Z A D A C I - Var. A :
za popravni drugog parcijalnog ispita iz IM1, 20. 08. 2007.

Zad. 1. Izračunajte (ili ustanovite da ne postoji) sljedeći limes funkcije koristeći asimptotsku relaciju $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$ $(x \to 0)$, $(a > 0)$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+4^x+5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

I. 1. III. $\sqrt[3]{20}$.
II. $\sqrt[3]{60}$. IV. Dati limes ne postoji.

Zad.2. Izračunajte derivaciju funkcije

$$f(x) := \int_{-x}^{x} \frac{t^2+1}{t-1}\,dt$$

u tački $x = \dfrac{1}{2}$.

I. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{10}{3}$. II. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$.
III. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$. IV. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$.

Zad. 3. U tačkama presjeka prave (ℓ) i parabole (p) zadanih jednačinama $y = 0$ i $y = x^2 - 4$, respektivno, povučene su normale na parabolu (p). Izračunajte površinu P lika u ravni omeđenog parabolom (p) i dobivenim normalama.

I. $P < \frac{35}{8}$. II. $P \in \left\{\frac{35}{8}, \frac{35}{3}\right\}$. III. $\frac{35}{8} < P < \frac{35}{3}$. IV. $P > \frac{35}{3}$.

Zad. 4. Nađite skup svih realnih brojeva x za koje konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}.$$

I. $[0, +\infty)$. III. $(-1, +\infty)$.
II. $(1, +\infty)$. IV. $(0, +\infty)$.

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}.$$

a) Odredite prirodni domen Dom (f), a zatim ispitajte ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f).

b) Ustanovite da važi asimptotska relacija

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} = x + \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \pm\infty,$$

a zatim odredite eventualne asimptote zadane funkcije f.

c) Odredite eventualne presjeke grafika $G(f)$ sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije f.

d) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju f i njenu recipročnu funkciju $\frac{1}{f}$.

e) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika .

f) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije f.

g) Odredite sliku $\mathrm{Im}(f)$ i nacrtajte grafik zadane funkcije f.

Rješenje:

Z A D A C I - Var. B :
za popravni drugog parcijalnog ispita iz IM1, 30. 01. 2008

Fakt – In, dio Zad. 2, str. 248 u 1. IV 798 riješeno 29.2[illegible]

Zad. 1. Izračunajte (ili ustanovite da ne postoji) graničnu vrijednosti L ako je

$$L := \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x - \sin x} - 1\right)^{\operatorname{cosec} x}.$$

I. $L = 1$. **II.** $L = 2$. **III.** $L \neq 1,\ L \neq 2$. **IV.** Limes ne postoji.

Zad. 2. Za sve $a, b \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ odredite funkciju $F_{a,b}(x)$ tako da je

$\int (a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{-1}\,\mathrm{d}x = F_{a,b}(x) + C$, gdje je C proizvoljna realna ko[illegible]ta.

....

I. $F_{a,b}(x) = \dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}x\right) + \dfrac{\pi n}{|ab|}$ za $(2n-1)\dfrac{\pi}{2} < x < (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2[illegible]}{2[illegible]}$ $\left(n := \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

II. $F_{a,b}(x) = \dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}x\right) + \dfrac{\pi n}{|ab|}$ za $(2n-1)\dfrac{\pi}{2} < x < (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{[illegible]}{[illegible]}$; $\left(n := \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

III. $F_{a,b}(x) = \dfrac{b}{a}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}x\right) + \dfrac{2\pi n}{|a|}$ za $(2n-1)\dfrac{\pi}{2} < x < (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2[illegible]}{2[illegible]}$ $\left(n := \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

IV. $F_{a,b}(x) = \dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}x\right) + \dfrac{2\pi n}{|ab|}$ za $(2n-1)\dfrac{\pi}{2} < x < (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $F_{a,b}\left((2n\pm 1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{[illegible]\pm 1}{[illegible]}$; $\left(n := \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right\rfloor\right)$.

Zad. 3. Izračunajte derivaciju prvog reda funkcije $f(x) := \int_{-x}^{x} \exp(-\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t$, ($x \in \mathbf{R}$), u tač[illegible] $= 10$.

I. $f'(10) = \dfrac{2}{\sqrt[10]{e}}$. II. $f'(10) = \sqrt{\dfrac{2}{e}}$. III. $f'(10) = \dfrac{2}{\sqrt[100]{e}}$. IV. $f'[illegible] = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

Zad. 4. Nađite skup svih realnih brojeva x za koje konvergira red

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}.$$

I. $(0, +\infty)$. II. $[1, +\infty)$. III. $(-1, +\infty)$. IV. $[0, +\infty)$.

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x) := \arccos \dfrac{x^2 -}{x^2 -}$

gdje je n najmanja cifra Vašeg jedinstvenog matičnog broja koja je veća od 1.

a) Odredite prirodni domen Dom (f), a zatim ispitajte ponašanje funkcije f na rubovi[illegible] područja Dom (f) i odredite njene eventualne asimptote.

b) Odredite eventualne presjeke grafika G(f) sa koordinatnim osama i ispitajte znak za[illegible] funkcije f.

c) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju [illegible]unkciju g zadanu formulom $g(x) := \sqrt[3]{x^2}\cdot(f(x))^{-1}$.

d) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema za[illegible] funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika.

e) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkci[illegible]

f) Odredite sliku Im(f), nacrtajte grafik zadane funkcije f i skicirajte grafik fun[illegible] g zadane u c).

Rješenje: ....@..................