UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

Sarajevo, 25. 10. 2010.

I S P I T N A   P I T A N J A
ZA USMENI (ZAVRŠNI) ISPIT I ZA PISMENI DIO DRUGOG PARCIJALNOG ISPITA
IZ TEORIJSKIH OSNOVA PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1
(u akademskoj 2010/2011. godini)

U skladu sa *Nastavnim programom i pravilima provjere znanja* iz kursa **INŽENJERSKA MATEMATIKA 1** (IM1), svaki student prve godine studija koji je tokom trajanja prvog semestra ostvario 40 ili više bodova pristupa usmenom završnom ispitu (UZI / ZUI); ovaj ispit sastoji se iz diskusije zadataka s parcijalnih /integralnih ispita, domaćih zadaća (DZ) i odgovora na jednostavna i najvažnija pitanja koja se odnose na teme kursa IM1 (osnovne definicije i iskazi odnosno formulacije i izvođenje/dokazivanje najvažnijih svojstava i/ili teorema), tj. odgovora na sljedeća **PITANJA**:

I. TEORIJSKE OSNOVE ZA PRVI PARCIJALNI ISPIT IZ IM1

1. Pojmovi (logičkog) iskaza i predikata. Osnovne logičke operacije (osnovni simboli matematičke logike) i njihova osnovna svojstva, kvantifikatori i iskazne (*Booleove*) funkcije. Interpretacije logike iskaza (kao rečenice nekog govornog jezika, relejno-prekidačka interpretacija, skupovna interpretacija i dr.).
2. Pojmovi skupa, binarne relacije i preslikavanja /funkcije (Objasniti pojmove: skup, elementi skupa, relacija; definirati pojmove: dobro definiran/određen skup, relacija inkluzije, podskup skupa, jednakost skupova, partitivni skup (*bulean*), osnovne operacije sa skupovima, uređen par, *Dekartov proizvod* skupova, binarna relacija, relacija ekvivalencije, relacija poretka/uređaja, uređen skup, minoranta i majoranta, najmanji i največi element skupa, minimalni /početni i maksimalni element skupa, ograničen skup, donja međa/infimum i gornja međa/supremum skupa, preslikavanje/funkcija, binarna operacija, restrikcija/suženje i ekstenzija/proširenje funkcije, surjekcija, injekcija i bijekcija.).
3. Ekvipotentni/ekvivalentni skupovi, kardinalni broj skupa. Pojmovi konačnog, beskonačnog, prebrojivog, diskretnog i neprebrojivog skupa. (Definirati sve te pojmove i navesti odgovarajuće primjere.)
4. Složena funkcija i inverzna funkcija (Fomulisati definicije i osnovna svojstva tih pojmova.).
5. Skup (i polje) realnih brojeva $\mathbf{R}$ i algebarske operacije s realnim brojevima (Definirati polje realnih brojeva, popisujući glavna svojstva realnih brojeva kao aksiome jedne matematičke strukture, a zatim objasniti kako se iz tih aksioma mogu izvesti sva uobičajena pravila za računanje s realnim brojevima poznata iz elementarne matematike. Pri tome navesti nekoliko tih pravila i jedno od njih izvesti; npr.na osnovu aksioma realnih brojeva dokazati da je $-(-x)=x$ za svaki x iz $\mathbf{R}$ ili ustanoviti da je $0<1$.).

