Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet
Predmet: Inženjerska matematika I
Dana: 7.6.2006.

## Izrada Domaće zadaće 4

**Zadatak 1:** Izračunajte :

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos(x))^{\sin(x)}}{x^3}$$

a) primjenom L'Hospitalovog pravila;
b) izravnom upotrebom *Taylorove/Maclaurinove formule*, odnosno upotrebom razvoja $e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} = 1+\sin(x)\ln(\cos(x))+o(x^3)$ $(x\to 0)$.

**Rješenje**: Stavljajući da je $f(x) = 1 - (\cos(x))^{\sin(x)}$ i $g(x) = x^3$ imamo $f(x)\to f(0)=0$, $g(x)\to g(0)=0$ kada $x\to 0$, dakle, u datom limesu dobijemo prividno neodređen oblik $\frac{0}{0}$. Za $x\in O(0)$ (gdje je O(0) okolina tačke 0 pri čemu cos($x$)>0) imamo:

$$f'(x) = -\cos(x)^{\sin(x)-1}\left(\cos^2(x)\ln(\cos(x)) - \sin^2(x)\right),$$

$$f''(x) = -\cos(x)^{\sin(x)-2}\left(\cos^4(x)\ln^2(\cos(x)) - \sin(x)\left(2\sin(x)+1\right)\cos^2(x)\ln(\cos(x)) - \sin(x)\left(2\cos^2(x) - \sin^3(x)+1\right)\right),$$

$$f'''(x) = -\cos(x)^{\sin(x)-3}\left(\cos^6(x)\ln^3(\cos(x)) - 3\sin(x)\left(\sin(x)+1\right)\cos^4(x)\ln^2(\cos(x))\right.$$
$$\left. - \cos^2(x)\left((9\sin(x)+1)\cos^2(x) - 3\sin^4(x)\right)\ln(\cos(x)) - 3\cos^4(x) + 8\sin^3(x)\cos^2(x) - \sin^2(x)(\sin(x)-2)(\sin^3(x)-1)\right)$$

$g'(x) = 3x^2$, $g''(x) = 6x$, $g'''(x) = 6$.

Važi: $f'(0)=0$ i $g'(0)=0$, $f''(0)=0$ i $g''(0)=0$. Kako je $(f'''(x))^2 + (g'''(x))^2 \neq 0$ kada $x\in O(0)$ saglasno L'Hospitalovom pravilu dobijemo:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)^{\sin(x)-3}\left(\cos^6(x)\ln^3(\cos(x)) - 3\sin(x)\left(\sin(x)+1\right)\cos^4(x)\ln^2(\cos(x))\right.}{6}$$
$$\frac{\left.-\cos^2(x)\left((9\sin(x)+1)\cos^2(x) - 3\sin^4(x)\right)\ln(\cos(x)) - 3\cos^4(x) + 8\sin^3(x)\cos^2(x) - \sin^2(x)(\sin(x)-2)(\sin^3(x)-1)\right)}{6}$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^4(x)}{6} = \frac{1}{2}.$$

Kako se očito $\sin(x)\ln(\cos(x))$ ponaša kao $x$ kada $x\to 0$, to važi razvoj $e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} = 1+\sin(x)\ln(\cos(x))+o(x^3)$ kada $x\to 0$ čija primjena na rješavanje datog limesa daje:

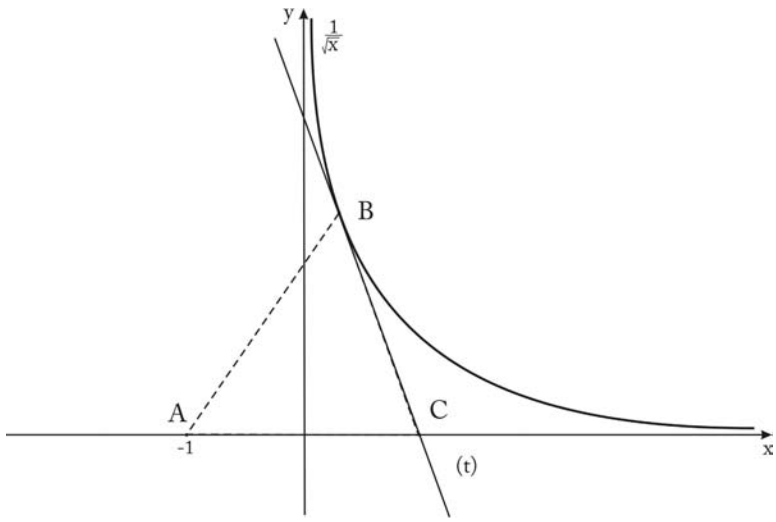
$$L = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)\ln(\cos(x)) - o(x^3)}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\ln(\cos(x))}{x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2(x))}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

**0.5 p**

**Zadatak 2:** Odredite minimalnu površinu trougla *ABC* čiji je vrh *A*(-1,0), vrh *B* dirałište tangente krive date sa $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, a vrh *C* sjecište te tangente s osi *Ox*.

