Izdržati, to je temelj vrline.
(BALZAK)

Predavanja za četvrtu sedmicu nastave
(u akademskoj 2011/2012. godini)

GLAVA 2

NIZOVI I REDOVI

§ 2.1. Općenito o nizovima

Osnova aritmetike i algebre sastoji se u *brojenju*, tj. u *nizanju brojeva* 1, 2, 3, 4, 5, 6…, jednog za drugim čime se dobije *niz* (ili *slijed*) prirodnih brojeva

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … itd.

Analogno možemo posmatrati i nizove raznih drugih (proizvoljnih) predmeta, npr. zgrada neke ulice s jedne strane te ulice tako da znamo koja je kuća *prva*, koja do nje, koja opet do ove, itd.

Jedan od najvažnijih nizova u prirodi je *prirodni niz hemijskih elemenata*. U savremenoj znanosti važni su npr. *nizovi radioaktivnih elemenata*.

Kako nastaje niz? Kod niza je važno da ima *prvi* ili *početni član*, da ima *drugi član*, tj. onaj koji je odmah iza prvoga (ako uopšte postoji koji član posmatranog niza osim prvoga), zatim, da ima član koji dolazi neposredno iza drugoga – tzv. treći član (ako niz ima uopšte još koji član osim prva dva) itd.

Niz od jednog člana je svaki mogući predmet, npr. broj 6, fakultet itd.

Brojevi $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ čine specijalan *niz od n* članova. No, svaki niz od n članova nastaje tako da svakom od tih n brojeva $1, 2, \ldots, n$ pridružimo određen predmet. Tako dobijemo po redu predmete, odnosno niz: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, pri čemu se predmeti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ nazivaju *članovi niza*, i to prvi, drugi, …, posljednji (n-ti) član niza.

Ako niz ima n članova, onda se n zove *dužina* ili broj članova *niza*.

Beskonačni niz nastaje tako da svakom prirodnom broju pridružimo neki predmet (stvaran ili zamišljen). Ako broju n pridružimo predmet a_n, onda nastaje ovaj beskonačni niz:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Tačkice tu označavaju da se nižu sve novi i novi članovi niza, tako da beskonačni niz nema posljednjeg člana. Pri tome se a_n zove *opšti član* niza.

Primijetimo da i svaki član beskonačnog niza ima svoj potpuno određeni redni broj. Zato, npr. brojevi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots, 0$$

ne čine niz jer član 0 nema tu svog rednog broja.

Gornje opisne (intuitivne) definicije pojmova konačnog i beskonačnog niza mogu se precizirati koristeći pojam preslikavanja (funkcije).

Definicija 2.1.1. **Konačni niz** elemenata (nepraznog) skupa X je svako preslikavanje (funkcija) $x: M\to X$, gdje je M neki konačan podskup skupa **N**.

Definicija 2.1.2. **Beskonačni niz** ili, kraće, **niz** u (nepraznom) skupu X je svako preslikavanje x: $\mathbf{N}\to X$, skupa prirodnih brojeva **N** u skup X. Vrijednost $x(n)\in X$ preslikavanja x u tački $n\in\mathbf{N}$ zove se n-**ti član** toga niza i obično se označava sa x_n, pa se govori o (beskonačnom) nizu $(x_n, n\in\mathbf{N})$. Ako je specificirana zavisnost x_n od n, onda se x_n naziva **opšti član** niza.

Najčešće ćemo umjesto $(x_n, n\in\mathbf{N})$ upotrebljavati oznaku $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ili (x_n) a ponekad i dužu oznaku $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ili $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ koja sugeriše nizanje članova niza jedan za drugim.

Uzimajući u prethodnoj definiciji 2.1.2 da je X skup **R** dobijemo **niz** (x_n) **realnih brojeva** (*niz* u **R**), dok za $X := \mathbf{C}$ dobijemo **niz** (x_n) **kompleksnih brojeva**. Ako je, pak, X skup nekih funkcija (npr. skup svih *neprekidnih realnih funkcija* na segmentu $[a, b]\subset\mathbf{R}$, $a<b$), onda je (x_n) **funkcionalni niz** (**niz funkcija**).

Ako je X neki skup brojeva, onda za niz x: $\mathbf{N}\to X$ kažemo da je **brojni niz** ili **numerički niz**.

U osnovnome dijelu (tekstu) ovoga poglavlja smatrat ćemo da je $X = \mathbf{R}$, tj. razmatrat ćemo isključivo (beskonačne) nizove realnih brojeva. Neka svojstva takvih nizova mogu da se posmatraju i u opštijim situacijama.

Primjer 2.1.1.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ je niz (x_n) čiji je opći član x_n dat sa $x_n = \frac{1}{n}$.
Ovo je primjer tzv. **harmonijskog niza**, tj. niza kod kojeg je svaki član (osim prvog) harmonijska sredina njemu dva susjedna člana.

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \ldots$ je niz čiji je opći član x_n dat sa $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 1,2,\ldots,9, \\ \frac{1}{10}, & n = 10,11,\ldots. \end{cases}$

Ovaj niz nazivamo *stacionarni niz*. Inače, za (x_n) kažemo da je **stacionarni niz** ako postoji $n_0\in\mathbf{N}$ takav da je $x_n = C$ (C– konstanta) za svaki $n \geq n_0$.

Za niz (x_n) realnih brojeva kažemo da je *Fibonaccijev*[1)] *niz* akko zadovoljava uslov

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \quad \forall(n\in\mathbf{N}). \qquad (2.1.1)$$

Nizovi (1, 1, 2, 3, 5, …) i (2, 3, 5, 8, 13, …) su primjeri Fibonaccijevih nizova.

[1)] Leonardo od Pise, poznat još kao Fibonacci (1170? – 1250?) – italijanski matematičar. On je postavio 1202. godine u svom radu "*Liber abaci*" tzv. problem o zečevima (*Razmnožavanje zečeva odvija se na sljedeći način : par zec – zečica, koji imaju bar dva mjeseca, tokom svakog sljedećeg mjeseca dobiju par mladih /zeca i zečicu/. Ako se počne s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno takvih parova zečeva nakon n mjeseci*?). Pokazuje se da se ovaj problem može opisati tzv. Fibonaccijevim nizom.

Za (x_n) kažemo da je **aritmetički niz** akko vrijedi

$$x_{n+1} - x_n = d, \quad \forall(\, n\in \mathbf{N}), \qquad (2.1.2)$$

gdje je d fiksan broj.

Iz (2.1.2) slijedi da je $x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$, $\forall(\, n\in \mathbf{N})$, te da $\forall(\, n\in \mathbf{N})$ vrijedi $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n+2}}{2}$,

tj. svaki član (izuzev prvog člana) aritmetičkog niza je aritmetička sredina svojih neposrednih susjeda (otuda i naziv aritmetički niz). Osim toga, iz (2.1.2) dobijemo :

$$x_2 = x_1 + d, \quad x_3 = x_2 + d = x_1 + 2\,d, \ \ldots, \quad x_n = x_{n-1} + d = \ldots = x_1 + (n-1)\,d.$$

Dakle,

$$x_n = x_1 + (n-1)\,d, \quad \forall(\, n\in \mathbf{N}).$$

Osim toga, sumu $S_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$ od n prvih članova aritmetičkog niza (x_n) možemo napisati u bilo kojem od ova dva oblika:

$$S_n = x_1 + (x_1 + d) + \ldots + [x_1 + (n-1)d], \quad S_n = x_n + (x_n - d) + (x_n - 2d) + \ldots + [x_n - (n-1)d],$$

Odakle dobijemo (sabirajući) $2\,S_n = n \cdot (x_1 + x_n)$, tj. :

$$S_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n) = \frac{n}{2}\left[2x_1 + (n-1)d\right] \quad . \qquad (2.1.3)$$

Niz brojeva

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

kod kojeg je svaki član osim prvog jednak proizvodu prethodnog člana i stalnog broja $q\neq 0$, zove se **geometrijski niz**. Taj niz je, dakle, određen formulom

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Broj q koji je jednak količniku $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ zove se **količnik** geometrijskog niza.

Za određivanje n-tog člana a_n niza (pomoću prvog člana a_1, količnika q i broja n) vrijedi formula

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (2.1.4)$$

Zbir S_n od n prvih članova geometrijskog niza određuje se po formuli:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (2.1.5)$$

ako je $q \neq 1$, a ako je $q = 1$, tada je, očito,

$$S_n = n \cdot a_1 .$$

Ove formule lako se dokazuju matematičkom indukcijom.

Primjer 2.1.2. *Koje uslove moraju zadovoljavati brojevi a, b i c da bi jednovremeno bili tri uzastopna člana aritmetičkog i geometrijskog niza?*

Rješenje: Jasno je, da brojevi a, b i c moraju biti različiti od 0 (u protivnom se ne bi moglo govoriti o količniku geometrijskog niza). Na osnovu pretpostavke brojevi a, b i c moraju zadovoljavati sljedeći sitem jednačina:

$$b - a = c - b \ (= d), \qquad \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \ (= q).$$

Iz prve jednačine sistema slijedi da je $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Iz druge jednačine sistema slijedi da je $b^2 = ac$.

Znači, svaki član geometrijskog niza (osim prvog) je geometrijska sredina njemu dva susjedna, pa i uopšte simetrična, člana. Odatle dolazi i naziv za geometrijski niz.

