Najveći dio onoga što znamo
je samo mali dio onoga što
ne znamo.

(TEMISTI)

Predavanja za treću sedmicu nastave
(u akademskoj 2010/2011. godini)

§1.4. Kompleksni brojevi

Prirodni brojevi su nastali iz potrebe za brojanjem. *Negativni brojevi* su nastali kao rezultat oduzimanja većeg prirodnog broja od manjeg ili kao rješenje jednačine $x + a = 0$ za svaki $a \in \mathbf{N}$, dok su *racionalni brojevi* nastali kao rezultat razvoja trgovine, mjerenja ili kao rješenje jednačine $a\,x = b$ za sve $a, b \in \mathbf{Z}$ ($a \neq 0$) (jer rješenje $x = \frac{b}{a}$ te jednačine nije uvijek cio broj, već razlomak, tj. racionalan broj).

Realni brojevi koji nisu racionalni brojevi zovu se *iracionalni brojevi*. Otkriće iracionalnih brojeva pripisuje se Pitagori[1)] ili njegovim učenicima.

Polje $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ realnih brojeva ima svojstvo da je u njemu moguće "vaditi" korijene iz svih nenegativnih elemenata $a \in \mathbf{R}$, tj. moguće je rješavati jednačine oblika $x^n - a = 0$ za sve $a \in \mathbf{R}$ $(a \geq 0)$, $n \in \mathbf{N}$. No, otuda ne slijedi da svaka jednačina oblika $P(x) = 0$, gdje je *P polinom*, ima rješenje u skupu $\mathbf{R}$. Najjednostavnija jednačina koja nema rješenje u $\mathbf{R}$ je jednačina $x^2 + 1 = 0$. Da bi bilo moguće rješavanje takvih jednačina, mora se polje $\mathbf{R}$ proširiti novim elementima, pa tako dolazimo do polja *kompleksnih brojeva*. U tom smislu je *Rafael Bombeli* u svom radu "*Algebra*" iz 1752. godine uveo pojam *imaginarne jedinice* i zapisivao ga je sa $\sqrt{0-1}$. Npr. umjesto $2i$ pisalo se $\sqrt{0-4}$. Međutim, veliki njemački matematičar *Carl Friedrich Gauss* (1777 - 1855) je uveo zapis imaginarne jedinice i kompleksnih brojeva kakav ga danas mi koristimo.

1.4.1. Kompleksni brojevi u obliku parova i u algebarskom obliku

Definicija 1.4.1. Neka su u skupu $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ uređenih parova realnih brojeva dvije operacije, koje ćemo označiti sa $+$ odnosno $\cdot$ i zvati **sabiranje** odnosno **množenje**, definirane formulama:

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}) \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{1.4.1}$$

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}) \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a\,c - b\,d, a\,d + b\,c). \tag{1.4.2}$$

Skup $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ u kome su definirane operacije $+$ i $\cdot$ kao u (1.4.1) i (1.4.2.) zove se skup **kompleksnih brojeva** i, najčešće, označava sa **C**, a njegovi elementi zovu se **kompleksni brojevi**. Njih ćemo označavati jednim slovom: z, w; $z_1, z_2, \ldots$.

[1)] Pitagora (oko 582 – 500. p. n. e) – starogrčki matematičar.

Dakle, kompleksne brojeve definiramo kao uređene parove $z = (x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ realnih brojeva koje sabiramo i množimo po definicijama (1.4.1) i (1.4.2). Primijetimo da kompleksne brojeve izjednačavamo po definiciji jednakosti za uređene parove, tj.

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow (a = c \ \wedge b = d). \qquad (1.4.3)$$

Na osnovu (1.4.1), (1.4.2) i aksioma za sabiranje i množenje u skupu **R**, lako se provjeri da je $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ polje. Pri tome je kompleksni broj (0, 0) neutralni element za sabiranje, $-(x, y) = (-x, -y)$, (1, 0) jedinični element, dok je $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ za $(x, y) \neq (0, 0)$.

Obratimo sada pažnju na kompleksne brojeve $(x, 0)$ kod kojih je druga komponenta jednaka nuli. Skup svih ovih brojeva označimo sa R'. Lako se zaključuje da je R' polje u odnosu na operacije "+" i "· " u skupu **C**. Kako je $R' \subset \mathbf{C}$ i $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ polje, to je $(R', +, \cdot)$ potpolje polja $(\mathbf{C}, +, \cdot)$. Nadalje, očito slijedi da je preslikavanje $f : \mathbf{R} \to R'$ zadano formulom

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \ f(x) = (x, 0),$$

bijekcija za koju vrijede identiteti $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$. Svako bijektivno preslikavanje $f : \mathbf{R} \to R'$ za koje važe ta dva identiteta zove se *izomorfizam* polja $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ i $(R', +, \cdot)$. Dakle, potpolje $R' \subset \mathbf{C}$ je izomorfno polju realnih brojeva **R**.