6. Apsolutna vrijednost realnog broja i trougaona nejednakost (Definirati pojam apsolutne vrijednosti realnog broja, a zatim navesti njena osnovna svojstva i dokazati nejednakost trougla.). Pokazati kako se u okviru aksiomatski uvedenog skupa **R** realnih brojeva mogu uvesti njegovi itaknuti podskupovi **N** prirodnih brojeva, **Z** cijelih brojeva i **Q** racionalnih brojeva. Pri tome objasniti kako se lako dokaže da za skup **N** vrijede *Peanove aksiome* (pomoću kojih je *Peano* dao potpunu karakterizaciju skupa prirodnih brojeva). Definirati prošireni prostor/skup realnih brojeva $\overline{\mathbf{R}}$.
7. Posljedice aksiome neprekidnosti (Objasniti značaj te aksiome i formulisati teoremu o supremumu, koja je ne samo posljedica, već i jedan od ekvivalenata te aksiome, a zatim formulisati njene posljedice: *Arhimedovu aksiomu* i *Cantorovu aksiomu*.). Metod indukcije, stepeni i *Newtonova* binomna formula (Formulisati princip (potpune) matematičke indukcije i objasniti kako on slijedi iz (Peanove) aksiome indukcije, a zatim ilustrovati princip definicije indukcijom na primjeru definiranja *funkcije faktorijel,* te definirati pojmove *n*-tog *stepena* realnog broja $(n \in \mathbf{N})$, *binomnog* i *trinomnog koeficijenta*. Navesti osnovna svojstva binomnih koeficijenata i izvesti *Pascalovu jednakost* i *Newtonovu binomnu formulu*.).
8. Polje kompleksnih brojeva **C**. (Definirati pojam skupa **C** kompleksnih brojeva i kompleksne brojeve /u obliku uređenih parova/, a zatim provjeriti da je $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ polje i da je $(R', +, \cdot)$, gdje je $R' = \{(x,0) : x \in \mathbf{R}\}$, njegovo potpolje koje je izomorfno polju realnih brojeva **R,** te definirati pojmove: imaginarni brojevi, čisto imaginarni brojevi, imaginarna jedinica, algebarski /standardni/ oblik kompleksnog broja, realni i imaginarni dio kompleksnog broja). Konjugirano /spregnuti/ kompleksni brojevi i njihova svojstva (Formulisati definiciju takvih brojeva i njihova svojstva.).
9. Modul kompleksnog broja i trougaona nejednakost. *Kompleksna* ili *Gaussova ravan*. Argument, trigonometrijski i eksponencijalni oblik kompleksnog broja. *Eulerova formula*. Navesti osnovna svojstva modula i argumenta kompleksnog broja, te objasniti kako se određuje glavna vrijednost argumenta kompleksnog broja (uz upotrebu i odgovarajuće formule). *Cauchy-Schwarzova* nejednakost za realne i kompleksne brojeve.
10. *Moivreova* formula i formule za «brzo-brzo» množenje, dijeljenje i stepenovanje kompleksnih brojeva (Izvesti te formule.). Korjenovanje kompleksnih brojeva (Rješavajući binomnu jednačinu $z^n = a$, $(n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{C})$, izvesti obrazac za korjenovanje kompleksnih brojeva).
11. Okolina i ε - okolina tačke u **R** i u $\overline{\mathbf{R}}$, tačke gomilanja skupa A $(\subseteq \mathbf{R})$, ograničeni i neograničeni intervali.Pojmovi konačnog i beskonačnog (brojnog/numeričkog,funkcionalnog) niza, stacionarnog, *Fibonaccijevog*, harmonijskog, aritmetičkog i geometrijskog niza.
12. Pojam i osnovna svojstva granične vrijednosti niza (Definirati pojmove limesa, konačnog limesa, beskonačnog limesa niza, nula- niza, konvergentnog niza i divergentnog niza /u užem i širem smislu/, te navesti osnovna svojstva nula-nizova i limesa niza /osnovna svojstva konvergentnih i određeno divergentnih brojnih nizova /, a zatim dokazati teoremu o «uklještenju» i bar jedno od ostalih osnovnih svojstava limesa nizova.). Podnizovi i tačke gomilanja niza (Definirati pojmove podniza, tačke gomilanja niza, donjeg i gornjeg limesa niza, te navesti jednu karakterizaciju tačke gomilanja i ostala njena osnovna svojstva).
13. *Bolzano-Weierstrassova* teorema za skupove i nizove (Formulisati te teoreme i objasniti njihov značaj.). *Cauchyjevi nizovi* i *Cauchyjev princip konvergencije za nizove* (Definirati pojam Cauchyjevog niza , formulisati Cauchyjev opšti kriterij konvergencije za nizove i objasniti njegov značaj.). Monotoni nizovi i (*Eulerov*) broj e (Definirati pojam monotonog niza i formulisati teoremu o konvergenciji monotonih nizova, te formulisati i dokazati *Bernoullijevu nejednakost*, dokazati da niz $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ konvergira i definirati broj e, a zatim objasniti osnovna svojstva i značaj toga broja.). *Eulerova* konstanta.

