad V = \frac{16\pi}{3}.$$

4.5. Data je funkcija $f(x) = \frac{x^2 + \lambda}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $(\lambda \in R)$.

a) Nacrtati grafik date funkcije.

b) Izdvojiti krivu koja sa svojom asimptotom zatvara konačnu površinu.

c) Odrediti λ tako da je kriva, data jednačinom $y = 2\sqrt{x^2 + 1}$, geometrijsko mjesto tačaka čije su ordinate minimumi date funkcije.

d) Za određeno λ pod c), odrediti zapreminu i površinu obrtnog tijela koje nastaje rotacijom oko ose Oy lika ograničenog dijelom grafika date funkcije, geometrijskim mjestom tačaka čije su ordinate minimumi date funkcije i geometrijskim mjestom tačaka čije su ordinate maksimumi date funkcije.

INTEGRALNI RAČUN FUNKCIJA DVIJU I VIŠE PROMJENLJIVIH

III glava

VIŠESTRUKI INTEGRALI

1. Dvojni integral

Neka je D zatvorena i ograničena oblast u ravnini čiji je rub *parcijalno glatka* kriva C. Označimo sa P površinu oblasti D.

Neka je (τ) jedna podjela oblasti D na zatvorene oblasti $D_1, D_2, \ldots, D_n$, čiji su rubovi *parcijalno glatke zatvorene* krive $C_1, C_2, \ldots, C_n$, pri čemu bilo koje dvije oblasti D_i, D_j $(i \neq j)$ mogu imati zajedničke samo *rubne* tačke.

Označimo sa $\triangle D_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, odnosno sa P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ površine oblasti D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Za podjelu (τ) oblasti D imamo:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \quad P = \sum_{i=1}^{n} \triangle D_i = \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Neka je $f(x, y)$ ograničena funkcija na oblasti D i neka je (τ) jedna podjela oblasti D, gdje su x, y koordinate uzete u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu.

Neka su m_i, odnosno M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *donje*, odnosno *gornje mede* funkcije $f(x, y)$ na D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tada su

$$\underline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i$$

donja, a

$$\overline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i$$

gornja Darbouxova suma funkcije $f(x, y)$ na oblasti D za podjelu (τ).

Ako je $f(x, y)$ ograničena na oblasti D, tada se suma

$$S(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i,$$

naziva *integralna suma* funkcije $f(x, y)$ na oblasti D za izabranu podjelu (τ) i proizvoljno izabrane tačke $T_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Kazat ćemo da je funkcija $f(x, y)$ integrabilna na oblasti D ako postoji realan broj I takav da se za svako $\varepsilon > 0$ može naći $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sa osobinom da za svaku podjelu (τ) oblasti D i za svaki izbor tačaka $T_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ važi

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) < \delta \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i \right| < \varepsilon.$$

Ako je $f(x, y)$ integrabilna na oblasti D, tada pišemo

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i = \iint_D f(x, y)\, dP = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) \to 0 \ (n \to +\infty)$$

Ovaj integral naziva se *dvojnim* integralom funkcije $f(x, y)$ na oblasti D.

Ako je funkcija $f(x, y)$ ograničena na oblasti D, tada za svaku podjelu (τ) oblasti D i svako $T_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ vrijedi

$$mP \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i P_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \triangle D_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i P_i \leqslant MP.$$

Ako je $f(x, y)$ ograničena funkcija na oblasti D, tada postoji granična vrijednost donjih i granična vrijednost gornjih Darbouxovih suma, tj.

$$\underline{I} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \quad \overline{I} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i P_i,$$

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Granična vrijednost $\underline{I}$ je donji, a $\overline{I}$ je gornji integral funkcije $f(x, y)$ na oblasti D, što pišemo:

$$\underline{I} = \underline{\iint_D} f(x, y)\, dx\, dy; \quad \overline{I} = \overline{\iint_D} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Da bi funkcija $f(x, y)$ bila integrabilna na oblasti D, potrebno je i dovoljno da je $\overline{I} = \underline{I}$.

Ako je $f(x, y) = 1$ na D, tada je $\iint_D dx\, dy = P$.

Klase integrabilnih funkcija:

(1). Svaka neprekidna funkcija $f(x,y)$ na zatvorenoj (i ograničenoj) oblasti D je integrabilna.

(2). Ako je funkcija $f(x, y)$ ograničena na oblasti D i ima prekid na konačno mnogo krivih čija je površina 0, tada je ona integrabilna na datoj oblasti.

Neka je $f(x, y)$ neprekidna i nenegativna funkcija na oblasti D ravni Oxy. Volumen tijela koje je ograničeno s donje strane oblašću D, sa gornje strane dijelom površi $z = f(x, y)$, a sa bočne strane dijelovima pravih paralelnih z-osi i prolaze kroz rubne tačke oblasti D, definira se graničnom vrijednošću

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i P_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i P_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \triangle D_i =$$

$$\left(\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) \to 0,\ n \to +\infty\right) \qquad = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy.$$

Osnovne osobine dvojnog integrala

(1). Ako je $f(x, y)$ integrabilna na oblasti D, tada je i funkcija $\lambda f(x, y)$ $(\lambda \in R)$ integrabilna i vrijedi

$$\iint_D \lambda f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

(2). Ako su $f(x, y)$, $g(x, y)$ integrabilne funkcije na oblasti D, tada je i funkcija $\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)$ $(\lambda, \mu \in R)$ integrabilna i vrijedi

$$\iint_D (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y))\, dx\, dy = \lambda \iint_D f(x, y)\, dx\, dy +$$

$$+ \mu \iint_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

(3). Neka su D' i D'' zatvorene oblasti na koje je podijeljena oblast D, gdje su rubovi oblasti D' i D'' parcijalno glatka zatvorena kriva C' odnosno C''. Tada, za svaku funkciju $f(x, y)$ koja je integrabilna na D, važi

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D''} f(x, y)\, dx\, dy.$$

(4). Ako je funkcija $f(x, y)$ integrabilna na D, i ako je $f(x, y) \geqslant 0$ $(f(x, y) \leqslant 0)$ na D, tada je

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \geqslant 0 \left(\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leqslant 0\right).$$

(5). Neka je $f(x, y) \geqslant 0$ $(f(x, y) \leqslant 0)$ na oblasti D. Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na D, pa ako je bar u jednoj tački iz oblasti D $f(x, y) > 0$ $(f(x, y) < 0)$, onda je

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy > 0 \left(\iint_D f(x, y)\, dx\, dy < 0\right).$$

(6). Neka su $f(x, y)$ i $g(x, y)$ integrabilne funkcije na D. Ako je $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ $(f(x, y) \leqslant g(x, y))$ na D, tada je

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \geqslant \iint_D g(x, y)\, dx\, dy \left(\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \iint_D g(x, y)\, dx\, dy\right).$$

(7). Neka je $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ $(f(x,y) \leqslant g(x,y))$ na oblasti D. Ako su funkcije $f(x,y)$, $g(x,y)$ neprekidne na D, pa ako je bar u jednoj tački iz D $f(x,y) > g(x,y)$ $(f(x,y) < g(x,y))$, onda je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy > \iint_D g(x,y)\,dx\,dy \left(\iint_D f(x,y)\,dx\,dy < \right.$$

$$\left. < \iint_D g(x,y)\,dx\,dy\right).$$

(8). Ako je $f(x,y)$ integrabilna na oblasti D, tada je *i* $|f(x,y)|$ integrabilna na D i vrijedi

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Teorema o srednjoj vrijednosti:

(9). Ako je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na oblasti D, a $g(x,y)$ integrabilna i ne mijenja predznak u toj oblasti, tada je

$$\iint_D f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint_D g(x,y)\,dx\,dy,$$

gdje je μ broj koji se nalazi između donje i gornje međe funkcije $f(x,y)$ na oblasti D.

Ako je $g(x,y) = 1$, tada je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \mu \cdot P\,(= f(\xi,\eta) \cdot P,\ T(\xi,\eta) \in D).$$

(10). Neka je funkcija $f(x,y)$ integrabilna na oblasti $D = \{(x,y) / a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, tj. postoji dvojni integral ove funkcije na D. Ako za svako $x \in [a,b]$ postoji integral $\int_c^d f(x,y)\,dy$, tada postoji dvostruki integral $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$ i vrijedi jednakost

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ova jednakost pokazuje da se računanje dvojnog integrala svodi na uzastopno računanje dvaju jednostrukih.

Analogno, uz odgovarajuće uslove vrijedi jednakost

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

(11). Neka je funkcija $f(x,y)$ integrabilna na oblasti $D = \{(x,y) / a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, pri čemu su krive $y_1(x) = y$, $y = y_2(x)$ po dijelovima glatke. Ako uz date uvjete postoji integral

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \ (\forall x \in [a,b]),$$

tada postoji

$$\int_a^b I(x)\,dx$$

i vrijedi jednakost

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Analogno, uz odgovarajuće uvjete, vrijedi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

(12). Neka su na zatvorenoj oblasti D, čiji je rub po dijelovima glatka kriva, definirane neprekidne funkcije

(*) $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

Očigledno, time je dato preslikavanje oblasti D ravnine Oxy na neki podskup D' ravnine $O'uv$. Uzmimo da je to preslikavanje obostrano jednoznačno, tj. da postoje jedinstvene funkcije

(**) $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

definirane na D' takve da je

(***) $x = x(u(x,y), v(x,y))$, $y = y(u(x,y), v(x,y))$ $(\forall (x,y) \in D)$.

Ako funkcije (*) i (**) imaju neprekidne parcijalne izvode (prvog reda), tada na osnovu (***) veza između *Jakobiana* tih funkcija glasi

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1,$$

tj.

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0 (\forall (u,v) \in D').$$

Ako je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na oblasti D, tada na osnovu učinjenih pretpostavki vrijedi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv.$$

Nesvojstveni integral po ograničenoj oblasti

Neka je D ograničena oblast u ravnini Oxy čiji je rub po dijelovima glatka kriva C. Uzmimo da je funkcija $f(x, y)$ neograničena u svakoj okolini tačke $T \in D$. Neka je G oblast koja se sadrži u D i sadrži tačku T. Neka je $G_0 \supset G$ okolina tačke $T\,(G_0 \subset D)$ čiji je rub po dijelovima glatka kriva C_0. Pretpostavimo da postoji svojstveni integral

$$I(G_0) = \iint\limits_{D\setminus G_0} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Označimo sa $d = \operatorname{diam}(G_0)$.

Ako postoji konačna granična vrijednost

$$(1).\ \mathcal{J}(G_0) = \lim_{d\to 0} I(G_0) = \lim_{d\to 0} \iint\limits_{D\setminus G_0} f(x, y)\,dx\,dy,$$

tada pišemo

$$(2).\ \iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{d\to 0} \iint\limits_{D\setminus G_0} f(x, y)\,dx\,dy$$

i kažemo da *nesvojstveni integral* $\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy$ *konvergira*.

Ako $\lim\limits_{d\to 0} I(G_0)$ ne postoji ili je $+\infty\ (-\infty)$, onda kažemo da integral *divergira*.

Tačka T je *singularna* tačka.

Ova definicija se proširuje i na slučaj kad u oblasti D postoje dvije ili više *singularnih* tačaka.

Nesvojstveni integral po neograničenoj oblasti

Neka je D neograničena oblast ravnine Oxy i neka je na D data neka funkcija $f(x, y)$ (ne mora biti ograničena) koja je integrabilna u običnom smislu na svakoj ograničenoj zatvorenoj oblasti $G \subset D$, pri čemu je rub C od G po dijelovima glatka zatvorena kriva koja u svojoj unutrašnjosti sadrži koordinatni početak. Oblast D je takva da je presjek od D i zatvorene oblasti koju određuje C, također zatvorena oblast. Označimo sa r najveće odstojanje tačaka krive C od koordinatnog početka. Oblasti $G \subset D$, odnosno krive C odabiramo tako da kad $r \to +\infty$ kriva C obuhvaća sve veći dio oblasti D, pri tome $r_2 > r_1 \Rightarrow G_2 \supset G_1$.

Pretpostavimo da postoji integral

$$(1)'\ I(G) = \iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Ako postoji granična vrijednost (1)$'$ kad $r \to +\infty$, tada pišemo

$$(2)'\ \iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{r\to+\infty} \iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy$$

i kažemo da *nesvojstveni* integral $\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy$ *konvergira*.

Ako $\lim\limits_{r\to+\infty} I(G)$ ne postoji ili je $+\infty\ (-\infty)$, kažemo da integral *divergira*.

Uz uslove kao i kod dvostrukog svojstvenog integrala, postoji mogućnost uvođenja zamjene promjenljivih, tj. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, odnosno $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Za nesvojstvene integrale (2) i (2)$'$ važi

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv.$$

Zadaci (1.1—1.74)

1.1. Izračunati po definiciji $I = \iint\limits_{D} xy\,dx\,dy$, gdje je $D = \{(x, y)/0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$.

Rješenje.

Funkcija $f(x, y) = xy$ neprekidna je na oblasti D, pa zato I postoji. Podijelimo oblast D pravcima $x = \frac{a}{k}\,i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ i $y = \frac{b}{l}\,j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, l)$ na $k \times l$ pravougaonika.

U tački $\left(\frac{a}{k}(i-1), \frac{b}{l}(j-1)\right)$ pravougaonika čija su tjemena

$$\left(\frac{a}{k}(i-1), \frac{b}{l}(j-1)\right), \left(\frac{a}{k}i, \frac{b}{l}(j-1)\right), \left(\frac{a}{k}i, \frac{b}{l}j\right), \left(\frac{a}{k}(i-1), \frac{b}{l}j\right),$$

vrijednost funkcije xy je $\frac{a}{k}(i-1)\frac{b}{l}(j-1)$. Kako je $x_i - x_{i-1} = \frac{a}{k}$, $y_j - y_{j-1} = \frac{b}{l}$, a I postoji, imamo po definiciji,

$$\iint\limits_{D} xy\,dx\,dy = \lim_{\substack{k\to+\infty\\ l\to+\infty}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \frac{a}{k}(i-1)\frac{b}{l}(j-1)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \lim_{\substack{k\to+\infty\\ l\to+\infty}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \frac{a}{k}(i-1)\frac{b}{l}(j-1)\frac{ab}{kl} = \lim_{\substack{k\to+\infty\\ l\to+\infty}} \frac{a^2b^2}{k^2l^2}\sum_{i=1}^{k}(i-1)\sum_{j=1}^{l}(j-1) =$$

$$\lim_{\substack{k\to+\infty\\ l\to+\infty}} \frac{a^2b^2}{k^2l^2}\,\frac{(k-1)k}{2}\,\frac{(l-1)l}{2} = \frac{a^2b^2}{4},$$

pri čemu $\max\limits_{\substack{i=1,2,\ldots,k\\ j=1,2,\ldots,l}} \operatorname{diam}([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) \to 0$.

1.2. Izračunati po definiciji $I = \iint\limits_{D} e^x y\,dx\,dy$, gdje je

$$D = \{(x, y)/0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\}.$$

Rješenje.

Funkcija $f(x, y) = e^x y$ neprekidna je na datoj oblasti D, pa je i integrabilna na toj oblasti. Podijelimo oblast D pravcima $x = \frac{i}{k}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$, $y = 1 + \frac{2j}{l}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, l)$ na $k \times l$ pravougaonika.

U tački $\left(\frac{i}{k}, 1 + \frac{2j}{l}\right)$ pravougaonika sa tjemenima

$$\left(\frac{i-1}{k}, 1 + \frac{2(j-1)}{l}\right), \left(\frac{i}{k}, 1 + \frac{2(j-1)}{l}\right), \left(\frac{i}{k}, 1 + \frac{2j}{l}\right), \left(\frac{i-1}{k}, \frac{2j}{l}\right)$$

$(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, l)$

vrijednost funkcije

$$e^x y \text{ je } e^{\frac{i}{k}}\left(1 + \frac{2j}{l}\right).$$

Po definiciji dvojnog integrala imamo

$$I = \lim_{\substack{k \to +\infty \\ l \to +\infty}} \sum_{k=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} e^{\frac{i}{k}} \left(1 + \frac{2j}{l}\right)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$\max_{\substack{i=1,2,\ldots,k \\ j=1,2,\ldots,l}} \operatorname{diam}([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) \to 0$$

$$= \lim_{\substack{k \to +\infty \\ l \to +\infty}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} e^{\frac{i}{k}} \left(1 + \frac{2j}{l}\right) \frac{1}{k} \frac{2}{l} =$$

$$= 2 \lim_{\substack{k \to +\infty \\ l \to +\infty}} \frac{1}{kl} \sum_{i=1}^{k} e^{\frac{i}{k}} \sum_{j=1}^{l} \left(1 + \frac{2j}{l}\right) =$$

$$= 2 \lim_{k, l \to +\infty} \frac{1}{kl} e^{\frac{1}{k}} \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{k}} - 1} \left(l + 2\frac{l+1}{2}\right) = 4(e - 1).$$

1.3. Izračunaj po definiciji

$$I = \iint_D \frac{\ln xy}{xy} \, dx \, dy,$$

gdje je

$$D = \{(x, y)/1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}.$$

1.4. Ocijeniti vrijednost dvojnog integrala

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{\cos^2 x + \sin^2 y + 1},$$

gdje je

$$D = \{(x, y)/0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}.$$

Rješenje.

Funkcija

$$f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 y + 1}$$

je neprekidna na oblasti D, pa je integrabilna na D.

Iz

$$0 < \cos^2 x + \sin^2 y < 2$$

slijedi

$$1 < \cos^2 x + \sin^2 y + 1 < 3,$$

a odavde

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 y + 1} < 1.$$

Otuda iz (7) slijedi

$$\frac{\pi^2}{3} < \iint_D \frac{dx\,dy}{\cos^2 x + \sin^2 y + 1} < \pi^2.$$

1.5. (a). Pomoću teorema o srednjoj vrijednosti ocijeniti integral

$$I = \iint_D \sin x \sin y\, e^x y \, dx \, dy,$$

gdje je

$$D = \{(x, y)/0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}.$$

Rješenje.

Funkcija $f(x, y) = \sin x \sin y$ neprekidna je na oblasti D, a $g(x, y) = e^x y$ integrabilna je i ne mijenja predznak na oblasti D. Zbog toga je

$$\iint_D \sin x \sin y \cdot e^x y \, dx \, dy = \mu \iint_D e^x y \, dx \, dy, \quad m < \mu < M,$$

m donja, M gornja međa funkcije $f(x, y)$) na D.

Postupkom za računanje ekstremuma funkcije dvije promjenljive pokazuje se da funkcija $\sin x \sin y$ u tački $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ima minimum čija je vrijednost -1, a u tački $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ima maksimum čija je vrijednost 1. Prema tome imamo $-1 < \mu < 1$.

Kako je (zadatak 1.2. Gl. III)

$$\iint_D e^x y \, dx \, dy = 2\pi^2 (e^\pi - 1),$$

to je

$$2\pi^2 (1 - e^\pi) < \iint_D \sin x \sin y \cdot e^x y \, dx \, dy < 2\pi^2 (e^\pi - 1).$$

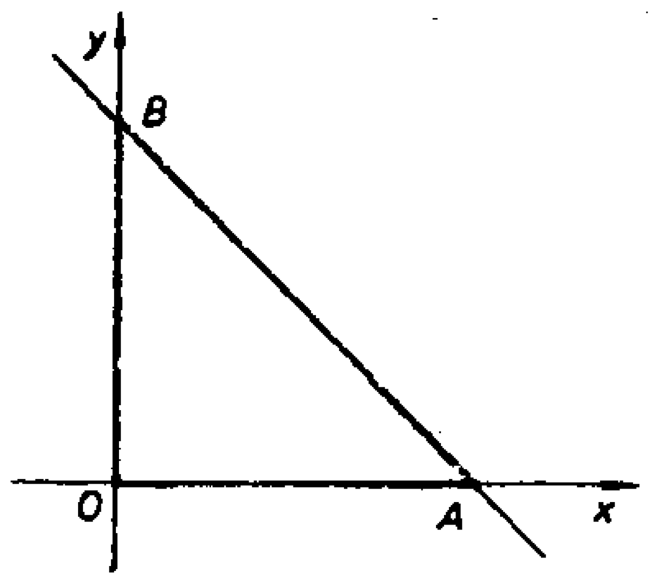
1.5. (b). Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti procijeniti integral

$$\iint_D e^{-x-y}\, xy\,(2-x-y)\,dx\,dy,$$

gdje je D trokut ograničen pravcima: $x=0,\ y=0,\ x+y=4.$

Rješenje.

Neka je $f(x,y)=xy(2-x-y)$ i $g(x,y)=e^{-x-y}$. Pošto je $f(x,y)$ neprekidna funkcija na D, a $g(x,y)$ integrabilna i pozitivna, to su ispunjeni svi uslovi teorema o srednjoj vrijednosti.



Sl. 1.1.

Odredimo najmanju i najveću vrijednost funkcije $f(x,y)$ na oblasti D.

Iz

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y-2xy-y^2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x-2xy-x^2=0$$

slijedi:

$$x=0,y=0;\ x=\frac{2}{3},\ y=\frac{2}{3};\ x=2,y=0;\ x=0,\ y=2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2-2x-2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x.$$

U tački $T_1(0,0)$ je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=-4\ (<0)$, pa funkcija $f(x,y)$ u ovoj tački nema ekstremuma. Isto tako u tačkama $T_3(2,0)$ i $T_4(0,2)$ funkcija $f(x,y)$ nema ekstremuma.

U tački $T_2\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=\dfrac{4}{3}\ (>0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{4}{3}\ (<0)$, pa funkcija $f(x,y)$ u ovoj tački ima maksimum $f\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$. Na duži OA i duži OB funkcija $f(x,y)$ je identički jednaka nula.

Ispitat ćemo funkciju $f(x,y)$ na duži AB. Zato ćemo ispitati funkciju $\varphi(x)=f(x,4-x)=2x(x-4)$.

$$\varphi'(x)=4x-8,\ 4x-8=0\Leftrightarrow x=2,$$

$$\varphi''(x)=4\ (>0).$$

Prema tome, funkcija $\varphi(x)$ ima minimum za $x=2$, $\varphi(2)=-8$. Prema tome, u tački $T(2,2)$ imamo $f(2,2)=-8$.

Otuda je $-8<f(x,y)<\dfrac{8}{27}$ za svako $(x,y)\in D$.

$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy=\int_0^4\int_0^{4-x}e^{-x-y}\,dx\,dy=1-\frac{5}{e^4}.$$

Pošto je

$$\iint_D e^{-x-y}\,xy(2-x-y)\,dxdy=\mu\iint_D e^{-x-y}\,dx\,dy$$

i

$$-8<\mu<\frac{8}{27},$$

to je

$$8(5e^{-4}-1)<\iint_D e^{-x-y}\,xy(2-x-y)\,dx\,dy<\frac{8}{27}(1-5e^{-4}).$$

1.6. Ispitati da li postoji granična vrijednost

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ D=\{(x,y)/x^2+y^2\leqslant\varrho^2\}.$$

1.7. Izračunati integrale:

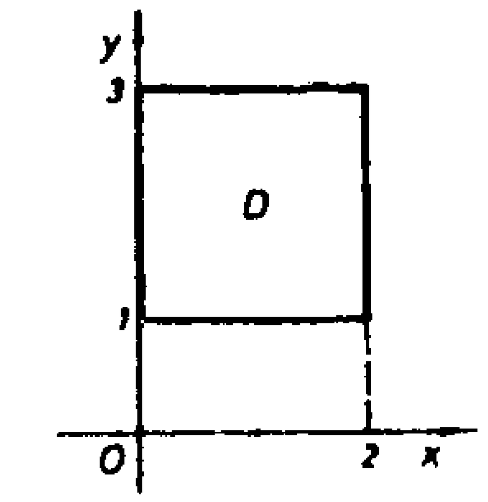
1°. $\displaystyle\iint_D (x+y^2)\,dx\,dy,\ D=\{(x,y)/0\leqslant x\leqslant 2,\ 1\leqslant y\leqslant 3\};$

2°. $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy,\ D=\left\{(x,y)/0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right\};$

3°. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3},\ D=\{(x,y)/2\leqslant x\leqslant 3,\ 1\leqslant y\leqslant 4\}.$

Rješenja.

1°. $$\iint_D (x+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_1^3 (x+y^2)\,dy.$$



Sl. 1.1a.

Kod izračunavanja integrala $\displaystyle\int_1^3 (x+y^2)\,dy$ uzima se da je x konstanta, tj.

$$\int_1^3 (x+y^2)\,dy=\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]_1^3=2x+\frac{26}{3}.$$

Otuda je

$$\iint_D (x+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\left(2x+\frac{26}{3}\right)dx=\frac{64}{3}.$$

$$2^\circ.\quad \iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2} [\cos(x+y)]_0^{\pi/2}\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos y - \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} (\cos y + \sin y)\,dy = 2.$$

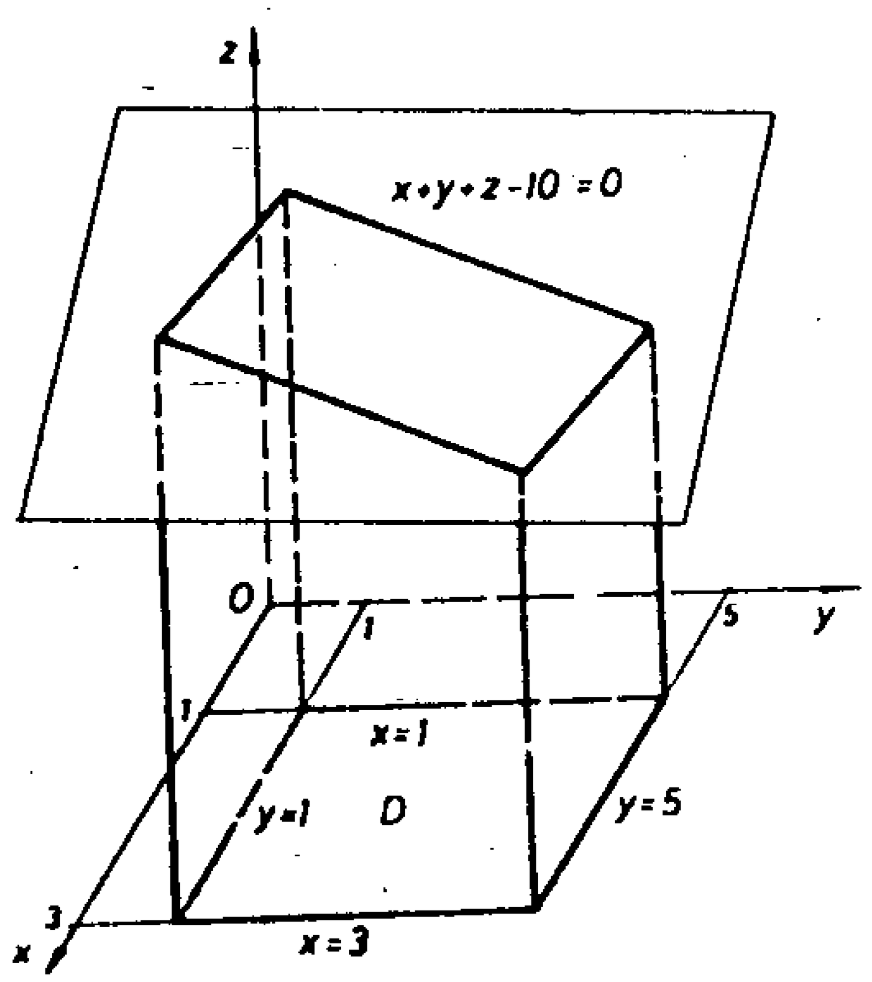
3°. ***Rezultat***, $\dfrac{5}{168}$.

1.8. Izračunati volumen tijela ograničenog ravninama: $x = 1$, $y = 1$, $x = 3$, $y = 5$, $z = 0$ i ravninom $x + y + z - 10 = 0$.

Rješenje.

$$V = \iint\limits_D z\,dx\,dy = \iint\limits_D (10 - x - y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_1^3 dx \int\limits_1^5 (10 - x - y)\,dy = 40.$$



Sl. 1.2.

1.9. Izračunati volumen tijela ograničenog ravninama: $x = 1$, $y = 1$, $x = 3$, $y = 5$, i ravninama $2x + z - 4 = 0$, $z = 0$.

Uputstvo.

Oblast D podijeliti na oblasti D_1 i D_2, tako da je na D_1 funkcija $z = 4 - 2x$ pozitivna, a na D_2 negativna.

1.10. Izračunati volumen tijela ograničenog ravninama: $x = -4$, $x = 4$, $z = 3$, $z = -3$, $y = 0$ i paraboloidom $y = x^2 + z^2 + 1$.

Rješenje.

Zbog simetričnosti, dovoljno je izračunati volumen tijela ograničenog ravninama:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 4,\ z = 3$$

i površi

$$y = x^2 + z^2 + 1,$$

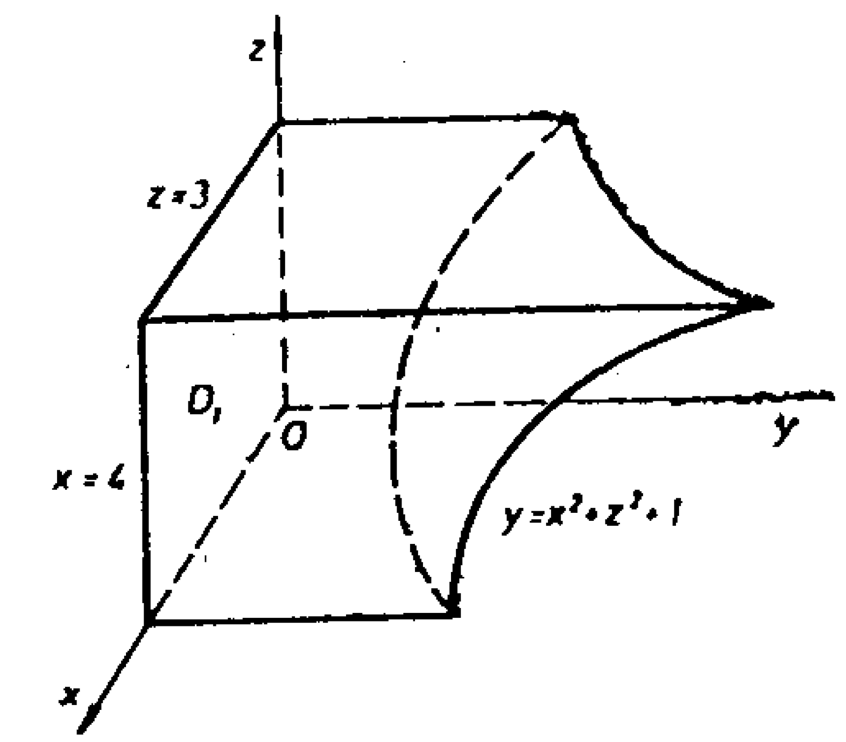
tj.

$$V_1 = \iint\limits_{D_1} (x^2 + z^2 + 1)\,dx\,dz,$$

pa je

$$V = 4V_1.$$

$$V = 4\iint\limits_{D_1} (x^2 + z^2 + 1)\,dx\,dz = 4\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^3 (x^2 + z^2 + 1)\,dz = 448.$$



Sl. 1.3.