Budući da se u izomorfnim skupovima svi stavovi koji se odnose na odgovarajuće operacije (u odnosu na koje su ti skupovi izomorfni) važe istovremeno u jednom i drugom skupu, a da za algebru priroda samih elemenata i operacija nema nikakva značaja, to se polja $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ i $(R', +, \cdot)$ mogu identificirati stavljajući

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (x, 0) = x, \qquad (1.4.4)$$

tj. ne čineći više razlike između kompleksnih brojeva oblika $(x, 0)$ i realnih brojeva. Prema tome, imamo $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, $(x, 0) = x$, specijalno $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$. Zbog toga kompleksne brojeve $(x, 0)$ zovemo *realnim brojevima*. Sve ostale kompleksne brojeve, tj. elemente $(x, y) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, zovemo **imaginarnim brojevima**.

Kompleksne brojeve kod kojih je prva komponenta jednaka 0, tj. elemente $(0, y) \in \mathbf{C}$ $(y \neq 0)$ zovemo **čisto imaginarnim brojevima**. Specijalno, element $(0, 1) \in \mathbf{C}$ zovemo, po tradiciji, **imaginarna jedinica** i označavamo sa i (ili j), tj. po definiciji je

$$(0, 1) = i. \qquad (1.4.5)$$

Prema (1.4.2), (1.4.4) i (1.4.5) je

$$(\forall y \in \mathbf{R}) \quad (0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = i \cdot y,$$

a otuda, budući da je, prema (1.4.1), $(x, y) = (x+ 0, y + 0) = (x, 0) + (0, y)$, dobijemo

$$(\forall (x, y) \in \mathbf{C}) \quad (x, y) = x + iy,$$

što predstavlja *algebarski oblik* (tzv. *standardni oblik*) kompleksnog broja. Dakle, kompleksne brojeve u algebarskom obliku prikazujemo kao *linearnu kombinaciju* realne jedinice "1" i imaginarne jedinice "i", odnosno $z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + i\,y$.

Kod kompleksnog broja $z = (x, y) = x + iy$ broj x zove se **realni dio**, a y **imaginarni dio** (*komponenta*) kompleksnog broja z i piše se

$$x = \mathrm{Re}\,(z) \ \text{(ili Re}\, z), \quad y = \mathrm{Im}(z) \ \text{(ili Im}\, z).$$

Prema (1.4.4), (1.4.2) i (1.4.3) je $i^2 = i\cdot i = (0, 1)\cdot(0, 1) = (0\cdot0 - 1\cdot1, 0\cdot1 + 0\cdot1) = (-1, 0) = -1$, tj.

$$i^2 = -1.$$

U skupu **C** ne uvodi se uređaj $\leq$ (mada je lako uvesti parcijalni uređaj).

Dokažimo da je u polju $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ nemoguće definirati (totalni) uređaj $\leq$ tako da vrijede aksiome (R 10) – (R 14). Zaista, iz (R 12) imali bi ili $i \geq 0$ ili $i \leq 0$, odakle bi slijedilo $-1 = i^2 \geq 0$, odnosno, $1 \leq 0$, što je kontradikcija sa svojstvom (ix) realnih brojeva prema kojem je $0 < 1$. Dokazali smo, dakle, da je u polju $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ nemoguće uvesti totalni uređaj $\leq$ tako da vrijede aksiome (R 10) – (R 14) (koje su navedene u definiciji polja realnih brojeva), tj. tako da je $(\mathbf{C}, +, \cdot, \leq)$ uređeno polje.

Jednostavno se provjerava da vrijedi:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i,$$

što znači da se svi stepeni imaginarne jedinice mogu automatski računati po formulama:

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ \ i^{4k+2} = -1,\ \ i^{4k+3} = -i \quad \text{za sve } k\in\mathbf{N}.$$

Npr. $i^{2005} = i^{4\cdot 501+1} = i$.

Budući da je sabiranje i množenje kompleksnih brojeva asocijativno i komutativno, a množenje je distributivno prema sabiranju i da u svakom kompleksnom broju (x, y) napisanom u obliku binoma $x + iy$ su x, i, iy, y takođe kompleksni brojevi, to se sa kompleksnim brojevima napisanim u algebarskom obliku mogu vršiti operacije sabiranja i množenja po pravilima operacija sabiranja i množenja monoma i binoma u skupu **R**, samo umjesto i^2, treba staviti -1. Tako imamo:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + ib) + (c + id) = (a+c) + i\,(b + d) = (a+c, b+d),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b)\cdot(c, d) = (a+ ib)\cdot(c+id) = ac + ibc +iad + i^2bd = (ac-bd) + i(ad+bc) =$$
$$= (ac-bd, ad+bc),$$

$$\alpha \cdot z = \alpha\cdot (x+iy) = \alpha x + (\alpha y)i.$$

Prema tome, pravila za formiranje *zbira* i *proizvoda* u definiciji 1.4.1. nije potrebno više posebno pamtiti.