Otuda je $(a - c)^2 = 0$, tj. $a = c$, pa je i $b = c$. Prema tome, brojevi a, b i c su tri uzastopna člana i aritmetičkog i geometrijskog niza ako je

$$a = b = c \neq 0.$$

Zadatak 2.1.1. Niz realnih brojeva x_n je definiran rekurzivno kako slijedi: x_0, x_1 su proizvoljni pozitivni realni brojevi, a $x_{n+2} = \dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Naći x_{1998}, x_{2010}, x_{2050}. (Rezultat. $x_{1998} = \dfrac{1+x_0+x_1}{x_0 x_1}$.)

§ 2.2. Pojam i osnovna svojstva granične vrijednosti niza

Pojmovi niza i njegove konvergencije i granične vrijednosti jedni su od najvažnijih matematičkih pojmova koji svoju primjenu imaju u raznim područjima matematike kao što su npr. *diferencijalni* i *integralni račun*.

Za niz realnih brojeva konvergencija i granična vrijednost definiraju se na sljedeći način.

Definicija 2.2.1. Za niz (a_n) u $\mathbf{R}$ kažemo da je **konvergentan** (u $\mathbf{R}$) ako postoji realni broj a $(\in \mathbf{R})$ takav da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za sve prirodne brojeve n veće od n_0 vrijedi

$$|a_n - a| < \varepsilon. \qquad (2.2.1)$$

U tom slučaju broj a zovemo **granična vrijednost** (ili **limes**[*]), *granica*) niza (a_n) i pišemo $\lim(a_n) = a$ (ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ili, kraće, $\lim a_n = a$).

Takođe tada još kažemo da niz (a_n) *konvergira ka* a ili da *teži ka* a *kad*(a) $n \to \infty$ i pišemo $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je **divergentan** ili da **divergira**.

Kada konvergentnom nizu (a_n) pridružujemo graničnu vrijednost a, govorimo da vršimo **granični prelaz / prijelaz**.

Definicija 2.2.2. Kažemo da niz (a_n) u $\mathbf{R}$ ima *graničnu vrijednost* $+\infty$ (ili *da konvergira ka beskonačnosti*) i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ako za svaki broj $M \in \mathbf{R}^+$ postoji prirodan broj n_0, takav da je $a_n > M$ za svaki prirodan broj n veći od n_0.

Slično se definira i granična vrijednost $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. U ovim slučajevima kaže se i da je niz (a_n) **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.

U skladu sa opštom definicijom specijalnih tipova podskupova uređenog skupa, pod (*otvorenim*) *intervalom* sa krajevima a i b $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ podrazumijevamo skup

$$(a, b) := \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \},$$

a pod *odsječkom* ili *segmentom* sa krajevima a i b podrazumijevamo skup

$$[a, b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b \}.$$

Takođe često posmatramo skupove oblika

$$[a, b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b \}, \qquad (a, b] = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b \},$$

koji se ponekad zovu *polusegment*, odnosno *poluinterval*.

Ponekad ćemo svaki od ova četiri tipa specijalnih podskupova skupa $\mathbf{R}$ zvati *razmak* i označavati sa $\langle a, b\rangle$.

Dalje, pod **okolinom** tačke (odnosno broja) $x_0 \in \mathbf{R}$ podrazumijevamo bilo koji podskupskupa $\mathbf{R}$ koji sadži otvoreni interval skupa $\mathbf{R}$ kojem ta tačka pripada. Specijalno, svaki otvoreni interval u $\mathbf{R}$ koji sadrži tačku $x_0 \in \mathbf{R}$ zovemo *okolina* (*u* $\mathbf{R}$) tačke x_0 i označavamo sa $U(x_0)$ ili $O(x_0)$. Pri tome, za svaki $\varepsilon > 0$ okolinu tačke x_0 datu sa

$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) = \{ x_0 \in \mathbf{R} : |x - x_0| < \varepsilon \}$

zovemo ε **- okolina** tačke x_0.

---

[*]) limes (lat.) – granica

Očito je da svaka okolina tačke x_0 sadrži neku njenu ε - okolinu, pa je u radu sa okolinama uvijek dovoljno posmatrati ε - okoline.

Tačke skupa $\overline{\mathbf{R}}$ različite od $-\infty$ i $+\infty$, tj. sve tačke skupa **R**, zovemo *konačnim*, dok tačke $-\infty$ i $+\infty$ zovemo *beskonačnim tačkama* skupa $\overline{\mathbf{R}}$.

Okoline (u $\overline{\mathbf{R}}$) tačaka u $\overline{\mathbf{R}}$ se definiraju analogno kao i okoline (u **R**) tačaka u **R**. No, često se posmatraju okoline tačaka $\pm\infty$ koje ne uključuju tačke $-\infty$ i $+\infty$, tj. posmatraju se okoline u **R** tačaka iz $\overline{\mathbf{R}}$. Naime, tada se pod okolinama tačke $-\infty$, odnosno tačke $+\infty$, podrazumijevaju skupovi oblika

$$(-\infty, a) = \{x\in \mathbf{R} : x < a\} \text{ i } (-\infty, a] = \{x\in \mathbf{R} : x \le a\}, \qquad (*)$$

odnosno

$$(b, +\infty) = \{x\in \mathbf{R} : x > b\} \text{ i } [b, +\infty) = \{x\in \mathbf{R} : x \ge b\}. \qquad (**)$$

Primijetimo da se tada malo odstupa od opšte definicije okoline, jer se tačke $\pm\infty$ ne uključuju u sopstvene okoline. Mi se pridržavamo opšte definicije pojma okoline i za tačke $\pm\infty$, tj. pod okolinom tačke $-\infty$ podrazumijevat ćemo skupove oblika $[-\infty, a] := \{x\in \overline{\mathbf{R}} : -\infty \le x \le a\}$ i $[-\infty, a) := \{x\in \overline{\mathbf{R}} : -\infty \le x < a\}$; $(-\infty < a \le +\infty)$,
a pod okolinom tačke $+\infty$ skupove oblika $[b, +\infty] := \{x\in \overline{\mathbf{R}} : b \le x \le +\infty\}$ i $(b, +\infty] := \{x\in \overline{\mathbf{R}} : b < x \le +\infty\}$; $(-\infty \le b < +\infty)$.

Napomenimo da za skup $A \subseteq \mathbf{R}$ koji nije ograničen odozgo (a takođe za skup $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ koji sadrži tačku $+\infty$) uzimamo da je $\sup A := +\infty$. Analogno, za skup $A \subseteq \mathbf{R}$ koji nije ograničen odozdo (a i za svaki skup $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ kojem pripada tačka $-\infty$) uzimamo po definiciji da je $\inf A := -\infty$. To omogućava da se teorem o supremumu (odnosno teorem o infimumu) formuliše na ovaj način : Svaki neprazan skup u $\overline{\mathbf{R}}$ ima supremum (odnosno, infimum) (u $\overline{\mathbf{R}}$).

Ako skup nije ograničen, kažemo da je **neograničen**.

Skupovi (*) i (**) su (beskonačni) *neograničeni razmaci*.

Uzimajući u obzir definicije pojmova okolina konačnih i beskonačnih tačaka skupa $\overline{\mathbf{R}}$, definicije 2.2.1. i 2.2.2. pojmova konačne i beskonačne granične vrijednosti niza u **R** mogu se objediniti u jednu definiciju na sljedeći način.

Definicija 2.2.3. Neka je (a_n) niz u **R** i neka je $a\in \overline{\mathbf{R}}$. Kažemo da je a **granična vrijednost** ili **limes** niza (a_n) i pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ako za svaku okolinu U tačke a postoji $n_0\in \mathbf{N}$ takav da $n > n_0$ povlači $a_n \in U$. U slučaju kada je $a\in \mathbf{R}$ (tj. kada je a konačan broj), za niz (a_n) kažemo da je **konvergentan**, a u slučaju kada je $a = -\infty$ ili $+\infty$ ili da granična vrijednost ne postoji, kažemo da niz (a_n) *divergira* (u slučaju kada je limes niza (a_n) beskonačan kažemo da taj niz **divergira u užem smislu**, a u slučaju kada limes od (a_n) ne postoji, kažemo da niz (a_n) **divergira u širem smislu** ili da **oscilira**).

Definicija 2.2.3. pojma limesa niza u **R** se proširuje i na nizove kompleksnih brojeva, nizove funkcija i uopšte na nizove elemenata u *metričkim prostorima* (pa i u tzv. *topološkim prostorima*), uz odgovarajuće značenje pojma okoline tačaka u takvim prostorima. *)

Iz definicije limesa niza slijedi da niz (a_n) teži ka a ako su mu članovi a_n "proizvoljno blizu" tački a čim je n "dovoljno velik". U tom slučaju se još kaže da se u svakoj okolini tačke a nalaze *svi članovi niza počev od nekog* ili *skoro svi članovi niza* (tj. svi osim, eventualno, njih konačno mnogo).

Primjer 2.2.1. Niz $\left(\frac{1}{n}\right)$ je konvergentan i vrijedi $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$ jer na osnovu Arhimedovog aksioma za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0\in\mathbf{N}$ takav da je $0<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$, pa je tim prije $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$ za svaki $n > n_0$.