1.11. Izračunati volumen tijela ograničenog ravninama: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i ravninom $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

1.12. Izračunati integrale:

$$1^\circ.\quad I = \iint\limits_D \frac{x^3\,dx\,dy}{1+y^2},\quad D = \{(x,y)/0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}\};$$

$$2^\circ.\quad I = \iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},\quad D = \{(x,y)/0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

1.13. Izračunati

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

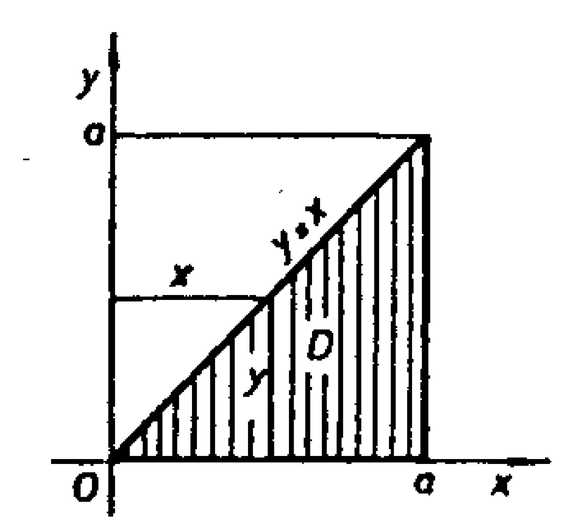
$$D = \{(x,y)/0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}.$$

Rješenje.

Prvi način:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \frac{x^2\,dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \int\limits_0^a \left[x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right]_0^x dx = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^a x\,dx = \frac{a^2\pi}{8}.$$



Sl. 1.4.

Drugi način:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^a dy \int_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx.$$

$$\int_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx = \int_y^a \frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx = \int_y^a dx - \int_y^a \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx =$$

$$= (a-y) - \left[y \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right]_y^a = (a-y) - y \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y} + \frac{\pi}{4}\,y;$$

$$(*)\quad \int_0^a dy \int_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx = \frac{a^2}{2} + \frac{\pi}{8}\,a^2 - \int_0^a y \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y}\,dy;$$

$$\int_0^a y \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y}\,dy = \left[u = y,\ dv = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y}\,dy\right] =$$

$$= \left[y^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y} + \frac{a}{2}\,y \ln(y^2+a^2)\right]_0^a - \int_0^a y \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y}\,dy - \frac{a}{2}\int_0^a \ln(a^2+y^2)\,dy;$$

$$(**)\quad \int_0^a y \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y}\,dy = \frac{a^2\pi}{8} + \frac{a^2\ln(2a^2)}{4} - \frac{a}{4}\int_0^a \ln(y^2+a^2)\,dy;$$

$$\int_0^a \ln(y^2+a^2)\,dy = \begin{bmatrix} dy = dv \\ u = \ln(y^2+a^2) \end{bmatrix} =$$

$$= [y\ln(y^2+a^2)]_0^a - 2\int_0^a \frac{y^2}{y^2+a^2}\,dy =$$

$$a\ln(2a^2) - 2a + 2\int_0^a \frac{a^2}{y^2+a^2}\,dy = a\ln(2a^2) - 2a + 2a\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{a}\right]_0^a,$$

tj.

$$({}^{*}{}_{*}{}^{*})\quad \int_0^a \ln(y^2+a^2)\,dy = a\ln(2a^2) - 2a + \frac{a\pi}{2}.$$

Iz jednakosti $(*)$, $(**)$, $({}^{*}{}_{*}{}^{*})$ slijedi

$$\int_0^a dy \int_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx = \frac{a^2\pi}{8}.$$

Prema tome je

$$\int_0^a dx \int_0^x \frac{x^2\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^a dy \int_y^a \frac{x^2\,dx}{x^2+y^2}.$$

1.14. Izračunati površinu oblasti

$$D = \{(x, y)/0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}.$$

Rješenje.

$$P = \iint\limits_D dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^x dy = \int_0^a [y]_0^x\,dx = \int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$$

1.15. Izračunati volumen tijela ograničenog ravninama: $x = 0$, $y = a$, $z = 0$, $y = x$ i površi čija je jednačina $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} - z = 0$.

Rezultat.

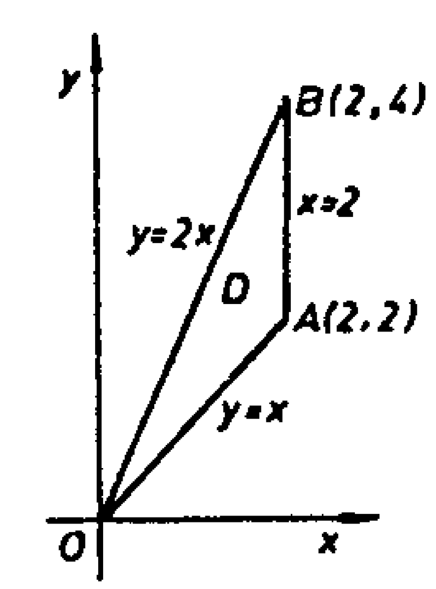
$$V = \frac{a^2}{2}\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

1.16. Odrediti granice integracije za integral $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ ako je oblast D trougao s vrhovima: $O(0, 0)$, $A(2, 2)$, $B(2, 4)$, pri čemu je $f(x, y)$ neprekidna funkcija na D.

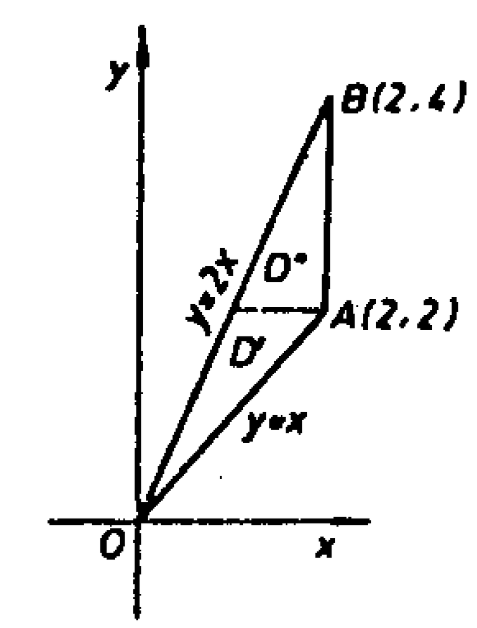
Rješenje.

Oblast D omeđena je pravcima $x = 2$, $y = x$, $y = 2x$. Zbog toga, granice integracije u poretku $\int dx \int f(x, y)\,dy$ su

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y)\,dy \quad \text{(sl. 1.5.).}$$



Sl. 1.5.



Sl. 1.6.

Za promjenu redoslijeda integracije moramo izraziti x eksplicitno pomoću y.

Iz $y = x$ slijedi $x = y$, a iz $y = 2x$ slijedi $x = \dfrac{y}{2}$. Pošto je oblast D s desne strane omeđena pravcima $y = x$, $x = 2$, pri promjeni redoslijeda integracije moramo je dijeliti na oblasti D' i D'' (sl. 1.6).

Za odabrani redoslijed imamo

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D''} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

1.17. Odrediti granice integracije u integralu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ ako je D četverougaonik s vrhovima: $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(3,9)$, $D(1,5)$.

Rješenje.

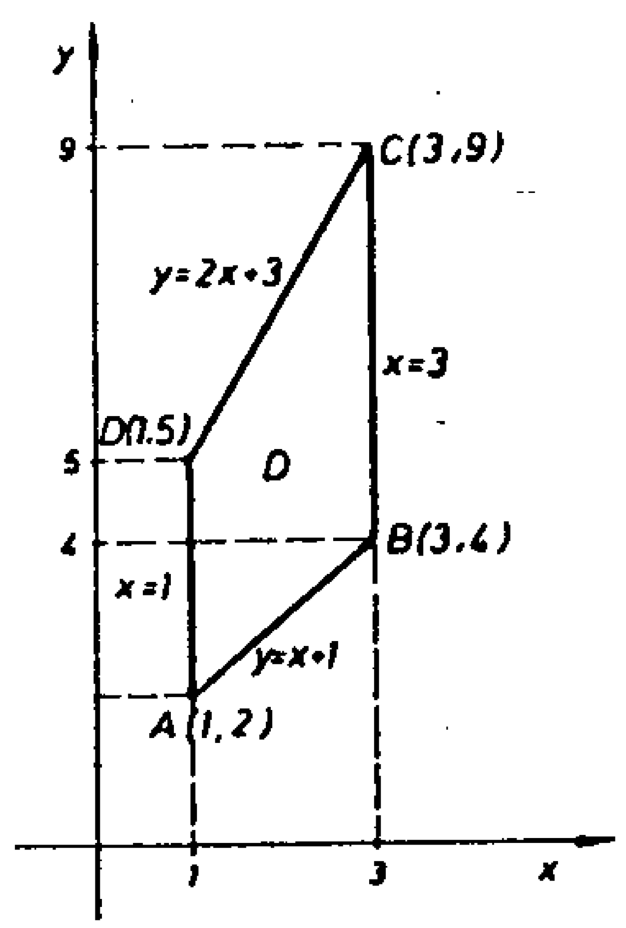
Odredimo jednačine granica oblasti D. Jednačina pravca koji prolazi kroz tačke $A(1,2)$ i $B(3,4)$ je $y = x + 1$, a jednačina pravca kroz $D(1,5)$ i $C(3,9)$ je

$y = 2x + 3$ (sl. 1.7.).

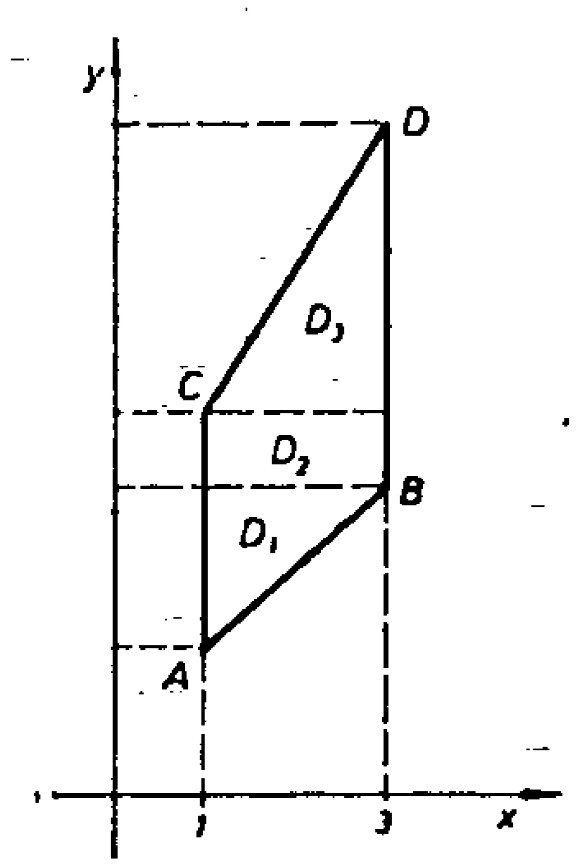
$D = \{(x,y)/1 < x < 3,\ x + 1 < y < 2x + 3\}$.

Imamo

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 dx \int_{x+1}^{2x+3} f(x,y)\,dy.$$



Sl. 1.7.



Sl. 1.8.

Da bismo promijenili redoslijed integracije moramo izraziti x eksplicitno pomoću y. Iz $y = x + 1$ imamo $x = y - 1$, a iz $y = 2x + 3$ imamo $x = \dfrac{y-3}{2}$.

Oblast D (sl. 1.8) podijelimo na oblasti:

$D_1 = \{(x,y)/2 < y < 4,\ 1 < x < y - 1\}$,

$D_2 = \{(x,y)/4 < y < 5,\ 1 < x < 3\}$,

$D_3 = \left\{(x,y)/5 < y < 9,\ \dfrac{y-3}{2} < x < 3\right\}$.

Dakle, imamo

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_2^4 dy \int_1^{y-1} (x,y)\,dx + \int_4^5 dy \int_1^3 f(x,y)\,dx + \int_5^9 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{3} f(x,y)\,dx.$$

1.18. Odrediti granice integracije u integralu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ ako je D oblast ograničena dijelovima krivih čije su jednačine: $y = x^3$, $y = x^2$.

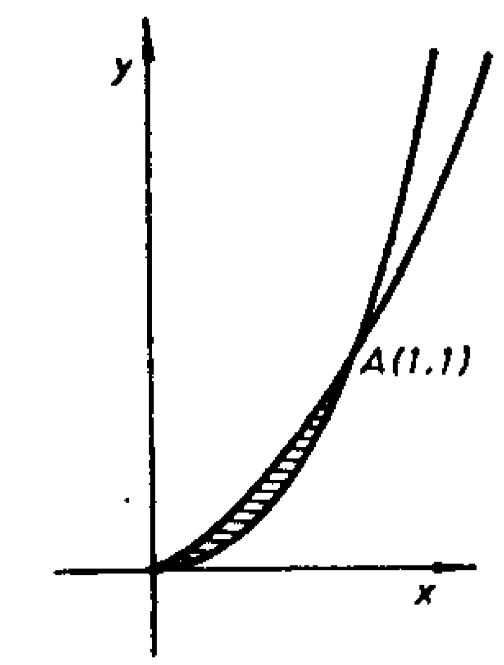
Rješenje.

Rješenjem sistema jednačina $x^3 - y = 0$, $x^2 - y = 0$ dobivamo da se date krive sijeku u tačkama:

$O(0,0)$, $A(1,1)$.

Prema tome je

$D = \{(x,y)/0 < x < 1,\ x^3 < y < x^2\}$,



Sl. 1.9.

pa je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy.$$

Za promjenu redoslijeda integracije izrazimo x eksplicitno pomoću y. Iz $y = x^3$ slijedi $x = \sqrt[3]{y}$, a iz $y = x^2$ slijedi $x = \sqrt{y}$. Sada je

$D = \{(x,y)/0 < y < 1,\ \sqrt{y} < x < \sqrt[3]{y}\}$ (sl. 1.9.),

pa je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx.$$

1.19. Odrediti granice integracije u integralu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ ako je D oblast data na sljedeći način

$$D = \{(x,y)/0 \leqslant x \leqslant 2,\ \sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant e^x \wedge \sqrt{x-1} \leqslant y \leqslant e^x\}.$$

Rješenje.

Oblast D podijelit ćemo na oblasti D_1, D_2 (sl. 1.10), gdje je

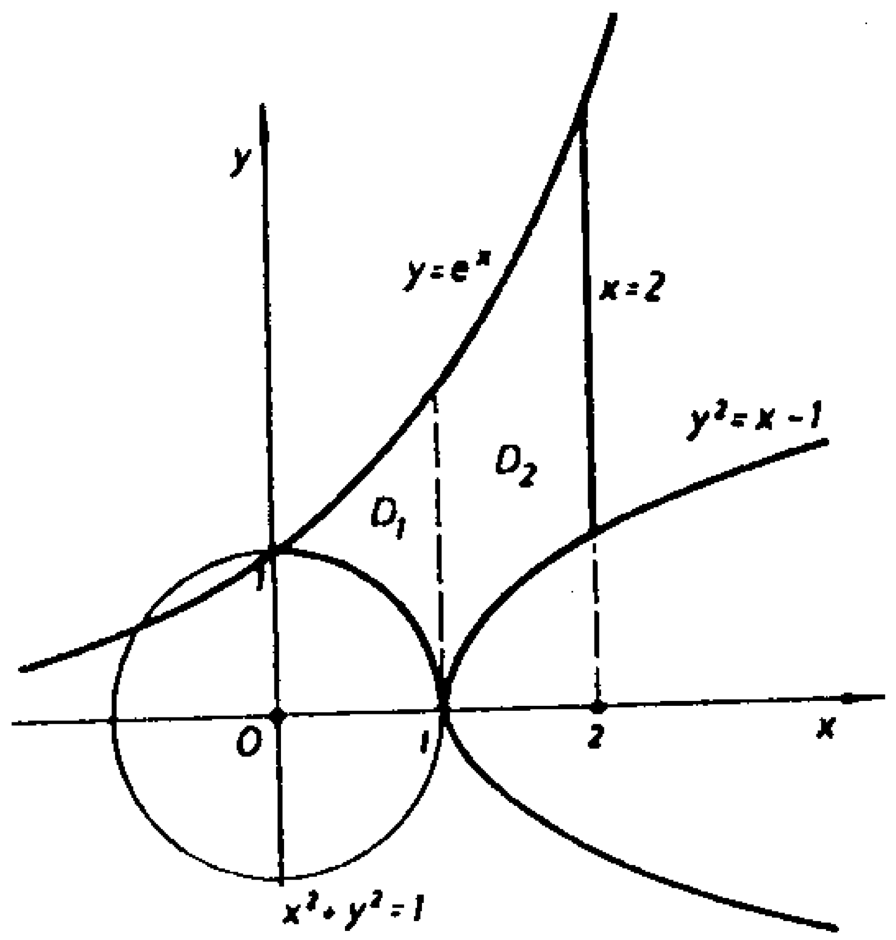
$D_1 = \{(x,y)/0 < x < 1,\ \sqrt{1-x^2} < y < e^x\}$,

$D_2 = \{(x,y)/1 < x < 2,\ \sqrt{x-1} < y < e^x\}$.

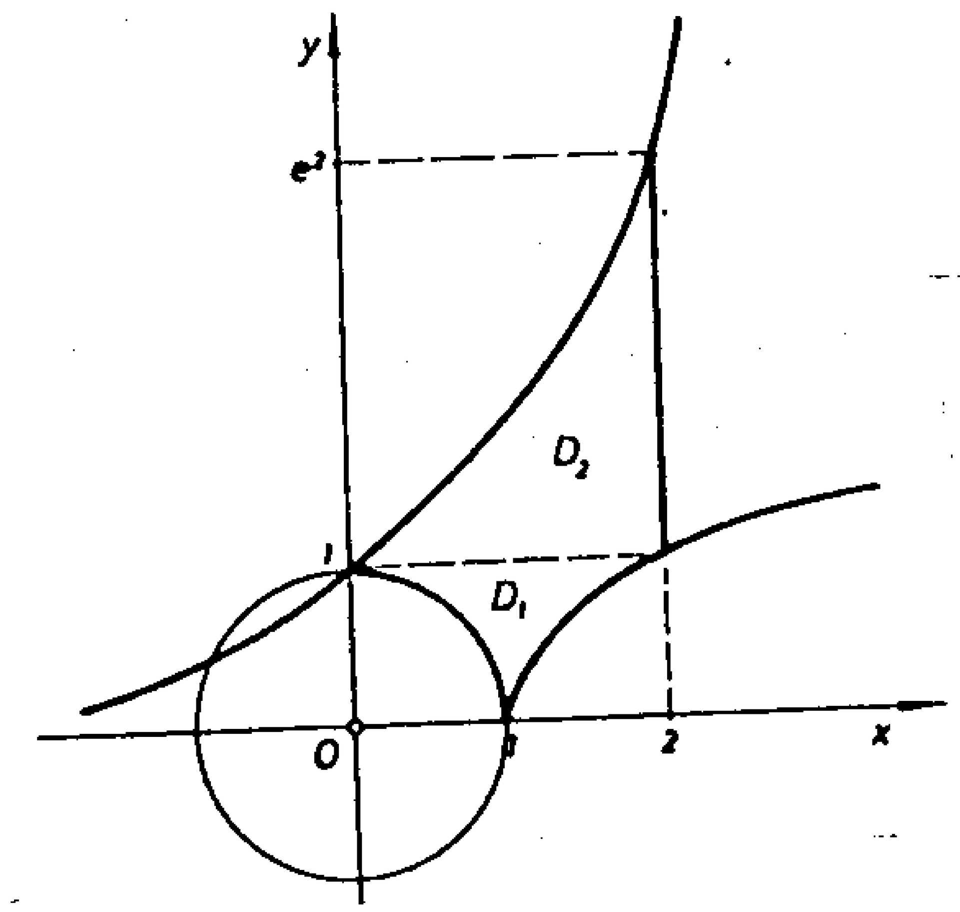
Otuda je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2-1}}^{e^x} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^{e^x} f(x,y)\,dy.$$



Sl. 1.10.



Sl. 1.11.

Da bismo izračunali dati integral u promijenjenom redoslijedu integracije, oblast D treba podijeliti na oblasti (sl. 1.11.):

$$D_1 = \{(x,y)/0 < y < 1,\ \sqrt{1-y^2} < x < 1+y^2\},$$

$$D_2 = \{(x,y)/1 < y < e^2,\ \ln y < x < 2\}.$$

Sada je

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1+y^2} f(x,y)\,dx + \int_1^{e^2} dy \int_{\ln y}^{2} f(x,y)\,dx.$$

1.19.1. Odrediti granice integracije u integralu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ ako je D oblast ograničena dijelovima krivih čije su jednačine: $y^2 = -x$, $x^2 + y^2 = 2$ $(y^2 + x \leqslant 0)$.

Rješenje.

Krive $y^2 = -x$, $x^2 + y^2 = 2$ sijeku se u tačkama $A(-1,-1)$, $B(-1,1)$. Zato ćemo oblast D podijeliti na oblasti (sl. 1.12):

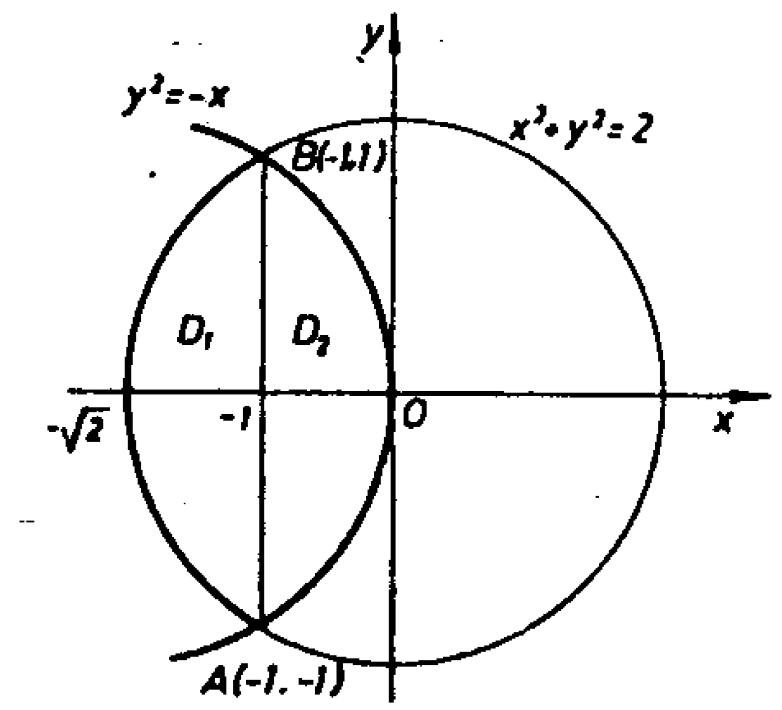
$$D_1 = \{(x,y)/-\sqrt{2} < x < -1,\ -\sqrt{2-x^2} < y < \sqrt{2-x^2}\},$$

$$D_2 = \{(x,y)/-1 < x < 0,\ -\sqrt{-x} < y < \sqrt{-x}\}.$$

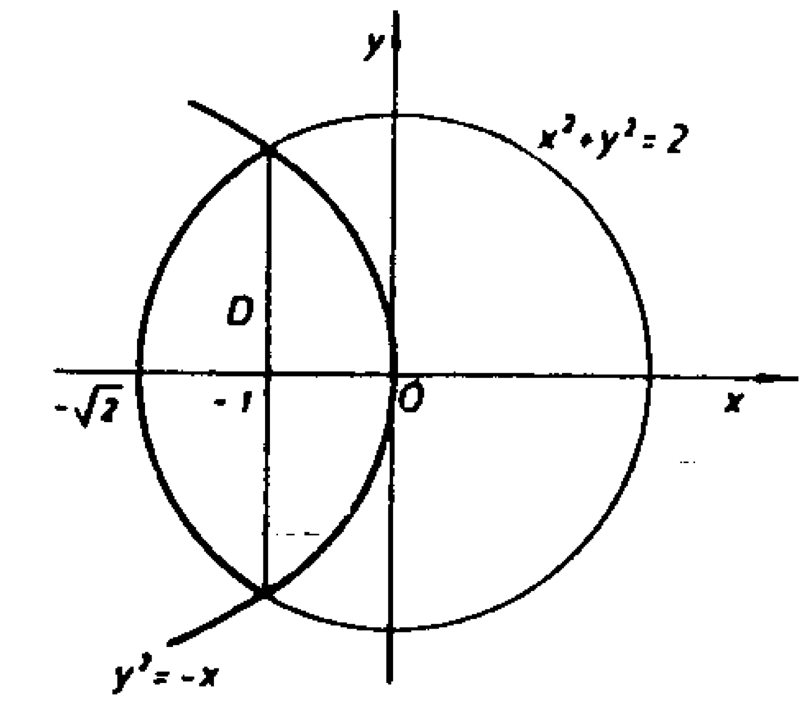
Integriranje ćemo izvesti na sljedeći način:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x}}^{\sqrt{-x}} f(x,y)\,dy.$$



Sl. 1.12.



Sl. 1.13.

Pri promjeni poretka integriranja bit će:

$$D = \{(x,y)/-1 < y < 1,\ -\sqrt{2-y^2} < x < -y^2\}\ \text{(sl. 1.13.)}.$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{-y^2} f(x,y)\,dx.$$

1.20. Odrediti granice integracije u integralu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, ako je:

1°. Oblast D ograničena dijelovima krivih $y = x^2$, $y + x - 6 = 0$ i dijelom ose Ox $(y - x^2 \leqslant 0)$.

2°. Oblast D ograničena dijelom krive $x^2 + y^2 = 1$, te dijelovima pravca $x + y = 1$ i ose Ox.

3°. Oblast D ograničena dijelom krive $y = x^2 - 1$ i dijelom pravca $y - x - 1 = 0$.

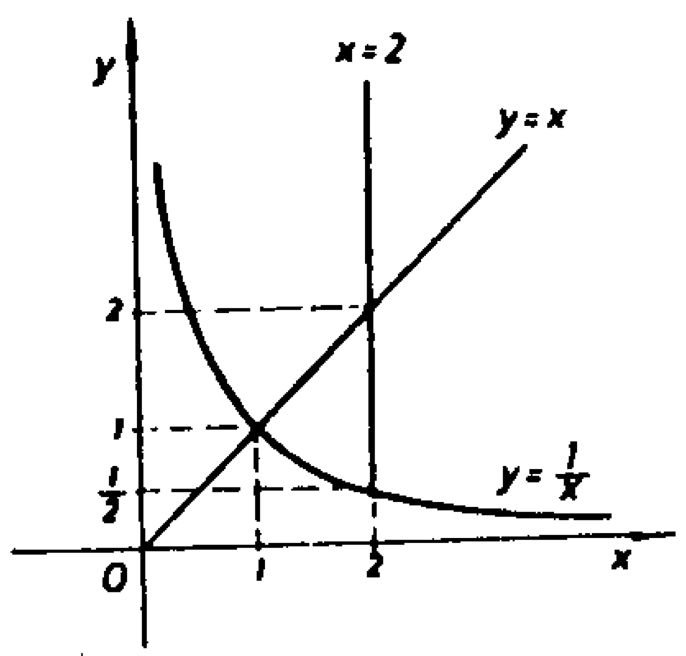
1.21. Izračunati integral $\iint_D x^2 y^{-2}\,dx\,dy$ ako je oblast D ograničena dijelovima pravaca $x = 2$ i $y = x$, te dijelom krive $y = \dfrac{1}{x}$.

Rješenje.

Kako je

$$D = \left\{(x,y)/1 < x < 2,\ \frac{1}{x} < y < x\right\}\ \text{(sl. 1.14)},$$

to je



Sl. 1.14.

$$\iint_D x^2 y^{-2}\,dx\,dy = \int_1^2 x^2\,dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx =$$

$$= \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \frac{9}{4}.$$

U izmijenjenom redoslijedu integracije imamo

$$\iint_D x^2 y^{-2}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dy}{y^2}\int_{\frac{1}{y}}^{2} x^2\,dx + \int_1^2 \frac{dy}{y^2}\int_y^2 x^2\,dx = \frac{9}{4}.$$

1.22. Izračunati površinu oblasti D koja je data u zadatku 1.21.

Rješenje.

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} dy = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2} - \ln 2.$$

Ako promijenimo redoslijed integracije, imamo

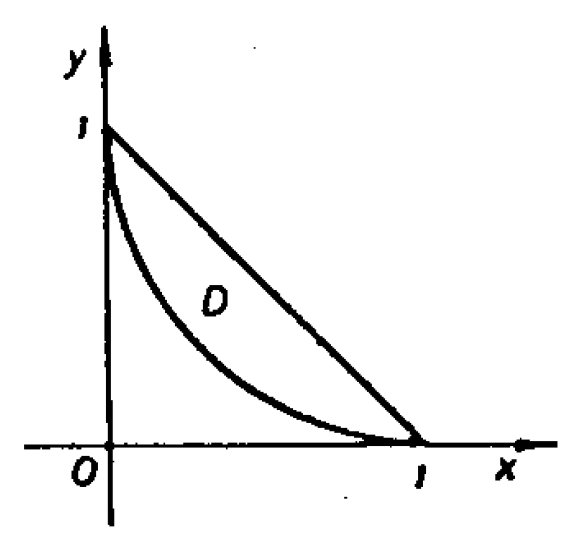
$$P = \iint_D dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} dx + \int_1^2 dy \int_y^2 dx = \frac{9}{4}.$$

1.23. Izračunati integral $\iint_D x\,dx\,dy$ gdje je D oblast ograničena krivom linijom $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ i pravom $y = 1 - x$.

Rješenje.

Kriva linija $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ i pravac $y = 1 - x$ sijeku se u tačkama $A\,(1, 0)$, $B\,(0, 1)$, (sl. 1.15.), pa je

$$D = \{(x, y)/0 < x < 1,\ (1 - \sqrt{x})^2 < y < 1 - x\}.$$



Sl. 1.15.

Zbog toga je

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_{(1-\sqrt{x})^2}^{1-x} dy = \int_0^1 x\,(1 - x - (1 - \sqrt{x})^2)\,dx = \frac{2}{15}.$$

Ili, u promijenjenom poretku integracije,

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{(1-\sqrt{y})}^{1-y} x\,dx = \frac{2}{15}.$$

1.24. Izračunati površinu oblasti D koja je data u zadatku 1.23.

Rješenje.