Za stepenovanje (potenciranje) kompleksnih brojeva (s prirodnim izložiocem) u oznaci Rz^n imamo po definiciji da je

$$z^n = z \cdot z^{n-1}.$$

Količnik $\dfrac{a+ib}{c+id}$ kompleksnih brojeva može se naći polazeći od definicije količnika, tj. da je količnik $(a + ib) : (c + id)$, $(c + id \neq 0)$, broj $x + iy$ takav da je $(c + id)(x + iy) = a + ib$. Međutim, pošto u tijelu važi jednakost $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\cdot z_3}{z_2\cdot z_3}$, $(z_2\neq0, z_3\neq0)$, to vrijednost $\dfrac{z_1}{z_2}$ možemo odrediti i na sljedeći način:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \tag{1.4.6}$$

tj. tako da se u nazivniku "oslobodimo" imaginarnog broja $c + id$ i to postupkom koji je sličan racionalisanju nazivnika.

Definicija 1.4.2. Neka je $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ kompleksan broj. Tada za broj $\bar{z} = x - iy$ kažemo da je *konjugovan* (*konjugiran*) ili *spregnut kompleksan broj* broju z.

Primijetimo da iz ove definicije slijedi da je i broj z konjugovan broju $\overline{z}$. Otuda je $\overline{(\overline{z})} = z$, tj. *operacija konjugovanja* (tj. preslikavanje koje svakom $z = x + iy \in \mathbf{C}$ dodjeljuje $\overline{z} = x - iy \in \mathbf{C}$) je *involutivna*.

Lako se vidi da operacija konjugovanja ima i ova svojstva :

1) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z});$ 3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$ 4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad (z_2 \neq 0).$

Proizvod $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$ uvijek je realan broj i $z \cdot \overline{z} \geq 0$, pa je kompleksnim brojem z potpuno određen realan broj $r = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \geq 0$.

Definicija 1.4.3. Realan nenegativan broj $\sqrt{x^2 + y^2}$ zove se *apsolutna vrijednost* ili *modul* kompleksnog broja $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ i označava se sa $|z|$, tj.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Specijalno, ako je z realan, tj. ako je $y = 0$, onda je $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Očigledno je

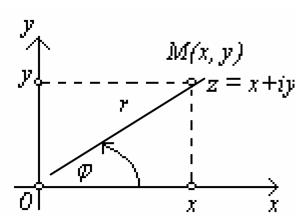
$$(\forall z \in \mathbf{C}) \ |z| \geq 0; \quad |\overline{z}| = |z|; \quad z\overline{z} = |z|^2, \text{ tj. } |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}},$$

a lako se vidi da vrijede i svojstva:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (z_2 \neq 0). \tag{1.4.7}$$

Kompleksnom broju $z = (x, y)$ $(= x + iy)$ pridružuje se u pravouglom koordinatnom sistemu xOy tačka $M(x, y)$ (tačka M zove se slika broja z, dok se broj z zove *afiks* tačke M), čime se uspostavlja bijekcija skupa $\mathbf{C}$ na ravan xOy. Tačku $M(x, y)$ koja odgovara kompleksnom broju $z = x + iy$ identifikujemo sa tim brojem, pa govorimo o tački z. Ravan xOy na koju su na opisan način preslikani kompleksni brojevi zove se *kompleksna* ili *Gaussova* ravan. Specijalno, realni brojevi $z = (x, 0) = x$ preslikavaju se na prvu koordinatnu osu (x – osu), koja se zbog toga sada zove *realna osa*, a čisto imaginarni brojevi $z = (0, y) = iy$ preslikavaju se na drugu koordinatnu osu (y – osu), koja se zbog toga zove *imaginarna osa.*

Takođe, svakoj tački $M(x, y)$ kompleksne ravni odgovara vektor položaja (radijus vektor) $\overrightarrow{OM}$ tačke M, tj. svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara tačno jedan vektor $\overrightarrow{OM}$ i obratno. Dužina $|\overrightarrow{OM}|$ radijus-vektora $\overrightarrow{OM}$ koji odgovara broju $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$, prema slici 1.4.1., jednaka je, očigledno, $\sqrt{x^2 + y^2}$. Otuda imamo



Sl. 1.4.1.

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Grafički i računom lako se dobije da za sve $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ važi *nejednakost trougla*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Naime, vrijedi da je $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot\overline{(z_1+z_2)}=\ldots=|z_1|^2+2\operatorname{Re}(\overline{z_1}\cdot z_2)+|z_2|^2$, a na osnovu definicije je i $\operatorname{Re} z \le |z|$ za svaki $z\in\mathbf{C}$, pa je $|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$.

Indukcijom po n dokazuje se da važi proširenje nejednakosti torougla sa dva na n proizvoljnih kompleksnih brojeva, te da vrijedi binomna formula za svaki binom $(a+b)^n$, gdje su $a, b\in\mathbf{C}$, $(n\in\mathbf{N})$.