Primjer 2.2.2. Ispitajmo konvergenciju niza (q^n), $(q\in\mathbf{R})$.

1) Ako je $q = 0$, onda je $q^n = 0$ za svaki n, pa je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Neka je $0 < q < 1$. Tada je $q = 1/(1+h)$ za neki $h\in\mathbf{R}^+$. Prema Bernoullijevoj nejednakosti imamo

$$q^n < \frac{1}{1+nh} < \frac{1/h}{n},$$

odakle, slično kao u primjeru 2.2.1., slijedi da je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Slučaj $-1 < q < 0$ razmatra se analogno. Dakle, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ako je $|q| < 1$.

2) Za $q = 1$ je $q^n = 1$ za svaki $n\in\mathbf{N}$, pa je $\lim q^n = \lim 1 = 1$.

3) Ako je $q > 1$, onda je $0 < 1/q < 1$. Neka je $M\in\mathbf{R}^+$ proizvoljan realan broj. Na osnovu 1) je $0 < (1/q)^n < 1/M$ za sve dovoljno velike prirodne brojeve n, pa je $q^n > M$ za dovoljno velike n, tj. tada prema definiciji beskonačne granične vrijednosti niza imamo da je $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

4) Za $q = -1$ dobijemo niz $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$. Članovi niza s parnim indeksom su 1, a članovi s neparnim indeksom su -1. U svakoj ε - okolini broja -1 nalaze se svi članovi niza s neparnim indeksom, a u svakoj ε - okolini broja 1 nalaze se svi članovi niza s parnim indeksom. Zato $\lim (-1)^n$ ne postoji, pa je niz $(-1)^n$ divergentan u širem smislu (oscilirajući).

5) Ako je $q < -1$, onda za sve parne n vrijedi $q^n > M$, a za sve neparne n je $q^n < -M$, gdje je M (> 0) proizvoljan realan broj, a n dovoljno veliki prirodni broj. To znači da postoji beskonačno članova niza (q^n) van svake okoline bilo kog elementa $a\in\overline{\mathbf{R}}$ pa taj niz nema limes.

Definicija 2.2.4. Za niz (α_n) u $\mathbf{R}$ kažemo da je **nula – niz** ili **beskonačno mala veličina** (ili *infinitezimala*) u odnosu na n kad $n\to+\infty$ ako je $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Npr. $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{(-1)^n}{n^2}$, , $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ su nula – nizovi.

Za niz (a_n) kažemo da je **ograničen odozgo** [**ograničen odozdo**] ako je skup$\{ a_n : n\in\mathbf{N}\}$ ograničen odozgo (odozdo). Za niz koji je ograničen i odozdo i odozgo kažemo da je **ograničen**.

Jednostavno se dokazuju sljedeća osnovna svojstva graničnih vrijednosti nizova u $\mathbf{R}$:

(i) *Ako niz ima graničnu vrijednost, ona je jednoznačno određena.*

(ii) *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

(iii) *Jednakost* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *, gdje je* $a\in\mathbf{R}$, *vrijedi akko* $a_n = a + \alpha_n$, *pri čemu je* (α_n) *nula – niz.*

(iv) *Zbir i razlika dva nula – niza su nula – nizovi.*

(v) *Proizvod ograničenog niza i nula – niz je nula – niz.*

(vi) (**Veza između algebarskih operacija u skupu R i graničnog prelaza**). *Neka su* (a_n) i (b_n) *konvergentni nizovi i neka je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Tada je:*
a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$, *b*) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a\cdot b$ (*odakle je* $\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot a_n) = \alpha\cdot a$, $\alpha\in\mathbf{R}$); *c*) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ *ako je* $b \neq 0$.

(vii) (**Svojstva limesa koja su u vezi sa relacijom poretka u R**).
1) *Ako je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *i* $a < b$, *onda je* $a_n < b_n$ *počev od nekog* n. *Specijalno, ako je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a < b$, *onda je* $a_n < b$ *počev od nekog* n. *Analogno važi kada se znak* $<$ *zamijeni znakom* $>$.
2) *Ako je za svaki* $n\in\mathbf{N}$ (*ili počev od nekog* n) $a_n \le b_n$ *i nizovi* (a_n) i (b_n) *imaju graničnu vrijednost, onda je i* $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$. *Analogno važi kada se znak* $\le$ *zamijeni znakom* $\ge$.
3) (“**Teorema o dva žandara / policajca** “ ili “**Sendvič teorem**” ili “**Teorema o uklještenju**”.) *Neka su* (a_n) , (b_n) *i* (c_n) *tri niza* (*u* **R**), *takva da je* :
1° $a_n \le b_n \le c_n$ *za svaki* $n\in\mathbf{N}$ (*ili počev od nekog* n);
2° $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \in\overline{\mathbf{R}}$.
Tada je $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

(viii) *Ako je* $\lim |a_n| = 0$, *onda je* $\lim a_n = 0$.

Dokaz: (*i*) Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da neki niz (a_n) ima dvije granične vrijednosti a, b i neka su, npr., obje konačne. Neka je $\varepsilon := |a - b| / 2$. Tada se ε - okoline ne sijeku, pa je očito nemoguće da i u jednoj i u drugoj budu skoro svi članovi posmatranog niza (a_n). Time je dokaz (*i*) završen.

(*vii*) Svojstvo 1) se dokazuje slično kao i (*i*) , a svojstvo 2) slijedi iz činjenice da ako bi bilo $\lim a_n > \lim b_n$, onda bi prema 1) slijedilo $a_n > b_n$, počev od nekog n, suprotno pretpostavci.

Dokažimo svojstvo 3) (koje se često koristi u zadacima). Neka je U proizvoljna okolina tačke $a\in\overline{\mathbf{R}}$. Tada za n veće od nekog $n_1\in\mathbf{N}$ važi $a_n \in U$, a za n veće od nekog $n_2\in\mathbf{N}$ važi $c_n \in U$. No, kako svaka okolina U bilo konačne, bilo beskonačne tačke a ima sljedeće svojstvo

$$a_n \in U,\ \ c_n \in U,\ \ a_n \le b_n \le c_n \ \Rightarrow\ b_n \in U,$$

to zaključujemo da je $b_n \in U$ za svaki $n > n_0$, gdje je $n_0 := \max\{ n_1, n_2\}$. Otuda slijedi da je $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Dokazuje se da vrijede sljedeće relacije o osnovnim limesima u teoriji nozova:

1. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. 2. $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ za svaki $a\in\mathbf{R}^+$;

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & m < k, \\ a_m / b_m, & m = k, \\ +\infty, & m > k \ \wedge\ \dfrac{a_m}{b_k} > 0, \\ -\infty, & m > k \ \wedge\ \dfrac{a_m}{b_k} < 0. \end{cases}$$

4. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$ ($k\in\mathbf{N}$, $a > 1$); 5. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ ($a\in\mathbf{C}$) ;

6. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} := e\in(2,3)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$,

gdje je e konstanta koja je poznata kao *Eulerov broj* ili *Neperova konstanta*. (Broj e ima decimalni razvoj e = 2,718281828459045.., što ćemo kasnije objasniti (do tridesetog decimalnog mjesta, ovaj broj iznosi : e ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352, osnova je prirodnog logaritma i jedan od najznačajnijih brojeva u savremenoj matematici, pored neutralnih elemenata sabiranja i množenja 0 i 1, imaginarne jedinice *i* i broja π). Osim što je iracionalan i realan, broj e je još i transcendentan. **Broj e se** sreće i kao dio *Eulerovog identiteta* $e^{i\cdot\pi}+1=0$. Napomenimo da se boj e može ekvivalentno predstaviti (osim kao granična vrijednost beskonačnog niza $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$) i kao suma beskonačnog *reda*

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\quad \left(=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right)$$

i kao pozitivna vrijednost koja zadovoljava (*integralnu*) jednačinu $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$.)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma=0{,}577215664901532...$

Broj γ zove se *Eulerova konstanta*. (Posmatrajući sumu $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ *Euler* je uočio da je ona približno jednaka $\ln n$, te dokazao da kada *n* raste, razlika između te sume i $\ln n$ teži konstanti koja se zove *Eulerova konstanta*. Euler ju je 1781. izračunao na 16 decimala, a njena je približna vrijednost 0.57721566490153286060651209008240243. Isti broj ponekad se zove *Mascheronijeva konstanta*. Međutim, broj γ je još uvijek prilična nepoznanica, o njemu se malo zna, čak nema dokaza niti da je iracionalan.)

Dokaz: Dokažimo, npr., da je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Neka je $a_n:=\sqrt[n]{n}-1$. Tada je $a_n>0$ za $n>1$. Koristeći se binomnim razvojem u kojem su svi sabirci pozitivni, dobijemo

$$n=(1+a_n)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a_n^k>\frac{n(n-1)}{2}a_n^2.$$

Otuda je $0<a_n^2<\frac{2}{n-1}\to 0$ $(n\to\infty)$, pa vrijedi $a_n^2\to 0$ $(n\to\infty)$, odakle je $\lim a_n=0$, tj. $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

Zadatak 2.2.1. *Izračunati limes niza* (a_n) *ako je* :

a) $a_n=\dfrac{n^3-2^n}{n^4+2^n}$; b) $a_n=\dfrac{n^3-2^n}{n^4+3^n}$; c) $a_n=\dfrac{n^3-3^n}{n^4+2^n}$; d) $a_n=\dfrac{n^3-2n!}{n^4+3n!}$.