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{(1-\sqrt{x})^2}^{1-x} dy = \int_0^1 (1 - x - (1 - \sqrt{x})^2)\,dx =$$

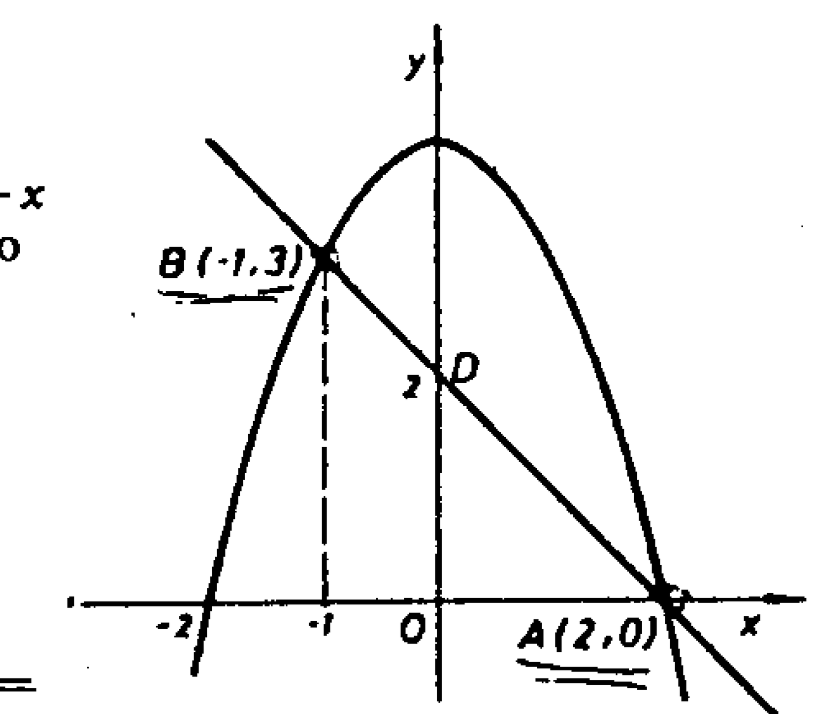
$$= 2\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

1.25. Izračunati vrijednost $\iint_D (x + y)\,dx\,dy$, gdje je D oblast ograničena dijelom krive linije $y = 4 - x^2$ i dijelom pravca $y = 2 - x$.

Rješenje.

Pošto se kriva linija $y = 4 - x^2$ i pravac $y = 2 - x$ sijeku u tačkama $A\,(2, 0)$, $B\,(-1, 3)$ (sl. 1.16), imamo

$$D = \{(x, y)/-1 < x < 2,\ 2 - x < y < 4 - x^2\},$$



Sl. 1.16.

pa je

$$\iint_D (x + y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \int_{2-x}^{4-x^2} (x + y)\,dy =$$

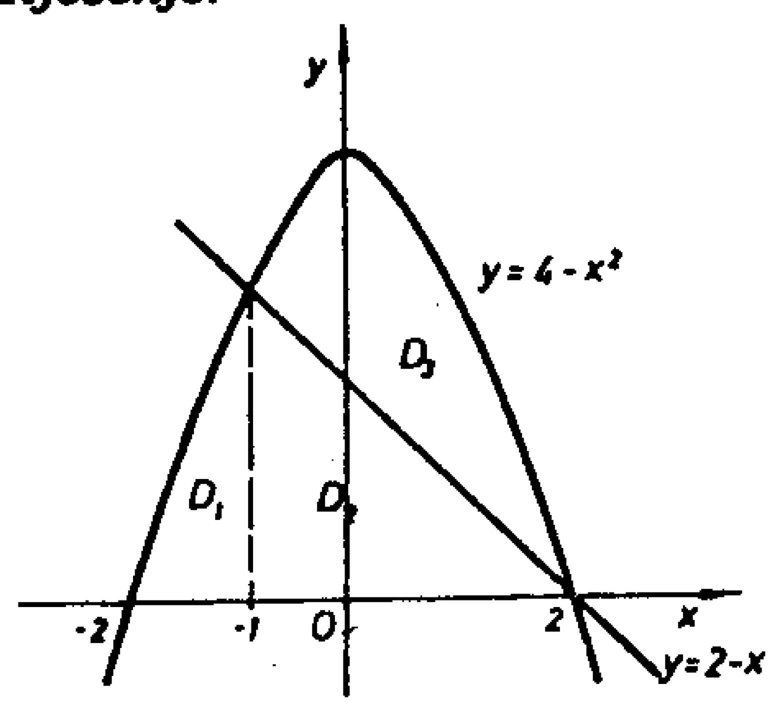
$$= \int_{-1}^{2} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{2-x}^{4-x^2} dx = \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x + 6\right) dx = \frac{207}{15}.$$

Izračunati dati inegral u izmijenjenom poretku integracije.

1.26. Izračunati vrijednost $\iint_D \operatorname{sgn}(x + y - 2)\,dx\,dy$, gdje je D oblast ograničena krivom linijom $y = 4 - x^2$ i pravcem $y = 0$

Rješenje. Prema definiciji funkcije sgn imamo

$$\operatorname{sgn}(x+y-2)=\begin{cases}1 & x+y-2>0\\ 0 & x+y-2=0\\ -1 & x+y-2<0.\end{cases}$$



Sl. 1.17.

Zato oblast D (sl. 1.17) dijelimo na tri dijela:

$$D_1=\{(x,y)/-2<x<-1,\ 0<y<4-x^2\},$$
$$D_2=\{(x,y)/-1<x<2,\ 0<y<2-x\},$$
$$D_3=\{(x,y)/-1<x<2,\ 2-x<y<4-x^2\}.$$

Pošto je za svako $(x,y)\in D_1$ i $(x,y)\in D_2$ $\operatorname{sgn}(x+y-2)=-1$, a za svako $(x,y)\in D_3$ $\operatorname{sgn}(x+y-2)=1$, to je

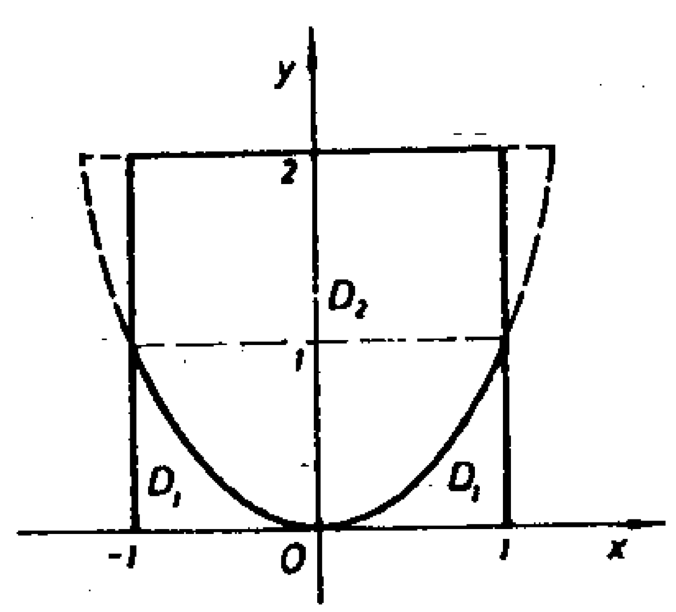
$$\iint_D \operatorname{sgn}(x+y-2)\,dx\,dy=-\int_{-2}^{-1}dx\int_0^{4-x^2}dy-\int_{-1}^{2}dx\int_0^{2-x}dy+$$
$$+\int_{-1}^{2}dx\int_{2-x}^{4-x^2}dy=-\frac{5}{3}.$$

Učimo! (32?.)

1.26.1. Izračunati vrijednost $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$, gdje je $D=\{(x,y)/|x|\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

Rješenje. Kako je

$$|y-x^2|=\begin{cases}y-x^2 & \text{za } y>x^2,\\ 0 & \text{za } y=x^2,\\ x^2-y & \text{za } y<x^2,\end{cases}$$



Sl. 1.18.

to je

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=\iint_{D_1}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy+$$
$$+\iint_{D_2}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=$$
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy=$$
$$=-\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left[(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2}dx+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left[(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2}dx=$$
$$=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}|x|^3\,dx+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)\sqrt{2-x^2}\,dx=$$
$$=[x=\sqrt{2}\sin t]=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,dt=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\ \text{(sl. 1.18).}$$

Učimo! 3922.) 1°)

1.27. Izračunati integral $\iint_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy$, pri čemu je

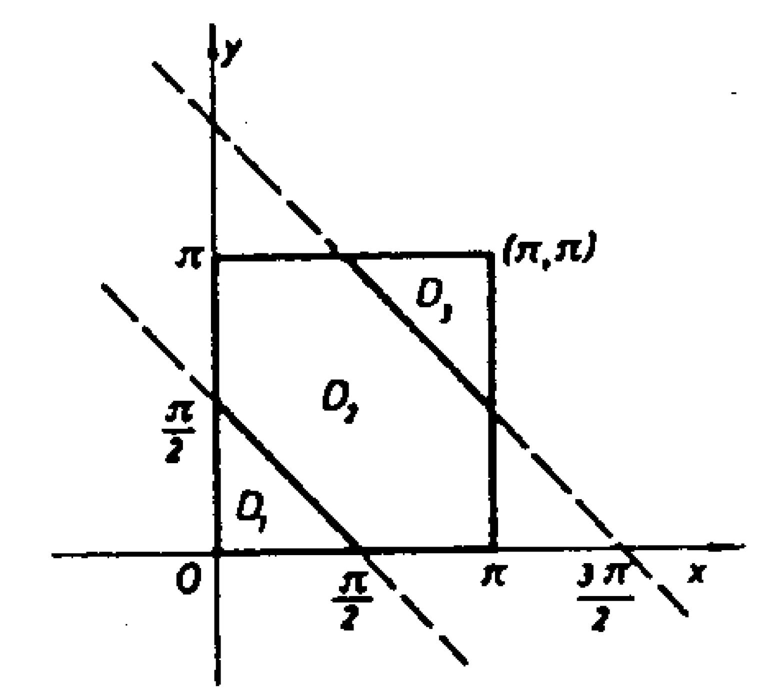
$$D=\{(x,y)/0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi\}.$$

Rješenje.

Pošto je

$$|\cos(x+y)|=\begin{cases}\cos(x+y), \text{ za } -\dfrac{\pi}{2}<x+y<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}<x+y<\dfrac{5\pi}{2}\\[2mm] -\cos(x+y), \text{ za } \dfrac{\pi}{2}<x+y<\dfrac{3\pi}{2},\end{cases}$$

to ćemo oblast D podijeliti na oblasti D_1, D_2, D_3 (sl. 1.19).



Sl. 1.19.

Zato je

$$\iint_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy=\iint_{D_1}\cos(x+y)\,dx\,dy-$$
$$-\iint_{D_2}\cos(x+y)\,dx\,dy+\iint_{D_3}\cos(x+y)\,dx\,dy;$$

$$\iint_{D_1}\cos(x+y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{-x+\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\,dy=\frac{\pi}{2}-1,$$

$$\iint_{D_2}\cos(x+y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{-x+\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x+y)\,dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_0^{-x+\frac{3\pi}{2}}\cos(x+$$
$$+y)\,dy=-2-\pi;$$

$$\iint_{D_3}\cos(x+y)\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{-x+\frac{3\pi}{2}}^{\pi}\cos(x+y)\,dy=\frac{\pi}{2}-1.$$

Otuda je

$$\iint_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy = 2\pi.$$

1.28. Izračunati volumen tijela ograničenog ravninama: $x = 1,\ y = 1,\ x = 3,\ y = 5$ i ravninama $2x - y + z - 1 = 0,\ z = 0$.

Rješenje.

Oblast D podijelit ćemo na oblasti:

$$D_1 = \{(x,y)/1 < x < 3,\ 1 < y < 2x - 1\},$$

$$D_2 = \{(x,y)/1 < x < 3,\ 2x - 1 < y < 5\}.$$

Pošto je $z = 1 - 2x + y < 0$ za svako $(x,y) \in D_1$ i $z = 1 - 2x + y > 0$ za svako $(x,y) \in D_2$, to je

$$V = \iint_{D_2} (1 - 2x + y)\,dx\,dy - \iint_{D_1} (1 - 2x + y)\,dx\,dy,$$

$$V = 36.$$

1.29. Izračunati volumen tijela ograničenog ravninama $y + z = 2,\ z = 4$ i cilindrom $y = x^2$.

Rješenje.

Dano tijelo je s gornje strane ograničeno ravninom $z = 4$, a sa donje strane ravninom $y + z = 2$ i sa strane cilindrom $y = x^2$.

Oblast D po kojoj se vrši integracija je

$$D = \{(x,y)/-\sqrt{y} < x < \sqrt{y},\ 0 < y < 2\}.$$

Zbog toga imamo

$$V = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 4\,dx - \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (2 - y)\,dx =$$

$$= 2\left(4\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx - \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (2 - y)\,dx\right) = \frac{128}{15}\sqrt{2}.$$

1.30. Promijeniti redoslijed integracije u sljedećim integralima:

1°. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2} f(x,y)\,dy$; 2°. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$;

3°. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$; 4°. $\int_1^2 dy \int_{\ln y}^{y} f(x,y)\,dx$.

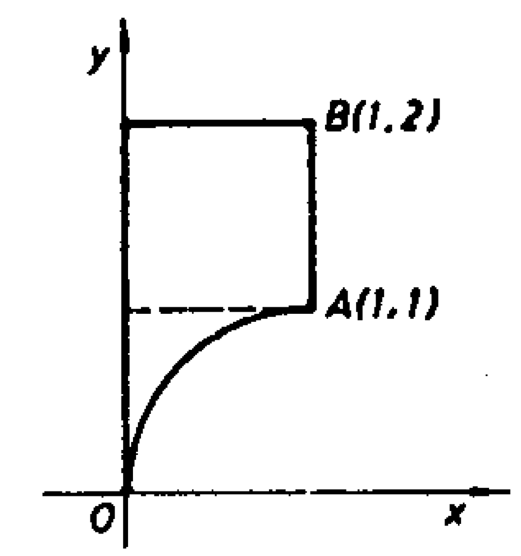
Rješenje.

1°. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx$ (sl. 1.20.).

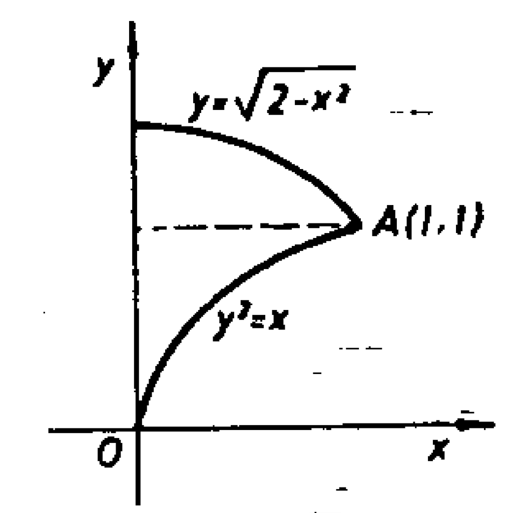
2°. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$ (sl. 1.21.).

3°. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy.$

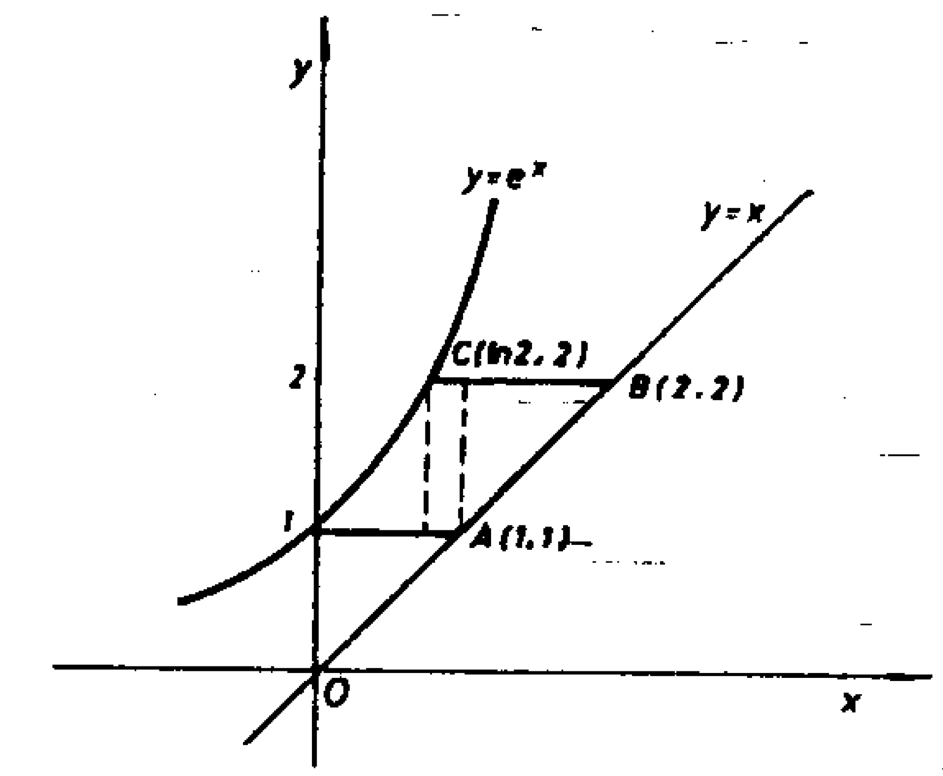
4°. U integralu $\int_1^2 dy \int_{\ln y}^{y} f(x,y)\,dx$ oblast D po kojoj vršimo integriraciju ograničena je pravcima $y = 1,\ y = 2,\ y = x$ i krivom $x = \ln y\ (y = e^x)$.



Sl. 1.20.



Sl. 1.21.



Sl. 1.22.

Na slici su označene koordinate tačaka presjeka odgovarajućih linija.
Oblast D podijelili smo na oblasti (sl. 1.22.):

$$D_1 = \{(x,y)/\ 0 < x < \ln 2,\quad 1 < y < e^x\},$$

$$D_2 = \{(x,y)/\ln 2 < x < 1,\quad 1 < y < 2\},$$

$$D_3 = \{x,y)/\ 1 < x < 2,\quad x < y < 2\}.$$

Sada imamo

$$\int_1^2 dy \int_{\ln y}^{y} f(x,y)\,dx = \int_0^{\ln 2} dx \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy + \int_{\ln 2}^{1} dx \int_1^2 f(x,y)\,dy +$$

$$+ \int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y)\,dy.$$

1.31. Promijeniti poredak integracije u sljedećim integralima:

1°. $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)\,dy$; 2°. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$;

$3°.\ \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y)\, dy;$ $4°.\ \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy;$

$5°.\ \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y)\, dx;$ $6°.\ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx;$

$7°.\ \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y)\, dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y)\, dx;$

$8°.\ \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, dx;$ $9°.\ \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{y}}^{1-y} f(x, y)\, dx.$

1.32. Izračunati integral $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, ako je D oblast ograničena kružnicom $x^2 + y^2 = 1$.

Rješenje.

Uvedimo zamjenu $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, gdje su φ i ϱ polarne koordinate. Tada se oblast D preslikava na oblast

$$D' = \{(\varphi, \varrho)/0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \varrho < 1\}.$$

Kako je Jacobian preslikavanja

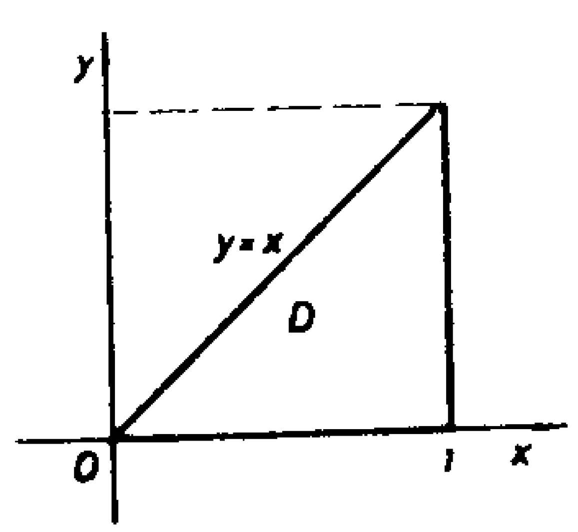
$$\frac{D(x, y)}{D(\varrho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho \sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho \cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho \text{ i } \left|\frac{D(x, y)}{D(\varrho, \varphi)}\right| = \varrho, \text{ to je}$$

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 - \varrho^2}\, \varrho\, d\varphi d\varrho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = \ldots = \frac{2\pi}{3}.$$

1.33. U integralu $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, gdje je $D = \{(x, y)/0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$, zamjenu promjenljivih izvršiti pomoću polarnih koordinata.

Rješenje.



Sl. 1.23.

Zamjenom $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, oblast D preslikava se na oblast

$$D' = \left\{(\varphi, \varrho)/0 < \varphi < \frac{\pi}{4},\ 0 < \varrho < \frac{1}{\cos\varphi}\right\}.$$

Zbog toga je

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\, \varrho\, d\varrho.$$

1.34. Izračunati integral

$$\iint\limits_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ako je

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

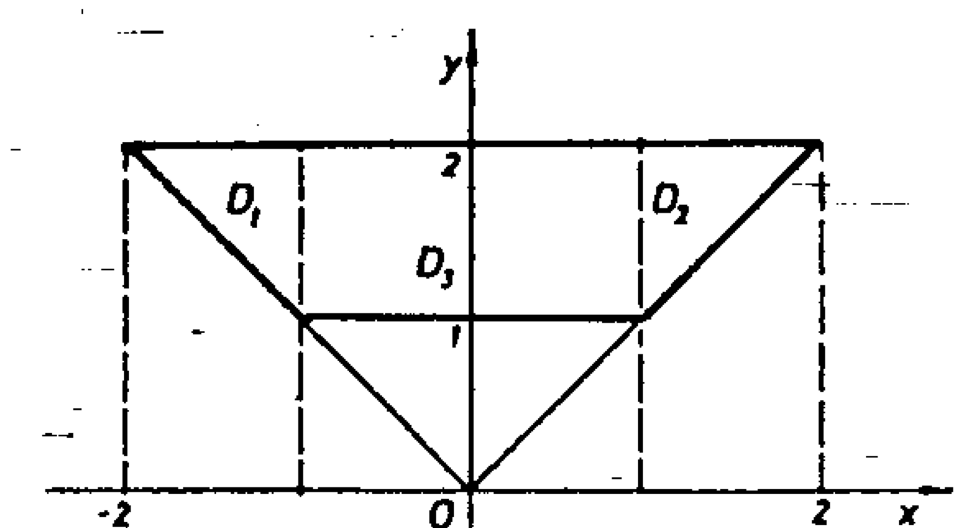
gdje su

$$D_1 = \{(x, y)/-2 \leqslant x \leqslant -1,\ -x \leqslant y \leqslant 2\},$$
$$D_2 = \{(x, y)/-1 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\},$$
$$D_3 = \{(x, y)/1 \leqslant x \leqslant 2,\ x \leqslant y \leqslant 2\}.$$

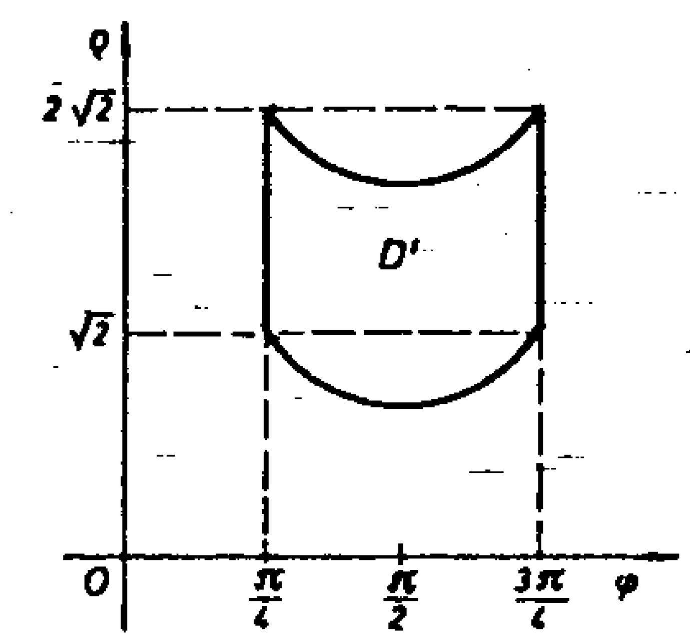
Rješenje.

Zamjenom $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$ oblast D (sl. 1. 24.) preslikava se na oblast (sl. 1.25.)

$$D' = \left\{(\varphi, \varrho)\,\middle|\, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4},\ \frac{1}{\sin\varphi} < \varrho < \frac{2}{\sin\varphi}\right\}.$$



Sl. 1.24.



Sl. 1.25.

Otuda je

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\frac{2}{\sin\varphi}} d\varrho =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \left[\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}.$$

1.35. Izračunati integral

$$\iint\limits_D \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)\left(1 + \sqrt[4]{x^2 + y^2}\right)},$$

gdje je

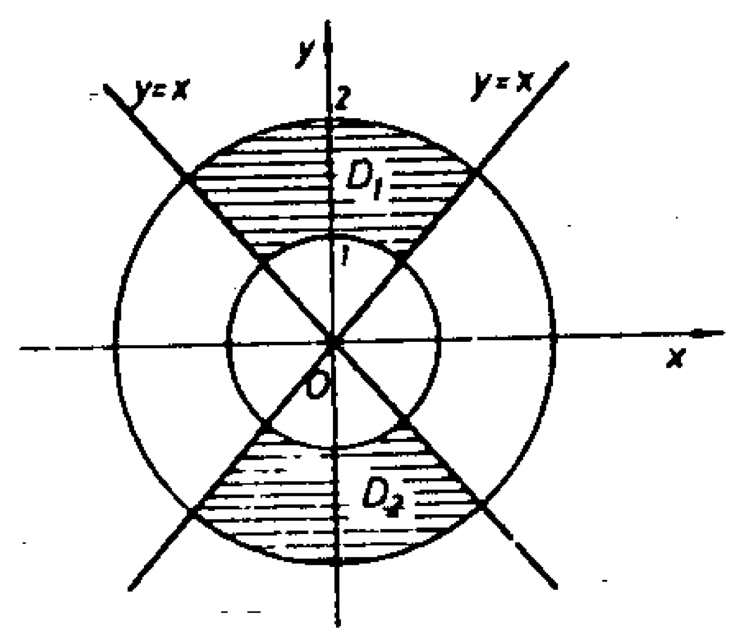
$$D = \{(x, y)/x^2 - y^2 \leqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

Rješenje.

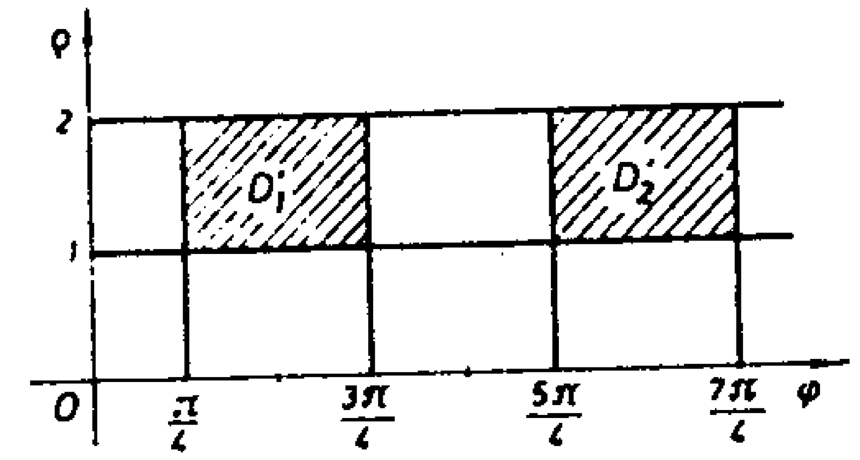
Oblast integracije $D = D_1 \cup D_2$, gdje je

$$D_1 = \{(x, y) \mid -y < x < y,\ \sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{4 - x^2}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid y < x < -y,\ -\sqrt{4 - x^2} < y < -\sqrt{1 - x^2}\}.$$



Sl. 1.26.



Sl. 1.27.

Oblast integracije $D = D_1 \cup D_2$ data je na slici 1.26.

Zamjenom $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, oblast D_1 preslikava se na oblast $D_1' = \left\{(\varphi, \varrho) \Big/ \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4},\ 1 < \varrho < 2\right\}$, a oblast D_2 preslikava se na oblast

$$D'_2 = \left\{(\varphi, \varrho) \Big/ \frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4},\ 1 < \varrho < 2\right\} \text{ (sl. 1.27.)}$$

Sada imamo

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2)(1 + \sqrt[4]{x^2 + y^2})} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 \frac{d\varrho}{\varrho(1 + \sqrt{\varrho})} + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 \frac{d\varrho}{\varrho(1 + \sqrt{\varrho})} =$$

$$= \pi \int_1^2 \frac{d\varrho}{\varrho(1 + \sqrt{\varrho})} = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t(1 + t)} = \ldots = 2\pi \ln \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.$$

1.36. Izračunati integral

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

gdje je D oblast ograničena elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Rješenje.

Uvedimo zamjenu $x = a\varrho \cos \varphi$, $y = b\varrho \sin \varphi$. Oblast D uvedenom zamjenom preslikava se na oblast $D' = \{(\varphi, \varrho) / 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \varrho < 1\}$, a Jacobian datog preslikavanja je

$$J = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\varrho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\varrho, \quad |J| = ab\varrho.$$

Zato imamo

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy = ab \iint\limits_{D'} \sqrt{1 - \varrho^2}\, \varrho\, d\varphi\, d\varrho =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = \ldots = \frac{2\pi ab}{3}.$$

1.37. Izračunati integral

$$\iint\limits_D \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy,$$

pri čemu je D oblast ograničena dijelovima kružnica $x^2 + y^2 = x$ i $x^2 + y^2 = 2x$, te dijelom pravca $y = 0$.

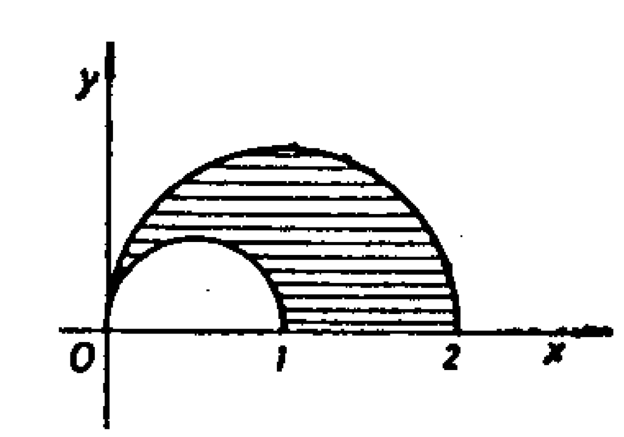
Rješenje.

Ako uvedemo zamjenu $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, imat ćemo (sl. 1.28.):

$$\iint\limits_D \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \arcsin(\sin \varphi)\, \varrho\, d\varrho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\, d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \varrho\, d\varrho = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4} \left[\varphi \left(\varphi + \frac{\sin \varphi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \ldots = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\right).$$



Sl. 1.28.

1.38. Izračunati integral

$$\iint\limits_D e^{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy,$$

gdje je

$$D=\left\{(x,y)\;\Big|\;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}.$$

Rješenje.

Prelaskom na generalisani polarni sistem koordinata, tj. na $x = a\varrho\cos\varphi$, $y = b\,\varrho\sin\varphi$, dobivamo

$$\iint\limits_D e^{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy = ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 e^{\varrho^2}\varrho\,d\varrho = ab\,(e-1)\,\pi.$$

1.39. Izračunati integral

$$\iint\limits_D |ax+by|\,dx\,dy,$$

gdje je

$$D=\{(x,y)/a^2x^2+b^2y^2\leqslant 1\}\;(a,b\in R,\ ab>0).$$

Rješenje.

Ako uvedemo zamjenu $x=\dfrac{\varrho\cos\varphi}{a}$, $y=\dfrac{\varrho\sin\varphi}{b}$, dobivamo

$$\iint\limits_D |ax+by|\,dx\,dy=\frac{1}{ab}\iint\limits_{D'}\varrho^2\,|\cos\varphi+\sin\varphi|\,d\varrho\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{ab}\int\limits_0^1\varrho^2\,d\varrho\int\limits_0^{2\pi}|\cos\varphi+\sin\varphi|\,d\varphi=\frac{\sqrt2}{3ab}\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\varphi=$$

$$=\frac{\sqrt2}{3ab}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}|\cos t|\,dt=\frac{2\sqrt2}{3ab}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{4\sqrt2}{3ab}.$$

1.40. Izračunati integral

$$\iint\limits_D\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}\,dx\,dy,$$

pri čemu je D oblast ograničena krivom $x^2+y^2=1$ i pravcima $y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $y=x\,\mathrm{tg}\,\beta\;(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$.