U ravni *Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema* jednačina *kružnice* ima oblik $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$, gdje su A, B, C, D realne konstante i $B^2+C^2-4AD>0$. Ako je $A=0$, kružnica se degeneriše u *pravac*, a ako je $B^2+C^2-4AD=0$, kružnica se degeneriše u tačku.

Kako iz $z=x+iy$ slijedi da je $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, to prethodna jednačina kružnice postaje

$$Az\overline{z}+pz+\overline{p}\,\overline{z}+D=0, \qquad (*)$$

gdje je $2p=B-iC$. Otuda slijedi da jednačina $Az\overline{z}+Bz+\overline{B}\,\overline{z}+D=0$, gdje su A, D realni brojevi a B kompleksan broj, za $A\neq 0$ definira jednačinu kružnice, a za $A=0$ pravu.

Za $z=\dfrac{1}{w}$, jednačina (*) postaje $Dw\overline{w}+\overline{B}w+B\overline{w}+A=0$, odakle zaključujemo da se transformacijom $z=\dfrac{1}{w}$ kružnica preslikava u kružnicu. Lako se zaključuje da vrijedi i opštiji rezultat: Kružnica (*) *Homografičkom* (*Möbiusovom*) transformacijom

$$z=\frac{az+b}{cz+d},\ (ad-bc\neq 0;\ a,b,c,d\in\mathbf{C})$$

preslikava se u kružnicu, podrazumijevajući ovdje i pravac.

Zadatak 1.4.1. Ispitati na koju se oblast w-ravni preslikava transformacijom $w=\dfrac{i-z}{i+z}$ (gdje je $z=x+iy$, i-imaginarna jedinica) oblast u z-ravni zadana relacijom $ax\le y\le bx$, $(b>a\ge 0)$. Predstaviti geometrijski zadanu i dobijenu oblast.

1.4.2. Kompleksni brojevi u trigonometrijskom i u eksponencijalnom obliku

Položaj tačke $M\,(x, y)$ koja predstavlja kompleksni broj $z=x+iy$, $(z\neq 0)$, određen je takođe i tzv. *polarnim koordinatama* r i φ, gdje je $r=|\overrightarrow{OM}|=|z|$ dužina radijus-vektora $\overrightarrow{OM}$, a φ je orijentisani ugao koji čini vektor $\overrightarrow{OM}$ sa osom Ox (sl. 1.4.1.).

Kako su kosinus i sinus ugla $(x,\overrightarrow{OM})$, odnosno mjernog broja φ ovog ugla zadani formulama

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\qquad \sin\varphi=\frac{y}{r}, \qquad (1.4.8)$$

to imamo

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad tg\varphi=\frac{y}{x}. \qquad (1.4.9)$$

Izraz $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ u (1.4.9) zovemo **trigonometrijskim oblikom** kompleksnog broja z.

Da bismo tačno odredili koji je ugao φ u pitanju moramo tačno odrediti u kojem se kvadrantu dati kompleksni broj z nalazi. Potrebno je još znati osnovnu tablicu za uglove u prvom kvadrantu: $tg\,0 = 0,\quad tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},\quad tg\frac{\pi}{4} = 1,\quad tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Ako formalno stavimo $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$, tj. specijalno $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, onda se izraz (1.4.9) može pisati u obliku

$$z = r\, e^{i\varphi} \ . \tag{1.4.10}$$

Izraz $r\,e^{i\varphi}$ u (1.4.10) zove se **eksponencijalni oblik** kompleksnog broja z. Relacija $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, kojom smo zapravo *definirali* $e^{i\varphi}$, može se dokazati, ako se e^{z} definira na (neki drugi) podesan način. Tada ta relacija predstavlja tzv. *Eulerovu formulu*.

Definicija 1.4.4. Neka je $M(x, y)$ tačka koja predstavlja kompleksni broj $z = x + iy$, $(z \neq 0)$. Svaki mjerni broj φ orijentisanog ugla $(x, \overrightarrow{OM})$ koji čini radijus-vektor $\overrightarrow{OM}$ sa osom Ox, tj. svaki realan broj φ određen pomoću (1.4.8) zove se **argument** (ili *arkus* ili *amplituda*) broja z, i označava se sa $\mathrm{Arg}\, z$ (iki $\mathrm{Arc}\, z$ ili $\mathrm{Amp}\, z$). Argument φ broja z koji zadovoljava uslov $-\pi < \varphi \leq \pi$ zove se **glavna vrijednost argumenta** broja z i označava se sa $\arg z$ (ili $\mathrm{arc}\, z$ ili $\mathrm{amp}\, z$).