§2.3. Podnizovi. Tačke gomilanja

Definicija 2.3.1. Neka je $n:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $k\mapsto n_k$, niz prirodnih brojeva takav da je

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$$

i neka je $a:\mathbf{N}\to A$ niz elemenata proizvoljnog skupa A $(\neq\emptyset)$. Tada za niz $a\circ n:\mathbf{N}\to A$ sa članovima a_{n_k} $(k\in\mathbf{N})$ kažemo da je **podniz** (ili **djelimični niz**) niza (a_n).

Iz ove definicije neposredno slijedi činjenica da ako niz (a_n) u **R** ima graničnvrijednost *a*, onda i bilo koji njegov podniz (a_{n_k}) ima graničnu vrijednost *a*.

No, primjer niza $((-1)^n)$ pokazuje da mogu postojati konvergentni podnizovi niza koji nema graničnu vrijednost.

Definicija 2.3.2. Za tačku $a \in \overline{\mathbf{R}}$ kažemo da je **tačka gomilanja** (ili **tačka nagomilavanja**) skupa A $(\subseteq \mathbf{R})$ ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedna tačka skupa A različita od same tačke a.

Lako se vidi da se tačka gomilanja skupa A $(\subseteq \mathbf{R})$ može ekvivalentno definirati i kao tačka $a \in \overline{\mathbf{R}}$ u čijoj svakoj okolini postoji beskonačno mnogo tačaka skupa A.

Primjenom Cantorovog aksioma i Arhimedovog aksioma, dokazuje se sljedeća teorema.

Teorema 2.3.1. (**Bolzano**[*)] – **Weierstrassova**[**)] **teorema za skupove**).Svaki beskonačni ograničeni skup u **R** ima bar jednu tačku gomilanja u **R**. Svaki beskonačni skup u **R** ima bar jednu tačku gomilanja u $\overline{\mathbf{R}}$.

Definicija 2.3.3. Za tačku $a \in \overline{\mathbf{R}}$ kažemo da je **tačka gomilanja** (ili **tačka nagomilavanja**) niza a_n u **R** ako postoji podniz (a_{n_k}) tog niza koji teži ka a kad $k \to \infty$.

Primijetimo da postoji razlika između pojma limesa i pojma tačke gomilanja nekog niza, te da imamo i važnu razliku između pojma tačke gomilanja niza (a_n) i tačke gomilanja skupa njegovih vrijednosti $\{ a_n \mid n \in \mathbf{N} \}$. Tako, npr., niz $((-1)^n)$ ima dvije tačke gomilanja i to -1 i 1, a skup njegovih vrijednosti $\{ (-1)^n \mid n \in \mathbf{N} \} = \{-1, 1\}$ je konačan pa nema tačaka gomilanja.

Sljedeća teorema daje jednostavan odgovor na pitanje o egzistenciji tačaka gomilanja nizova realnih brojeva, a dokazuje se na osnovu teoreme 2.3.1. (ili neposredno po analogiji kao i ta teorema).

Teorema 2.3.2. (**Bolzano – Weierstrassova teorema za nizove**).

(i) Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku gomilanja u **R**.

(ii) Svaki niz realnih brojeva ima bar jednu tačku gomilanja u $\overline{\mathbf{R}}$.

Lako se zaključuje da vrijedi sljedeći stav :

Stav 2.3.1. Skup $T(a_n)$ tačaka gomilanja niza (a_n) realnih brojeva ima maksimum i minimum u $\overline{\mathbf{R}}$.

Definicija 2.3.4. Najveća (najmanja) tačka gomilanja niza (a_n) realnih brojeva zove se **gornji limes** ili **limes superior** (**donji limes** ili **limes inferior**) niza (a_n) i označava sa $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ili $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$ ($\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ili $\lim_{n\to\infty} \inf a_n$).

Primijetimo da pojmove iz definicije 2.3.4. treba razlikovati od pojmova $\sup\{ a_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ i $\inf \{ a_n \mid n \in \mathbf{N} \}$.

Lako se dokazuju sljedeće jednostavne činjenice:

(*i*) Niz (a_n) ima graničnu vrijednost akko $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$, tj. akko ima samo jednu tačku gomilanja.

(*ii*) Niz (a_n) konvergira akko je $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$ konačan broj.

(*iii*) Niz (a_n) ima graničnu vrijednost akko svaki njegov podniz ima graničnu vrijednost

Primjer 2. 3.1. Niz (a_n) čiji je opšti član $a_n := \frac{1+(-1)^n}{2}$ ima dvije tačke gomilanja, tj. $T(a_n) = \{0, 1\}$. Ovdje se radi o nizu $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, tj. $a_{2k} = 1$ i $a_{2k-1} = 0$ za svaki $k \in \mathbf{N}$. Svakoj ε - okolini tačke 0 pripadaju svi članovi niza s neparnim indeksom, a u svakoj ε - okolini tačke 1 nalaze se svi članovi niza s parnim indeksom. Otuda je $\underline{\lim} a_n = 0$, $\overline{\lim} a_n = 1$, pa $\lim_{n\to\infty} a_n$ ne postoji.

Zadatak 2.3.1. *Za sve* $\alpha\in\mathbf{R}$, *odredite* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ i (*u slučajevima kada postoji*) $\lim_{n\to\infty} a_n$ *ako je niz* (a_n) *zadan opštim članom*

$$a_n := \frac{\cos n + (-1)^n n}{n^\alpha}.$$

Zadatak 2.3.2. *Za sve* $\alpha\in\mathbf{R}$, *odredite* (*ako postoji*) *limes niza* $l(\alpha) := \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+\cos n)^\alpha}{\sin\frac{1}{n}}$.

(**Rezultat:** $l(\alpha) = 0$ za $\alpha < -1$.)

Zadatak 2.3.3. *Neka je* (a_n) *niz koji divergira ka* $+\infty$, *a* (b_n) *niz čiji je opšti član zadan formulom*

$$b_n := \sin\left(\frac{1}{a_n}\right)\cos n.$$

Ustanovite da je niz (b_n) *infinitezimala.*

§2.4. Cauchyjev princip konvergencije. Monotoni nizovi. Broj *e*

Često je od interesa ispitivanje konvergencije niza bez efektivnog nalaženja njegovog limesa. A ustanoviti da li neki niz konvergira je od fundamentalnog značaja u raznim oblastima primjene teorije nizova, kao što su numerička analiza, automatsko upravljanje, obrada signala, teorija sistema i dr. Jedan od načina za ispitivanje konvergencije nizova, koristeći se samo poznavanjem samog niza, a ne znajući unaprijed kojoj bi to graničnoj vrijednosti on konvergirao, daje Cauchyjev kriterij konvergencije.

Definicija 2.4.1. Za niz (a_n) u **R** kažemo da je **Cauchyjev** ili **fundamentalan** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji indeks $n_0\in\mathbf{N}$ takav da je $|a_m - a_n| < \varepsilon$ čim su indeksi m i n veći od n_0.

Lako se dokazuje da Cauchyjevi nizovi imaju ova svojstva:

(*i*) Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.

(*ii*) Svaki Cauchyjev niz je ograničen.

(*iii*) Ako Cauchyjev niz ima konvergentan podniz, on je i sam konvergentan.

No, vrijedi i obrat izjave (*i*), tj. vrijedi sljedeća teorema koja se naziva **Cauchyjevim principom konvergencije***).

Teorema 2.4.1. Svaki Cauchyjev niz u **R** je konvergentan (u **R**).

Dokaz: Neka je (a_n) Cauchyjev niz u **R**. Tada je on ograničen, pa iz Bolzano – Weierstrassove teoreme slijedi da postoji podniz (a_{n_k}) tog niza koji konvergira u **R**. Na osnovu svojstva (*iii*) Cauchyjevog niza slijedi da je niz (a_n) konvergentan (u **R**), što je trebalo i dokazati.

Primjer 2.4.1. Primjenom Cauchyjevog kriterijuma dokažimo da je niz (a_n) divergentan ako je $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Dovoljno je dokazati da taj niz nije Cauchyjev, tj. dovoljno je dokazati logičku negaciju uslova iz definicije Cauchyjevog niza:

$$(a_n) \text{ nije Cauchyjev } \Leftrightarrow (\exists\, \varepsilon > 0)\ (\forall n_0\in\mathbf{N})\ (\exists\, m, n\in\mathbf{N})\ (m, n \geq n_0 \text{ i } |a_m - a_n| \geq \varepsilon).$$

U našem primjeru stavimo $\varepsilon = ½$, $m = 2n$. Tada je za svaki $n\in\mathbf{N}$, pa niz (a_n) nije Cauchyjev.

---

*) Umjesto ovog teorema često se daje **Cauchyjev kriterij konvergencije za nizove** u **R** koji glasi : Niz (a_n) u **R** je konvergentan u **R** akko je Cauchyjev.

Definicija 2.4.2. Za niz (a_n) u **R** kažemo da je **neopadajući** ako je $a_n \le a_{n+1}$ za svaki $n \in$ **N**, a da je **rastući** (**strogo rastući**) ako je $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in$ **N**. Analogno se definira **nerastući** i **opadajući** (**strogo opadajući**) nizovi. Jednim imenom nizove navedena četiri tipa zovemo **monotoni nizovi**.