Rješenje.

Zamjenom $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ dobivamo

$$\iint\limits_D\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}\,dx\,dy=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_0^1\varrho\cos\frac{\pi\varrho}{2}\,d\varrho=\left[\frac{\pi\varrho}{2}=t\right]=$$

$$=\frac{4(\beta-\alpha)}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt=\frac{4(\beta-\alpha)}{\pi^2}\,[t\sin t+\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{4(\beta-\alpha)}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

1.41. Izračunati integral

$$\iint\limits_D\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dx\,dy,$$

pri čemu je D oblast ograničena krivom $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ i koordinatnim osama.

Rješenje.

Zamjenom $x=\varrho\cos^4\varphi$, $y=\varrho\sin^4\varphi$ oblast D preslikava se na oblast $D'=\left\{(\varphi,\varrho)\;\Big|\;0<\varphi<\frac{\pi}{2},\ 0<\varrho<1\right\}$.

Kako je $J=4\varrho\cos^3\varphi\sin^3\varphi$, imamo

$$\iint\limits_D\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dx\,dy=4\iint\limits_{D'}\sqrt{\sqrt{\varrho\cos^4\varphi}+\sqrt{\varrho\sin^4\varphi}}\;\varrho\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\,d\varrho=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\varrho^{\frac54}\,d\varrho=\frac{16}{9}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{16}{9}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\sin^3\varphi\,d(\sin\varphi)=\frac{4}{27}.$$

1.42. Izračunati integral

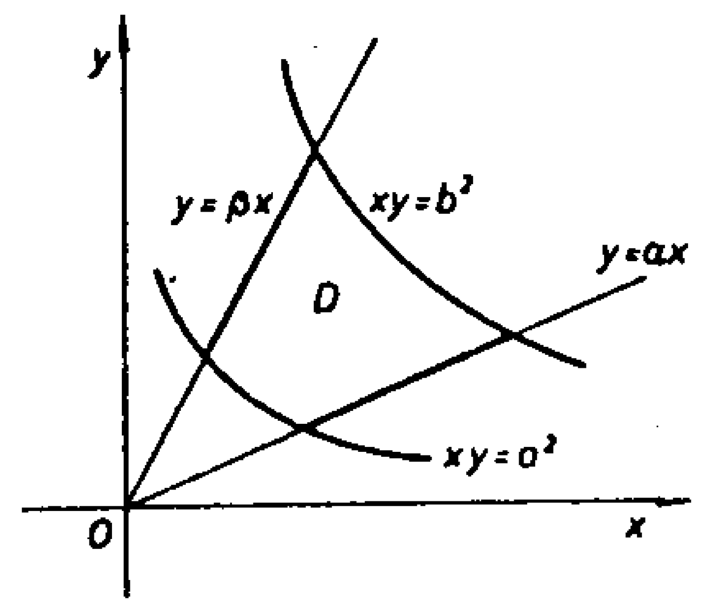
$$\iint\limits_D\cos\frac{\pi xy}{(ab)^2}\,dx\,dy,$$

ako je D oblast ograničena krivim linijama $xy=b^2$, $xy=a^2$ $(0<a<b)$, te pravcima $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<\alpha<\beta,\ x>0)$.

Rješenje.

Uvedimo zamjenu $y = ux$, $xy = v$, pa imamo $x = \sqrt{\dfrac{v}{u}}$, $y = \sqrt{uv}$ i

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{2u} \; (u > 0,\ v > 0).$$



Sl. 1.29.

Uvedenom zamjenom oblast D preslikava se na oblast $D' = \{(u,v)/\ \alpha < u < \beta,\ a^2 < v < b^2\}$.

Sada je

$$\iint\limits_D \cos\frac{\pi xy}{(ab)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} \cos\frac{\pi v}{(ab)^2}\cdot\frac{1}{u}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{du}{u}\int_{a^2}^{b^2}\cos\frac{\pi v}{(ab)^2}\,dv = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{a^2b^2}{\pi}\sin\frac{\pi v}{a^2b^2}\right]_{a^2}^{b^2} =$$

$$= \frac{a^2b^2}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}\cos\frac{\pi(b^2+a^2)}{2a^2b^2}\sin\frac{\pi(b^2-a^2)}{2a^2b^2}.$$

1.43. Izračunati integral

$$\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy,$$

pri čemu je oblast D ograničena pravcima

$$x + y = 1,\ 2x - y = 2,\ x + y = 3,\ 2x - y = -1.$$

Rješenje.

Uvedimo zamjenu $x + y = u$, $x - y = v$.

Odavde je $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$.

Oblast D, ovim preslikavanjem, preslikava se na oblast D' ograničenu pravcima:

$$u = 1,\ u = 3,\ u + 3v = 4,\ u + 3v = -2.$$

Pošto je

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

bit će

$$\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} uv\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 u\,du \int_{-\frac{u+2}{3}}^{-\frac{u-4}{3}} = -\frac{14}{9}.$$

1.44. Naći površinu oblasti D ograničenu pravcima $y = x$, $y = -x$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 2x$ ($|y| \leqslant x$).

Rješenje.

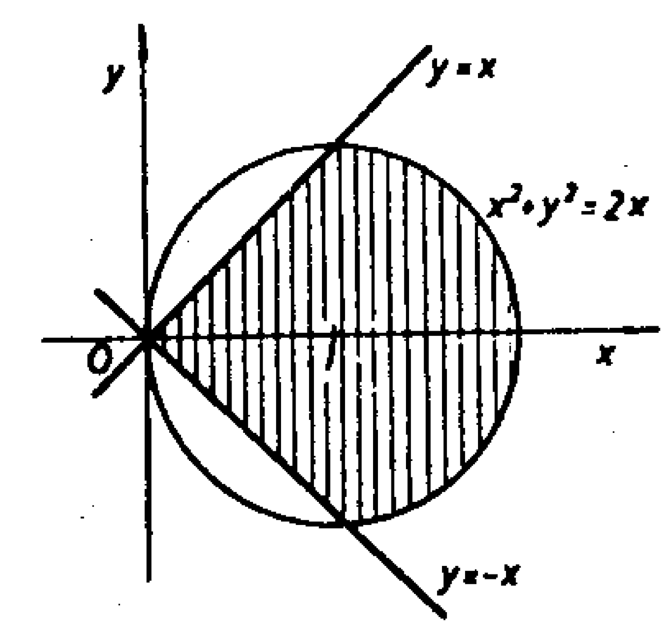
Uvedimo polarne koordinate. Tada se oblast D (sl. 1.30) preslikava na oblast

$$D' = \left\{(\varphi, \varrho)\,\middle|\, -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4},\ 0 < \varrho < 2\cos\varphi\right\}.$$

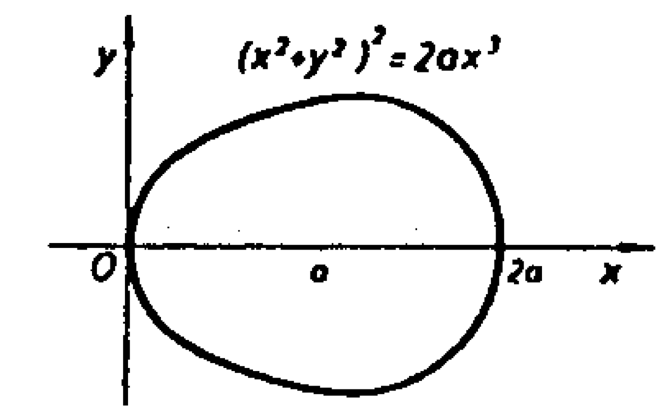
S obzirom na simetričnost oblasti D u odnosu na osu x, slijedi

$$P = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{D'} \varrho\,d\varphi\,d\varrho =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho\,d\varrho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2} + 1.$$



Sl. 1.30.



Sl. 1.31.

969.) **1.45.** Naći površinu oblasti D ograničenu linijom čija je jednačina

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3 \; (a > 0).$$

Rješenje.

Uvedimo zamjenu $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$. Jednačina date krive u novim koordinatama glasi $\varrho = 2a\cos^3\varphi$. Oblast D je desno od y-ose i simetrična je u odnosu na x-osu (sl. 1.31.).

Za dio oblasti D iznad x-ose kut φ se mijenja od 0 do $\frac{\pi}{2}$, a ϱ se mijenja od 0 do $2a\cos^3\varphi$.

Zato imamo

$$P = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos^3\varphi} \varrho\, d\varrho = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^3\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+3\cos 2\varphi)\, d\varphi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 4\varphi)\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2\varphi)\, d(\sin 2\varphi)\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \right.$$

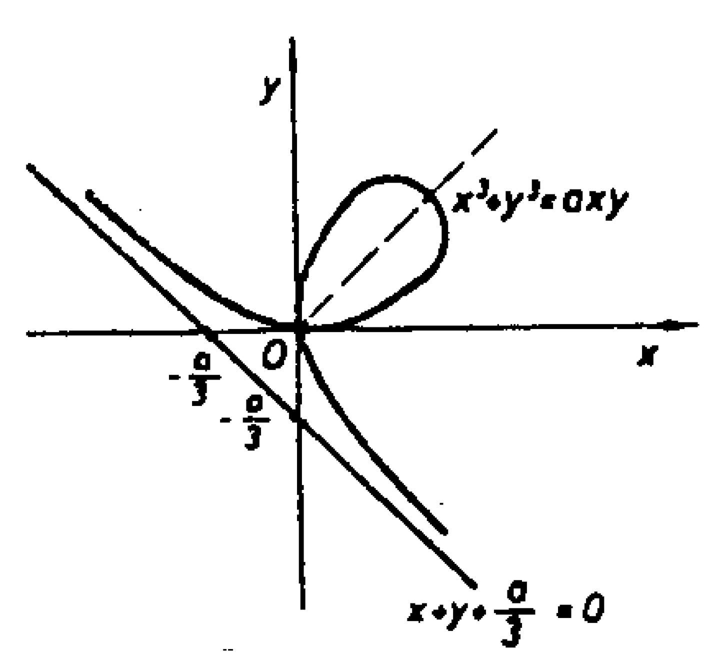
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\sin 2\varphi - \frac{\sin^3 2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi a^2}{8}, \quad P = \frac{5\pi a^2}{8}.$$

⊕**1.46.** Izračunati površinu oblasti D ograničenu krivom $x^3 + y^3 = a\,xy$ (Descartesov list).

Rješenje.

Jednačina date krive u polarnim koordinatama je

$$\varrho = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$



Sl. 1.32.

Kriva je simetrična u odnosu na pravac $y = x\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ (sl. 1.32.), pa je

$$P = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}} \varrho\, d\varrho = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^6\varphi\,(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}\, d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi\,(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2} =$$

$$a^2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^2\varphi\, d(\mathrm{tg}\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2} = \frac{a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\mathrm{tg}^3\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2} =$$

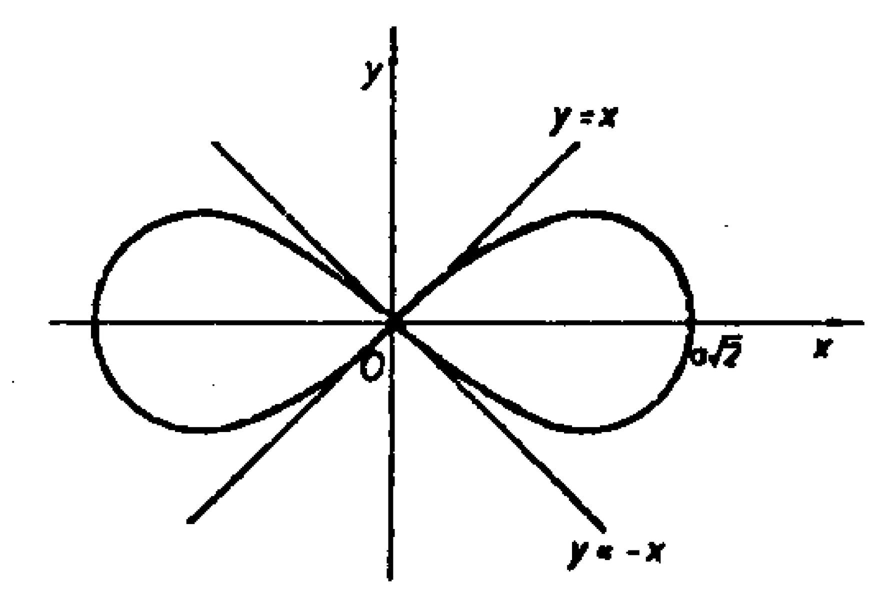
$$= \frac{a^2}{3}\left[-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{6}.$$

⊕**1.47.** Izračunati površinu oblasti D ograničenu krivom $(x^2+y^2)^2 = 2\,a^2(x^2-y^2)$ (lemniskata) $(a > 0)$.

Rješenje.

Jednačina date krive u polarnim koordinatama je $\varrho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ (sl. 1.33.). Pošto je oblast definisanosti funkcije ϱ svako φ za koje je $\cos 2\varphi > 0$, zaključujemo da je:

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}; \quad \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}.$$



Sl. 1.33.

Imamo,

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \varrho\, d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2.$$

⊕**1.48.** Izračunati površinu oblasti ograničenu krivom

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

Rješenje.

Ako uvedemo zamjenu $x = a\varrho\cos^2\varphi$, $y = b\varrho\sin^2\varphi$, tada jednačina date krive u koordinatama φ, ϱ glasi $\varrho^2 = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi$. Kako je Jacobian $J = 2ab\varrho\sin\varphi\cos\varphi$, bit će:

$$P = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}} \varrho\, d\varrho =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5\varphi\sin\varphi + \sin^5\varphi\cos\varphi)\, d\varphi =$$

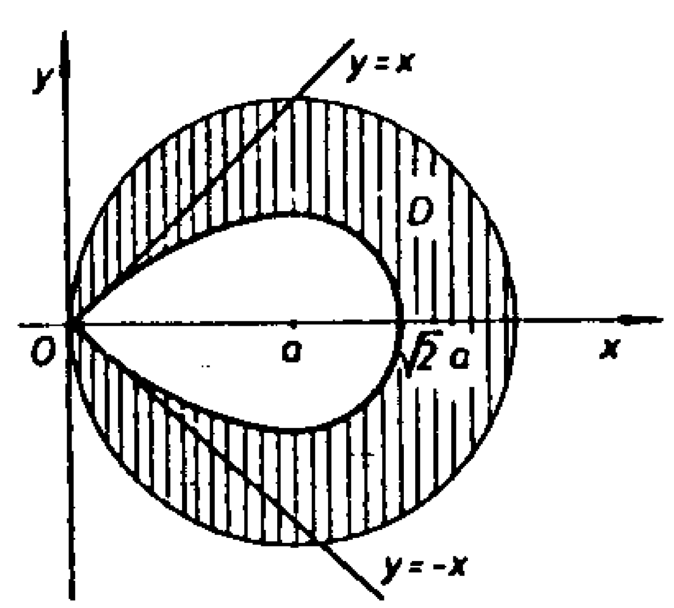
$$= ab\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\, d(\cos\varphi) + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\, d(\sin\varphi)\right) =$$

$$= ab\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6} + \frac{\sin^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{3}.$$

1.49. Izračunati površinu oblasti D ograničenu linijama čije su jednačine:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \text{ i } x^2+y^2 = 2ax\ (a>0).$$

Rješenje.



Sl. 1.33a.

Oblast D čiju površinu treba izračunati data je na sl. 1.33a. Prema zadatku. 1.47., površina oblasti omeđena krivom $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ $(x>0)$ je $P_1 = a^2$. Površina kruga poluprečnika $r = a$ (centar u tački $T(a, 0)$) je $P_2 = \pi a^2$. Prema tome, površina oblasti D je $P = (\pi - 1)a^2$.

Isti rezultat dat će

$$2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \varrho\, d\varrho + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\sqrt{2\cos\varphi}}^{2a\cos\varphi} \varrho\, d\varrho\right).$$

1.50. Naći površinu oblasti D ograničenu linijom

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$

i pravcima

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},\ 4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}\ (a>0, b>0).$$

Rješenje.

Zamjenom promjenljivih x i y sa $x = a\varrho\cos^4\varphi$, $y = b\varrho\sin^4\varphi$ dobivamo:

$$\frac{D(x,y)}{D(\varrho,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^4\varphi & -4a\varrho\cos^3\varphi\sin\varphi \\ b\sin^4\varphi & 4b\varrho\sin^3\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 4ab\varrho\cos^3\varphi\sin^3\varphi;$$

$\sqrt{\varrho} = 1$; $\cos^4\varphi = \sin^4\varphi$; $4\cos^4\varphi = \sin^4\varphi$.

Kako se oblast D nalazi u prvom kvadrantu, to linija i pravci koji omeđuju oblast D u sistemu koordinata φ i ϱ imaju jednačine

$$\varrho = 1;\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Otuda je

$$P = 4ab\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}} \cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi = 2ab\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}} \cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2ab\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}} \sin^3\varphi(1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) = 2ab\left[\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{\sin^6\varphi}{6}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{13}{324}ab.$$

1.51. Izračunati površinu oblasti D ograničenu kružnicama:

$$\varrho = 1,\ \varrho = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi\ \left(0 \leqslant \varrho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varrho \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi,\right.$$

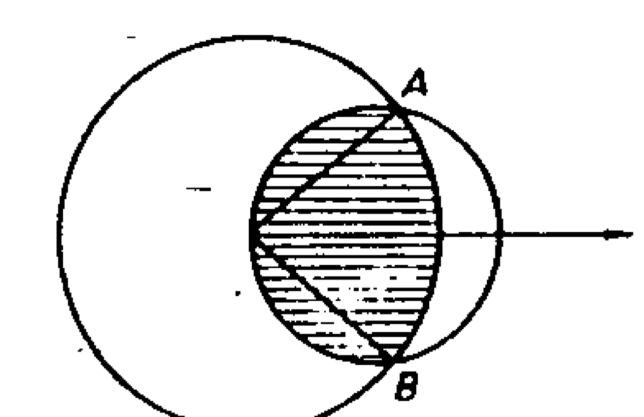
$$\left. -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Rješenje.

Date kružnice sijeku se u tačkama $A\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ i $B\left(-\frac{\pi}{6}, 1\right)$ (sl. 1.34.), što se dobija rješavanjem jednačine $1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$.

$$P = \iint_D \varrho\, d\varrho\, d\varphi = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^1 \varrho\, d\varrho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi} \varrho\, d\varrho\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{18}(7\pi - 3).$$



Sl. 1.34.

1.52. Izračunati površinu oblasti D ograničenu linijama $\varrho = 2(1+\cos\varphi)$ i $\varrho = 2\cos\varphi$.

Rješenje.

$$P = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{2(1+\cos\varphi)} \varrho\, d\varrho = 4\pi.$$

1.53. Izračunati površinu oblasti D ograničenu pravcima:

$$x+y=1,\ x+y=2,\ x-y=1,\ x-y=2.$$

Rješenje.

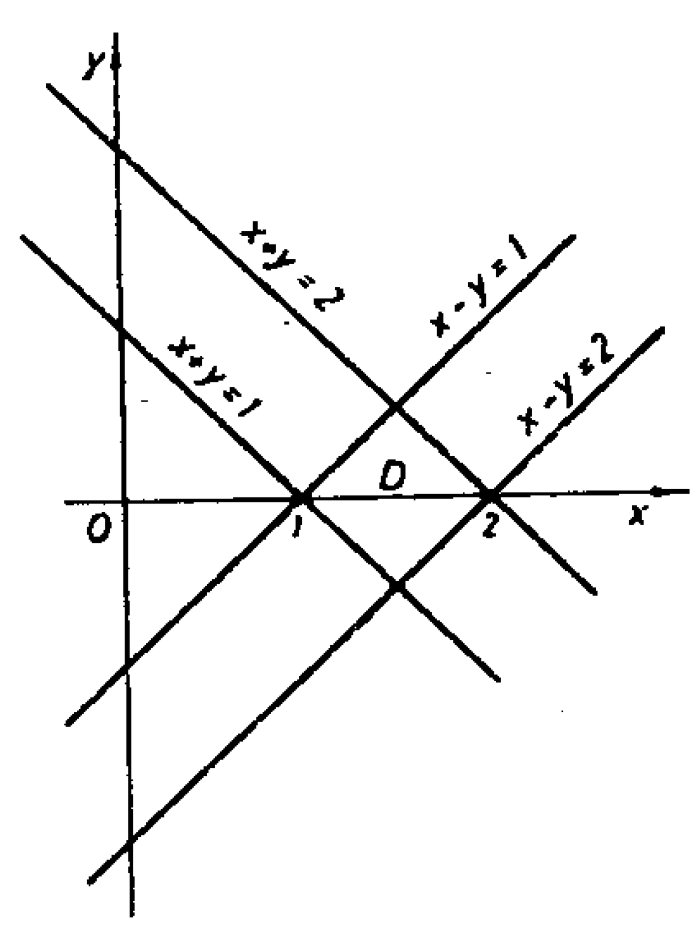
Oblast D data je na slici 1.35. Da bismo izračunali površinu date oblasti, treba najprije oblast D dijeliti na dvije oblasti, bilo da integriranje vršimo najprije po x uz konstantno y ili obratno. Ovo ćemo izbjeći ako promjenljive u i v uvedemo na ovaj način: $x+y=u$, $x-y=v$.

Odavde je

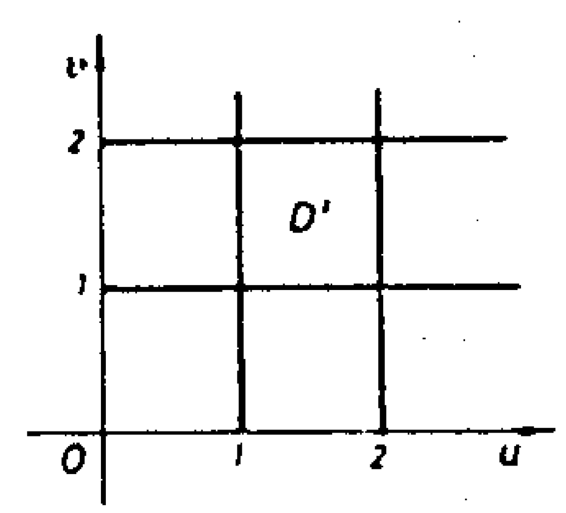
$$x = \frac{u+v}{2},\ y = \frac{u-v}{2}.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

$$|J| = \frac{1}{2}.$$



Sl. 1.35.



Sl. 1.36.

Očigledno, pravac $x+y=1$ preslikava se na pravac $u=1$, pravac $x+y=2$ preslikava se na pravac $u=2$, pravac $x-y=1$ preslikava se na pravac $v=1$ i pravac $x-y=2$ preslikava se na pravac $v=2$. Oblast je $D' = \{(u,v)/\ 1 < u < 2,\ 1 < v < 2\}$ (sl. 1.36.).

Prema tome, imamo

$$P = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} du\,dv = \int_1^2 du \int_1^2 dv = 1.$$

1.54. Izračunati volumen tijela ograničenog površima:

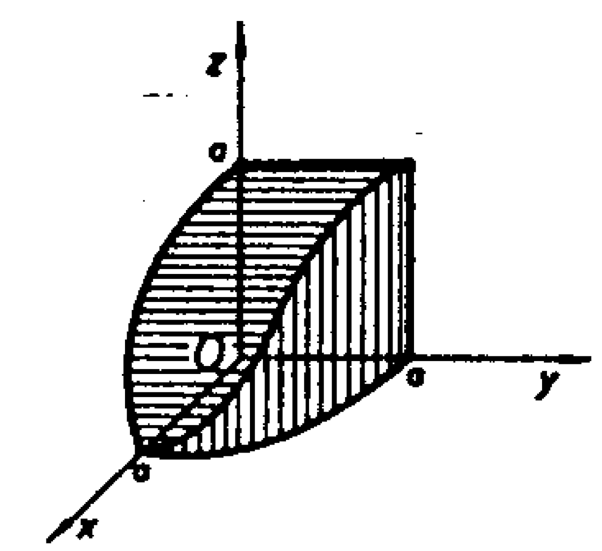
$$x^2+y^2=a^2,\ x^2+z^2=a^2.$$

Rješenje.

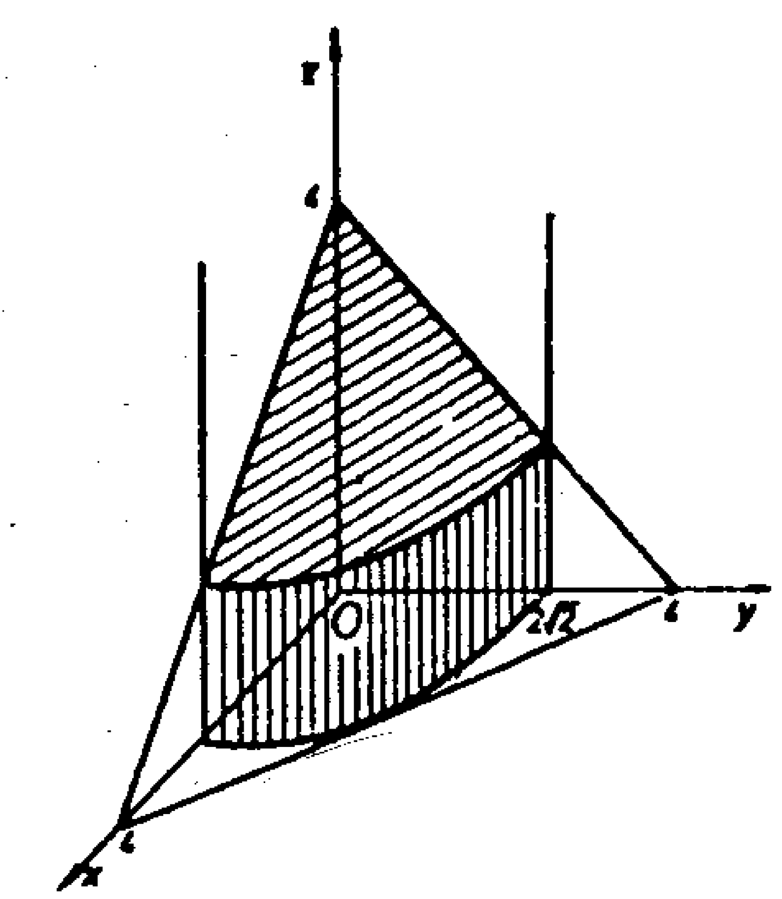
Površ $x^2+y^2=a^2$ je cilindar čija je osa z-osa, a $x^2+z^2=a^2$ je cilindar čija je osa y-osa. S obzirom na simetričnost datog tijela u odnosu na koordinatne ravnine (sl. 1.37.) imamo

$$V = 8\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy = 8\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy =$$

$$= 8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = 8\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{16a^3}{3}.$$



Sl. 1.37.



Sl. 1.38.

1.55. Izračunati volumen tijela ograničenog površima:

$$x^2+y^2=8,\ x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Rješenje.

$$V = \iint_D (4-x-y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} (4-x-y)\,dy =$$

$$= \ldots = 8\pi - \frac{32}{3}\sqrt{2}\ \text{(sl. 1.38.)}.$$

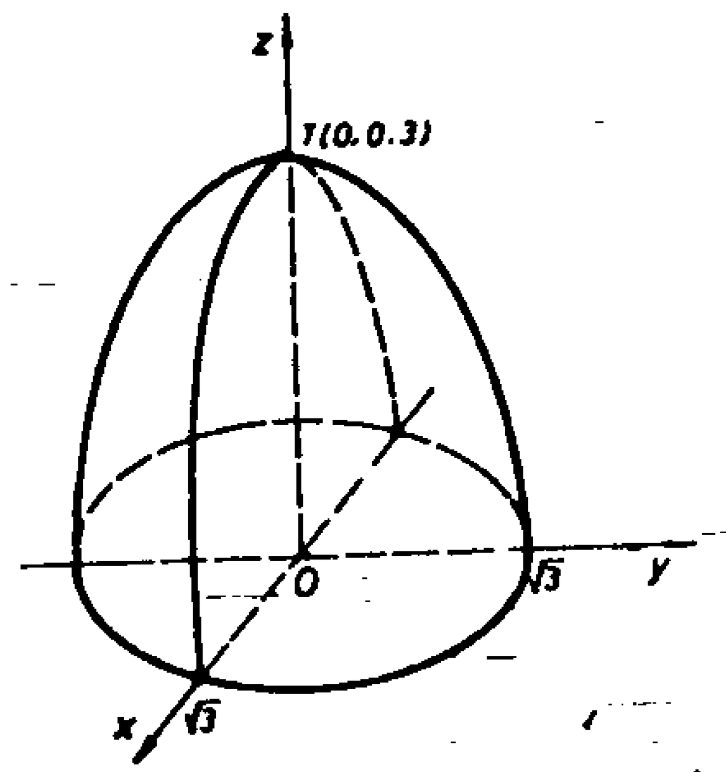
1.56. Izračunati volumen tijela ograničenog paraboloidom $z = 3 - x^2 - y^2$ i ravninom $z = 0$.

Rješenje.

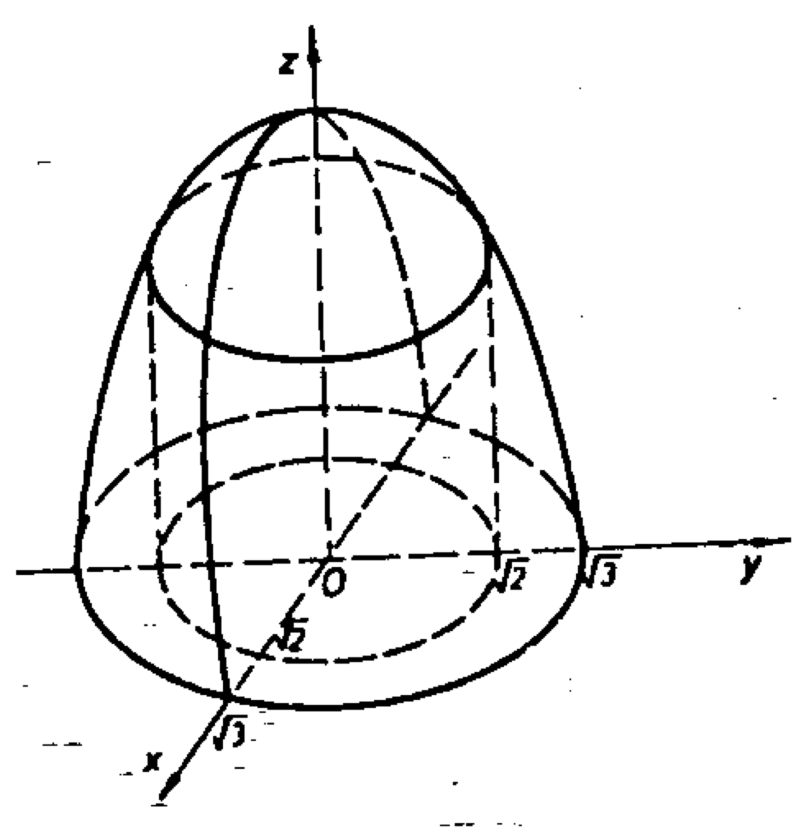
Kriva presjeka površi $z = 3 - x^2 - y^2$ i ravnine $z = 0$ je $x^2 + y^2 = 3$. Oblast integracije u ravnini Oxy je $D = \{(x, y)/x^2 + y^2 < 3\}$ (sl. 1.39.).