Uglu $(x, \overrightarrow{OM})$ pripada tačno jedan mjerni broj φ_0 koji se nalazi u razmaku $(-\pi, \pi]$, dok se svi ostali mjerni brojevi φ ugla $(x, \overrightarrow{OM})$ dobiju po formuli

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi,\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Dakle, broj $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$ je određen samo za $z \neq 0 = 0 + i0$ i to samo do aditivne konstante $2k\pi$, dok je $\arg z$ potpuno određen brojem z $(z \neq 0)$ i važi

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi,\ (k \in \mathbf{Z}),$$

tj. simbol $\mathrm{Arg}\, z$ ima beskonačno mnogo vrijednosti.

Za glavnu vrijednost argumenta $\arg z$ može se uzeti, umjesto uslova $-\pi < \arg z \leq \pi$, uslov $0 \leq \arg z < 2\pi$, budući da u tom razmaku svakom uglu $(x, \overrightarrow{OM})$ odgovara tačno jedna određena vrijednost.

U slučaju $z = 0$, imamo da je $r = |z| = 0$, a ugao $(x, \overrightarrow{OM})$ ne postoji. Međutim, kako se može napisati $z = 0\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, gdje je φ potpuno prizvoljno, to se i za broj 0 može napisati trigonometrijski oblik (1.4.9). Argument broja 0 je *neodređen*.

Glavna vrijednost argumenta broja $z = x + iy$ data je (u slučaju kada se uzima varijanta $-\pi < \arg z \leq \pi$) sa:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x},^{*)} & (x > 0), \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, & (x < 0 \wedge y > 0), \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, & (x < 0 \wedge y < 0), \\ \frac{\pi}{2}, & (x = 0 \wedge y > 0), \\ -\frac{\pi}{2}, & (x = 0 \wedge y < 0), \\ \pi & (x < 0 \wedge y = 0). \end{cases} \tag{1.4.11}$$

Primjer 1.4.1. *Nađimo modul i argument kompleksnog broja* $z=-1-i$ *i napišimo ga u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku.*

Prema definiciji modula kompleksnog broja imamo:

$$r=|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Kako tačka $z=-1-i$ pripada trećem kvadrantu i kako je $tg\varphi=\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}=\frac{-1}{-1}=1$, to, prema (1.4.11) imamo:

$$\arg z=-\pi+arctg1=-\frac{3\pi}{4};$$

$$Argz=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\quad.$$

Za broj φ možemo uzeti bilo koji od brojeva $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$). Tako, npr. uzimajući k = 0, odnosno k = 1, dobijemo

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Prema (1.4.10), eksponencijalni oblik datog kompleksnog broja z je

$$z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Napomenimo da su jednakost, proizvod i količnik kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku dati sa:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow (\,|z_1|=|z_2| \,\wedge\, \mathrm{Arg}\,z_1=\mathrm{Arg}\,z_2+2k\pi,\ (k\in\mathbf{Z})),$$

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|\,[\cos(\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2)+i\sin(\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2)]\,, \tag{*}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2)+i\sin(\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2)]\,.$$

Pomoću matematičke indukcije i koriteći se formulama $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\cos\varphi-i\sin\varphi=$ $=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)$ i $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^0=1$, dobijemo tzv. *Moavrovu* (*Moivre*) *formulu*

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi, \tag{1.4.12}$$

za svaki $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Primjenom formule (1.4.12) dobijemo relaciju za stepenovanje:

$$z^n=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{**}$$

Druge dvije formule u (*) i formula (**) predstavljaju formule za tzv. "**brzo-brzo**" **množenje**, **dijeljenje** i **stepenovanje kompleksnih brojeva**, pri čemu se još može koristiti oznaka cis φ koja je data sa cis $\varphi:=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Primjer 1.4.2. *Riješimo tzv. binomnu jednačinu*

$$z^n=a,\ (n\in\mathbf{N},\ a\in\mathbf{C}). \tag{1.4.13}$$

1° Uzimajući broj a ($a\neq0$) u trigonometrijskom obliku $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ i tražeći za broj z trigonometrijski oblik $z=R(\cos\theta+i\sin\theta)$, nalazimo da je

$$R=\sqrt[n]{r},\qquad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

---

*) arc tg x je broj (luk, ugao mjeren radijanima) iz intervala $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, čiji je tangens jednak x, tj. (y = arc tg x) $\Leftrightarrow$ (tg $y=x \wedge -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$).

Rješenja jednačine (1.4.13) data su formulama

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \tag{1.4.14}$$

($\sqrt[n]{r}$ je aritmetička vrijednost korijena).

Kako svaki cio broj k možemo pisati u obliku $k = nq + m$, gdje je $q\in\mathbf{Z}$, $m\in\{0, 1, 2, \dots n\text{-}1\}$, to uzimajući za k proizvoljnan cio broj, imamo

$$\theta = \frac{\varphi+2m\pi}{n} + 2q\pi,$$

pa će kosinus i sinus ove vrijednosti biti jednaki kosinusu, odnosno sinusu od $\frac{\varphi+2m\pi}{n}$.