Za monotone nizove važi sljedeći veoma jednostavan kriterij konvergencije : Svaki monoton i ograničen niz u **R** je i konvergentan u **R**. Zapravo, vrijedi sljedeća teorema:

Teorema 2.4.2.

(i)Neka je (a_n) neopadajući niz u **R**. Tada (a_n) konvergira u $\overline{\mathbf{R}}$ akko je ograničen odozgo.

(ii) Svaki neopadajući niz u **R** ima graničnu vrijednost u **R**.

Analogne izjave vrijede i za nerastuće nizove.

Dokaz: (i) Dovoljno je dokazati da neopadajući i odozgo ograničen niz (a_n) u **R** ima konačnu graničnu vrijednost. Prema teoremi o supremumu postoji $a := \sup\{ a_n \mid n \in \mathbf{N} \} < +\infty$, odakle slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $a - \varepsilon < a_{n_0} \le a$. No, kako je niz a_n neopadajući, otuda je $a - \varepsilon < a_n \le a$ za svaki $n > n_0$, tj. $| a_n - a | < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, pa je niz (a_n) konvergenatn i $\lim a_n = a$.

(ii) Ako neopadajući niz (a_n) nije ograničen, to znači da se za svaki $M \in \mathbf{R}$ može naći $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $a_{n_0} > M$. No, zbog svojstva monotonosti; otuda slijedi da je takođe $a_n > M$ za svaki $n > n_0$. Time je pokazano da niz (a_n) u **R** ima graničnu vrijednost u $\overline{\mathbf{R}}$ i $\lim a_n = +\infty$.

Primjer 2.4.2. Dokažimo da je niz (a_n) realnih brojeva definiran opštim članom $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ($n \in \mathbf{N}$), konvergenatn. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je ovaj niz (strogo) rastući i ograničen odozgo.

Na osnovu Bernulijeve nejednakosti imamo (za svaki $n \ge 2$):

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-n\cdot\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n},$$

tj.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1},$$

odakle slijedi da je niz (a_n) (strogo) rastući.

Dokažimo da je niz (a_n) ograničen odozgo. Za $n \ge 2$ primjenom Newtonove binomne formule dobijemo

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!\cdot n^k} =$$

$$= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Iz nejednakosti $k! \ge 2^{k-1}$, ($k \ge 2$), i formule za zbir prvih n članova geometrijskog niza dobijemo

$$a_n < 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \le 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

tj. niz (a_n) je ograničen odozgo.

Otuda slijedi da niz (a_n) ima konačnu graničnu vrijednost. Tu graničnu vrijednost (prema *Euleru*) zovemo **broj** e. Dakle,

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad (2 < e < 3), \quad (e = 2{,}718281828459045...).$$

Lako se dokazuje da je broj e (koji se još zove i **Eulerov broj**) iracionalan broj, a *Hermite* je 1873. godine dokazao da je broj e čak i **transcendentan**, tj. ne zadovoljava nikakvu algebarsku jednačinu $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, $(a_0 \neq 0)$, s racionalnim koeficijentima. Broj e ima veliki značaj u *matematičkoj analizi* i njenim primjenama, a često i prirodno se uzima za bazu logaritmu (*prirodni logaritam* ln).

Primjer 2.4.3.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{e}{e^{-1}} = e^2$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{a_n}\right)^{\beta\cdot a_n} = e^{\alpha\beta}$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i za svaki niz (a_n) u $\mathbf{R}$ takav da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

Zadatak 2. 4. 1.* Nađite (ako postoji) ili ustanovite da ne postoji $\lim a_n$, gdje je

$$a_n := 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}.$$

[I. $-2/3$. II. $-\infty$. **III.** $2/3$. IV. Ne postoji $\lim a_n$.]

Zadatak 2. 4. 2.* Za niz (a_n), gdje je $a_n := \dfrac{n^3+9^n}{n^4-8^n}$, $(n \in \mathbf{N})$, nađite $\lim a_n$.

(Rezultat. $-\infty$.)

Zadatak 2. 4. 3.* Za niz (a_n), gdje je $a_n := \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-n-2}}$,

$(n \in \mathbf{N} \setminus \{1\})$, nađite $\lim a_n$ i $\lim (a_n)^n$.

Zadatak 2. 4. 4.** Duž veličine a je podijeljena na n dijelova jednakih dužina. Nad svakim dijelom konstruisan je krug. Odredite:

a) zbir O_n, obima svih dobijenih krugova; **b)** zbir P_n, površina svih dobijenih krugova;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Zatim diskutujte dobivene rezultate pod c) i d).

§ 2. 5. Pojam i neka svojstva (beskonačnog) reda

Predmet proučavanja ovog i narednih paragrafa ove glave je uglavnom teorija numeričkih (brojnih) redova. Ona se oslanja na teoriju nizova i (intuitivno, opisno) može se reći da je taj predmet sumiranje beskonačnog broja konačnih sabiraka. To sumiranje privlači pažnju naučnika još od antičkog doba, koji su u tom postupku otkrili više paradoksa (kao što je paradoks grčkog filozofa *Zenona* iz Eleje, koji je tvrdio da strijela ne može da leti, odnosno da “Brzonogi” *Ahil* utrkujući se s bićem koje je najsporije, kornjačom, neće je moći dostići, ako je ona pošla prije njega.

Beskonačnim redom smo se zapravo već formalno služili predstavljajući realne brojeve *beskonačnim decimalnim brojevima*, npr. kada smo stavljali ⅓ = 0,333… , jer u decimalnom zapisu (oznaci) to ne znači drugo nego $\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$, dakle, simbol koji ima oblik zbira u kome broj (konačnih) sabiraka raste bez kraja. Budući da smo se dosad susretali samo sa sumama konačnog broja sabiraka, uvodimo tim načinom pisanja **sasvim nov simbol** kome treba jasno i tačno odrediti značenje da izbjegnemo bezbrojnim zamkama što se kriju na svakome koraku kada se uputimo u krajeve beskonačno velikoga.

---

*) Zadatak sa ispita iz IM1.

**) Zadatak koji je bio zadan za domaću zadaću iz IM1.

Neka je zadano beskonačno mnogo (niz) realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ i pomoću njih napisan simbolički izraz u obliku zbira:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \;. \qquad (2.5.1)$$

Taj simbol naziva se **beskonačnim (realnim) redom s opštim članom** a_n, ili **beskonačnim redom** kome su brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ članovi[*], ili kraće (**realnim**) **redom** (ili **redom** u **R**).

Da tom simbolu damo značenje, prirodno je da postupamo ovako. Označimo prvi član tog izraza sa s_1, zbir $a_1 + a_2$ sa s_2, itd., tj. stavimo:

$$s_1 := a_1,\quad s_2 := a_1 + a_2,\quad \dots,\quad s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\quad \dots; \qquad (2.5.2)$$

saberimo dakle zadane brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ počevši od prvoga član po član. Tako dolazimo do niza (s_n) **parcijalnih zbirova** ili **parcijalnih suma (odsječaka)** zadanog reda (2.5.1):

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \qquad (2.5.3)$$

kome su članovi zbirovi od sve većeg, ali uvijek konačnog broja članova $a_1, a_2, \dots$ uzetih redom kako se u simbolu (2.5.1) pojavljuju.

Simbol beskonačnog reda :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{ili kraće} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2.5.4)$$

samo je druga oznaka za beskonačni niz parcijalnih zbirova (s_n).

No, u novije vrijeme se obično pojam (beskonačnog) reda uvodi na ovaj formalniji (precizan) način (jer red nije obična suma svojih članova i pri sumiranju beskonačnog broja sabiraka pojavljuju se neke nove osobine u odnosu na konačan slučaj [**]):

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Tada je za svaki $k \in \mathbf{N}$ definirana suma:

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k \qquad (2.5.5)$$

prvih k članova niza (a_n) tako da za svaki $k \in (\mathbf{N} \setminus \{1\})$ vrijedi

$$s_k = s_{k-1} + a_k\,. \qquad (2.5.6)$$

Prirodna je ideja da se suma s svih članova niza (a_n) definiše kao $\lim_{k\to\infty} s_k$.

Analogno se postupa i u proizvoljnom normiranom vektorskom prostoru X (normirani vektorski prostor je uređen par $(X, \|\ \|)$ koji se sastoji od vektorskog prostora X nad poljem Φ realnih ili kompleksnih brojeva i norme na X, tj. preslikavanja $\|\ \| : X \to \mathbf{R}$, gdje je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva, koje zadovoljava uslove: $(N\,1)\ \|x\| \ge 0$; $(N\,2)\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (nulavektor u X); $(N\,3)\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $(\lambda \in \Phi, x \in X)$; $(N\,4)\ \|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|$). Ako želimo sumirati sve članove niz (a_n) iz X, pridružujemo nizu (a_n) nov niz $(s_k, k \in \mathbf{N})$, gdje je s_k dato realcijom (2.5.5) i govorimo o redu s članovima a_n i parcijalnim sumama s_k.

Definicija 2.5.1. Neka je dat niz (a_n) u $\mathbf{R}$ (ili, opštije, u normiranom vektorskom prostoru X) i neka je $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ za svaki $k \in \mathbf{N}$. **Beskonačni red** ili, kraće, **red** u **R** (ili, opštije, u proizvoljnom *normiranom vektorskom prostoru* X) je uređen par $((a_n), (s_k))$

---

[*] Tačke na njegovom kraju znače da dodavanju novih članova nema kraja.