**Rješenje**: Funkcija $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ definisana je za svako *x*>0. Radi lakoće rješavanja zadatka dat ćemo geometrijsku interpretaciju ovog problema u pravouglom Cartesiusovom koordinatnom sistemu.




*Sl.1. Geometrijska interpretacija problema* **0.1 p**

Tačka *B* ima koordinate $x_B, \frac{1}{\sqrt{x_B}}$. Tačku *C* pronalazimo kao presjek tangente na krivu $\frac{1}{\sqrt{x}}$ u tački *B* s osom *Ox*.

Koeficijent tangente (*t*) je *k* i određen je izrazom: $k = \frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x}})$ za $x = x_B$, $k = -\frac{1}{2\sqrt{x_B{}^3}}$, pa je jednačina tangente

(*t*): $t(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x_B{}^3}}x + \frac{3}{2\sqrt{x_B}}$. Stavljajući da je $t(x_C) = 0$ dobijemo: $x_C = 3x_B$.

Površina trougla *ABC* data je izrazom: $P(\Delta ABC) = \frac{(-x_A + x_C)}{2}\frac{1}{\sqrt{x_B}}$ odnosno $P(\Delta ABC) = \frac{(1+3x_B)}{2}\frac{1}{\sqrt{x_B}}$.

Ekstrem funkcije $x_B \mapsto P(x_B)$ naći ćemo primjenom Fermatove teoreme diferencijalnog računa:

$$\frac{dP}{dx_B} = \frac{3x_B - 1}{4\sqrt{x^3}} = 0 \Rightarrow x_B = \frac{1}{3}.$$ **0.2 p**

Da bismo se uvjerili da je u pitanju minimum potražiti ćemo drugi izvod funkcije *P* i odrediti njegovu vrijednost za dobivenu *x*-kordinatu tačke *B*.

$$\left.\frac{d^2P}{dx^2}\right|_{x=x_B} = \left.\frac{3(1-x)}{8\sqrt{x^5}}\right|_{x=x_B} = \frac{9\sqrt{3}}{4} > 0.$$

Zaključujemo da je riječ o minimumu.

Konačno dobijemo: $P_{\min}(\Delta ABC) = \sqrt{3}$. **0.2 p**

**Zadatak 3:** Ispitati tok i nacrtati grafik realne funkcije $f$ jedne realne promjenjive date sa:

$$f(x)=\frac{x}{n}+\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right),$$

gdje je $n$ najmanja cifra broja Vašeg indeksa koja je veća od 1.

**Rješenje**: Posmatrat ćemo funkciju funkcija $(f_n : n\in\{2,3,\dots,9\})$, pri čemu je $f_n(x)=\frac{x}{n}+\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ ali kratkoće radi umjesto $f_n$ pisat ćemo $f$. Prirodni domen date funkcije je $Dom(f)=R$, jer očito vrijedi da je $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|<1$ za svako $x\in R$. Uslov za parametar $n$ je dat sa $n\in\{2,3,\dots,9\}$.

Očigledno je da važi: $f(-x)=-f(x)$, tj. funkcija $x\mapsto f(x)$ je neparna, odnosno njen graf je simetričan u odnosu na koordinatni početak, što znači da je dovoljno ispitivati svojstva funkcije na skupu $R_0^+$.