14. Pojmovi (beskonačnog) reda (u **R** i u opštem normiranom vektorskom prostoru), parcijalne sume reda, konvergencije reda (sumabilnosti niza), divergencije reda i ostatka reda. Veza između konvergencije reda i (konvergencije) njegovog ostatka.

15. Potreban uslov za konvergenciju reda. *Cauchyjev opšti kriterij za konvergenciju redova*. Zbir i razlika redova. Geometrijski, harmonijski i opšti harmonijski (hiperharmonijski) red. Diskutovati konvergenciju geometrijskog reda.

16. Redovi s nenegativnim članovima (pozitivni redovi). Osnovni kriteriji za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova (Formulisati poredbene kriterije, *D' Alembertov*, *Cauchyjev korijeni*, *Raabeov*, *Gaussov* i integralni kriterij, te jedan od tih kriterija i dokazati.).

17. Redovi sa članovima s promjenljivim znakom (Pojam takvog reda i *Abelove* sumacione formule i formulacija osnovnih kriterija za ispitivanje konvergencije takvih redova.). Alternativni redovi, *Leibnizov* kriterij i apsolutna konvergencija redova (Definirati pojmove alternativnog reda, apsolutne i uslovne konvergencije reda, te formulisati i dokazati Leibnizov kriterij konvergencije i teoremu o apsolutno konvergentnim redovima.).

18. Beskonačni proizvodi (Definirati pojmove beskonačnog proizvoda, njegove konvergencije i divergencije i objasniti vezu između beskonačnih proizvoda i redova, te navesti i dokazati potreban uslov konvergencije beskonačnih proizvoda i objasniti kako se vrši ispitivanje njihove konvergrencije /obične, apsolutne i uslovne/. Redovi s kompleksnim članovima (Definirati pojmove takvog reda, njegove konvergencije i apsolutne konvergencije, te objasniti kako se vrši ispitivanje konvergencije takvih redova.).

19. Opšti pojmovi o realnoj funkciji jedne realne promjenljive (definicija pojma realne /*jednoznačne*/ funkcije i *višeznačne funkcije* jedne realne promjenljive, (prirodni) domen, kodomen, grafik, zadavanje i opšta svojstva, ograničene/neograničene funkcije, parne/neparne funkcije, periodične funkcije, monotone funkcije, egzistencija inverzne funkcije i konstrukcija njenog grafika).

20. Osnovne elementarne funkcije (Navesti klase osnovnih elementarnih funkcija, te objasniti kako se opisno /intuitivno/ definiraju te funkcije i crtaju njihovi grafici i koja su im osnovna svojstva, a zatim precizno /strogo/ definirati pojam eksponencijalne funkcije.).

21. Pojam i osnovna svojstva granične vrijednosti (limesa) realne funkcije jedne realne promjenljive. (Definirati pojam /konačnog i beskonačnog/ limesa funkcije, a zatim formulisati teoreme o osnovnim svojsvima limesa i dokazati teoremu o jedinsvenosti limesa i teoremu o limesu složene funkcije, te na adekvatnim primjerima objasniti značaj teoreme o limesu složene funkcije.)

22. Egzistencija limesa za monotone funkcije (formulisati odgovarajuću teoremu). Poznati limesi (navesti ih, uz izvođenje relacija za značajne granične vrijednosti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1).$$

Tehnike računanja limesa.