Osim toga, primijetimo da su sve vrijednosti $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ jednačine (1.4.13) među sobom različite. Naime, ako to ne bi bilo istinito, onda bi postojala dva različita indeksa $k, m\in\{0, 1, 2, \dots n\text{-}1\}$, za koje je $z_k = z_m$, tj. $\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi+2m\pi}{n} + 2q\pi$, odnosno $\frac{k-m}{n} = q$ ($q\in\mathbf{Z}$). Kako je $0 \le k\text{-}m < n$ i $q\in\mathbf{Z}$, to posljednja jednakost ne može vrijediti, pa izlazi da su sva rješenja $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ jednačine (1.4.13) među sobom različita. Prema tome, ima svega n različitih vrijednosti za z u (1.4.13) datih sa (1.4.14) za $k = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1$. Ako sa $\sqrt[n]{a}$ označimo svaki broj čiji je n-ti stepen jednak a, onda je

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1). \tag{1.4.15}$$

Broj z_0 zove se *glavna vrijednost* korijena $\sqrt[n]{a}$.

2° Ako je $a = 0$, jednačina (1.4.13) ima jedino rješenje $z = 0$, čija je višestrukost n, odnosno $\sqrt[n]{0}$ ima svega jednu vrijednost 0.

Primjedba 1.4.1. Neke od jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva, samo ako se relacija jednakosti izraza (budući da $\sqrt[n]{a}$, za $a\neq0$, ima n vrijednosti u $\mathbf{C}$) razumije tako da je svaka vrijednost s jedne strane jednaka jednoj vrijednosti s druge strane i obratno, tj. da se *skupovi vrijednosti* s jedne i druge strane jednakosti podudaraju. U tom smislu važe sljedeće jednakosti:

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ $(b\neq 0)$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, samo ako su n i m relativno prosti (u ovom slučaju se definira $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$);
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ (važi uvijek, po samoj definiciji);
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[s]{a^p\cdot b^q}$, gdje je s najmanji zajednički sadržalac brojeva m, n, tj. $s = m\cdot p$, $s = n\cdot q$, p i q relativno prosti.

Napomenimo da jednakosti $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(n\in\mathbf{N}\setminus\{1\})$ i $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ $(p, n\in\mathbf{N},\ p\neq1)$ ne važe (jer kod prve jednakosti lijeva strana ima n vrijednosti, a desna strana jednu; dok kod druge jednakosti lijeva strana ima n, a desna pn vrijednosti). Treba takođe imati u vidu da je $\sqrt{-1} = \pm\, i$ (a ne $\sqrt{-1} = i$); dakle, jednačina $x^2 = -1$ u $\mathbf{C}$ ima dva rješenja $\pm\, i$.

Zadatak 1.4.2. a) *Zadana je jednačina*

$$|z|^2 - z^2 + 3i\bar{z} = 6i. \tag{E}$$

Da li zadana jednačina (E) *ima dva rješenja* (*u* $\mathbf{C}$), *samo jedno rješenje, nema realnih rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja* ?

Rješenje: Neka je $z = x + iy$ $(x, y\in\mathbf{R})$. Tada je data jednačina (E) ekvivalentna sa

$$x^2 + y^2 - (x^2 + 2ixy - y^2) + 3ix + 3y = 6i,$$

odnosno sa sistemom $2y^2 + 3y = 0 \;\wedge\; -2xy + 3x = 6$, odakle je

$$y \cdot (2y + 3) = 0,\; x \cdot (3 - 2y) = 6. \qquad (S)$$

Rješenja prve jednačine su $y_1 = 0$, $y_2 = -\dfrac{3}{2}$, pa iz druge jednačine sistema (S) slijedi $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, tj. $z_1 = 2$, $z_2 = 1 - \dfrac{3}{2}i$, pa data jednačina (E) ima tačno dva rješenja (jedno realno i jedno imaginarno).

(Kontrola: $|z_1|^2 - z_1^2 + 3i\overline{z_1} = 4 - 4 + 3i \cdot 2 = 6i.$)

Rješenja jednačine (F) *imaju imaginarne dijelove različite od nule.*

Zadatak 1.4.2. b) *Zadana je jednadžba*

$$4 \cdot (z - |z|^2) + \overline{z} = 1. \qquad (F)$$

Ustanoviti koja je od sljedećih izjava tačna:

1) *Jednačina* (F) *ima beskonačno mnogo rješenja.* 2) *Jednačina* (F) *ima dva rješenja.*
3) *Rješenja jednačine* (F) *imaju imaginarne dijelove različite od nule.*
4) *Rješenja jednačine* (F) *imaju negativne realne dijelove.*

Rješenje: Za $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ zadana jednačina postaje

$$4 \cdot (x + iy - x^2 - y^2) + x - iy = 1,$$

a ova jednačina ekvivalentna je sa sistemom $5x - 4x^2 - 4y^2 = 1 \;\wedge\; 3y = 0$,

odakle je $y = 0$, $4x^2 - 5x + 1 = 0$, odnosno $y = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \dfrac{5 \pm 3}{8}$, pa je $z_1 = \dfrac{1}{4}$, $z_2 = 1$. Dakle, tačna je samo izjava 2).