Korištenjem elementarnih svojstava izvoda pokazuje se da vrijedi:

$$f'(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{n}-\frac{2(x^2-1)\left|\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right|}{x^2+1},x\neq\pm1$$

$$f''(x)=-2\frac{2x(x^2+1)\left|x^2-1\right|-(x^2-1)\left(2x(x^2+1)\operatorname{sgn}(x^2-1)+2x\left|x^2-1\right|\right)}{(x^2+1)^2\left|x^2-1\right|^2}$$

$$=\left(\frac{2(x^3+x^2-3x+1)\frac{1}{|x-1|}}{(x^2+1)^2}+\frac{2\operatorname{sgn}(x-1)}{x^2+1}\right)\frac{1}{|x+1|},x\neq\pm1.$$

Dakle funkcija $x\mapsto f(x)$ je dva puta neprekidnodiferencijabilna za svaki $x\in R\setminus\{-1,1\}$. **0.1 p**

Sada je neophodno ispitati ponašanje funkcije na granici domena:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{n}+\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)=+\infty$$

Pri čemu je iskorišteno $\left|\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right|\leq1$ za svaki $x\in R$.

Prethodno dobijeni rezultat ukazuje na mogućnost postojanja kose asimptote. Ukoliko postoji kosa asimptota njen koeficijent nagiba određujemo na sljedeći način:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{n}+\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)}{x}=\frac{1}{n}.$$

Sada tražimo vertikalni pomjeraj moguće kose asimptote.

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{n}+\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)-\frac{x}{n}\right)=\lim_{x\to+\infty}\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=0.$$

Dakle kosa asimptota ima jednačinu: $y(x) = \frac{1}{n}x$.

Kao posljedica neparnosti funkcije $f$ dobijemo da je $y(x) = \frac{1}{n}x$ kosa asimptota funkcije $f$ i kada $x \to -\infty$.

Funkcija f uzima samo pozitivne vrijednosti za $\forall x \in R^+$. Prava $y = -\frac{x}{n}$ i kriva data formulom $y = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ nemaju zajedničkih tačaka s obzirom da ja $-\frac{x}{n} < 0$, dok je $\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) > 0$ za $\forall x \in R^+$. Stoga zaključujemo da funkcija $f$ ima samo jednu nulu i to $x$=0. Kao direktna posljedica naprijed navedenog je $f(x)>0$ za $\forall x \in R^+$, odnosno $f(x)<0$ za $\forall x \in R^-$. **0.1 p**

Svođenjem na zajednički nazivnik dobijemo:

$$f'(x) = \frac{\left((x^2+1)|(x-1)(x+1)| - 2nx^2 + 2n\right)\frac{1}{|(x-1)(x+1)|}}{n(x^2+1)}, \quad n \in \{2,3,\ldots,9\},$$

odakle se lako nalazi da je $f$ ' (x)=0 za $x = \pm\sqrt{2n-1}$ što su stacionarne tačke funkcije $f$.

S obzirom da je $f''(\sqrt{2n-1}) > 0$ odnosno da je $f''(-\sqrt{2n-1}) < 0$ zaključujemo da su to lokalni minimum odnosno lokalni maksimum respektivno.

Sada trebamo odrediti prvi izvod funkcije $f$ u tački $x$=1 (odnosno $x$=-1).

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{\left((x^2+1)|(x-1)(x+1)| - 2nx^2 + 2n\right)\frac{1}{|(x-1)(x+1)|}}{n(x^2+1)} = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{2}{n(x^2+1)} - \frac{2n(x^2-1)}{n(x^2+1)|x^2-1|}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{n} - \frac{x^2-1}{|x^2-1|}\right) = \frac{1}{n} - 1 = f'_+(1),$$

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\left((x^2+1)|(x-1)(x+1)| - 2nx^2 + 2n\right)\frac{1}{|(x-1)(x+1)|}}{n(x^2+1)} = \lim_{x\to 1-}\left(\frac{2}{n(x^2+1)} - \frac{2n(x^2-1)}{n(x^2+1)|x^2-1|}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1-}\left(\frac{1}{n} - \frac{x^2-1}{|x^2-1|}\right) = \frac{1}{n} + 1 = f'_-(1)$$

Iz svojstva neparnosti funkcije $f$ zaključujemo da vrijedi:

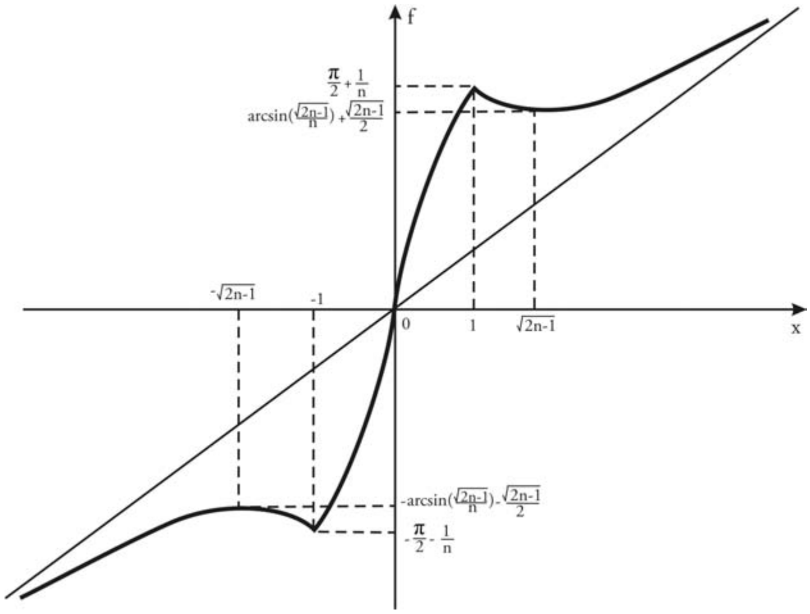
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \frac{1}{n} + 1 = f'_+(-1), \quad \lim_{x\to -1-} f(x) = \frac{1}{n} - 1 = f'_-(-1).$$ **0.1 p**

Zaključujemo da funkcija nema izvod (ni konačan ni beskonačan) u tačkama -1 i 1.

Na osnovu naprijed navedenog lako se pokazuje da je funkcija $f$ monotono rastuća za $\forall x \in (0,1) \cup (\sqrt{2n-1}, +\infty)$, kao i da je monotono opadajuća za $\forall x \in (1, \sqrt{2n-1})$. Tačka (1,$f$(1)) je prelomna tačka grafika funkcije $f$ jer postoje konačni lijevi i desni izvodi u x=1 i međusobno su različiti. U tački $x$=1 funkcija $f$ ima lokalni maksimum jer je $f'_-(1) > 0$ i $f'_+(1) < 0$, $f(1) = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{2}$. Funkcija $f$ je konkavna na intervalu (0,1), a konveksna na intervalu (1,+∞).

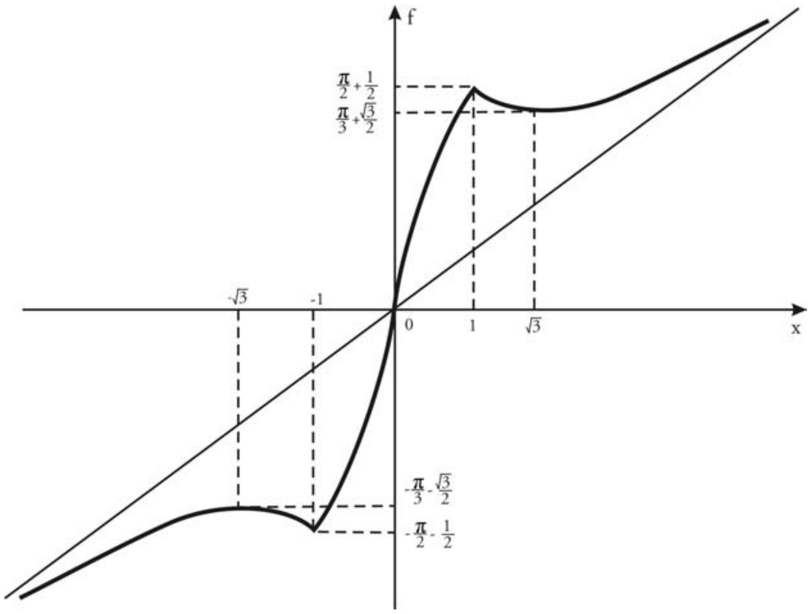
Za $x$<0 potrebno je iskoristiti svojstvo neparnosti funkcije $f$, na osnovu čega zaključujemo da je funkcija $f$ monotono rastuća za $\forall x \in (-\infty, -\sqrt{2n-1}) \cup (-1,0)$, kao i da je monotono opadajuća za $\forall x \in (-\sqrt{2n-1}, -1)$. Tačka (-1,-*f*(1)) je, takođe, prelomna tačka grafika funkcije *f*. U tački *x*=-1 funkcija $f$ ima lokalni minimum jer je $f'_-(-1) < 0$ i $f'_+(-1) > 0$, $f(-1) = -\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Rang funkcije *f* dat je sa: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$. **0.1 p**

Na osnovu svega naprijed navedenog možemo nacrtati grfik funkcije *f* za konkretno $n$.