Ako uvedemo zamjenu $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ oblast D preslikava se na oblast $D' = \{(\varphi, \varrho)\,/\,0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \varrho < \sqrt{3}\}$. S obzirom na simetričnost datog tijela u odnosu na koordinatne ravnine Oxz i Oyz imamo

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} (3 - \varrho^2)\,\varrho\, d\varrho = \ldots = \frac{9\pi}{2}.$$



Sl. 1.39.



Sl. 1.40.

1.57. Izračunati volumen tijela ograničenog površima $z = 3 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 2$ i ravninom $z = 0$ $(x^2 + y^2 \leqslant 2)$.

Rješenje.

Očigledno, integraciju vršimo po oblasti $D = \{(x, y)\,/\,x^2 + y^2 < 2\}$ (sl. 1.40).

Ako uvedemo zamjenu $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, imamo

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (3 - \varrho^2)\,\varrho\, d\varrho.$$

1.58. Izračunati volumen tijela ograničenog površima:

$$z = 3 - x^2 - y^2,\quad z = x^2 + y^2.$$

Rješenje.

Date površi sijeku se po krivoj liniji koja je data sistemom jednačina

$$x^2 + y^2 + z - 3 = 0$$
$$x^2 + y^2 - z = 0.$$

Projekcija krive presjeka na ravninu Oxy je kriva

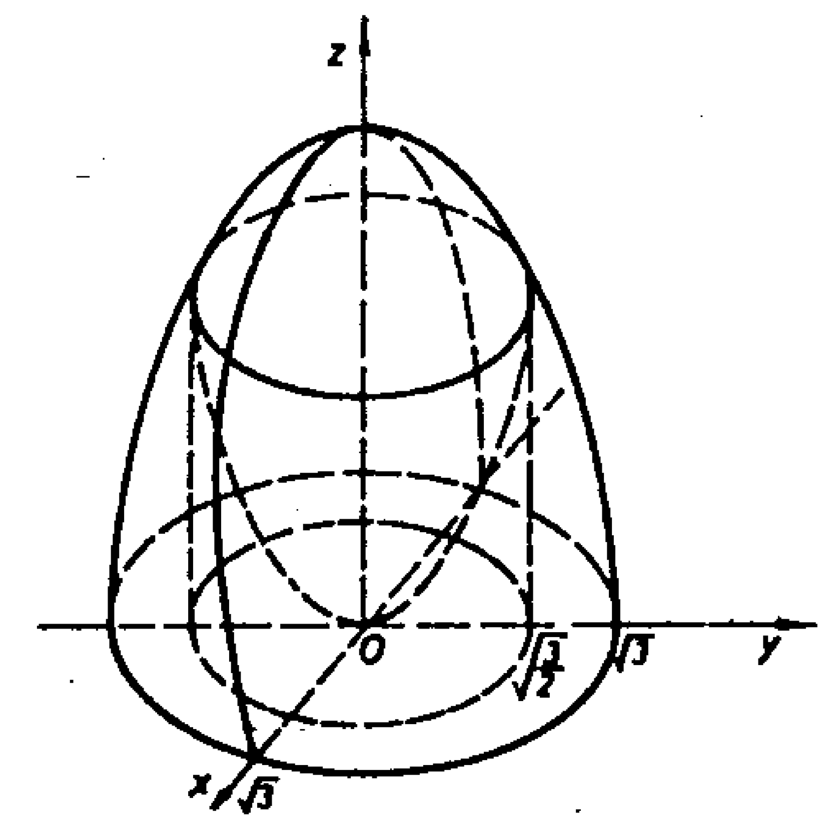
$$2x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \text{ (sl. 1.41).}$$

Oblast integracije je $D = \{(x, y)\,/\,2x^2 + 2y^2 < 3\}$. Zato je

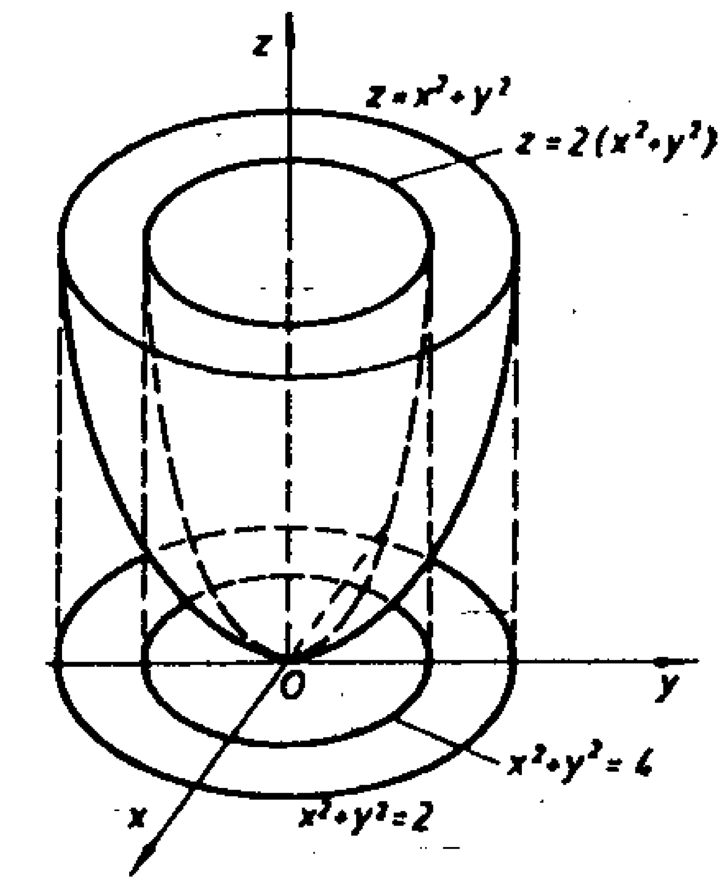
$$V = \iint_D (z_2 - z_1)\,dx\,dy = \iint_D (3 - 2x^2 - 2y^2)\,dx\,dy.$$

S obzirom na simetričnost datog tijela u odnosu na koordinatne ravnine imamo

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2\varrho^2)\,\varrho\, d\varrho = \frac{9}{4}\pi \text{ } (\varphi \text{ i } \varrho \text{ su polarne koordinate}).$$



Sl. 1.41.



Sl. 1.42.

1.59. Izračunati volumen tijela omeđenog površima $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$ i ravninom $z = 4$.

Rješenje.

Krive presjeka datih površi sa ravninom $z = 4$ su krive: $z = 4$, $x^2 + y^2 = 4$; $z = 4$, $x^2 + y^2 = 2$. Projekcija krivih presjeka na ravninu Oxy su krive $x^2 + y^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = 2$ (sl. 1.42.).

Označimo sa $D_1 = \{(x, y)/\,x^2 + y^2 < 4\}$ i $D_2 = \{(x, y)/\,x^2 + y^2 < 2\}$.

Ako uvedemo polarne koordinate, imamo

$$V = \int_0^{2\pi} d\varrho \int_0^{2} (4 - \varrho^2)\,\varrho\, d\varrho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2\varrho^2)\,\varrho\, d\varrho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3\, d\varrho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{2}}^{2} (4\varrho - \varrho^3)\, d\varrho = 4\pi.$$

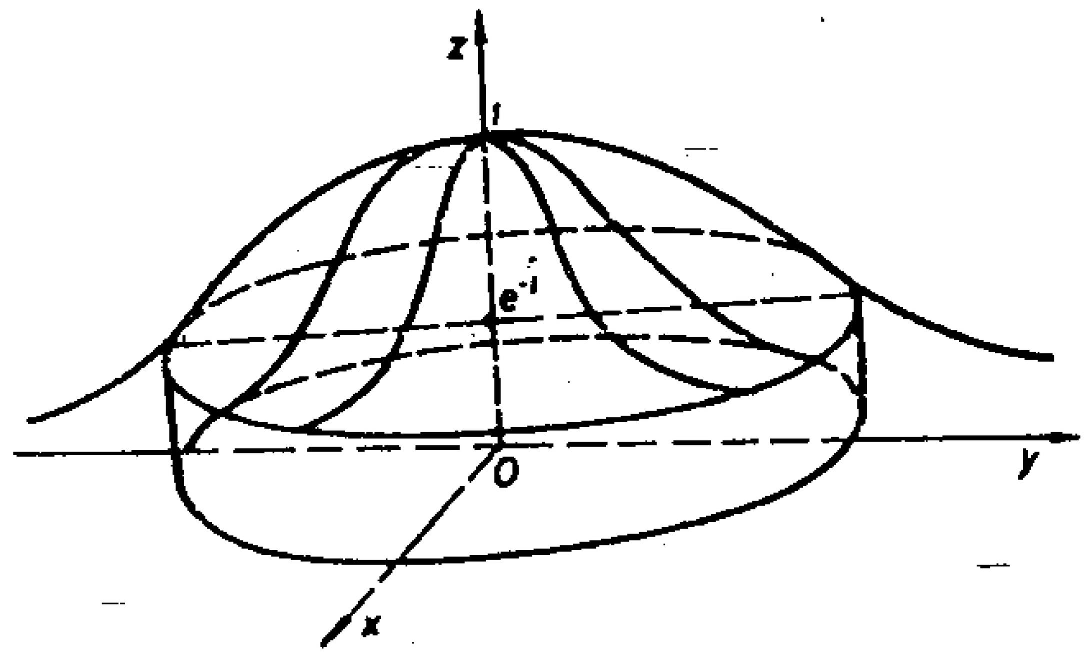
1.60. Izračunati volumen tijela omeđenog površi $z = e^{-x^2-y^2}$ i ravninom $z = e^{-1}$.

Rješenje.

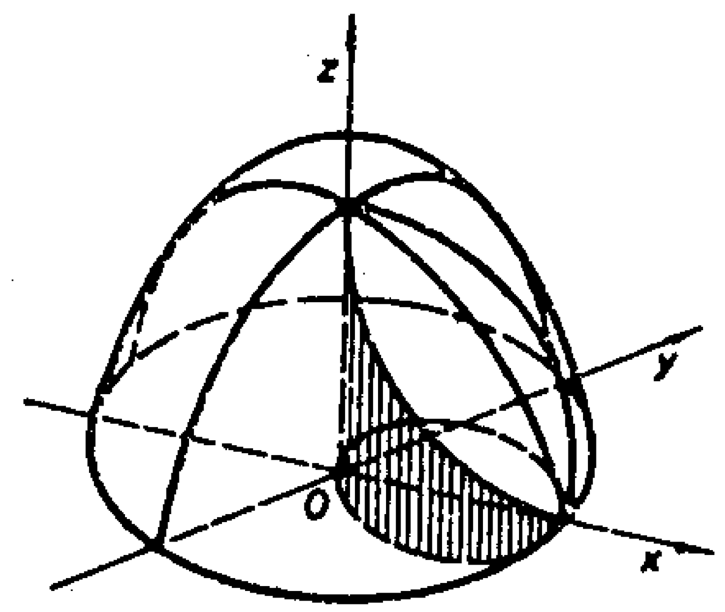
Kriva presjeka date površi i date ravnine je $z = e^{-1}$, $z = e^{-x^2-y^2}$. Projekcija ove krive na ravninu Oxy je $x^2 + y^2 = 1$. Oblast integracije je $D = \{ (x, y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$ (sl. 1.43.).

Nakon prelaska na polarne koordinate dobivamo

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (e^{-\varrho^2} - e^{-1})\, \varrho \, d\varrho = 2\pi\left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right).$$



Sl. 1.43.



Sl. 1.44.

1.61. Izračunati volumen tijela koje je ograničeno površi (cilindrom) $x^2 + y^2 = Rx$ i dijelom površi (sferom) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0)$.

Rješenje.

Projekcija krive presjeka datih površi na ravninu Oxy je kružnica $x^2 + y^2 = Rx$. Oblast integracije (1.44) je:

$$D = \{(x, y) \,/\, 0 < x < R, \; -\sqrt{Rx - x^2} < y < \sqrt{Rx - x^2}\}.$$

S obzirom na simetričnost datog tijela u odnosu na ravninu Oxy imamo

$$V = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Pošto je dato tijelo simetrično i u odnosu na ravninu Oxz, to, nakon uvođenja polarnih koordinata, imamo

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(R^2 - \varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{4R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\, d\varphi = \frac{4R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{4R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\varphi)\, d(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{4R^3}{3}[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4R^3}{3}\left[\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

1.62. Izračunati volumen tijela omeđenog rotacionim paraboloidom $y = 6 - x^2 - z^2 (y \geqslant 0)$ i konusom $y^2 = x^2 + z^2$.

Rješenje.

Iz $y^2 = x^2 + z^2$ i $y = 6 - x^2 - z^2$ slijedi $y = -3$ i $y = 2$. Kriva presjeka površi $y = 6 - x^2 - z^2 (y > 0)$ i površi $y^2 = x^2 + z^2$ je $y = 2$, $y^2 = x^2 + z^2$, a projekcija krive presjeka na ravninu Ozx je $x^2 + z^2 = 4$.

Uvedemo li zamjenu $x = \varrho\cos\varphi$, $z = \varrho\sin\varphi$, dobivamo

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (6 - \varrho^2)\, \varrho\, d\varrho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \varrho^2\, d\varrho = \frac{32\pi}{3}.$$

1.63. Izračunati volumen tijela ograničenog površima

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

i ravninama

$$y = x \operatorname{tg}\alpha, \; y = x\operatorname{tg}\beta \quad \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Rješenje.

Krive presjeka datih površi su:

$$z = -\frac{c}{\sqrt{2}}, \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{c}{\sqrt{2}}, \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

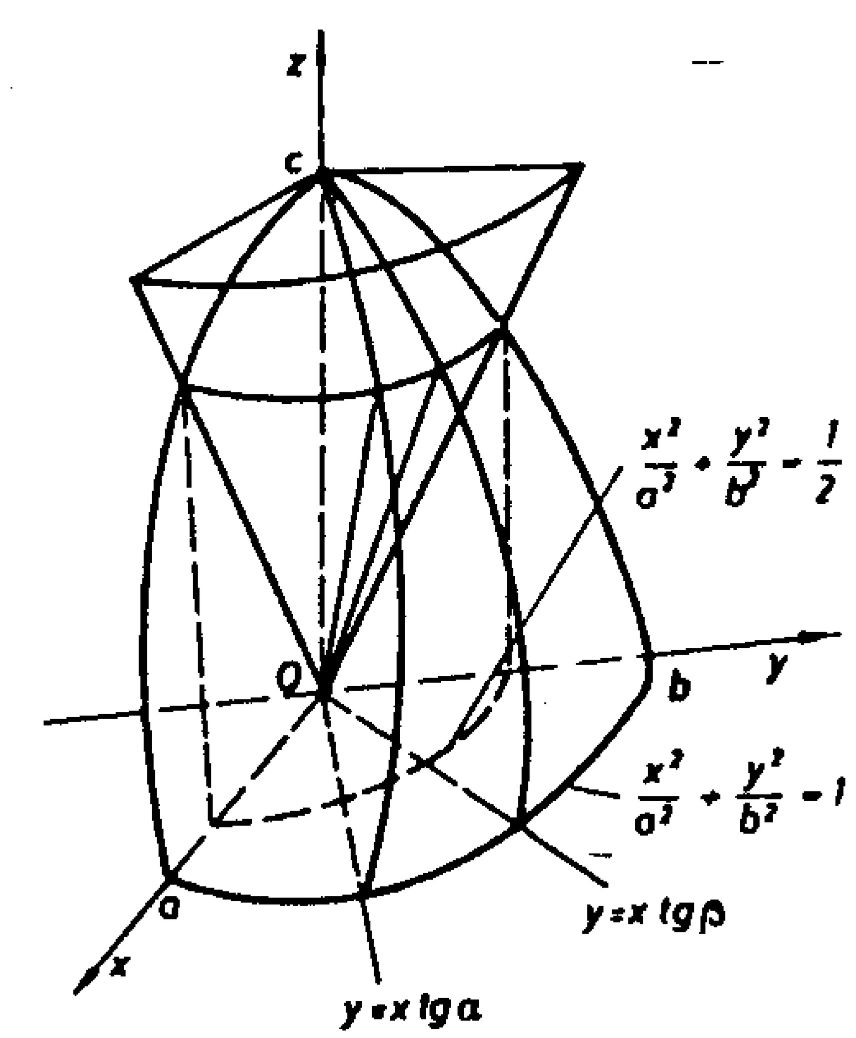
Oblast integracije u ravnini Oxy je

$$D = \left\{(x, y) \,/\, x\operatorname{tg}\alpha < y < x\operatorname{tg}\beta, \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < \frac{1}{2}\right\} \text{ (sl. 1.45.).}$$

Ako uvedemo zamjenu $x = a\varrho\cos\varphi$, $y = b\varrho\sin\varphi$, imamo

$$D' = \left\{(\varphi, \varrho) \,/\, \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha\right) < \varphi < \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta\right), \; 0 < \varrho < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

$$\frac{D(x, y)}{D(\varrho, \varphi)} = ab\varrho.$$



Sl. 1.45.

Stavimo $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta\right)$.

Otuda je

$$V = 2abc\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \varrho^2 d\varrho\right) =$$

$$= 2abc\,(\varphi_2-\varphi_1)\left(-\frac{1}{3}\left[(1-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{3}\left[\varrho^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) =$$

$$= \frac{abc\,(\varphi_2-\varphi_1)}{3}\,(2-\sqrt{2}).$$

1.64. Izračunati volumen tijela omeđenog površima $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

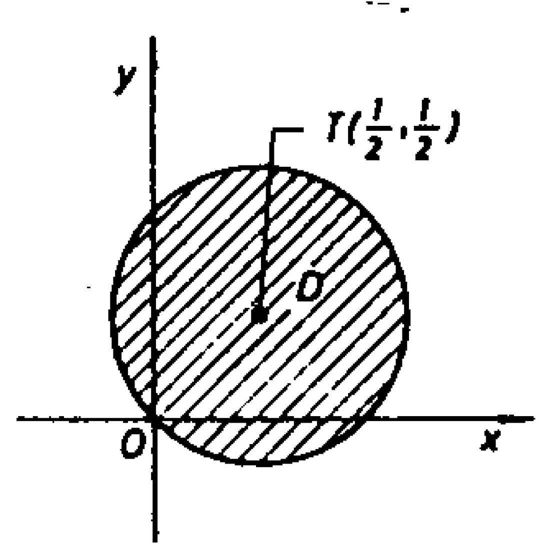
Rješenje.

Oblast integracije D u ravnini Oxy određena je projekcijom krive presjeka datih površi, a to je kriva $x^2 - x + y^2 - y = 0$, pa je $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}\right\}$ (sl. 1.46.).

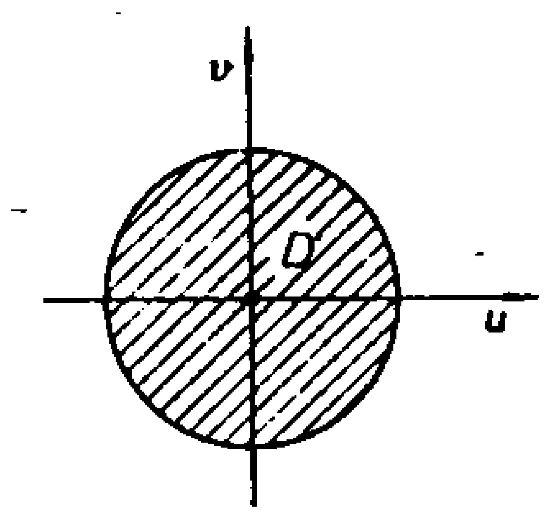
Označimo $z_2 = x + y$, $z_1 = x^2 + y^2$, tada je $z_2 > z_1$ za svaki par $x, y \in D$.
Prema tome je

$$V = \iint_D (z_2 - z_1)\,dxdy = \iint_D (x + y - x^2 - y^2)\,dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{1}{2} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right) dx\,dy.$$



Sl. 1.46.



Sl. 1.47.

Uvedimo zamjenu $x = \frac{1}{2} + u$, $y = \frac{1}{2} + v$. Pošto je $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 1$, dato preslikavanje je regularno i oblast D preslikava se na oblast $D' = \left\{(u,v) \,\middle|\, u^2 + v^2 < \frac{1}{2}\right\}$ (sl. 1.47.)

Zato je

$$V = \iint_{D'} \left(\frac{1}{2} - u^2 - v^2\right) dudv.$$

Uvedemo li zamjenu $u = \varrho\cos\varphi$, $v = \varrho\sin\varphi$, oblast D' preslikava se na oblast $D'' = \left\{(\varphi, \varrho) / 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \varrho < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Sada je

$$V = \iint_{D''} \left(\frac{1}{2} - \varrho^2\right) \varrho\, d\varrho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \varrho^2\right) \varrho\, d\varrho = \frac{\pi}{8}.$$

1.64.1. Zadatak 1.64. riješiti uvođenjem zamjene

$x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$.

1.65. Naći volumen tijela ograničenog površinama

$$z = x^2 + y^2,\ xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 2x,\ z = 0.$$

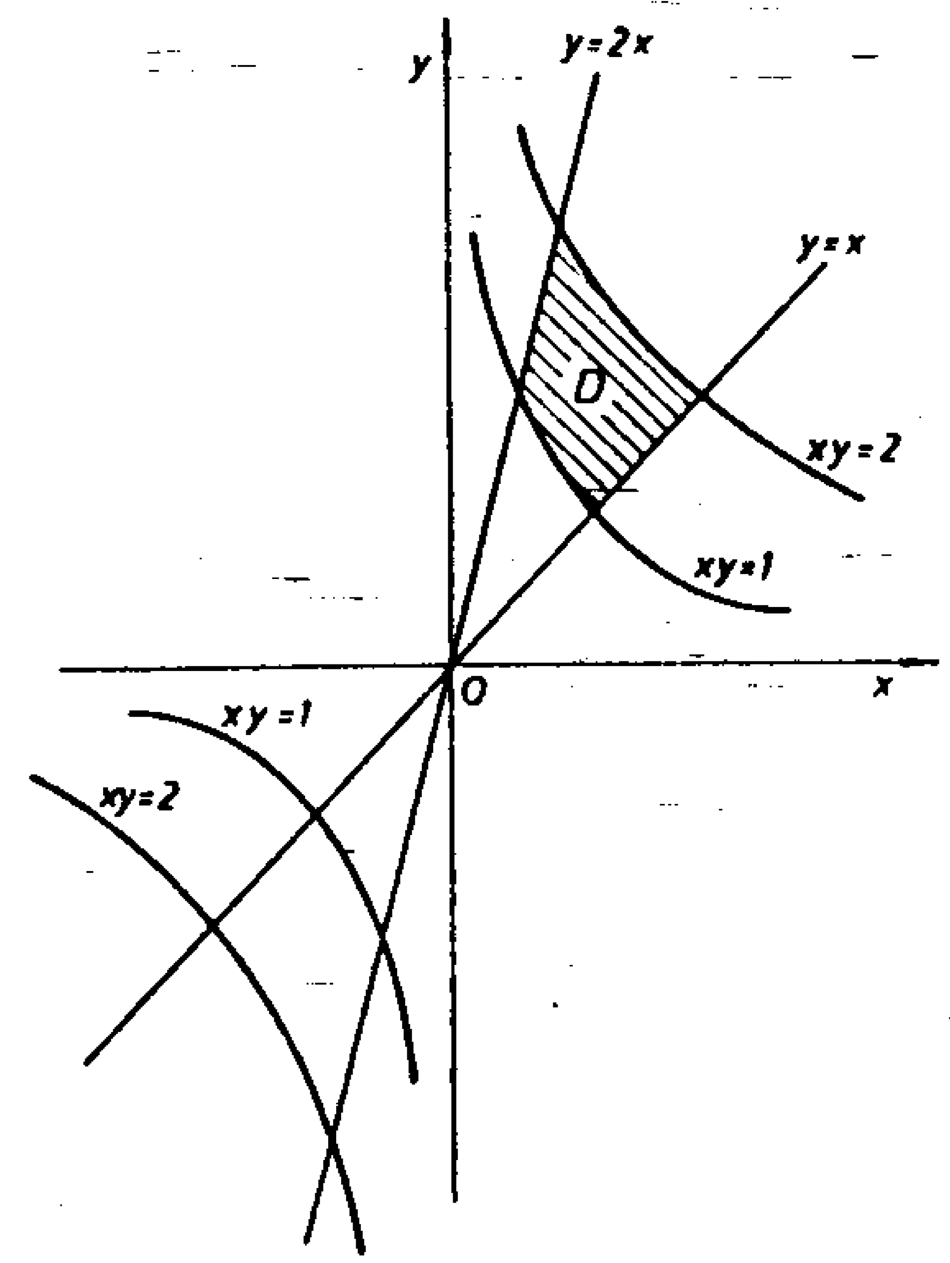
Rješenje.

Volumen tijela je

$$V = 2\iint_D z\,dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

pri čemu je D oblast označena na slici 1.48.



Sl. 1.48

Uvedimo zamjenu promjenljivih x, y na ovaj način:

$xy = v$, $y = ux$, tj.

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}},\quad y = \sqrt{uv}$$

za $u > 0$, $v > 0$.

Pošto je

$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{1}{2u}$ $(u > 0)$, dato preslikavanje je regularno, pa se oblast D preslikava na oblast

$$D' = \{(u,v) / 1 < u < 2,\ 1 < v < 2\}.$$

Sada je

$$x^2 + y^2 = \frac{v}{u} + uv = \frac{(1+u^2)\,v}{u},\ \text{pa je}$$

$$V = 2\iint_{D'} \frac{(1+u^2)\,v}{u}\,\frac{1}{2u}\,dudv = \int_1^2 \frac{1+u^2}{u^2}\,du \int_1^2 v\,dv = \frac{9}{4}.$$

1.66. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$I=\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2},$$

gdje je:

(a). $D=\{(x,y)\,/\,|y|\leqslant |x|,\ x^2+y^2\leqslant 1\}$,

(b). $D=\{(x,y)\,/\,|y|\leqslant x^2,\ x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Rješenje.

(a). Kako je podintegralna funkcija parna u odnosu na x i na y, dovoljno je ispitati konvergenciju integrala na oblasti $D_1=\{(x,y)\,/\,0<y<x,\ x^2+y^2<1\}$.

Pošto je $O(0,0)$ tačka prekida podintegralne funkcije, posmatrat ćemo integral

$$I(\varepsilon)=\iint_G \frac{dx\,dy}{x^2+y^2},$$

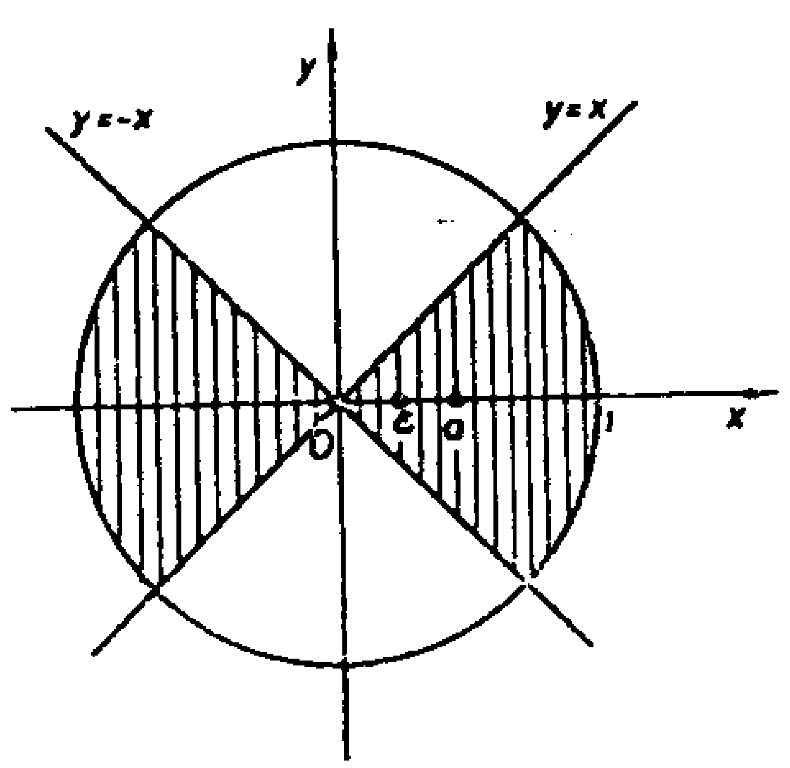
gdje je $G=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\varepsilon<x<a<\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0<y<x\right\}$ (sl. 1.49.).

Sada je

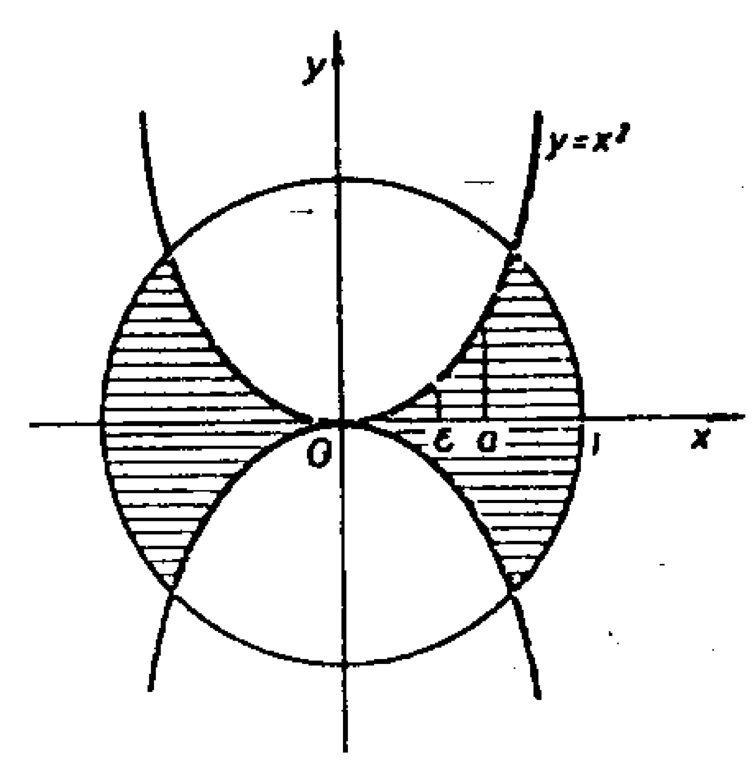
$$I(\varepsilon)=\int_\varepsilon^a dx\int_0^x \frac{dy}{x^2+y^2}=\int_\varepsilon^a \frac{1}{x}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right]_0^x dx=\frac{\pi}{4}\int_\varepsilon^a\frac{dx}{x},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)=\frac{\pi}{4}\left(\ln a-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon\right)=+\infty.$$

Zaključujemo da integral $\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ divergira.



Sl. 1.49.