[**] Da red nije obična suma svojih članova vidimo npr. iz pokušaja sumiranja članova niza $((-1)^{n-1})$ na tri različita načina: 1) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$; 2) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1$; 3) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = -1$.

koji se sastoji od dva niza (a_n), (s_k) $(a_n, s_k \in \mathbf{R}$, odnosno, $a_n, s_k \in X)$; a_n su **članovi reda**, a s_k $(k \in \mathbf{N})$ k – te **parcijalne sume reda**. Niz (s_k) nazivamo **nizom parcijalnih suma** datog reda. Sam red se kraće označava

$$\sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{ili} \quad \sum_n a_n \quad \text{ili} \quad \sum a_n \quad . \tag{2.5.7}$$

Za a_n se kaže da je n-ti član reda $\sum a_n$, a ako je specificirana zavisnost a_n od n, onda se a_n naziva opšti član reda $\sum a_n$.

Iz definicije 2.5.1. slijedi da su dva reda jednaka akko imaju jednake članove sa istim indeksom.

Oznaka $\sum a_n$ za red sugeriše sumiranje, a primjenjiva je jer je niz (s_k) parcijalnih suma (tog reda) određen nizom (a_n). Red se često označava i ispisivanjem nekoliko prvih članova, npr.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \ .$$

Ako su elementi (članovi) reda realni ili kompleksni brojevi, kažemo da je taj red **numerički** ili **brojni** (**sa konstantnim članovima**); redove čiji su članovi funkcije nazivamo **funkcionalnim redovima**.

Definicija 2.5.2. Neka je (a_n) niz u $\mathbf{R}$ (ili, opštije, iz normiranog vektorskog prostora X). Kažemo da je niz (a_n) **sumabilan** u $\mathbf{R}$ (odnosno, u X) ili da je red $\sum a_n$ **konvergentan** (u $\mathbf{R}$, odnosno, u X) ako je niz parcijalnih suma (s_k) reda $\sum a_n$ konvergentan (u $\mathbf{R}$, odnosno, u X). Limes $s := \lim_{k\to\infty} s_k$ naziva se **suma reda** $\sum a_n$ i označava se sa

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{2.5.8}$$

Ako red $\sum a_n$ nije konvergentan, kaže se da je **divergentan**.

Radi veće jasnoće u ovom poglavlju razlikujemo simbole $\sum a_n$ i $\sum_n a_n$ za red od simbola $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ za sumu reda, što često nije slučaj u literaturi [*]. Ponekad su članovi reda numerisani počevši od 0, ili od nekog (fiksiranog) prirodnog broja r (>1). Tada se suma reda $\sum a_n$ označava sa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, odnosno $\sum_{n=r}^{\infty} a_n$.

Nadalje ćemo se (ako drugačije ne naznačimo) ograničiti na redove u $\mathbf{R}$ (redove realnih brojeva, redove s konstantnim članovima).

Ako niz (s_k) parcijalnih suma reda $\sum a_n$ u $\mathbf{R}$ ima konačan ili beskonačan limes s, onda se kaže da taj red ima *sumu* i da mu je suma suma jednaka s. Ako niz (s_k) nema limesa u $\mathbf{R}$, onda se kaže da red $\sum a_n$ nema sume (ni konačne ni beskonačne). U skladu sa definicijom 2.5.2., za red $\sum a_n$ se kaže da je konvergentan (u $\mathbf{R}$) ako ima konačnu sumu, a u suprotnom se kaže da je red $\sum a_n$ $(a_n \in \mathbf{R})$ divergentan (u $\mathbf{R}$). Prema tome, red $\sum a_n$ u $\mathbf{R}$ je divergentan (u $\mathbf{R}$) u sljedeća dva slučaja: 1° Red $\sum a_n$ ima sumu s ali je $s = -\infty$ ili $+\infty$ i tada još kažemo da je red *određeno divergentan* ili **divergentan u užem smislu**; 2° Red $\sum a_n$ nema nikakvu sumu (ni u $\mathbf{R}$) i tada još kažemo da je red **oscilirajući** ili da je **divergentan u širem smislu**.

---

[*] Grčko slovo $\sum$ je početno slovo latinske riječi *suma*. Prva upotreba oznake $\sum$ za sumaciju pripisuje se Euleru. U narednim odjeljcima (paragrafima) ovog poglavlja ipak često, umjesto $\sum a_n$, koristimo simbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, (posebno u slučajevima kada je $n_0 \neq 1$, $n_0 \in \mathbf{N}_0$).

Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, onda suma prvih p članova s_p predstavlja približnu vrijednost za sumu s toga reda. Zapravo, iz $\lim_{p\to\infty} s_p = s$ imamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 $(= n_0(\varepsilon))$ takav da je $|s - s_p| < \varepsilon$ za svaki $p \geq n_0$, pa se suma konvergentnog reda može izračunati s proizvoljnim stepenom tačnosti pomoću parcijalnih suma reda.

Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, onda se lako vidi da je konvergentan i red

$$\sum a_{n+p} \tag{2.5.9}$$

za svaki $p \in \mathbf{N}$ i vrijedi jednakost $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$. Za sumu $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ kaže se da je *ostatak reda* $\sum a_n$ poslije p-tog člana. No, i za sam red (2.5.9), bez obzira da li je red $\sum a_n$ konvergentan ili divergentan, kaže se da je **ostatak reda** $\sum a_n$ **poslije *p*-tog člana** ili ***p*-ti ostatak reda** $\sum a_n$, što ćemo i mi govoriti. Obrnuto, ako red $\sum a_{n+p}$ konvergira za neki $p \in \mathbf{N}$, onda konvergira i red $\sum a_n$. Zapravo, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Tvrdnja 2.5.1.

(*i*) Neka je p proizvoljan fiksiran prirodan broj. Tada red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum a_{n+p}$, tj. red $\sum a_n$ i njegov ostatak $\sum a_{n+p}$ su **ekvikonvergentni** (oba reda su ili konveregntna ili divergentna). Osim toga, u slučaju konvergencije ovih redova za njhove sume s i r_p, respektivno, vrijedi $s = s_p + r_p$, gdje je s_p p-ta parcijalna suma reda $\sum a_n$.

(*ii*) Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, onda suma r_p njegovog p-tog ostatka teži ka nuli kad $p \to \infty$.

Dokaz:

(*i*) Neka je s_p p-ta parcijalna suma reda $\sum a_n$. Označimo sa s_n' n-tu parcijalnu sumu ostatka $\sum a_{p+n}$ reda $\sum a_n$ poslije p-tog člana, tj. $s_n' = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Tada očito vrijedi

$$s_{p+n} = s_p + s_n', \quad \text{odnosno} \quad s_n' = s_{p+n} - s_p \text{, gdje je} \quad s_{p+n} = \sum_{i=1}^{n+p} a_i. \tag{*}$$

(Suma $s_{n,p} = s_n' = s_{p+n} - s_p$ ponekad se zove **odreskom reda** $\sum a_n$.)

Pretpostavimo sada da red $\sum a_n$ konvergira i da mu je suma jednaka s. Tada $s_{p+n} \to s$, $(n\to\infty)$, pa iz (*) slijedi da $s_n' = s_{n+p} - s_p \to s - s_p$, $(n\to\infty)$. Znači, red (2.5.9) je konvergentan i suma mu je jednaka $s - s_p$. Ako tu sumu označimo sa r_p, vrijedit će, dakle, $r_p = s - s_p$, tj. $s = s_p + r_p$ (*)'. Pretpostavimo sada da je red (2.5.9) konvergentan sa sumom r_p. To znači da $s_n' \to r_p$, $(n\to\infty)$. No, odavde i iz (*) slijedi da $s_{p+n} \to s_p + r_p$, $n\to\infty$. Prema tome, red $\sum a_n$ je konvergentan i vrijedi, ako mu sumu označimo sa s, da je $s = s_p + r_p$, tj. ponovo vrijedi (*)'.

(*ii*) Neka je red $\sum a_n$ konvergentan sa sumom s. Tada je i (2.5.9) konvergentan red. Ako mu sumu označimo sa r_p, onda vrijedi $s = s_p + r_p$. No, ovdje je p fiksiran ali proizvoljan prirodan broj. Ako pustimo da $p \to \infty$ dobit ćemo da $s_p \to s$. Iz $s = s_p + r_p$ sada slijedi $r_p = s - s_p \to s - s = 0$, $p \to \infty$, pa je dokaz tvrdnje 2.5.1. završen.

Red (2.5.9) nastaje iz reda $\sum a_n$ odbacivanjem prvih p članova. No, mi možemo smatrati da je red $\sum a_n$ nastao iz reda (2.5.9) tako što smo tom redu dodali p novih prvih članova. Otuda na osnovu tvrdnje 2.5.1. slijedi da odbacivanje ili dodavanje konačno mnogo članova reda ne utiče na konvergenciju tog reda, ali u opštem slučaju utiče na njegovu sumu.

Iz tvrdnje 2.5.1. može se zaključiti da je red $\sum a_n$ konvergentan akko suma r_p ostatka reda poslije p-tog člana teži nuli kad $p \to +\infty$. To znači da se suma konvergentnog reda može aproksimirati parcijalnim sumama, pri čemu greška te aproksimacije teži nuli kada broj članova koji se sumiraju raste.