*Sl.2. Grafik funkcije f za neko konkretno n*

Tako npr. za n=2 imamo: **0.1 p**




*Sl.3. Grafik funkcije f za n=2*

**Zadatak 4:** Za realnu funkciju $f$ jedne realne promjenjive zadanu sa:

a) $f(x) := \dfrac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) := \dfrac{1}{(x+2)\cdot\sqrt{x+1}}$; c) $f(x) := \dfrac{x^2+1}{x^4+1}$;

d) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x\cdot(1+x)}}$; e) $f(x) := \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

ispitati egzistenciju primitivne funkcije, a zatim izračunati neodređeni integral $I(x) = \int f(x)dx$.

**Rješenje:**

a) $\int \dfrac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}dx$

$Dom(f) = R^+$.

Budući da je funkcija $f$ elementarna to je neprekidna na cijelom $Dom(f)$ pa ima tačnu primitivnu funkciju na svakom podrazmaku od $R^+$ i tu vrijedi:

$$I(x) = \int \frac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2+2\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx = \int \sqrt{x^3}+\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x}dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{12}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+C,$$

gdje je $C$ proizvoljna realna konstanta. **0.125 p**

b) $\int \dfrac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

$Dom(f) = \{x | x > -1\}$

Funkcija $f$ je elementarna (i to algebarska) i neprekidna je na $Dom(f)$ i kao takva ima tačnu primitivnu funkciju na svakom razmaku $E$ koji je podskup skupa $Dom(f)$, tj. $E \subseteq \{x | x > -1\}$.

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} \end{array} \right| = \int \frac{2}{t^2+1}dt = 2\arctan(t) = 2arctg(\sqrt{x+1}) + C.$$

Funkcija $I$ je, takođe, elementarna (i to transedentna) i neprekidna na skupu $Dom(I)$ datom sa:

$Dom(I) = \{x | x > -1\}$.

$C$ je proizvoljna realna konstanta. **0.125 p**

c) $$I(x) = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \begin{cases} C_{-1}, x < 0 \\ C_1, x \geq 0 \end{cases},$$

a iz uslova neprekidnosti primitivne funkcije slijedi $I(0) = I(0+)$, odakle je $C_{-1} = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$, $C_1 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$, gdje je $C$ proizvoljna realna konstanta, te stavljanjem $I(0) = C$ dobijemo da je uslov $I(0-) = I(0+) = I(0)$ ispunjen, a da se $I(x)$ može napisati u obliku $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} arctg \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn} x + C$ za $C \neq 0$, $I(0) = \lim\limits_{x\to 0} I(x)$.

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$

Funkcija $f$ je elementarna (i to algebarska) i neprekidna je na skupu $Dom(f)$ datom sa:

$Dom(f) = \{x | x > 0 \vee x < -1\}$

i kao takva ima tačnu primitivnu funkciju na svakom razmaku $E$ koji je podskup skupa $Dom(f)$, tj. $E \subseteq Dom(f)$.

Tako za x>0 imamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C .$$

Za x<-1 imamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x-1}\sqrt{-x}} = -2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}} = -2\ln(\sqrt{-x-1} + \sqrt{-x}) + C .$$

Odnosno za $\forall x \in Dom(f)$ dobijemo:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2\operatorname{sgn}(x)\ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+1|}) + C ,$$

gdje je $C$ proizvoljna realna konstanta. **0.125 p**

e) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$

Funkcija $f$ je očito elementarna i kao takva neprekidna je na svom prirodnom domenu $Dom(f)$ datim sa:

$Dom(f) = R \setminus \{0,2,3\}$.

Funkcija $f$ ima tačnu primitivnu funkcijupa i neodređeni integral $I$ na svakom razmaku $E$ koji je podskup skupa $Dom(f)$, tj. $E \subseteq Dom(f)$.

$$I(x) = \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int \frac{x^3+1}{x(x-2)(x-3)}dx = \int\left(1+\frac{1}{6x}+\frac{28}{3(x-3)}-\frac{9}{2(x-2)}\right)dx$$
$$= x + \frac{\ln|x|}{6} - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C,$$

gdje je $C$ proizvoljna realna konstanta. **0.125 p**

Demonstrator Šešlija Marko
i
Doc. dr Huse Fatkić