Sl. 1.50

(b). Zbog navedenih činjenica u (a), posmatrat ćemo integral

$$I(G)=\iint_G \frac{dx\,dy}{x^2+y^2},$$

gdje je

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\varepsilon<x<a<\frac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}},\ 0<y<x^2\right\}\text{(sl. 1.50.).}$$

Sada je

$$I(\varepsilon)=\int_\varepsilon^a dx\int_0^{x^2}\frac{dy}{x^2+y^2}=\int_\varepsilon^a\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}dx.$$

Pošto je $\operatorname{arc\,tg}x<x$ za $x>0$, imamo

$$I(\varepsilon)<\int_\varepsilon^a dx=a-\varepsilon,$$

pa je $\lim_{\varepsilon\to0} I(\varepsilon)<a$. To znači da konvergira dati integral u oblasti $D_2=\{(x,y)\,/\,0<y<x^2,\ x^2+y^2<1\}$, a time i u oblasti D.

1.67. Izračunati integrale:

1°. $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ -y^2,\ D=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2\leqslant 1\}$;

2°. $\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}},\ D=\{(x,y)\,/\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$;

3°. $\iint_D \frac{dx\,dy}{1-x^2-y^2},\ D=\{(x,y)\,/\,x^2+y^2\leqslant 1\}$;

4°. $\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2},\ D=\{(x,y)\,/\,-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$;

5°. $\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy$, gdje je D cijela euklidska dvodimenzionalna ravnina;

6°. $\iint_D \ln\sin(x-y)\,dx\,dy,\ D=\{(x,y)\,/\,0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$.

Rješenja.

1°. Očigledno je da podintegralna funkcija ima prekid duž cijele krive $x^2+y^2=1$, i na tom skupu tačaka ona je neograničena. Zato imamo

$$\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}=2\pi\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}=$$

$$=2\pi\lim_{\varepsilon\to0}\left[-\sqrt{1-\varrho^2}\right]_0^{1-\varepsilon}=2\pi.$$

2°. Podintegralna funkcija je beskonačna duž pravca $x = 0$. Zato ćemo integriranje izvesti na ovaj način

$$\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 y\,dy\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\sqrt{\varepsilon}) = 1,$$

što znači da integral konvergira.

3°. Podintegralna funkcija postaje beskonačna duž kružnice $x^2+y^2=1$. Ako uvedemo zamjenu $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, dobivamo

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{1-x^2-y^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\varrho\,d\varrho}{1-\varrho^2} = -\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(2\varepsilon-\varepsilon^2) = +\infty,$$

što znači da integral divergira.

4°. Podintegralna funkcija je ograničena na oblasti D koja je neograničena. Zato imamo

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a\frac{\varrho\,d\varrho}{1+\varrho^2} = \pi\lim_{a\to+\infty}\ln(1+a^2) = +\infty,$$

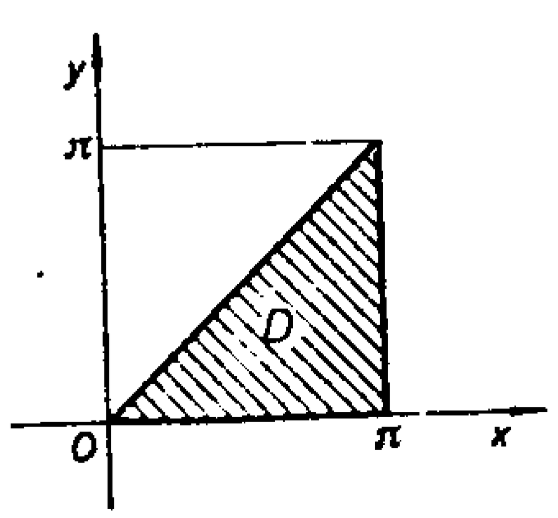
a to znači da integral divergira.

5°. Podintegralna funkcija je ograničena na oblasti D koja je neograničena. Ako uvedemo zamjenu $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, dobivamo

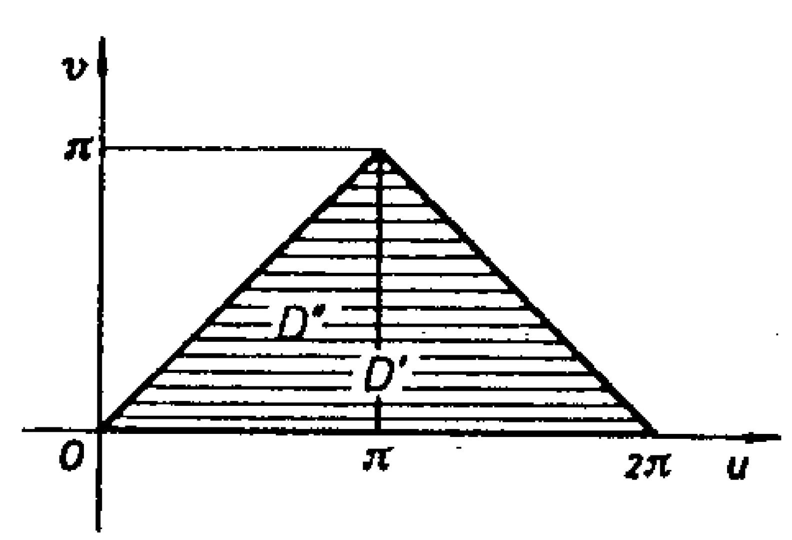
$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a \varrho e^{-\varrho^2}d\varrho = 2\pi\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \varrho e^{-\varrho^2}d\varrho =$$

$$= \pi\lim_{a\to+\infty}(1-e^{-a^2}) = \pi.$$

6°. Podintegralna funkcija je neograničena na dijelu pravca $y = x$ oblasti D (sl. 1.51.). Ako uvedemo zamjenu $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$, tada se oblast D ravnine Oxy preslikava na oblast D' koja je ograničena pravcima $v = 0$, $v = u$ i $v + u = 2\pi$ (sl. 1.52.).



Sl. 1.51



Sl. 1.52.

Pošto je

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{1}{2},$$

to je

$$\iint\limits_D \ln\sin(x-y)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'}\ln\sin v\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D''}\ln\sin v\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\pi \ln\sin v\,du\,dv = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^\pi du\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\ln\sin v\,dv =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\ln\sin v\,dv =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\varepsilon}\ln\sin x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx\right) =$$

$$= \pi\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2,$$

a to znači da integral konvergira.

1.68. Izračunati sljedeće integrale:

1°. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, gdje je D oblast u ravnini Oxy i ograničena je krivom $x^2+y^2 = x+y$;

2°. $\iint\limits_D (|x|+|y|)\,dx\,dy$, $D = \{(x,y)\,/\,|x|+|y| \leqslant 1\}$;

3°. $\iint\limits_D \left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\,dy$, $D = \{(x,y)\,/\,x^2+y^2 \leqslant 1\}$;

4°. $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{(x^2+y^2)(1+\sqrt[3]{x^2+y^2})}$, $D = \{(x,y)\,/\,x^2-y^2 \leqslant 0,$

$x^2+y^2 \geqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 4\}$;

5°. $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{x^2+y^2}}$, gdje je D oblast ograničena krivim čije su jednačine $y^2-4x-4=0$, $y^2+6x-9=0$, $y^2-2x+1=0$, $y^2+4x-4=0$;

6°. $\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$, gdje podintegralna funkcija ima prekid;

7°. $\iint_D [x + y]\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, gdje podintegralna funkcija ima prekid.

1.69. Ako su m i n cijeli brojevi, pokaži da važe formule

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx + ny)\,dx\,dy = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx + ny)\,dx\,dy = \begin{cases} 4\pi^2 & \text{za} \quad m = n = 0, \\ 0 & \text{za} \quad m^2 + n^2 > 0. \end{cases}$$

1.70. Izračunati površine ograničene sljedećim krivim linijama:

1°. $x = y^2 - 2y,\ x + y = 0$;

2°. $y^2 = 4(1 - x),\ x^2 + y^2 = 4$ (izvan parabole);

3°. $(x - y)^2 + x^2 = a^2\ (a > 0)$;

4°. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy,\ (x - a)^2 + (y - a)^2 \leqslant a^2\ (a > 0)$;

5°. $\dfrac{x^3}{a^3} + \dfrac{y^3}{b^3} = \dfrac{x^2}{h^2} - \dfrac{y^2}{k^2}\ (x > 0, y > 0)$;

6°. $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^5 = \dfrac{x^2y^2}{c^4}$;

7°. $xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = x,\ y = 2x\ (x > 0,\ y > 0)$;

8°. $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1,\ \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 2,$

$\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b},\ 4\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}\ (a > 0,\ b > 0)$.

1.71. Izračunati volumene tijela ograničenih površima:

1°. $x = 2y^2,\ x + 2y + z = 4,\ z = 0,\ y = 0$;

2°. $z = 0,\ z = xy,\ x^2 + y^2 = 4$;

3°. $z = 5x,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$;

4°. $z = \cos x \cos y,\ z = 0,\ |x + y| \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ |x - y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

5°. $z = x + y,\ (x^2 + y^2)^2 = 2xy,\ z = 0\ (x > 0,\ y > 0)$;

6°. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 \geqslant a|x|\ (a > 0)$;

7°. $z = x^2 + y^2,\ xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = \dfrac{x}{2},\ y = 2x,\ z = 0$;

8°. $z = c \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x},\ z = 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}\ (y \geqslant 0)$.

1.72. Izračunati integrale:

1°. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2)^p},\ D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$;

2°. $\displaystyle\iint_D \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy,\ D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

3°. $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a - x)(x - y)}}$;

4°. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant x\}$;

5°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy$;

1.73. Ispitati konvergenciju integrala:

1°. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}\ (\alpha > 0),\ D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$;

2°. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^m + y^n)^\alpha}\ (m, n, \alpha > 0),\ D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,$
$x^m + y^n \leqslant 1\}$.

1.74. Pokaži da integral

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy,$$

$$D = \{(x,y) \mid x \geqslant 1,\ y \geqslant 1\},$$

divergira, iako integrali

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy,\quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx$$

konvergiraju.

2. Trojni integral

Neka je D *zatvorena* oblast u pravouglom *Dekartovom* koordinatnom sistemu $Oxyz$ omeđena *zatvorenom* i *po dijelovima glatkom* površi S. Označimo sa V zapreminu oblasti D.

Neka je (τ) jedna podjela oblasti D na *zatvorene* oblasti $D_1, D_2, \ldots, D_n$, koje su omeđene *po dijelovima glatkim* površima $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Označimo sa $V_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ zapremine odgovarajućih parcijalnih oblasti D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Za podjelu (τ) oblasti D imamo:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \quad V = \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

Neka je na D zadana ograničena funkcija $f(x, y, z)$ $(X(x, y, z) \in D)$. Neka je $M\,(m)$ *gornja (donja)* međa funkcije f na D, a $M_i(m_i)$ *gornje (donje)* međe funkcije f na odgovarajućim oblastima D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tada su

$$\overline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i V_i$$

gornja, a

$$\underline{S}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i$$

donja suma funkcije $f(x, y, z)$ na oblasti D za podjelu (τ).

Ako je $f(x, y, z)$ ograničena funkcija na oblasti D, tada se suma

$$S(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i$$

naziva *integralnom* (*Riemannovom*) sumom funkcije $f(x, y, z)$ na oblasti D za izabranu podjelu (τ) i proizvoljno izabrane tačke $T_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Kazat ćemo da je funkcija $f(x, y, z)$ *integrabilna* na oblasti D ako postoji realan broj I takav da se za svako $\varepsilon > 0$ može naći $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sa osobinom da za svaku podjelu (τ) oblasti D i za svaki izbor tačaka $T_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D_i$ važi

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) < \delta \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i \right| < \varepsilon .$$

Ako je funkcija $f(x, y, z)$ integrabilna na oblasti D, tada pišemo

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i =$$

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

$$= \iiint_D f(x, y, z)\, dV = \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Ovaj integral naziva se trojnim integralom funkcije $f(x, y, z)$ na oblasti D.

Ako je $f(x, y, z)$ ograničena na oblasti D, tada za svaku podjelu (τ) oblasti D i proizvoljno izabrane tačke $T_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D_i$ vrijedi

$$mV \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i V_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i V_i \leqslant MV.$$

Ako je $f(x, y, z)$ ograničena funkcija na oblasti D, tada postoji granična vrijednost donjih i granična vrijednost gornjih suma, tj.

$$\underline{I} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \quad \overline{I} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i V_i,$$

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Granična vrijednost $\underline{I}$ je donji, a $\overline{I}$ je gornji integral funkcije $f(x, y, z)$ na oblasti D, što pišemo:

$$\underline{I} = \underline{\iiint_D} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz; \quad \overline{I} = \overline{\iiint_D} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Da bi funkcija $f(x, y, z)$ bila integrabilna na oblasti D, potrebno je, i dovoljno, da je $\underline{I} = \overline{I}$.

Ako je $f(x, y, z) = 1$ na D, tada je

$$\iiint_D dx\, dy\, dz = V.$$

Klase integrabilnih funkcija:

(1). Svaka funkcija $f(x, y, z)$ neprekidna na zatvorenoj oblasti D integrabilna je na ovoj oblasti.

(2). Svaka ograničena funkcija $f(x, y, z)$ na oblasti D, sa konačno mnogo tačaka prekida, integrabilna je na D.

Osnovne osobine trojnog integrala:

(1). Ako je $\lambda \in R$, a f je integrabilna funkcija na oblasti D, onda je i funkcija λf integrabilna na D i vrijedi

$$\iiint_D \lambda f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

(2). Ako je f integrabilna funkcija na oblasti D, i ako je $D = D_1 \cup D_2$ $(V = V_1 + V_2)$, onda je

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

(3). Ako su funkcije f i g integrabilne na oblasti D, onda je i funkcija $f \pm g$ integrabilna na D i vrijedi

$$\iiint\limits_D (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \pm$$

$$\pm \iiint\limits_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

(4). Ako je $f(x,y,z)$ integrabilna na D i ako je $f(x,y,z) \geqslant 0$ ($f(x,y,z) \leqslant \leqslant 0$) na D, tada je

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \geqslant 0 \left(\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leqslant 0\right).$$

(5). Neka su $f(x,y,z)$ i $g(x,y,z)$ integrabilne funkcije na D. Ako je $f(x,y,z) \geqslant g(x,y,z)$ ($f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$) na D, onda je

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \geqslant \iiint\limits_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\left(\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leqslant \iiint\limits_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right).$$

(6). Ako je $f(x,y,z)$ integrabilna na D, tada je i $|f(x,y,z)|$ integrabilna na D i vrijedi

$$\left|\iiint\limits_D (x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right| \leqslant \iiint\limits_D |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz.$$

(7). Ako je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna na oblasti D i ako je $m \leqslant f \leqslant M$,
tada je

$$mV \leqslant \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leqslant MV,$$

tj.

$$\iiint\limits_D (x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \mu \cdot V \ (m \leqslant \mu \leqslant M).$$

Analogno kao za dvojni integral, važi teorema srednje vrijednosti i za trojni integral.

Ako je $f(x,y,z)$ neprekidna funkcija na D, tada postoji tačka $T(\xi, \eta, \zeta) \in D$ takva da je

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V.$$

(8). Ako je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna na oblasti

$$D = \{(x,y,z)/a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ b_1 \leqslant y \leqslant b_2,\ c_1 \leqslant z \leqslant c_2\},$$

onda je

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f\,dz =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{c_1}^{c_2} f\,dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f\,dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{b_1}^{b_2} f\,dy =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f\,dx = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{a_1}^{a_2} f\,dx.$$

(9). Neka je $f(x,y,z)$ integrabilna funkcija na D, pri čemu je D oblast definirana sistemom nejednačina:

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),$$

gdje su $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ neprekidne funkcije svojih argumenata. Tada je

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Ako mijenjamo redoslijed integriranja, onda se i same granice mijenaju.

(10). Ako u trostrukom integralu s promjenljivim x, y, z uvedemo zamjenu pomoću funkcija:

$$x = x(u,v,\omega),\ y = y(u,v,\omega),\ z = z(u,v,\omega),$$

koje su neprekidne i imaju neprekidne parcijalne izvode po u, v, ω i koje predstavljaju obostrano jednoznačno i regularno preslikavanje tačaka oblasti D prostora $Oxyz$ u tačke neke oblasti D' prostora $O'uv\omega$, tada za funkciju $f(x,y,z)$ neprekidnu na D vrijedi

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D'} f(x(u,v,\omega), y(u,v,\omega)\ z(u,v,\omega))\,|J|\,du\,dv\,d\omega,$$

gdje je (Jacobieva determinanta)

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\omega)} \neq 0.$$

Zadaci (2.1–2.39)

2.1. Izračunati po definiciji $I = \iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz$,

ako je

$$D = \{(x,y,z)\,/\,0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\}.$$

Rješenje.

Funkcija $f(x, y, z) = xyz$ neprekidna je na oblasti D, pa je integrabilna na D. Oblast D podijelimo ravninama $x = \frac{a}{l} i$ $(i = 0, 1, \ldots, l)$, $y = \frac{b}{m} j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, $z = \frac{c}{n} k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Parcijalne oblasti D_{ijk} $(i = 0, 1, \ldots, l,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ k = 0, 1, \ldots, n)$ su paralelepipedi čije su zapremine $V_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) = \frac{abc}{lmn}$.

Tjemena paralelepipeda D_{ijk} su:

$$\left(\frac{a}{l}(i-1),\ \frac{b}{m}(j-1),\ \frac{c}{n}(k-1)\right),\ \left(\frac{a}{l} i,\ \frac{b}{m}(j-1),\ \frac{c}{n}(k-1)\right),$$

$$\left(\frac{a}{l} i,\ \frac{b}{m} j,\ \frac{c}{n}(k-1)\right),\ \left(\frac{a}{l}(i-1),\ \frac{b}{m} j,\ \frac{c}{n}(k-1)\right),$$

$$\left(\frac{a}{l}(i-1),\ \frac{b}{m}(j-1),\ \frac{c}{n} k\right),\ \left(\frac{a}{l} i,\ \frac{b}{m}(j-1),\ \frac{c}{n} k\right),$$

$$\left(\frac{a}{l} i,\ \frac{b}{m} j,\ \frac{c}{n} k\right),\ \left(\frac{a}{l}(i-1),\ \frac{b}{m} j,\ \frac{c}{n} k\right).$$

Funkcija $f(x, y, z) = xyz$ u tački $\left(\frac{a}{l}(i-1),\ \frac{b}{m}(j-1),\ \frac{c}{n}(k-1)\right)$ ima donju među, a u tački $\left(\frac{a}{l} i,\ \frac{b}{m} j,\ \frac{c}{n} k\right)$ gornju među.

Prema definiciji integrala imamo:

$$\iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{l\to+\infty\\ m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{l}(i-1)\frac{b}{m}(j-1)\frac{c}{n}(k-1)\frac{abc}{lmn} =$$

$$\lim_{\substack{l\to+\infty\\ m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \frac{a^2 b^2 c^2}{l\,m\,n} \sum_{i=1}^{l}(i-1)\sum_{i=1}^{m}(j-1)\sum_{k=1}^{n}(k-1) =$$

$$\lim_{\substack{l\to+\infty\\ m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \frac{a^2 b^2 c^2}{l\,m\,n}\cdot\frac{(l-1)\,l}{2}\cdot\frac{(m-1)\,n}{2}\cdot\frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{8},$$

odnosno

$$\iiint\limits_D xyz\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{l\to+\infty\\ m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{l} i \frac{b}{m} j \frac{c}{n} k \frac{abc}{lmn} = \frac{a^2 b^2 c^2}{8},$$

tj.

$$I = \frac{a^2 b^2 c^2}{8}.$$

2.2. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$, ako je

$$D = \{(x, y, z)\ /\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Rješenje.

$$I = \iiint\limits_D (x + y + z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left[\frac{(x + y + z)^2}{2}\right]_0^1 dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{(x + y + 1)^2}{2} - \frac{(x + y)^2}{2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{(x + y + 1)^3}{3} - \frac{(x + y)^3}{3}\right]_0^1 dx = \frac{1}{6}\int_0^1 ((x + 2)^3 - (x + 1)^3 -$$

$$- (x + 1)^3 + x^3)\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{(x + 2)^4}{4} - \frac{2(x + 1)^4}{4} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{24}(81 - 32 + 1 - 16 + 2) = \frac{3}{2}.$$

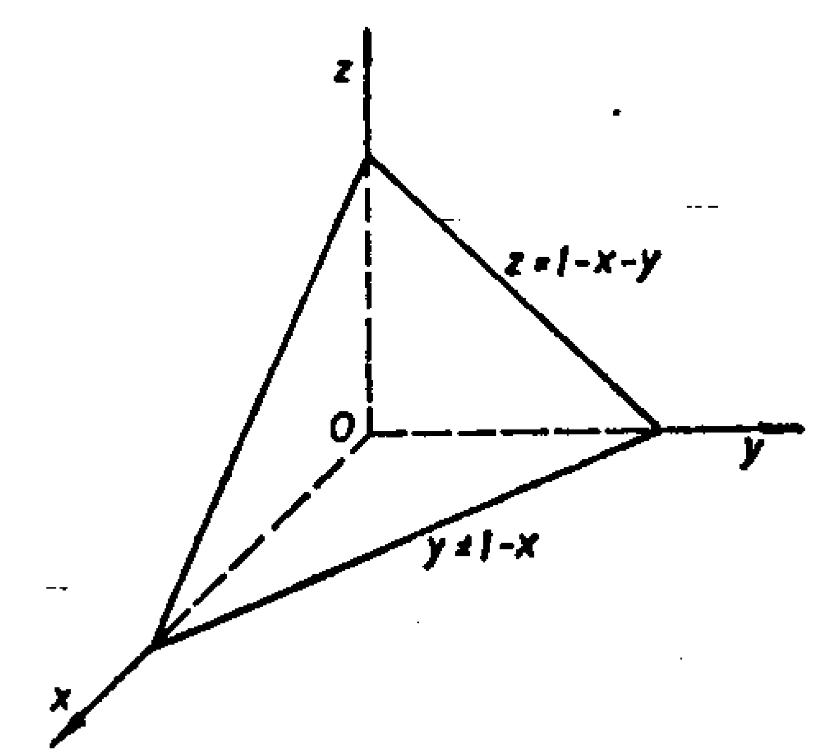
2.3. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, gdje je D oblast ograničena ravninama:

$$x = 1,\ x = 3;\ y = 0,\ y = 4;\ z = 2,\ z = 5.$$

2.4. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D (1 - x)\,yz\,dx\,dy\,dz$, ako je D oblast ograničena ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$.

Rješenje.

Ako oblast D projiciramo na ravninu Oxy, dobit ćemo oblast $Dxy = \{(x, y)\ /\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\}$ (sl. 2.1.).



Sl. 2.1.

Zato je

$$I=\iiint_D (1-x)yz\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x}y\,dy\int_0^{1-x-y}z\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x}y\,[z^2]_0^{1-x-y}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x}y\,(1-x-y)^2\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x}((1-x)^2y-$$

$$-2(1-x)y^2+y^3)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\left[\frac{(1-x)^2}{2}y^2-\frac{2(1-x)}{3}y^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}y^4\right]_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)\left(\frac{(1-x)^4}{2}-\frac{2(1-x)^4}{3}+\frac{(1-x)^4}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{24}\int_0^1(1-x)^5\,dx=-\left[\frac{(1-x)^6}{24\cdot 6}\right]_0^1=\frac{1}{144}.$$

Ako oblast D projiciramo na ravninu Oyz, dobit ćemo $D_{yz}=\{(y,z)\,/\,0<y<1,\ 0<z<1-y\}$. Sada imamo

$$I=\iiint_D(1-x)yz\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 y\,dy\int_0^{1-y}z\,dz\int_0^{1-y-z}(1-x)\,dx=\frac{1}{144}.$$

2.5. Izračunati integral $I=\iiint_D\dfrac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, gdje je D oblast omeđena ravninama $x=0, y=0, z=0$ i $x+y+z=1$.

Rezultat,

$$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

2.6. Izračunati integral $I=\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast D ograničena cilindrom $x^2+y^2=1$ i ravninama $z=3$ i $z=5$.

Rješenje.

$$I=\iiint_D x\,dx\,dy\,dz=\int_3^5 dz\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=4\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

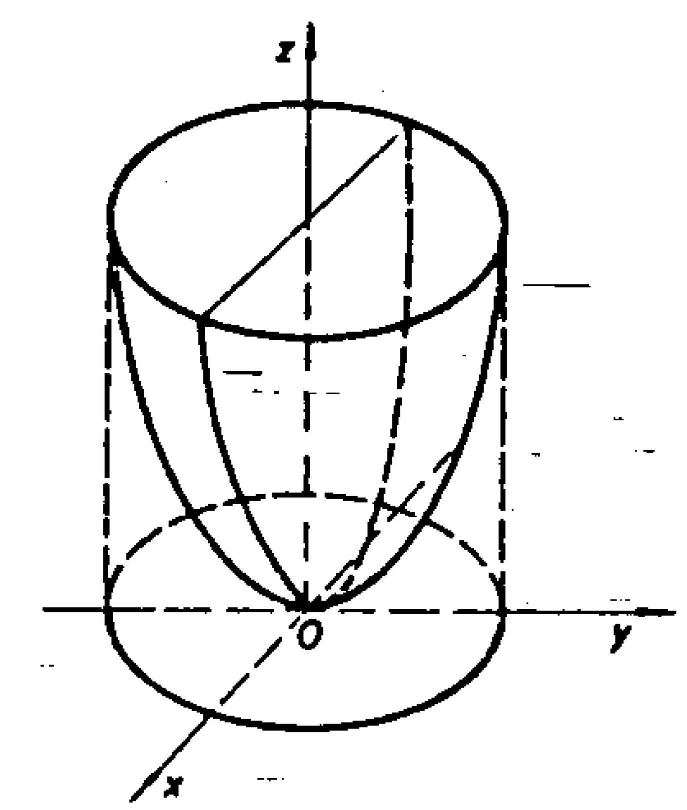
Pošto je funkcija $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ neparna na segmentu $[-1,1]$, to je $I=0$.

2.7. Izračunati integral $I=\iiint_D |x|\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast D omeđena površima $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2$ i ravninom $z=0$.

Rješenje.

Projekcija oblasti D na ravninu Oxy je krug $x^2+y^2<1$. Prema tome, dato područje integracije zadato je sistemom nejednačina:

$$-1<x<1,\ -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2},$$
$$0<z<x^2+y^2.$$



Sl. 2.2.

Imamo, dakle,

$$I=\iiint_D|x|\,dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}|x|\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{x^2+y^2}dz=$$

$$=\int_{-1}^{1}|x|\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,dy=\int_{-1}^{1}|x|\left(2x^2\sqrt{1-x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right)dx=4\int_0^1\left(x^3\sqrt{1-x^2}+\frac{x\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}\right)dx=\frac{4}{5}.$$

2.8. Pomoću trostrukog integrala izračunati zapreminu tijela omeđenog paraboloidom $z=x^2+y^2$, cilindrom $x^2+y^2=1$ i ravninom $z=0$.

Rješenje.

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy = \int_{-1}^{1} \left(2x^2\sqrt{1-x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}\right) dx = \frac{8}{3}\int_0^1 \left(3x^2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{(1-x^2)^3}\right) dx = [x = \sin t] =$$

$$= \frac{8}{3}\int^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 t)\,dt = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 2\cos^4 t)\,dt =$$

$$= \ldots = \pi$$ (sl. 2.2.).

2.9. Pomoću trostrukog integrala izračunati zapreminu tijela omeđenog paraboloidima $z = 2x^2 + 2y^2$, $z = x^2 + y^2$ i cilindrom $x^2 + y^2 = 1$.

2.10. Izračunati integral $I = \iiint_D z\,dx\,dy\,dz$, gdje je D oblast određena sistemom nejednačina:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2};\ x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}\,x,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Rješenje.

Oblast D podijelit ćemo na dvije oblasti D_1 i D_2, gdje je D_1 određena sistemom nejednačina $0 < x < \frac{1}{2}$, $x < y < \sqrt{3}x$, $0 < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, a D_2 nejednačinama $\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < y < \sqrt{1 - x^2}$, $0 < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Očigledno je $D = D_1 \cup D_2$.

$$I = \iint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} z\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} z\,dx\,dy\,dz.$$

$$I_1 = \iiint_{D_1} z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{\sqrt{3}x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{\sqrt{3}x} (1 - x^2 - y^2)\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left((\sqrt{3} - 1)\,x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}(2 - 3\sqrt{3})\,x^3\right) dx = \frac{9\sqrt{3} - 10}{96};$$

$$I_2 = \iiint_{D_2} z\,dx\,dy\,dz = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{2(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{4x^3}{3} - x\right) dx = \frac{\pi}{32} + \frac{12 - 9\sqrt{3}}{64}.$$

Prema tome,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{32} + \frac{16 - 9\sqrt{3}}{196}.$$

2.11. Pomoću trostrukog integrala izračunati zapreminu tijela koje je omeđeno površima $z = x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$.

Rješenje.

Date površi su paraboloidi, a oblast D data je nejednačinama $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{1 - x^2}$, $x^2 + y^2 < z < 1 - x^2 - y^2$.

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2-y^2} dz =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - 2x^2 - 2y^2)\,dy = 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} - \right.$$

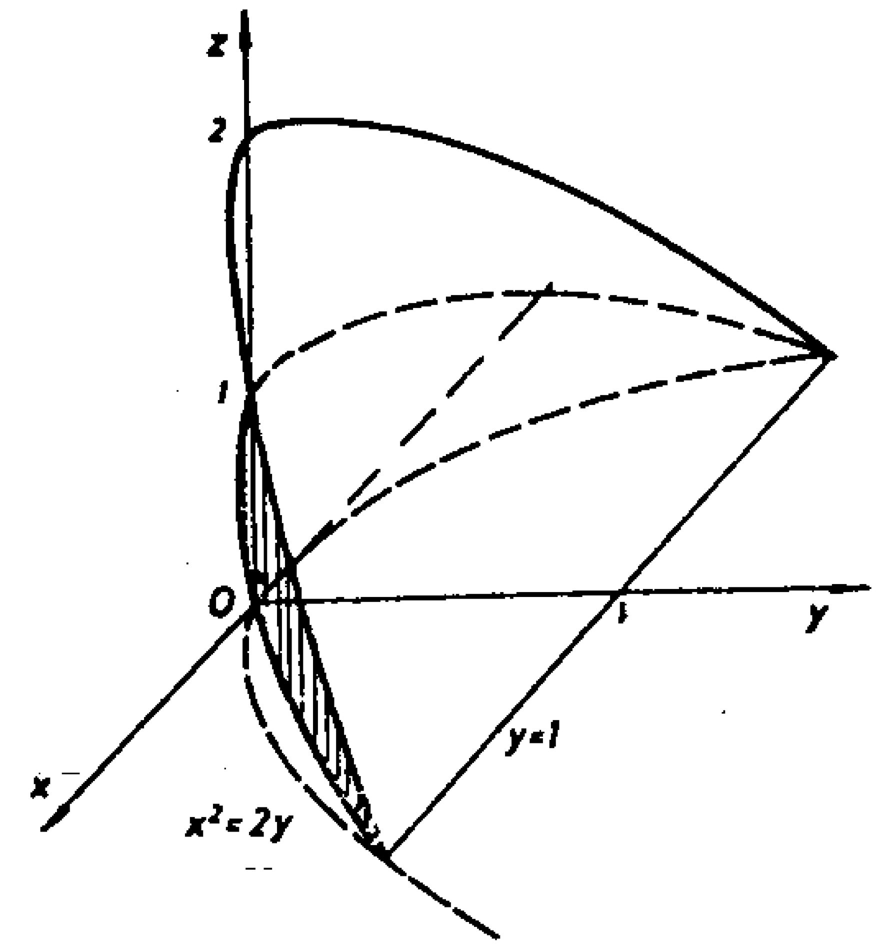
$$\left. - x^2\sqrt{1 - x^2}\right) dx = 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{4}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \frac{1}{3}.$$

2.12. Pomoću trostrukog integrala izračunati zapreminu tijela koje je omeđeno površima čije su jednačine $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2 - 1$.