23. Asimptotske oznake. Primjena asimptotskih razvoja za izračunavanje limesa (Definirati asimptotske oznake/simbole: o, O, $\sim$ i navesti njihova osnovna svojstva, te objasniti primjenu asimptotskih razvoja za izračunavanje limesa.)

24. Asimptote funkcije/krive: horizontalna, vertikalna i kosa asimptota.

II. TEORIJSKE OSNOVE ZA DRUGI PARCIJALNI ISPIT IZ IM1

25. Pojmovi neprekidnosti, tačaka prekida i singulariteta realne funkcije jedne realne promjenljive. Klasifikacija tačaka prekida i singulariteta funkcije.

26. Lokalna i globalna svojstva neprekidnih funkcija (Formulisati ta svojstva i izvesti jedno lokalno i jedno globalno svojstvo neprekidnih funkcija.). Neprekidnost inverzne funkcije.

27. Elementarne funkcije i njihova neprekidnost (Definirati pojam elementarne funkcije i navesti primjere elementarne funkcije i funkcije koja nije elementarna, te objasniti zašto je svaka elementarna funkcija neprekidna gdje je i definirana.).

28. Pojam kompleksne funkcije. Osnovne elementarne kompleksne funkcije.

29. Pojmovi izvoda (derivacije) i njegova geometrijska i fizikalna interpretacija. Jednostrani i beskonačni izvodi.

30. Pojmovi diferencijabilnosti i diferencijala realne funkcije jedne realne promjenljive (Formulacija i dokaz teoreme o konačnom priraštaju funkcije - izvođenje *formule o razlaganju*. Formulacije definicija pojmova diferencijabilnosti i diferencijala funkcije. Formulacija i dokaz teoreme o potrebnom i dovoljnom uslovu diferencijabilnosti funkcije.). Svojstva diferencijabilnih funkcija.

31. Pravila (formalizam) deriviranja (diferenciranja), tehnika diferenciranja (Formulacija osnovnih pravila diferenciranja. Formulacije i izvođenje pravila/formula za izvod inverzne funkcije i izvod složene funkcije. Tablični izvodi i objašnjenje tehnike diferenciranja.).

32. Geometrijska interpretacija diferencijala. Diferencijal složene funkcije (Formulacije teorema o diferencijalu složene funkcije, o približnom određivanju vrijednosti funkcije i o najboljoj lokalnoj aproksimaciji funkcije. Objašnjenjenje invarijantnosti forme diferencijala prvog reda.). Izvodi i diferencijali višeg reda (Formulacije definicija izvoda i diferencijala drugog ili višeg reda, te pojmova diferencijabilnosti n puta i beskonačno /puta/ u tački i na skupu. Obrazložiti činjenicu da svojstvo invarijantnosti forme diferencijala drugog ili višeg reda u opštem slučaju nije očuvano.).

33. Osnovne teoreme diferencijalnog računa (Formulacije i geometrijske interpretacije tih teorema, te dokaz dviju od njih i navođenje osnovnih posljedica *Lagrangeove teoreme*).

34. *L' Hospitalovo* pravilo, *Taylorova* i *Maclaurinova* formula (Formulacije teorema o *L' Hospitalovom* pravilu i *Taylorovovoj* formuli sa ostacima u *Lagrangeovom, Chauchyjevom* i *Peanovom* obliku. Izvođenje Taylorove formule sa jednim od navedenih ostataka. Objašnjenje upotrebe *L' Hospitalovog* pravila, *Taylorove* i *Maclaurinove* formule. Navesti Maclaurinove formule za neke važne elementarne funkcije.).

35. Pojmovi lokalnog i globalnog (totalnog ili apsolutnog) ekstrema, konveksnosti/konkavnosti i prevojnih tačaka realnih funkcija jedne realne promjenljive (Formulacije definicija tih pojmova i objašnjenje postupaka njihovog ispitivanja/određivanja sa i bez primjene izvoda prvog i višeg reda.).