Zadatak 1.4.3. *Izračunati modul i argument kompleksnog broja* $z = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$.

Rješenje: *Prvi način*: $|z| = \dfrac{|1 + \sqrt{3}i|}{|1 - \sqrt{3}i|} = \dfrac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+3}} = 1;$

$$\arg(z) = \arg(1 + \sqrt{3}i) - \arg(1 - \sqrt{3}i) = arctg\sqrt{3} - arctg\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Drugi način: Iz

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{\left(1 + \sqrt{3}i\right)^2}{\left(1 - \sqrt{3}i\right) \cdot \left(1 + \sqrt{3}i\right)} = \frac{1 + 2\sqrt{3}i - 3}{1 + 3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

slijedi

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \qquad \arg(z) = \pi + arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Zadatak 1.4.4. *Dokazati da je* $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ *za sve* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

Zadatak 1.4.5. *Dokazati da za sve* a_i, b_i $\in \mathbf{C}$ *vrijedi Cauchy - Schwarzova*[*)] *nejednakost*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}\right|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2.$$

[*)] A. L. Cauchy (1789 – 1857) – francuski matematičar, K. H. Schwarz (1843 – 1921) – njemački matematičar.

Zadatak 1.4.6*. Predstaviti u trigonometrijskom obliku kompleksni broj

$$z := -\sqrt{3} + 3\,i\,,$$

gdje je i imaginarna jedinica. (**Rezultat.** $z = 2\sqrt{3}\ [\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})]$.)

Zadatak 1.4.7*. U izrazu $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{22}\cdot(1-i)^{17}}{(-1-i)^{3}}$, gdje je i imaginarna jedinica, izvršiti sve naznačene operacije u skupu **C** kompleksnih brojeva.

Zadatak 1.4.8*. **a)** Izračunati modul i argument kompleksnog broja

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}.$$

b) Predstaviti u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

$$z_2 = -\sqrt{3} + i\,,\quad z_3 = -1 - i\ .$$

c) U sljedećem izrazu (primjenom a) i b)) izvršiti sve naznačene operacije u skupu kompleksnih brojeva:

$$\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{15}\cdot(-\sqrt{3}+i)^{22}}{(-1-i)^{3}},$$

gdje je i imaginarna jedinica.

Zadatak 1.4.9*. **a)** Riješiti jednačinu $z^3 + i^3 = 0$ u skupu **C** kompleksnih brojeva, gdje je i imaginarna jedinica.

b) Naći realni i imaginarni dio proizvoda i količnika korijena jednačine $z^2 - (2+i)z + 7i = 1$ u skupu **C** kompleksnih brojeva, gdje je i imaginarna jedinica.

c) U sljedećem izrazu izvršiti sve naznačene operacije u skupu kompleksnih brojeva:

$$\frac{(cis\,\frac{\pi}{5})^{19}\cdot(3-\sqrt{3}j)^{p}}{(cis\,\frac{\pi}{6})^{5}},$$

gdje je j imaginarna jedinica i : 1) $p = 20$, 2) p je ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*.

d) Dva tjemena jednakostraničnog trougla u *Gaussovoj ravni* su u tačkama $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$, gdje je i imaginarna jedinica. Naći treće tjeme toga trougla.

---

*) Zadatak zadavan za domaću zadaću (DZ) i/ili za (parcijalni i/ili integralni) pismeni ispit iz Inženjerske matematike 1 (**IM1**) na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.

Zadatak 1.4.10*. **a)** Pojednostaviti izraz $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}}$ ako je z :

1) kompleksan broj; 2) pozitivan realan broj; 3) $z = (-10)^{2008}$.

b) Pojednostaviti izraz $\ln e^z$ ako je z :

1) kompleksan broj; 2) realan broj (npr. 2008); 3) $z = 10\ i$, gdje je i imaginarna jedinica.

c) Izračunati realni i imaginarni dio i modul kompleksnog broja z zadanog u obliku $z = \mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2}\ i)$, gdje je i imaginarna jedinica.

d) Koristeći *Moivreovu formulu* i *Newtonovu binomnu formulu*, izraziti $\sin 5x$ pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$.

Rješenje: a) 1) Neke od jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva, samo ako se relacija jednakosti izraza (budući da $\sqrt[n]{a}$, za $a \neq 0$, ima n različitih vrijednosti u skupu **C** kompleksnih brojeva) razumije tako da je svaka vrijednost s jedne strane jednaka jednoj vrijednosti s druge strane i obratno, tj. da se *skupovi vrijednosti* s jedne i druge strane jednakosti podudaraju. U tom smislu u skupu **C** imamo da je

$\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}} = 0$ za $z = 0$, a za svaki $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ zadani izraz $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}}$ se ne može pojednostaviti (u skupu **C** kompleksnih brojeva).