2.13. Izračunati integral $I = \iiint_D y\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast D omeđena sa površi $2y = x^2$ i ravninama $y + z = 1$, $2y + z = 2$.

Rješenje.

Površ $2y = x^2$ je cilindrična površ čije su izvodnice paralelne sa osom Oz, a vodilja je parabola $2y = x^2$ u ravnini Oxy. Ravnine $y + z = 1$, $2y + z = 2$ sijeku koordinatnu ravninu Oxy $(z = 0)$ po pravcu $y = 1$. Pravac $y = 1$ siječe parabolu $2y = x^2$ u tačkama $T_1(-\sqrt{2}, 1)$, $T_2(\sqrt{2}, 1)$. Projekcija date oblasti D na ravninu Oxy je oblast $Dxy =$ $= \left\{(x, y) \,/\, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2},\ \frac{x^2}{2} < y < 1\right\}$ (sl. 2.3.).



Sl. 2.3.

Zbog toga imamo

$$I = \iiint\limits_D y\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{1} y\,dy \int_{1-y}^{2(1-y)} dz = 2\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{1} y(1-y)\,dy =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24}\right) dx = \frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

2.14. Pomoću trostrukog integrala izračunati zapreminu tijela koje je omeđeno površima $x^2 = y$ i ravninama $y - z = 1$, $2y + z = 2$.

2.15. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$, gdje je D oblast ograničena ravninom $z = 2$ i površi $x^2 + y^2 = 2z$.

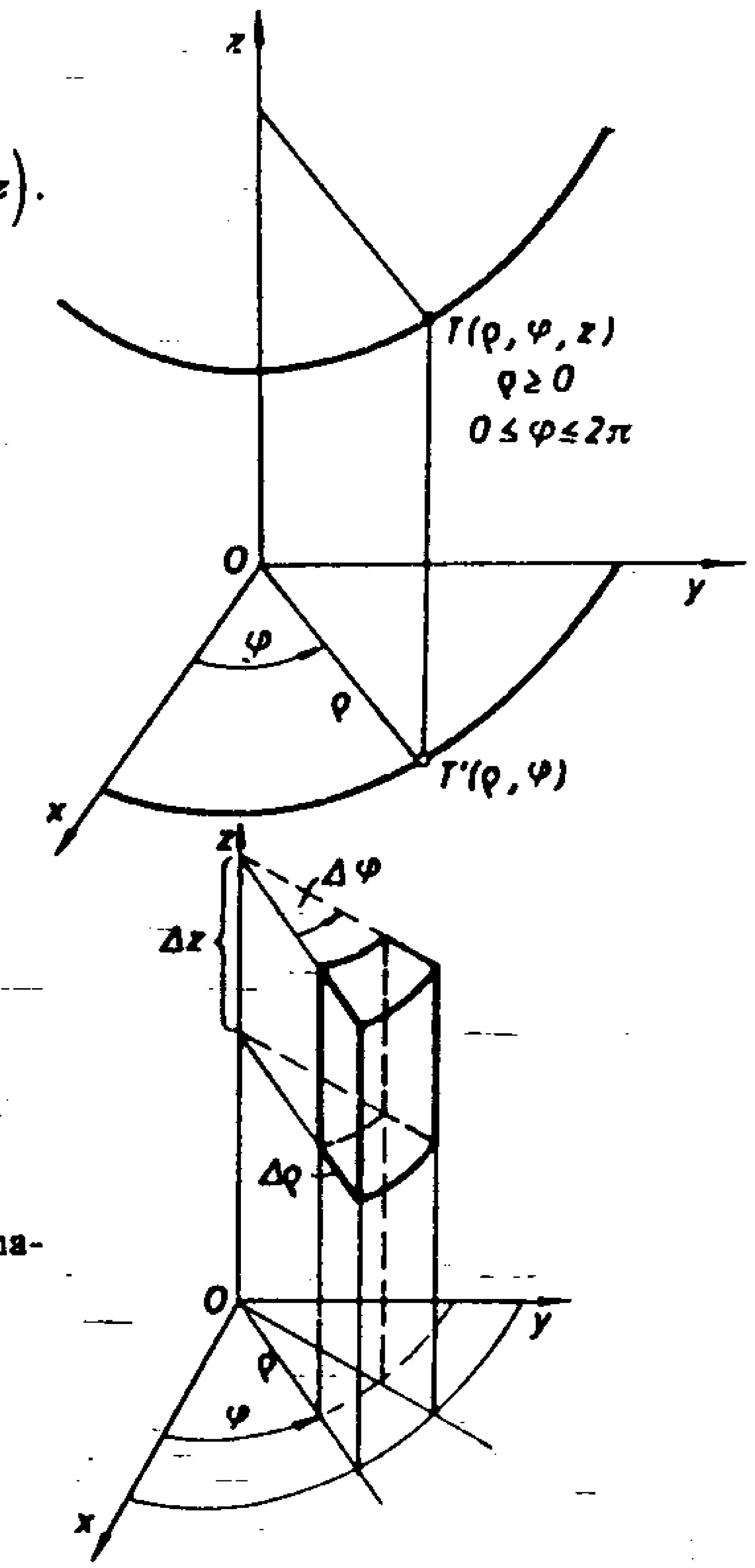
Rješenje.

Projekcija oblasti D na ravninu Oxy je oblast $Dxy = \{(x, y) \,/\, -2 < x < 2,$ $-\sqrt{4 - x^2} < y < \sqrt{4 - x^2}\}$.

Uvedimo cilindrične koordinate (ϱ, φ, z) tačke T, gdje su (ϱ, φ) polarne koordinate njene ortogonalne projekcije T' na ravninu Oxy. Prema sl. 2.4. očigledno je da važi:

(*) $x = \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi,\ z = z.$

$$\left(\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\ z = z\right).$$



Sl. 2.4. i 2.5.

Element zapremine u cilindričnim koordinatama je

$$\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz,$$

odnosno

$$|J|\,d\varrho\,d\varphi\,dz,$$

gdje je

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\varrho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho.$$

Prema tome, ako uvedemo zamjenu (*), imamo:

$$x^2 + y^2 = \varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi = \varrho^2;$$

iz

$$x^2 + y^2 = 2z \text{ i } z = 2$$

slijedi

$$\frac{\varrho^2}{2} < z < 2;\ \text{iz } x^2 + y^2 = 4$$

slijedi

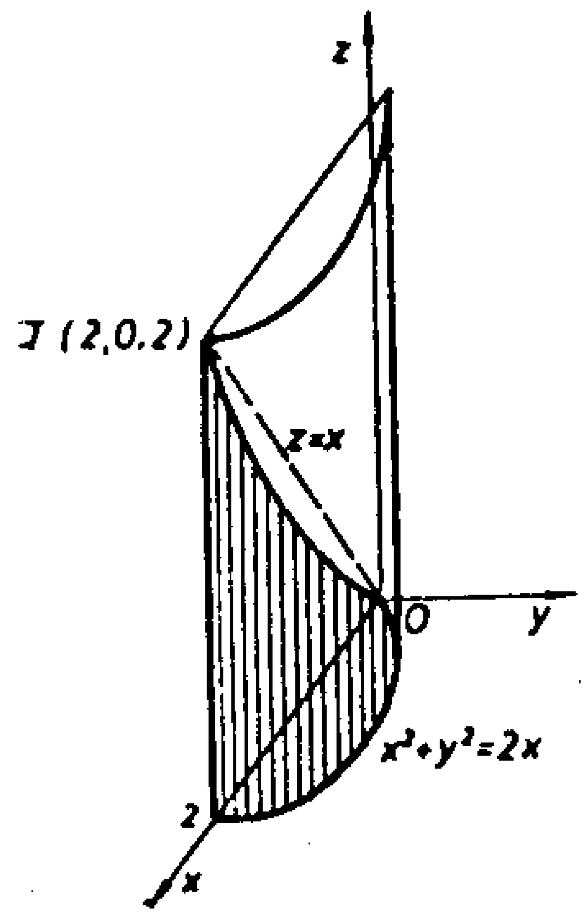
$$0 < \varrho < 2;\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

Zato je

$$I = \iiint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D'} \varrho^2\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \varrho^3\,d\varrho \int_{\frac{\varrho^2}{2}}^{2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \varrho^3\left(2 - \frac{\varrho^2}{2}\right) d\varrho = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16\pi}{3}.$$

2.16. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, gdje je D oblast omeđena s donje strane ravninom $z = 0$, a s gornje ravninom $z = x$, te sa površi cilindra $x^2 + y^2 = 2x$ i ravninom $y = 0$.



Sl. 2.6.

Rješenje.

Oblast D projicira se na oblast Dxy (ravnine Oxy) koja je omeđena segmentom $[0, 2]$ ose Ox i krivom $y = \sqrt{2x - x^2}$ (sl. 2.6.).

Ako uvedemo zamjenu promjenljivih:

$$x = \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi,\ z = z,$$

onda je

$$0 < \varrho < 2\cos\varphi,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < z < \varrho\cos\varphi$$

i

$$\sqrt{x^2+y^2} = \varrho.$$

Zbog toga imamo

$$I = \iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D'} z\varrho^2\,d\varphi\,d\varrho\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho^2\,d\varrho \int_0^{\varrho\cos\varphi} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho^4\,d\varrho = \frac{16}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi\,d\varphi = \frac{256}{175}.$$

2.17. Izračunati volumen tijela oblasti D koja je data u zadatku 2.16.

Rješenje.

$$V = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D'} \varrho\,d\varphi\,d\varrho\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho\,d\varrho \int_0^{\varrho\cos\varphi} dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho^2\,d\varrho = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

2.18. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, gdje je D oblast ograničena cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$ i ravninama $z = 0$, $z = a$ $(a > 0)$.

2.19. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, gdje je oblast D omeđena površima $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

Rezultat, $\dfrac{\pi}{6}$.

2.20. Izračunati volumen tijela omeđenog površima $z = 6 - x^2 - y^2$ i $z^2 = x^2 + y^2$ $(z \geqslant 0)$.

Rješenje.

Oblast D (sl. 2.7.) čiji volumen treba izračunati omeđena je s donje strane konusom $z^2 = x^2 + y^2$, a s gornje strane paraboloidom $z = 6 - x^2 - y^2$. Oblast Dxy (u ravnini Oxy) na koju se projicira D dobit ćemo ako z eliminišemo iz jednačina $z = 6 - x^2 - y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, tj. $(6 - x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2$. Odavde je

$$36 - 12(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 = x^2 + y^2,$$

$$(x^2+y^2)^2 - 13(x^2+y^2) + 36 = 0.$$

Rješenje ove kvadratne jednačine po nepoznatoj $x^2 + y^2$ je

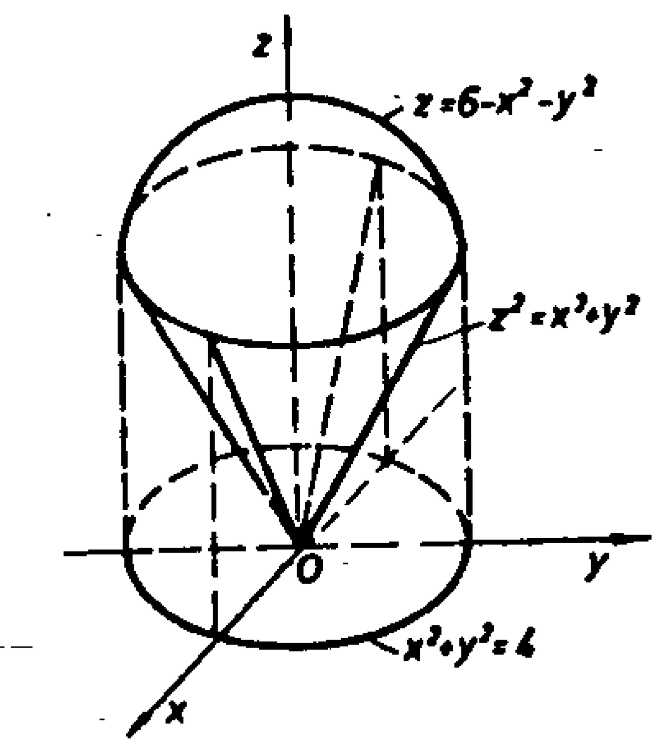
$$x^2 + y^2 = 4.$$

Uvedemo li zamjenu promjenljivih:

$$x = \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi,\ z = z,$$

imamo

$$0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \varrho < 2,\ \varrho < z < 6 - \varrho^2.$$



Sl. 2.7.

Pošto je oblast D simetrična u odnosu na koordinatne ravnine Oxz i Oyz, to je

$$V = 4\iiint\limits_D dxdydz = 4\iiint\limits_{D'} \varrho d\varphi d\varrho dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \varrho\,d\varrho \int_\varrho^{6-\varrho^2} dz =$$

$$= 2\pi\int_0^2 (6\varrho - \varrho^2 - \varrho^3)\,d\varrho = \frac{32\pi}{3}.$$

2.21. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^3 dx\,dy\,dz$, ako je oblast D omeđena cilindrom $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ i ravninama $y = 0$, $y = b$ $(a > 0$, $b > 0$, $c > 0)$.

Uputstvo.

Uvesti zamjenu: $x = a\varrho\cos\varphi$, $z = c\varrho\sin\varphi$, $y = y$.

2.22. Izračunati integral $I = \iiint\limits_D \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, ako je oblast D omeđena cilindrom $x^2 + y^2 = 1$ i ravninama $z = -1$ i $z = 1$.

Uputstvo.

Uvesti zamjenu $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $z = z$.

Rezultat, $2\pi\left(\frac{3}{2}\sqrt{10}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{2}-1}-4\right)$.

2.23. Izračunati zapreminu oblasti omeđene površima:

a) $x^2+y^2+z^2=R^2$,

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,

c) $2z=x^2+y^2$, $z=x+y$,

d) $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2+y^2=2z\ (x^2+y^2-2z\leqslant 0)$.

Rješenja:

a) Oblast D omeđena sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ projicira se na oblast Dxy (ravnine Oxy) omeđenu kružnicom $x^2+y^2=R^2$. Ako uvedemo cilindrične koordinate $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, $z=z$, onda se oblast D preslikava na oblast D': $0<\varphi<2\pi$, $\varrho^2+z^2<R^2$, $0<\varrho<R$.

Otuda je

$$V=\iiint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{D'}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_{-\sqrt{R^2-\varrho^2}}^{\sqrt{R^2-\varrho^2}}\mathrm{d}z=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_0^{\sqrt{R^2-\varrho^2}}\mathrm{d}z=4\pi\int_0^R\varrho\sqrt{R^2-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho=\frac{4R^3\pi}{3}.$$

b) Oblast D omeđena elipsoidom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$ projicira se na oblast Dyz (ravnine Oyz) omeđenu elipsom $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Ako uvedemo uopštene cilindrične koordinate: $x=x$, $y=b\varrho\cos\varphi$, $z=c\varrho\sin\varphi$, onda se oblast D preslikava na oblast D': $0<\varphi<2\pi$, $0<\varrho<1$, $x^2+a^2\varrho^2<a^2$.

Kako je

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(x,\varrho,\varphi)}=bc\varrho,$$

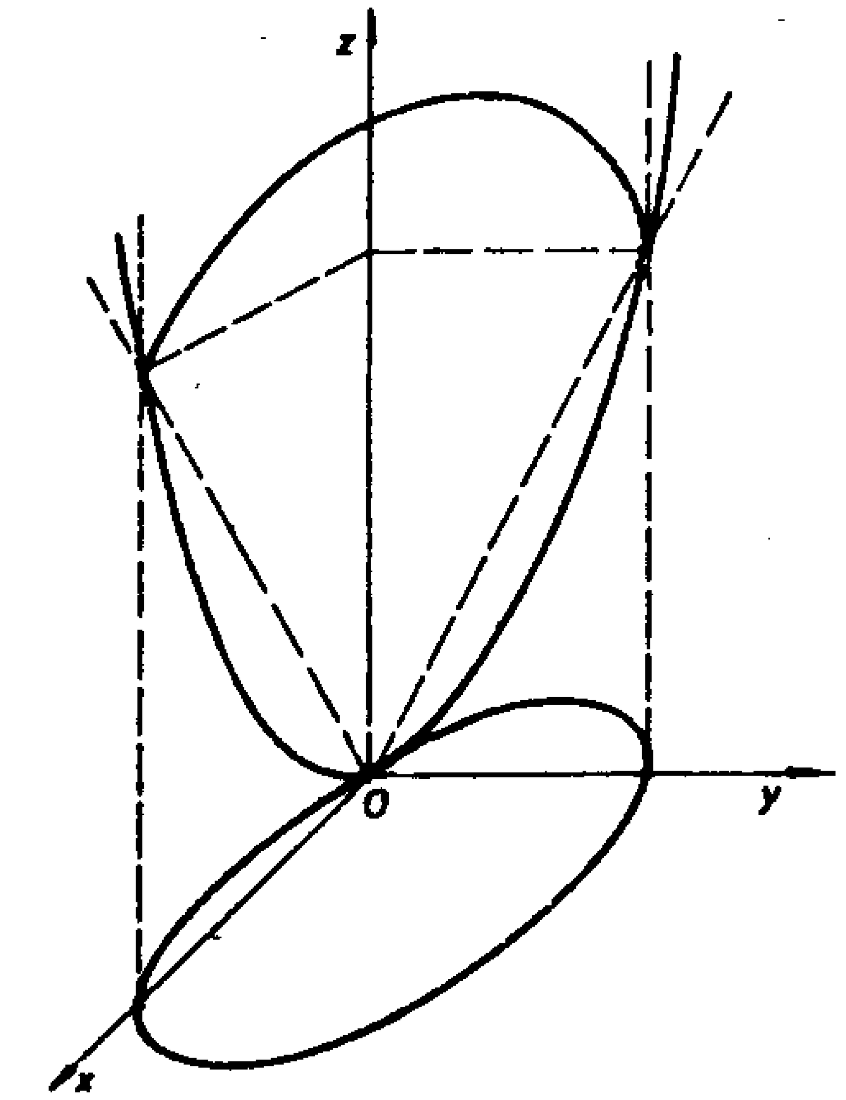
imamo

$$V=\iiint\limits_{D'}bc\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}x=bc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_{-a\sqrt{1-\varrho^2}}^{a\sqrt{1-\varrho^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=2bc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_0^{a\sqrt{1-\varrho^2}}\mathrm{d}x=4abc\pi\int_0^1\varrho\sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho=\frac{4abc\pi}{3}.$$

c) Oblast D (sl. 2.8.) omeđena je s donje strane sa površi $2z=x^2+y^2$, a s gornje strane ravninom $z=x+y$. Kriva presjeka date površi i ravnine određena je sistemom jednačina

$$2z=x^2+y^2$$
$$z=x+y.$$



Sl. 2.8.

Projekcija ove krive linije na ravninu Oxy je kriva $x^2+y^2=2(x+y)$, ili $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. Uvedemo li zamjenu $x-1=u$, $y-1=v$, imamo

$$2z=(u+1)^2+(v+1)^2=u^2+$$
$$+v^2+2(u+v)+2,$$
$$z=u+v+2,$$
$$u^2+v^2=2.$$
$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}=1.$$

Ako uvedemo cilindrične koordinate:

$$u=\varrho\cos\varphi,\ v=\varrho\sin\varphi,\ z=z,$$

onda je:

$$0<\varphi<2\pi,\ 0<\varrho\leq\sqrt{2},$$
$$\frac{2+2\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)+\varrho^2}{2}<z<2+\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi),$$
$$J=\varrho.$$

Zato je

$$V=\iiint\limits_{D'}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_{\frac{2+2\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)+\varrho^2}{2}}^{\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)+2}\mathrm{d}z=$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\varrho(2-\varrho^2)\,\mathrm{d}\varrho=\pi.$$

Ako površ $2z=x^2+y^2$, ravninu $z=x+y$ i krivu projekcije presjeka $x^2+y^2=2(x+y)$ izrazimo u cilindričnim koordinatama, bit će:

$$z=\frac{\varrho^2}{2},\ z=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi),\ \varrho=2(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

Kako je $\varrho>0$, to iz $\varrho=2(\cos\varphi+\sin\varphi)$, slijedi

$$\cos\varphi+\sin\varphi>0,\ \text{tj.}\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\sin\varphi=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)>0,$$

pa je

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\varphi<\frac{\pi}{2},\ \text{tj.}\ -\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}.$$

Prema tome, bit će

$$V=\iiint\limits_{D} dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{D'} \varrho\, d\varphi\, d\varrho\, dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} \varrho\, d\varrho \int\limits_{\frac{\varrho^2}{2}}^{\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)} dz=\pi.$$

d) Oblast D omeđena je s gornje strane sa površi $x^2+y^2+z^2=8$, a s donje strane sa površi $x^2+y^2=2z$. Ako iz datih jednačina površi eliminiramo promjenljivu z, dobit ćemo

$$x^2+y^2=4,$$

što predstavlja projekciju krive presjeka datih površi na ravninu Oxy.

Zamjenom promjenljivih:

$$x=\varrho\cos\varphi,\ y=\varrho\sin\varphi,\ z=z,$$

oblast D preslikava se na oblast D':

$$0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\varrho<2,\ \frac{\varrho^2}{2}<z<\sqrt{8-\varrho^2}.$$

Bit će, dakle,

$$V=\iiint\limits_{D'}\varrho\, d\varphi\, d\varrho\, dz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2\varrho\, d\varrho\int\limits_{\frac{\varrho^2}{2}}^{\sqrt{8-\varrho^2}} dz=$$

$$=2\pi\int\limits_0^2\left(\varrho\sqrt{8-\varrho^2}-\frac{\varrho^3}{2}\right)d\varrho=\frac{4\,(8\sqrt{2}-7)\,\pi}{3}.$$

2.24. Izračunati

$$I=\iiint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

ako je oblast D omeđena elipsoidom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Rješenje.

Projekcija oblasti D na ravninu Oxy je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Uvedimo zamjenu promjenljivih:

$$x=a\,\varrho\cos\varphi,\ y=b\varrho\sin\varphi,\ z=cu,$$

tada se oblast D preslikava na oblast D':

$$0<\varphi<2\pi,\ 0<\varrho<1,\ -\sqrt{1-\varrho^2}<u<\sqrt{1-\varrho^2}.$$

Kako je $J=abc\varrho$, bit će

$$I=abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\varrho\, d\varrho\int\limits_{-\sqrt{1-\varrho^2}}^{\sqrt{1-\varrho^2}}(\varrho^2+u^2)\,du=$$

$$4\pi abc\int\limits_0^1\left(\varrho^2\sqrt{1-\varrho^2}+\frac{(1-\varrho^2)\sqrt{1-\varrho^2}}{3}\right)\varrho\, d\varrho=[1-\varrho^2=t^2]=$$

$$4\pi abc\int\limits_0^1\left((1-t^2)\,t^2+\frac{t^4}{3}\right)dt=\frac{4abc\,\pi}{5}.$$

2.25. Naći

$$I=\iiint\limits_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je oblast D omeđena elipsoidom

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Rezultat, $\dfrac{abc\pi^2}{4}$.

2.26. Izračunati $I=\iiint\limits_{D}x^2\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast D omeđena sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rješenje.

Ako su $(\varrho,\varphi,\vartheta)$ sferne koordinate tačke T, kao što je označeno na slici (sl. 2.9.), tada je

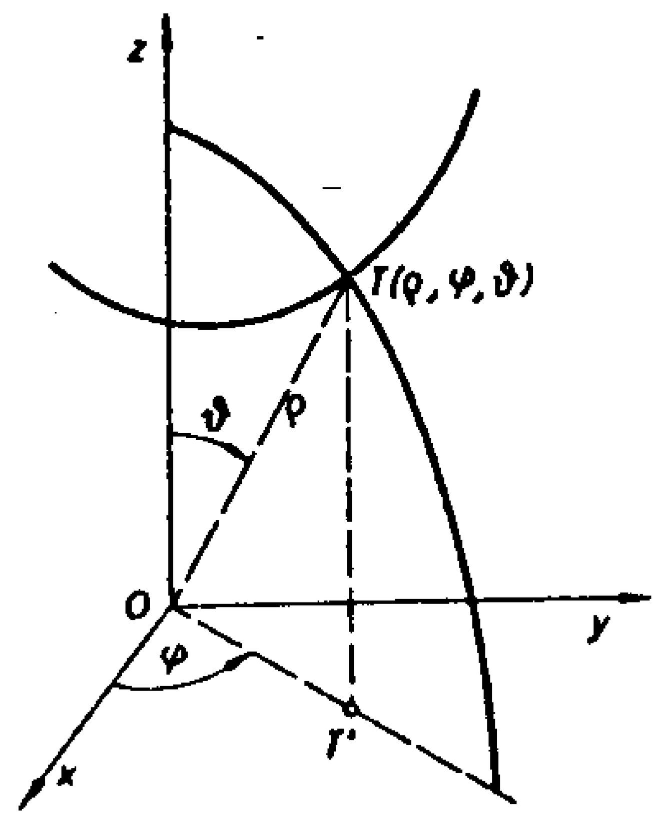
$$(**)\ \begin{cases} x=\varrho\cos\varphi\sin\vartheta & \varrho\in[0,+\infty)\\ y=\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & \varphi\in[0,2\pi]\\ z=\varrho\cos\vartheta & \vartheta\in[0,\pi].\end{cases}$$

Nadalje je

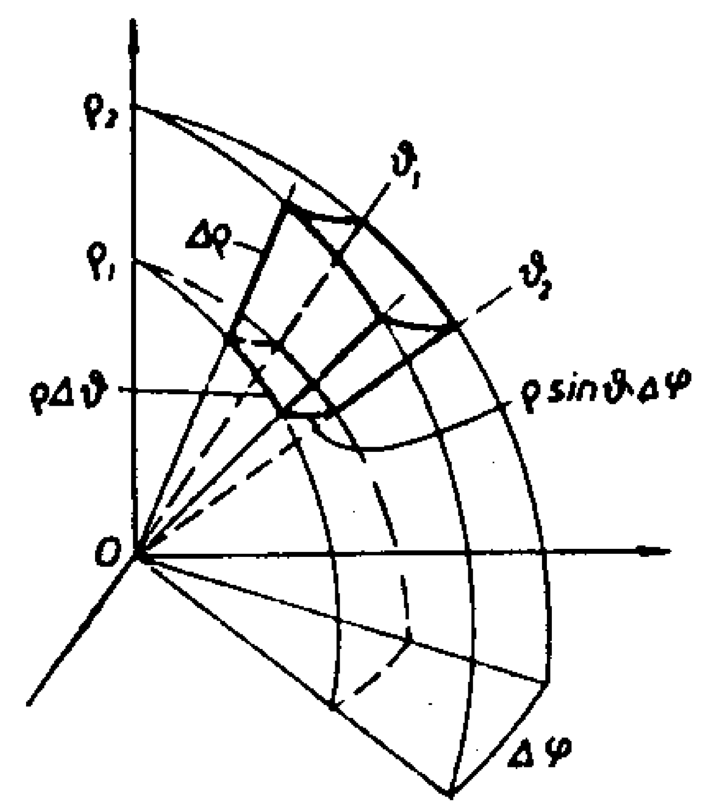
$$\begin{cases}\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\\ \vartheta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.\end{cases}$$

Zapremina krivolinijskog paralelepipeda (sl. 2.10) je približno jednaka $(\varrho\,\Delta\vartheta)\cdot(\varrho\sin\vartheta\cdot\Delta\varphi)\cdot\Delta\varrho$, pa je $\varrho^2\sin\vartheta\cdot d\varrho\,d\varphi\,d\vartheta$ element zapremine u sfernom koordinatnom sistemu, tj.

$$dV' = |J|\,d\varrho\,d\varphi\,d\vartheta,$$



Sl. 2.9.



Sl. 2.10.

gdje je V' volumen oblasti D' (u sistemu $O\varrho\vartheta\varphi$) na koju se zamjenom (**) preslikava oblast D sistema $Oxyz$, i pri tome je

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\varrho, \vartheta, \varphi)} = \varrho^2 \sin\vartheta.$$

Ako uvedemo zamjenu promjenljivih (**), onda se oblast D preslikava na oblast $D'\colon 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \vartheta < \pi,\ 0 < \varrho < R$.

Zato će biti

$$I = \iiint_D x^2\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} \varrho^4 \sin^3\vartheta \cos^2\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_0^{R} \varrho^4 d\varrho = \frac{R^5}{2\cdot 5}\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{R^5\pi}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\vartheta - 1)\,d(\cos\vartheta) = \frac{4R^5\pi}{15}.$$

2.27. Izračunati $I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast D gornji dio kugle $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ z \geqslant 0$.

Rješenje.

Ako uvedemo sferne koordinate $(\varrho, \varphi, \vartheta)$, tada se oblast D preslikava na oblast $D'\colon 0<\varrho<R,\ 0<\varphi<2\pi,\ 0<\vartheta<\dfrac{\pi}{2}$.

Dakle, bit će

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} \varrho^4 \sin\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi$$

$$= \int_0^R \varrho^4\,d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2R^5\pi}{5}.$$

154) **2.28.** Izračunati $I = \iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast D omeđena sferom $x^2+y^2+z^2=z$.

Rješenje.

Ako uvedemo sferne koordinate, oblast D (sl. 2.11.) se preslikava na oblast $D'\colon 0 < \varrho < \cos\vartheta,\ 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < 2\pi,\ \left(z>0 \Rightarrow \varrho\cos\vartheta > 0 \Rightarrow \cos\vartheta > 0 \Rightarrow 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

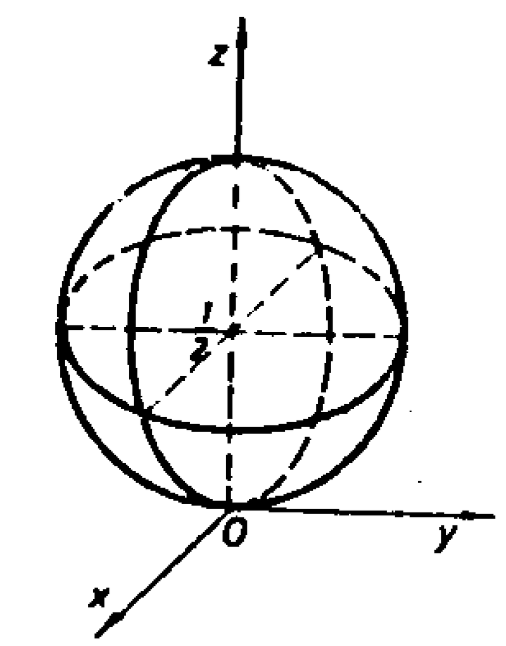
Zato je

$$I = \iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{D'} \varrho^3 \sin\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} \varrho^3\,d\varrho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos^4\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\vartheta\,d(\cos\vartheta) = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^5\vartheta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.$$



Sl. 2.11.

2.29. Izračunati $I = \iiint_D \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast D kugla

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1.$$

Rješenje.