Teorema 2.5.1. (**Potreban uslov za konvergenciju**, ili test n-tog člana).

Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, onda niz (a_n) njegovih članova konvergira ka nuli, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz: Neka je $s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$. Na osnovu pretpostavke teoreme, imamo da postoji i da je konačna granična vrijednost $\lim_{k\to\infty} s_k := s$. S druge strane je $s_k - s_{k-1} = a_k$, $(k > 1)$, pa je

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0.$$

Q.E.D.

Da navedeni neophodan uslov konvergencije reda nije i dovoljan, pokazuje sljedeći primjer:

Primjer 2.5.1. Opšti član reda $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ očito teži nuli kad $n\to\infty$. Međutim, za parcijalnu sumu $s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}}$ važi relacija

$$s_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}.$$

Očigledno, $\sqrt{k} \to +\infty$ kad $k \to +\infty$, pa je $\lim_{k\to+\infty} s_k = +\infty$, tj. red $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira (u užem smislu).

Teorema 2.5.2. (**Cauchyjev kriterijum za konvergenciju redova**)[*]. Red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da iz $n > n_0$, $p \in \mathbf{N}$ slijedi $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Simbolički,

$\sum a_n$ konvergira $\Leftrightarrow$ $[(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ n_0 \in \mathbf{N})\ (\forall\ n, p \in \mathbf{N})\ (n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon)]$.

Dokaz:

Slijedi neposredno iz Cauchyjevog principa konvergencije za nizove realnih brojeva (tj. iz činjenice da je svaki Cauchyjev niz u **R** konvergentan).

Q.E.D.

Za date redove $\sum a_n$ i $\sum b_n$, red $\sum(a_n + b_n)$ naziva se njihovim **zbirom**, a red $\sum(a_n - b_n)$ **razlikom** tih **redova**.

Lako se vidi da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Tvrdnja 2.5.2.

(*i*) Ako red $\sum a_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum \alpha \cdot a_n$, $(\alpha \in \mathbf{R})$. Pri tome je suma reda $\sum \alpha\, a_n$ jednaka proizvodu konstante α i sume reda $\sum a_n$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(*ii*) Ako redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju, onda konvergiraju i redovi $\sum(a_n + b_n)$ i $\sum(a_n - b_n)$ i njihove sume su jednake zbiru i razlici, respektivno suma redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

Primjer 2.5.2. Red $\sum a q^{n-1}$, $(a \neq 0,\ q \neq 0)$, naziva se **geometrijskim redom**. Parcijalna suma s_k tog reda predstavlja sumu prvih k članova geometrijske progresije i data je sa $s_k := a + aq + \cdots + aq^{k-1}$, odnosno sa

$$s_k = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^k)}{1-q}, & q \neq 1 \\ ak, & q = 1. \end{cases},$$

*) Opšti Koši – Bolzanov kriterij za konvergenciju redova, ili, princip konvergencije za redove.

Specijalno, za $a = 1$, $q = -1$ geometrijski red ima oblik $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Za njegove parcijalne sume imamo

$$s_k = \underbrace{1 - 1 + 1 - \ldots \pm 1}_{k \quad jedinica} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } k \text{ neparan}, \\ 0, & \lim_{k\to\infty} q^k = 0, \\ & \text{ako je } k \text{ paran prirodan broj}, \end{cases}$$

pa dati red oscilira između 0 i 1.

Za $|q|<1$ je $\lim_{k\to\infty} q^k = 0$, pa tada geometrijski red $\sum aq^{n-1}$ ima konačnu sumu s datu sa $s=\lim_{k\to\infty} s_k = \frac{a}{1-q}$, tj. konvergentan je. Ako je $|q|\geq 1$, geometrijski red divergira i to u određenom smislu za $q\geq 1$, a oscilira za $q\leq 1$.

Pitanje konvergencije reda najjednostavnije je izučavati kod tzv. *pozitivnih redova*. Zbog toga mi prelazimo na razmatranje prvo takvih redova.

§ 2. 6. Pozitivni redovi

Posmatrajmo red

$$\sum a_n. \tag{2.6.1}$$

Za red (2.6.1) kažemo da je **pozitivan** ili da je **red s pozitivnim članovima** (ili **red s nenegativnim članovim**) ako je $a_n\geq 0$ za svaki $n\in\mathbf{N}$, ili (opštije) ako postoji prirodan broj $n_0\in\mathbf{N}$ takav da je $a_n\geq 0$ za svaki $n\geq n_0$.

Neka je S_n (n = 1, 2, …) n-ta parcijalna suma reda (2.6.1) i neka je red (2.6.1) pozitivan. Tada imamo da je:

$$S_{n+1} = \underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}_{S_n}+a_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Zbog $a_{n+1}\geq 0$ za svaki $n\geq n_0$ (za neki $n_0\in\mathbf{N}$) imamo odavde da je $S_{n+1}\geq S_n$ za svaki $n\geq n_0$. Vidimo dakle da je niz $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ parcijalnih suma pozitivnog reda (2.6.1) neopadajući za $n\geq n_0$. Iz teoreme o limesu monotonog niza, zaključujemo dakle, da je niz (S_n) konvergentan akko je ograničen odozgo. Ako pak niz (S_n) nije ograničen odozgo, onda vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Na osnovu ovoga možemo formulisati sljedeći važan i jednostavan stav:

Stav 2.6.1. Pozitivni red (2.6.1) je konvergentan akko je niz (S_n) njegovih parcijalnih suma ograničen odozgo.

Ako niz (S_n) nije ograničen odozgo, onda je pozitivni red (2.6.1) divergentan i vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Na osnovu stava 2.6.1. možemo zaključiti da svaki pozitivni red ima sumu (konačnu ili beskonačnu). Ta suma je konačna akko je niz parcijalnih suma toga reda ograničen. Većina kriterija za konvergenciju ili divergenciju pozitivnih redova zasnovana je indirektno na jednostavnom stavu 2.6.1.

Primjenom stava 2.6.1. dokazuje se da je red $\sum\frac{1}{n^\alpha}$, gdje je α fiksan realan broj, konvergentan ako je $\alpha>1$, a divergentan ako je $\alpha\leq 1$.
Ovaj red se naziva **hiperharmonijski red**. Ako je α = 1, dobijemo tzv. **harmonijski red**.

Stavovi o konvergenciji pozitivnih redova dobijeni poređenjem redova

Posmatrajmo sada dva pozitivna reda – red (2.6.1) (tj. red $\sum a_n$) i red

$$\sum b_n\,. \tag{2.6.2}$$

Prvi kriterij upoređivanja dat ćemo u obliku sljedeće teoreme:

Teorema 2.6.1. Pretpostavimo da postoji prirodni broj n_0, takav da za članove redova (2.6.1) i (2.6.2) važe nejednakosti *) $a_n \le b_n$ za sve $n \ge n_0$. Tada iz konvergencije reda (2.6.2) slijedi konvergencija reda (2.6.1), a iz divergencije reda (2.6.1) slijedi divergencija reda (2.6.2)
(U ovom slučaju kažemo da je red $\sum b_n$ **majoranta** reda $\sum a_n$, a da je red $\sum a_n$ **minoranta** reda $\sum b_n$.)

Dokaz: Na osnovu tvrdnje 2.5.1. bez ograničenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $n_0 = 1$.
Parcijalne sume reda (2.6.1), odnosno reda (2.6.2), označimo sa s_n', odnosno s_n''. Neka je $\lim_{n\to\infty} s_n'' = s'' \in \mathbf{R}$. Iz nejednakosti $a_n \le b_n$ $(n\in \mathbf{N})$ slijedi da je $s_n' \le s_n'' \le s''$. Dakle, niz (s_n') je neopadajući i ograničen odozgo, te postoji $\lim_{n\to\infty} s_n'$

Drugo tvrđenje teoreme je ekvivalentno prvom, kao njegova kontrapozicija.

Teorema 2.6.2. Neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 \le K \le \infty$, gdje su a_n i b_n članovi redova (2.6.1) i (2.6.2). Ako je $K < \infty$, onda iz konvergencije reda (2.6.2) slijedi konvergencija reda (2.6.1). Ako je $K > 0$, iz divergencije reda (2.6.2) slijedi divergencija reda (2.6.1).
(Ako je $a_n = O(b_n)$ i $b_n = O(a_n)$ $(n \to +\infty)$ ili $a_n \sim b_n$ $(n \to +\infty)$ ili ako postoji

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) := K$, $0 < K < +\infty$, onda se redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ ekvikonvergentni.) *)

Teorema 2.6.3. Neka za članove redova (2.6.1) i (2.6.2) za neki $n_0 \in \mathbf{N}$ važe nejednakosti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{za } n \ge n_0.$$

Tada iz konvergencije reda (2.6.2) slijedi konvergencija reda (2.6.1), a iz divergencije reda (2.6.1) slijedi divergencija reda (2.6.2).

Kriterijumi konvergencije pozitivnih redova

Osim gornjih stavova, u cilju ispitivanja konvergencije redova s pozitivnim članovima koriste se i neki stavovi koji daju dovoljne uslove za konvergenciju, odnosno divergenciju, tzv. kriterijumi (testovi) konvergencije. Navešćemo nekoliko takvih kriterijuma, koji se izvode iz poredbenih kriterijuma (osnovnih kriterijuma konvergencije) i koji su često efikasniji u primjenama.