2) U skupu **R** realnih brojeva za svaki $z > 0$ imamo da je $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{z} - z^{\frac{1}{2}} = 0$.

3) U skupu **R** realnih brojeva za $z = (-10)^{2008}$, budući da je tada $z = 10^{2008} > 0$, vrijedi, prema 2), da je $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}} = 0$.

b) 1) U skupu **C** kompleksnih brojeva imamo da ako je $z = r\, e^{i\varphi}$, onda je i $z = r \cdot e^{i\,(\varphi + 2k\pi)}$ za svaki $k \in \mathbf{Z}$, pa se definira višeznačna funkcija $\ln z := \ln r + i\,(\varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, tj. $\ln z = \ln |z| + i\ \mathrm{Arg}\ z$, za svaki $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, njena glavna vrijednost (glavna vrijednost logaritma) se definira formulom

$$\mathrm{Ln}\, z := \ln r + i\,\varphi,\ z = r\,e^{i\varphi},\quad \text{tj. } \mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i \arg z,\quad \varphi = \arg z \in (-\pi, \pi],$$

gdje je $\ln r$ logaritam u realnom domenu ($r > 0$). U tom smislu zaključujemo da se zadani izraz $\ln e^z$, u opštem slučaju, u skupu **C** kompleksnih brojeva ne može pojednostaviti.

2) U skupu **R** realnih brojeva (tj. za logaritam u realnom domenu) imamo da je $\ln e^z = z$ za svaki $z \in \mathbf{R}$, pa i za, npr. $z = 2008$, imamo da je $\ln e^{2008} = 2008$.

3) U skupu **C** kompleksnih brojeva, prema 1) za $z = 10\,i$, gdje je i imaginarna jedinica, imamo da je $\arg\,(e^{10\,i}) = 10 - 4\ \pi$, pa je stoga $\mathrm{Arg}\,(e^{10\,i}) == 10 - 4\ \pi + 2\,k\,\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$), odakle je

$$\ln\ e^{10\,i} = i\,(10 + 2\,m\,\pi),\ (m \in \mathbf{Z}).$$

c) Iz $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ slijedi da je

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},\quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

pa je

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} i) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{i(e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})} = -i\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} = i\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} = i \operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

Otuda je $\operatorname{Re}(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}i)) = 0$, $\operatorname{Im}(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}i)) = \operatorname{th}\frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}i)| = \operatorname{th}\frac{\pi}{2}$.

d) Rezultat. $\sin 5x = 5\cos^4 x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$ (v. rješenje zad. **1.4.12*. c)**).

Zadatak 1.4.11*. **a)** Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslov $z^2 + |z| = 0$.

b) Napisati u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku kompleksni broj z koji je zadan u obliku $z = \log(-10)$.

c) Koristeći *Newtonovu binomnu formulu* i *Moivreovu formulu* izraziti $\sin^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova.

Rezultat. c) $\sin^5 x = \frac{1}{16}(10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x)$. (v. rješenje zad. **1.4.12*. c)**).

Zadatak 1.4.12*.** **a)** Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslov $|z|\,j + 2z = 1$, gdje je j imaginarna jedinica.

b) Napisati u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku kompleksni broj z koji je zadan u obliku $z = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} i\right)$, gdje je i imaginarna jedinica.

c) Koristeći *Moivreovu formulu* i *Newtonovu binomnu formulu*, izraziti $\cos 5x$ pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$ i obrnuto, izraziti $\cos^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova.

d) Izračunati realni i imaginarni dio kompleksnog broja z zadanog u obliku $z = \ln[\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} i)]$, dje je i imaginarna jedinica.

Rješenje: c) Prema *Moivreovoj formuli* je $\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5$, a dalje, prema *Newtonovoj binomnoj formuli* imamo (v., npr., **Zad. 11.28, str. 78.** i **223,** u knjizi [**R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar**, *Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima, uputama i rezultatima*, **Svjetlost , Sarajevo, 1987])**

$$\cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x + 5\cos^4 x \cdot (i\sin x) - \binom{5}{2}\cos^3 x \sin^2 x - \binom{5}{3}\cos^2 x\,(i\sin^3 x)$$
$$+ \binom{5}{4}\cos x \sin^4 x + i\sin^5 x,$$

odakle slijedi da je $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x$.

Obrnuto, polazeći od identiteta $[(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)]^5 = 2^5\cos^5 x$, i razvijajući lijevu stranu ovog identiteta po *Newtonovoj binomnoj formuli* , uz primjenu *Moivreove formule* na pojedine članove tako dobijenog razvoja, dobijemo da je

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x).$$

***) Zadatak zadavan za domaću zadaću (DZ) i/ili za (parcijalni i/ili integralni) pismeni ispit i završni ispit iz Inženjerske matematike 1 (**IM1**) na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.