Ako uvedemo sferne koordinate, bit će

$$I = \iiint_D \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{1} \varrho^2\sqrt{1+\varrho^3}\,d\varrho =$$

$$= 4\pi\int_0^1 \varrho^2\sqrt{1+\varrho^3}\,d\varrho = \frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2}-1).$$

2.30. Izračunati

$$I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

ako je oblast D:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z;$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z.$

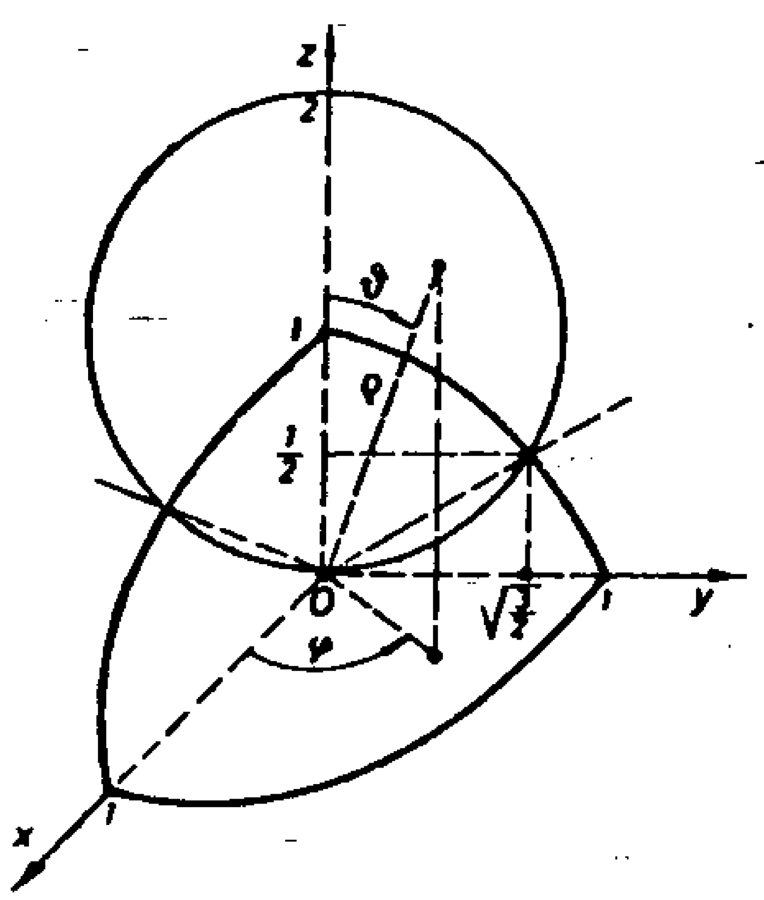
Rješenja:

a) Jednačine sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ u sfernim koordinatama bit će:

$$\varrho = 1,\ \varrho = 2\cos\vartheta.$$

Presjek sfera je, $1 = 2\cos\vartheta$, tj. $\vartheta = \dfrac{\pi}{3}$.

Oblast D preslikava se u oblast D': $1 < \varrho < 2\cos\vartheta,\ 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{3},\ 0 < \varphi < 2\pi$ (sl. 2.12.).



Sl. 2.12.

Zbog toga je

$$I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{D'} \varrho^3 \sin^2\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_1^{2\cos\vartheta} \varrho^3 d\varrho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\vartheta\,(16\cos^4\vartheta - 1)\, d\vartheta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (16\cos^4\vartheta - 16\cos^6\vartheta + \cos^2\vartheta - 1)\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}\right).$$

b) Oblast D preslikava se na oblast $D' \cup D''$:

D': $0 < \varrho < 1,\ 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{3},\ 0 < \varphi < 2\pi;$

D'': $0 < \varrho < 2\cos\vartheta,\ \dfrac{\pi}{3} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < 2\pi.$

Zato je

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D'} \varrho^3 \sin^2\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi +$$

$$+ \iiint_{D''} \varrho^3 \sin^2\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 d\varrho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \varrho^3 d\varrho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta + 8\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \cos^4\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

2.31. Izračunati

$$I = \iiint_D (x + y)^2\, dx\, dy\, dz,$$

gdje je D:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2,\ x^2 + y^2 \leqslant z;$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2,\ x^2 + y^2 \geqslant z.$

Rješenja:

a) Jednačina sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ u sfernim koordinatama je $\varrho = \sqrt{2}$, a jednačina paraboloida $x^2 + y^2 = z$, $\varrho = \dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$.

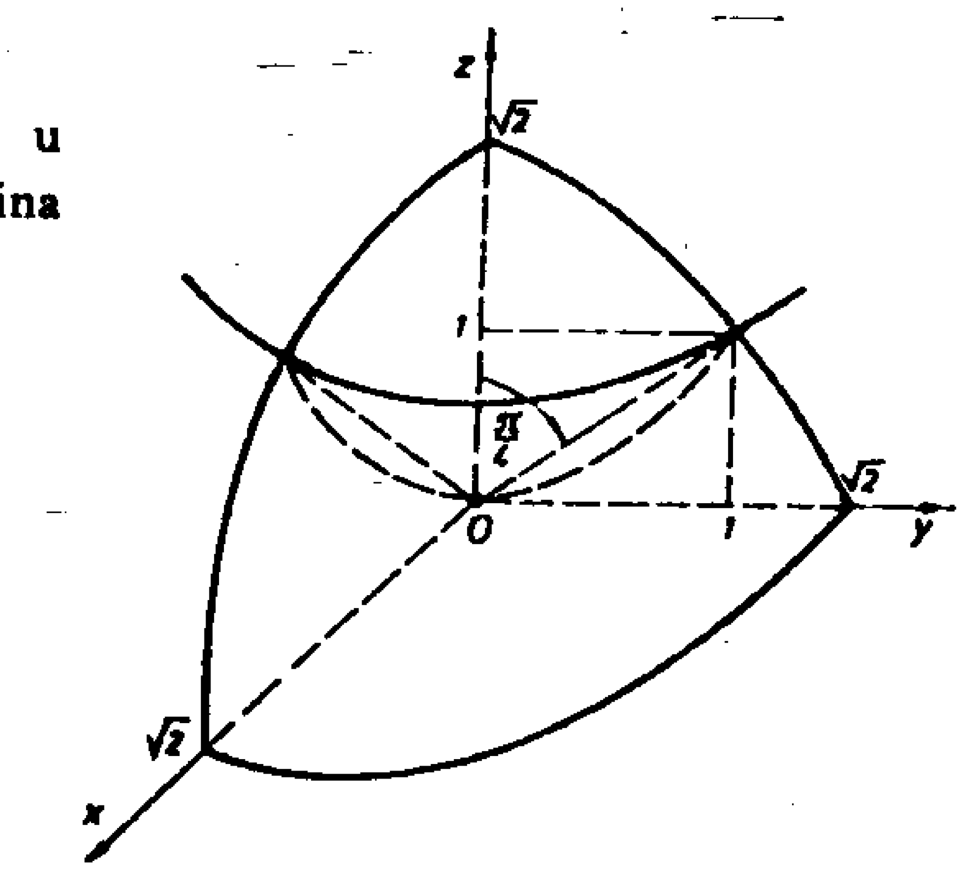
Presjek ovih površi je:

$$\sqrt{2} = \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta},\ \sqrt{2}\sin^2\vartheta = \cos\vartheta,$$

$$\sqrt{2}\cos^2\vartheta + \cos\vartheta - \sqrt{2} = 0,$$

tj.

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$



Sl. 2.13.

Oblast D preslikava se na oblast $D' \cup D''$ (sl. 2.13.)

D': $0 < \varrho < \sqrt{2},\ 0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{4},\ 0 < \varphi < 2\pi,$

D'': $0 < \varrho < \dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta},\ \dfrac{\pi}{4} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < 2\pi.$

Prema tome, bit će

$$I=\iiint\limits_{D}(x+y)^2\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{D'}\varrho^4\sin^3\vartheta\,(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi\,+$$

$$+\iiint\limits_{D''}\varrho^4\sin^3\vartheta\,(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}(1+\sin 2\varphi)\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\vartheta\,d\vartheta\int_0^{\sqrt{2}}\varrho^4\,d\varrho+\int_0^{2\pi}(1+\sin 2\varphi)\,d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\,d\vartheta\int_0^{\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}}\varrho^4\,d\varrho=\frac{8\sqrt{2}\,\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\vartheta\,d\vartheta+\frac{2\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5\vartheta}{\sin^7\vartheta}\,d\vartheta;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\vartheta\,d\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\vartheta\,d\vartheta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\vartheta\,d(\cos\vartheta)=$$

$$=-[\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{3}[\cos^3\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12};$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5\vartheta}{\sin^7\vartheta}\,d\vartheta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin^2\vartheta)^2\cos\vartheta}{\sin^7\vartheta}\,d\vartheta=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{(1-t^2)^2}{t^7}\,dt=\frac{1}{6}.$$

Otuda je

$$\iiint\limits_{D}(x+y)^2\,dx\,dy\,dz=\frac{\pi}{15}(16\sqrt{2}-19).$$

b) Neka čitalac riješi.

2.32. Izračunati zapreminu oblasti omeđene površima:

1°. $x^2+y^2+z^2=R^2$;

$\oplus$ 2°. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

$\oplus$ 3°. $x^2+y^2+z^2=2Rx$ i $x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0,\ z^2\geqslant x^2+y^2)$;

$\oplus$ 4°. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x$;

1220.) [illegible] 5°. $(x^2+y^2+z^2)^3=3\,xyz$;

1219.) [illegible] $\oplus$ 6°. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$;

$\oplus$ 7°. $x^2+y^2+z^2=2,\ z=x^2+y^2$ $(z\geqslant x^2+y^2)$;

8°. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

9°. $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)^2+(a_3x+$
$+b_3y+c_3z+d_3)^2=1$,

gdje je

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Rješenja:

1°. Ako uvedemo sferne koordinate, bit će

$$V=\iiint\limits_{D}dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{D'}\varrho^2\sin\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{R}\varrho^2\,d\varrho=\frac{2R^3\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{4R^3\pi}{3}.$$

2°. Uvedimo zamjenu promjenljivih:

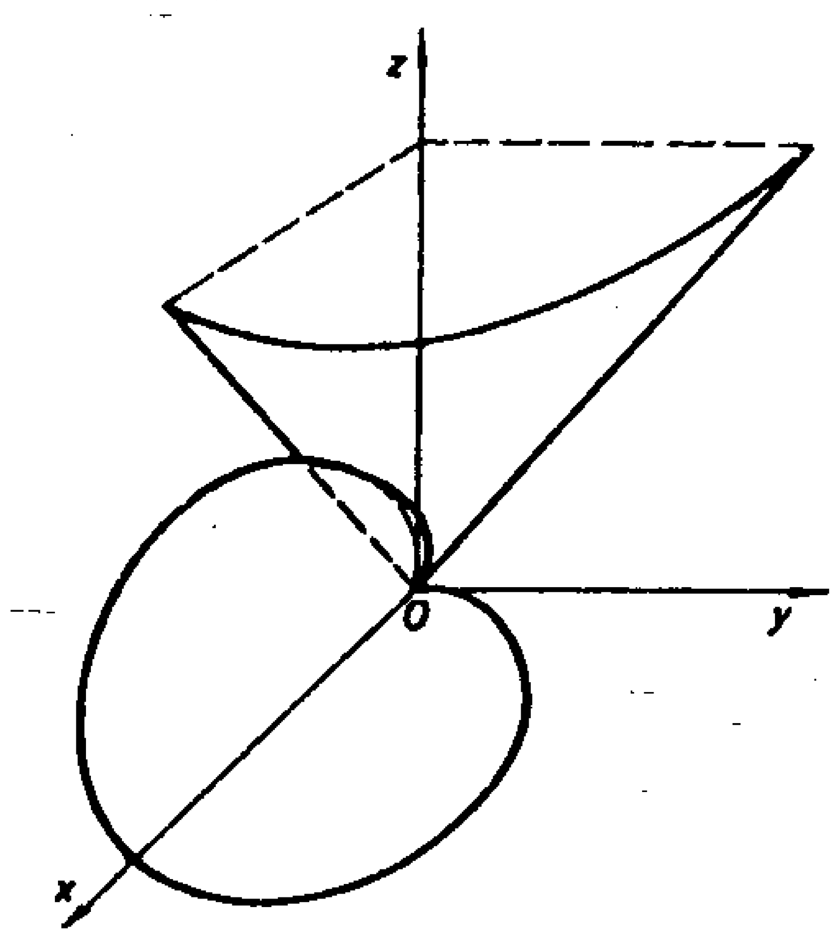
$x=a\,\varrho\sin\vartheta\cos\varphi,\ y=b\,\varrho\sin\vartheta\sin\varphi,$

$z=c\varrho\cos\vartheta,$

$J=abc\varrho^2\sin^2\vartheta$

Zato je

$$V=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\int_0^{1}\varrho^2d\varrho=\frac{4abc\,\pi}{3}.$$



Sl. 2.14.

3°. Uvedemo li sferne koordinate, tada jednačina sfere $x^2+y^2+z^2=2Rx$ u novim koordinatama ima oblik $\varrho=2R\sin\vartheta\cos\varphi$, a jednačina konusa $x^2+y^2=z^2$ ima oblik $\cos^2\vartheta=$ $=\sin^2\vartheta$, tj. $\mathrm{tg}^2\vartheta=1$, odnosno $\vartheta=\dfrac{\pi}{4}$.

Prema tome, oblast D (sl. 2.14.) preslikava se na oblast D': $0<\varrho<2R\sin\vartheta\cos\varphi$, $0<\vartheta<\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Zato će biti

$$V=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_{D'}\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2R\sin\vartheta\cos\varphi}\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho=\frac{8R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\vartheta\cos^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\frac{8R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\frac{8R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}(\sin\varphi)\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\frac{32R^3}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\right)^2\mathrm{d}\vartheta=\frac{4R^3}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\frac{8R^3}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos 2\vartheta+\cos^2 2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{8R^3}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(1-2\cos 2\vartheta+$$

$$+\frac{1+\cos 4\vartheta}{2}\Big)\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{8R^3}{9}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\vartheta+\frac{\cos 4\vartheta}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta=\frac{R^3}{9}(3\pi-8).$$

4°. U sfernim koordinatama, jednačina površi $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x$ bit će $\varrho=\sqrt[3]{a^2\sin\vartheta\cos\varphi}$. Kako je $\varrho>0$, to je $a^2\sin\vartheta\cos\varphi>0$ $(a^2\sin\vartheta>0)\Rightarrow\cos\varphi>0$, tj. $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Data oblast D preslikava se na oblast D': $0<\varrho<\sqrt[3]{a^2\sin\vartheta\cos\varphi}$, $0<\vartheta<\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Bit će

$$V=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{\sqrt[3]{a^2\sin\vartheta\cos\varphi}}\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{a^2\pi}{3}.$$

5°. Pošto je lijeva strana jednačine date površi nenegativna, to se moraju uzeti one vrijednosti x, y, z za koje će proizvod xyz biti takođe nenegativan. Ovo će biti ako je:

a) $x>0,\ y>0,\ z>0$ (I oktant),

b) $x<0,\ y<0,\ z>0$ (III oktant),

c) $x<0,\ y>0,\ z<0$ (VI oktant),

d) $x>0,\ y<0,\ z<0$ (VIII oktant).

Kako je data oblast D simetrična u odnosu na koordinatni početak, dovoljno je naći zapreminu onog dijela oblasti D iz prvog oktanta, i rezultat pomnožiti s četiri.

Jednačina površi $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$ u sfernim koordinatama glasi

$$\varrho^3=3\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi,$$

ili

$$\varrho=\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Dio oblasti D iz prvog oktanta preslikava se na oblast D':

$$0<\varrho<\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi},\quad 0<\vartheta<\frac{\pi}{2},\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

Zato je

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}}\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}(\sin\vartheta)=\frac{1}{2}.$$

6°. Data oblast je simetrična u odnosu na koordinatne ravnine. Presjek date površi sa ravninom $x=0$ su dvije elipse simetrične u odnosu na osu Oz, koje osu Oy sijeku u tačkama $-b, 0, b$. Presjek date površi sa ravninom $y=0$ su takođe dvije elipse simetrične u odnosu na osu Oz, koje osu Ox sijeku u tačkama $-a, 0, a$. Kriva presjeka sa $z=0$ je elipsa.

Ako uvedemo zamjenu: $x=a\varrho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=b\varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=c\varrho\cos\vartheta$, imat ćemo

$$0<\varrho<\sin\vartheta,\ 0<\vartheta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi \text{ i } J=abc\,\varrho^2\sin\vartheta.$$

Prema tome, imamo

$$V=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=abc\iiint_{D'}\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{\sin\vartheta}\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho=\frac{4\,abc\,\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{abc\,\pi^2}{4}.$$

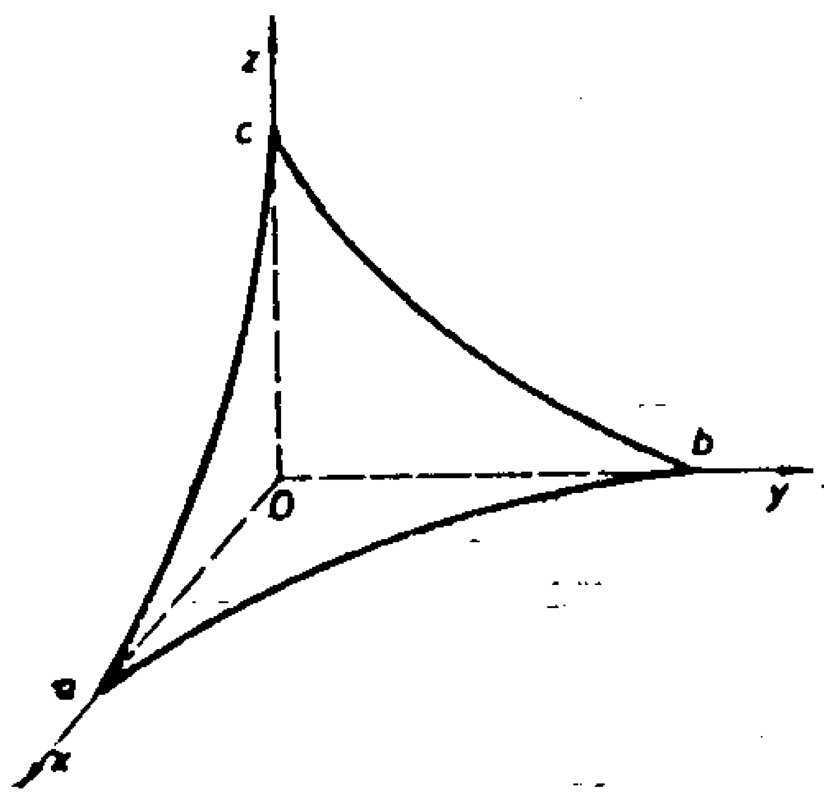
7°. Zapreminu date oblasti izračunat ćemo na slijedeći (vidi zadatak 2.31.a)) način:

$$V = \iiint\limits_{D} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D'} \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi + \iiint\limits_{D''} \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^2\, d\varrho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}} \varrho^2\, d\varrho =$$

$$= \frac{\pi}{6}(8\sqrt{2} - 7).$$

8°. Presjek površi $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ i ravnine $z = 0$ je kriva linija $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ (astroida). Takođe, presjeci s ravnima $y = 0$, $x = 0$ su ostroide.



Sl. 2.15.

Data površ je simetrična u odnosu na koordinatne ravnine.

Ako uvedemo zamjenu promjenljivih:

$$x = a\,\varrho^3 \sin^3\vartheta \cos^3\varphi,$$

$$y = b\,\varrho^3 \sin^3\vartheta \sin^3\varphi,$$

$$z = c\,\varrho^3 \cos^3\vartheta,$$

oblast D koju omeđuje površ $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ preslikava se na oblast

$$D' : 0 < \varrho < 1,\ 0 < \vartheta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varrho, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} 3a\varrho^2 \sin^3\vartheta \cos^3\varphi & 3a\varrho^3 \sin^2\vartheta \cos^3\varphi \cos\vartheta & -3a\varrho^3 \sin^3\vartheta \cos^2\varphi \sin\varphi \\ 3b\varrho^2 \sin^3\vartheta \sin^3\varphi & 3b\varrho^3 \sin^2\vartheta \sin^3\varphi \cos\vartheta & 3b\varrho^3 \sin^3\vartheta \sin^2\varphi \cos\varphi \\ 3c\varrho^2 \cos^3\vartheta & -3c\varrho^3 \cos^2\vartheta \sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$27\,abc\,\varrho^8 \begin{vmatrix} \sin^3\vartheta \cos^3\varphi & \sin^2\vartheta \cos^3\varphi \cos\vartheta & -\sin^3\vartheta \cos^2\varphi \sin\varphi \\ \sin^3\vartheta \sin^3\varphi & \sin^2\vartheta \sin^3\varphi \cos\vartheta & \sin^3\vartheta \sin^2\varphi \cos\varphi \\ \cos^3\vartheta & -\cos^2\vartheta \sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 27abc\varrho^8 (\sin^5\vartheta \sin^2\varphi \cos^4\varphi \cos^4\vartheta + \sin^7\vartheta \sin^2\varphi \cos^4\varphi \cos^2\vartheta +$$

$$+ \sin^5\vartheta \sin^4\varphi \cos^2\varphi \cos^4\vartheta + \sin^7\vartheta \sin^4\varphi \cos^2\varphi \cos^2\vartheta) =$$

$$= 27abc\varrho^8 (\sin^5\vartheta \sin^2\varphi \cos^4\varphi \cos^2\vartheta)(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) +$$

$$+ \sin^5\vartheta \sin^4\varphi \cos^2\vartheta \cos^2\varphi (\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)) =$$

$$= 27abc\varrho^8 \sin^5\vartheta \sin^2\varphi \cos^2\varphi \cos^2\vartheta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

tj.

$$J = 27abc\varrho^8 \sin^5\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \cos^2\varphi.$$

Imamo, dakle,

$$V = 27abc \iiint\limits_{D'} \varrho^8 \sin^5\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 27\,abc \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5\vartheta \cos^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 \varrho^8\, d\varrho =$$

$$= 3\,abc \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\vartheta)^2 \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi = \pi;$$

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\vartheta)^2 \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = [\cos\vartheta = t] =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^2 t^2\, dt = \frac{16}{105}.$$

Otuda je

$$V = \frac{4abc\,\pi}{35}.$$

Drugi način. Ako uvedemo zamjenu $x = au^3$, $y = bv^3$, $z = c\omega^3$, onda se data površ preslikava na površ $u^2 + v^2 + \omega^2 = 1$. Funkcionalna determinanta je $J = 27\,abcu^2v^2\omega^2$. Ponovo uvedemo zamjenu: $u = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, $v = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi$, $\omega = \varrho \cos\vartheta$, tada je

$$J = \varrho^2 \sin\vartheta,\ 0 \leqslant \varrho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Bit će

$$V = \iiint\limits_{D} dx\,dy\,dz = 27\,abc \iiint\limits_{D'} u^2v^2\omega^2\, du\,dv\,d\omega =$$

$$= 27\,abc \iiint\limits_{D''} \varrho^8 \sin^5\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4\,abc\pi}{35}.$$

9°. Uvedimo nove promjenljive u, v, ω:

$$u = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$v = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$\omega = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Prema tome, data površ u sistemu (x, y, z) preslikava se na sferu $u^2 + v^2 + \omega^2 = 1$ u sistemu (u, v, ω), pri čemu je

$$\frac{D(u, v, \omega)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = H.$$

Kako je za dato preslikavanje (koje je regularno)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \omega)} \cdot \frac{D(u, v, \omega)}{D(x, y, z)} = 1,$$

to je

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \omega)} = \frac{1}{H}.$$

Zato je

$$V = \iiint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_{D'} \frac{1}{|H|} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{|H|} \iiint_{D'} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{|H|} \cdot \frac{4\pi}{3}, \text{ (jer je } u^2 + v^2 + \omega^2 = 1 \text{ lopta polupolupečnika } R = 1).$$

2.33. Izračunati $I = \iiint_D xy^2 z^3 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, ako je oblast D ograničena površima $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

2.34. Izračunati

$$I = \iiint_D \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{(x + y + z + 1)^3},$$

gdje je D oblast omeđena ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + = 1$.

2.35. Izračunati $I = \iiint_D xy \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, gdje je oblast D omeđena površima

$$y^2 = az,\ y^2 = bz\ (y > 0),\ z = ax,\ z = bx,\ z = h$$
$$(a > 0,\ b > 0,\ h > 0).$$

2.36. Izračunati

$$I = \iiint_D \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}},$$

ako je oblast D ograničena ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i sferom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2.37. Izračunati

$$I = \iiint_D (ax^2 + by^2 + cz^2)^3 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

ako je oblast D:

$$ax^2 + cz^2 \leqslant 1\ (a > 0, c > 0) \text{ i } 0 \leqslant y \leqslant b.$$

2.38. Izračunati

$$I = \iiint_D (x + y + z)^2 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

gdje je oblast D:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2 \text{ i } 2az \geqslant x^2 + y^2.$$

2.39. Izračunati zapreminu oblasti omeđene površima:

1°. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$;

2°. $x^2 + y^2 = 2az$, $y^2 + z^2 = 2ax$, $z = 0$ $(a > 0)$;

3°. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 z^3$ $(a > 0)$;

4°. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 (x^2 + y^2)^2$ $(a > 0)$;

5°. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$,

ravninama

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0).$$

LITERATURA

[1] B. P. Demidovič: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[2] G. N. Berman: *Zbirka zadataka iz matematičke analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1978.

[3] V. P. Minorski: *Zbirka zadataka iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.

[4] D. S. Mitrinović: *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, III deo, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.

[5] V. Dragičević, H. Fatkić, B. Mesihović: *Zbirka riješenih zadataka iz matematike* II, Elektrotehnički fakultet, Sarajevo, 1974.

[6] D. Bičakčić, S. Šiaković: *Zbirka riješenih zadataka iz više matematike*, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1965.

[7] S. Kurepa: *Matematička analiza*, I dio, *Diferenciranje i integriranje*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[8] S. Kurepa: *Matematička analiza*, II dio, *Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[9] S. Kurepa: *Matematička analiza*, III dio, *Funkcije više varijabli*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

[10] D. Blanuša: *Viša matematika*, II dio, Drugi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1974.

[11] D. Mihailović, D. D. Tošić: *Elementi matematičke analize* II, Naučna knjiga, Beograd, 1976.

[12] D. Mihailović, R. R. Janić: *Elementi matematičke analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1974.

[13] J. Irving, M. Mullineux: *Mathematics in physics and engineering*, New York—London, 1959.

[14] L. Schwartz: *Cours d'analyse*, (dio I i II), Herman, Paris, 1967, (prevod na ruski, Mir, Moskva, 1972).

[15] G. Pöya, G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Berlin, 1925.

[16] Б. П. Демидович: *Сборник задач и упражнений по математичесекому анализу*, Москва, 1966.

[17] Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, 1—3, Москва, 1961.

[18] М. К. Гребенча, С. И. Новоселов: *Курс математичесского анализа*, том 2, Москва, 1961.

[19] Н. Ы. Пискунов: *Дифференциальное и интегральное исчисления*, 1 и 2, Москва, 1970.

[20] Г. Е. Шилов: *Математический анализ*, части 1—2, Москва, 1972.

1) • Za $0 < \alpha < 1$, i ako za svako x iz jedne desne okoline tačke 'a' vrijedi nejednakost

$$|f(x)| \leq (x-a)^{-\alpha} \quad \text{tada} \int_a^b f(x)\,dx \text{ konvergira}$$

• Za $\alpha \geq 1$ i ako za $\forall x$ jedne desne okoline tačke 'a' vrijedi nejednakost: $|f(x)| \geq (x-a)^{-\alpha}$ onda $\int_a^b f(x)\,dx$ divergira

2) Neka je $f(x) = \dfrac{g(x)}{(b-x)^{\alpha}}$, $\alpha > 0$

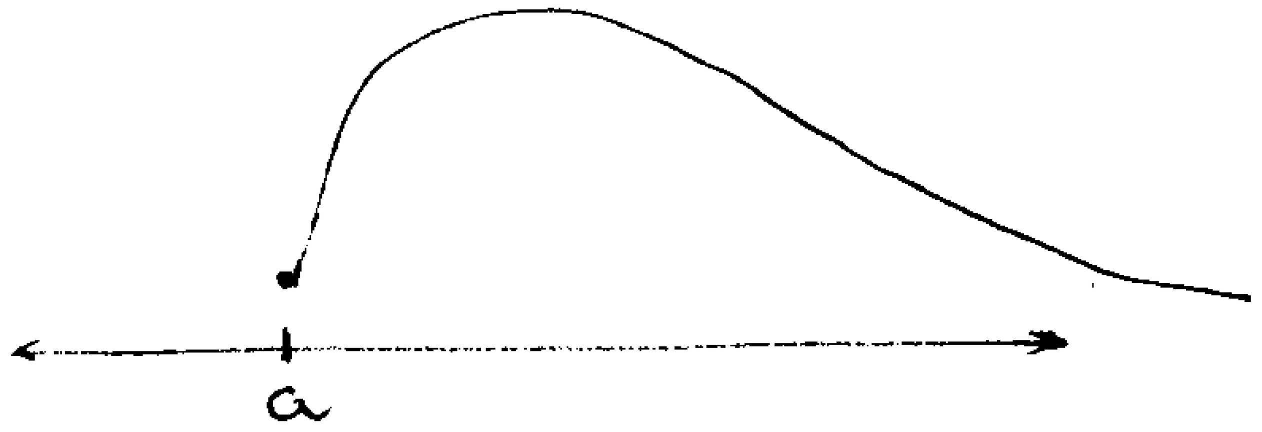
za $\forall x$ iz jedne lijeve okoline tačke b,

a) ako $\alpha < 1 \wedge g(x) \leq c < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ (K)

b) ako $\alpha \geq 1 \wedge g(x) \geq c > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ (D)

3) Ako konvergiraju $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ onda konvergira i: $\int_a^b (\mu f(x) + \lambda g(x))\,dx$

4.) Ako ~~ke~~ vrijedi: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergira, onda konvergira i $\int_a^b f(x)\,dx$ i vrijedi: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$, $(a < b)$



1) Za $0 \leq f(x) \leq g(x)$

ako konvergira $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ onda konvergira i $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

2) $f(x) \wedge g(x) \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \quad (0 < c < +\infty)$$

za konačno c oba integrala konvergiraju

za $c \to \infty$ oba divergiraju (u užem smislu)

4) ako se $f(x)$ može napisati kao:

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^a}, (\alpha > 0) \quad \wedge \left(f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0 \text{ i integrabilne} \right)$$

onda za:

- $\alpha > 1$ i $g(x) \leq c < +\infty$ integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{\text{konv}}$
- $\alpha \leq 1$ i $g(x) \geq c > 0$ integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{\text{Divergira}}$

5) Ako konvergiraju $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ onda konvergira i

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

@

6) ~~$f(x)$ definirane na $[a, +\infty)$~~ i

Neka imamo:

$$I = \int_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a)$$

ako $t \to \infty$ onda I konvergira ako i samo ako postoji limes:

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)$$

Analogno vrijedi i za integrale:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a) - \lim_{t\to-\infty} F(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) - \lim_{h\to-\infty} F(h)$$