Stav 2.6.2. (**Dalamberov****) **kriterijum**) /*Cauchy-Del. ratio test* /.

1° (*Jača forma kriterija*). Ako za red (2.6.1) postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ i $q \in \mathbf{R}$, tako da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \quad \text{za } n \ge n_0,$$

onda on konvergira. Ako pak postoji $n_0' \in \mathbf{N}$, tako da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ za $n \ge n_0'$, onda red (2.6.1) divergira.

2° (*Slabija / granična forma kriterija*). Neka za članove reda (2.6.1) postoji

---

*) Ako vrijedi $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right), (n \to \infty)$, onda za $p > 1$ pozitivni red $\sum a_n$ konvergira, a za $p \le 1$ isti red divergira. Napomenimo da (općenito) zapis $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to a)$ (gdje je $a \in \overline{\mathbf{R}}$) označava da za funkcije f i g vrijedi $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = k$, $(0 < |k| < +\infty)$.

**) J. le R. D'Alembert (1717 – 1783) - francuski matematičar i filozof.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} := l$. Tada za $l < 1$ red (2.6.1) konvergira, a za $l > 1$ on divergira. (Za $l = 1$ ovaj kriterijum je neodlučiv.)

3° (*Najjača forma kriterija*). Ako je $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, onda red (2.6.1) konvergira, a ako je $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, red (2.6.1) divergira.*)

Dokaz:

1° Iz nejednakosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ $n \ge n_0$, dobijemo

$$a_{n_0+1} \le a_{n_0} q, \quad a_{n_0+2} \le a_{n_0} q^2, \dots, \quad a_{n_0+k} \le a_{n_0} q^k, \dots \quad .$$

Kako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} q^k$ konvergira, to konvergira i red $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$. Dakle, konvergira i red (2.6.1).

Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ za svaki $n \ge n_0'$, onda opšti član a_n ne teži ka nuli, pa red (2.6.1) divergira na osnovu teoreme 2.5.1.

2° Neka je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ i $0 < \varepsilon < 1 - l$. Označimo $q := l + \varepsilon$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ za svaki $n \ge n_0$. Na osnovu dokazanog dijela 1° ovog stava dobijemo da red (2.6.1) konvergira.

Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, tada je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ počev od nekog $n_0' \in \mathbf{N}$, pa tvrđenje ponovo slijedi iz prvog dijela stava.

3° Neka je $\varepsilon > 0$, takav da je $\varepsilon < 1 - q$. Tada postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, takav da vrijedi

$$0 < a_n < \frac{a_{n_0}}{(q+\varepsilon)^{n_0}} \cdot (q+\varepsilon)^n. \text{ Otuda je } \quad 0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} < q + \varepsilon, \forall i = n_0, \dots, n-1.$$

Kako red $\sum (q+\varepsilon)^n$ konvergira, to konvergira i red $\sum a_n$.

Primjer 2.6.3.

1° Red $\sum \frac{2n^2+n+1}{3^n}$ konvergira, jer je $\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2+(n+1)+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n^2+n+1} = \frac{1}{3}$.

2° Harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ divergira, a red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira. Za oba reda je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pa se o njihovoj konvergenciji na osnovu Dalamberovog kriterijuma ne može reći ništa. (U takvim slučajevima ovaj kriterijum je neodlučiv / red može da konvergira ili da divergira /.)

Analogno se dokazuje da vrijedi i sljedeći kriterij:

Stav 2.6.3. (**Košijev / korijeni / kriterijum**) /*Root test*/, (1821).

1° Ako za red (2.6.1) postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ i $q \in \mathbf{R}$, tako da je $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ za $n \ge n_0$, onda

---

*) U slučajevima, kada Dalamberov i Košijev kriterijum ne daju odgovor, onda primjenjujemo preciznije kriterijume, koji se zasnivaju na upoređivanju reda kojeg ispitujemo sa drugim poznatim redovima (kao što su harmonijski i hiperharmonijski, pomoću kojih se može dobiti i, npr., *Rabeov* i *logaritamski kriterij*) čija je konvergencija sporija od geometrijske progresije. Inače, za red $\sum a_n$ kažemo da je **sporije konvergentan** nego red $\sum a_n'$ ako za sumu r_n ostatka reda $\sum a_n$ i za sumu r_n' ostatka reda $\sum a_n'$ vrijedi relacija $\lim_{n\to\infty} (r_n / r_n') = 0$.

on konvergira. Ako postoji $n_0' \in \mathbf{N}$ tako da je $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ za $n \ge n_0'$, onda red (2.6.1) divergira.

2° Neka postoji $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} := l.$ Tada za $l < 1$ red (2.6.1) konvergira, a za $l > 1$ on divergira.

3° Ako je $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} := l,$ onda $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergira, a $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

(najopštiji oblik Cauchyjevog kriterijuma korijena)*).

Primjer 2.6.4.

1° Red $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ konvergira jer je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{2}.$

2° Slično kao u primjeru 2.6.3. pokazuje se da u slučaju da je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1,$ ne možemo ništa reći o konvergenciji reda (2.6.1) na osnovu Košijevog kriterijuma. (U ovom slučaju Cauchyjev kriterijum korijena je neodlučiv.)

Dokazuje se da važe i sljedeća tri kriterija za pozitivne redove. *)

1) Ako, počevši od nekog n, važi nejednakost $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq r > 1,$ odnosno $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leq 1,$ onda red (2.6.1) konvergira, odnosno divergira. Ako je $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = r,$ onda red (2.6.1) konvergira, odnosno divergira, za $r>1$, odnosno $r<1$ (**Rabeov****) **kriterijum**), (1832).

2) Pretpostavimo da se odnos $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ članova reda (2.6.1) može napisati u obliku

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^\alpha}, \tag{2.6.3.}$$

(što je ekvivalnetno sa relacijom $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), (n\to\infty)$), gdje su λ, μ i $\alpha (>1)$ konstante, a (θ_n) je ograničen niz u **R**. Tada:

a) Za $\lambda > 1$ (odnosno $\lambda < 1$) red (2.6.1.) konvergira (odnosno divergira) (što slijedi neposredno iz Dalamberovog kriterijuma).
b) Za $\lambda = 1, \mu > 1$ (odnosno $\lambda = 1, \mu < 1$) red (2.6.1.) konvergira (odnosno divergira) (što slijedi neposredno iz Rabeovog kriterijuma).
c) Za $\lambda = 1, \mu = 1$, red (2.6.1.) divergira (ovo se dokazuje na osnovu tzv. *Kummerovog kriterijuma*, čiju formulaciju ovdje nećemo navoditi).

Ovo je tzv. **Gausov** ***) **kriterijum**, koji se obično koristi ako je $\lambda = 1$, jer za $\lambda \neq 1$ konvergencija reda se može ispitati Dalamberovim ili Košijevim korijenim kriterijumom. On ima široku oblast primjene, ali on ipak nije univerzalan, jer razvoj (2.6.3.) ne mora uvijek da postoji (nije uvijek moguć).

---

*) Raabeov i Gaussov kriterij, a i neki drugi kriteriji (kao što je Bertrandov kriterij), izvode se iz Kummerovog kriterijuma, koji predstavlja jedan opšti kriterij (pa kao takav ima teorijski značaj).

**) J. L. Raabe (1801 – 1859) - švajcarski matematičar.

***) C. F. Gauss (1777 – 1855), njemački matematičar, fizičar i astronom (koji je prvi dokazao osnovni teorem algebre u svojoj doktorskoj disertaciji i to kao mladić od 22 godine; po mnogima Gaus je najveći matematičar svih vremena).

3) (**Integralni kriterijum**).Neka je $f(x)$ nenegativna i nerastuća realna funkcija na $[a, +\infty)$ ($\subset$ **R**) za neki $a > 0$ i neka je $a_n = f(n)$. Tada red $\sum_{n(\geq a)} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral*)

$$\int_a^{\infty} f(x)dx,$$

tj. ovaj red i ovaj integral su ekvikonvergentni.

Zadatak 2. 6.1.**

a) Pokažite da red $\sum a_n$ konvergira te izračunajte sumu $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, gdje je

$$a_n = 3\left(\frac{4^n}{5^{n+1}}\right) \quad (\forall\, n \in \mathbf{N_0}).$$

b) Pokažite da red $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n + \frac{2^n+3^n}{4^n}\right)$, (za a_n iz a)), konvergira, a zatim nađite njegovu sumu .

Zadatak 2. 6. 2.** **a)** Dokažite da red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira.

b) Izračunajte sumu $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, gdje je k suma svih cifara vašeg matičnog broja.

c) Pokažite da vrijedi $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.

d) Pokažite usporednim kriterijem da red $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergira.

e) Ustanovite na osnovu d) da je red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergentan. (Dokazuje se da za pripadnu sumu ovog reda vrijedi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

---

*) Pojam *nesvojstvenog integrala* ćemo uvesti pri kraju ovog kursa.

) Zadatak zadavan za domaću zadaću (DZ) i (parcijalni i/ili integralni) pismeni ispit iz Inženjerske matematike 1 (IM1**) na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.