36. Grafičko prikazivanje funkcija – postupak ispitivanja toka i crtanje grafika funkcija (sa ili bez primjene izvoda prvog i višeg reda). Ugaona (prelomna) tačka, povratna tačka (šiljak) i dodirni elementi krive.

37. Pojmovi primitivne/prvobitne funkcije (tačne primitivne funkcije i primitivne funkcije) i neodređenog integrala (Formulacije definicija ovih pojmova i teorema o tačnoj primitivnoj funkciji i primitivnoj funkciji.).

38. Osnovna svojstva neodređenog integrala (formulacije i izvođenje tih svojstava.) i osnovne metode izračunavanja neodređenog integrala.

39. Neposredno integriranje (osnovna pravila integriranja, tablica integrala, integriranje prethodnim svođenjem na oblik diferencijala).

40. *Metoda zamjene promjenljive u neodređenom integralu* (Opisati tu metodu, uz navođenje dovoljnih uslova pod kojima se može primijeniti ta metoda. Navesti i po jedan odgovarajući primjer kada jesu i kada nisu ti uslovi ispunjeni.). *Metoda parcijalne integracije u neodređenom integralu* (Izvesti formulu parcijalne integracije, uz navođenje dovoljnih uslova pod kojima vrijedi ta formula. Navesti i po jedan primjer kada jesu i kada nisu ti uslovi ispunjeni.).

41. Integracija metodom rekurzivnih formula (Objasniti tu metodu i ilustrovati njenu primjenu na primjeru određivanja rekurentne formule i njene upotrebe za nalaženje integrala $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, $a \neq 0,\ n \in \mathbf{N},\ n > 1$). Integracija racionalnih funkcija (metodom neodređenih koeficijenata i metodom *Ostrogradskog*) i integracija nekih iracionalnih funkcija: algebarskih iracionalnih funkcija (uključujući i integrale koji se mogu naći pomoću *Eulerovih smjena* ili *metodom Ostrogradskog*, te *Abelov integral,* eliptički integrali i integral binomnog diferencijala), nekih transcendentnih funkcija, trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija.

42. Pojmovi određenog (*Riemannovog*) integrala i integrabilnosti realnih funkcija jedne realne promjenljive (Definirati pojmove: podjela segmenta, parametar podjele, δ- podjela, *Darbouxove* sume, integralne Riemannove sume, podjela sa istaknutim tačkama, donji i gornji Darbouxov integral, a zatim definirati pojmove integrabilnosti i određenog integrala u Riemannovom smislu na dva /ekvivalentna!/ načina: 1) pomoću donjeg i gornjeg Darbouxovog integrala, 2) pomoću granične vrijednosti integralnih suma. Pri tome formulisati kriterij integrabilnosti funkcije.).

43. Klase integrabilnih funkcija i osnovna svojstva integrabilnih funkcija i određenih integrala (Navesti primjer funkcije koja nije integrabilna u Riemannovom smislu, te formulisati teoreme o klasama integrabilnih funkcija i jednu od tih teorema i dokazati. Zatim definirati pojmove *skupa mjere nula po Jordanu, skupa mjere nula po Lebesgueu* i određenog integrala na proizvoljnom ograničenom skupu u **R**, pa formulisati Lebesgueov kriterij integrabilnosti u Riemannovom smislu i osnovna svojstva integrabilnih funkcija i određenih integrala, uključujući i svojstvo aditivnosti i *nejednakost Bunjakovskog*.).

44. Teorema o srednjoj vrijednosti određenog integrala (formulacija i dokaz). Veza između određenog integrala i izvoda (odnosno neodređenog integrala): Definirati funkciju gornje granice određenog integrala, a zatim formulisati teoremu o neprekidnosti integrala sa promjenljivom gornjom granicom i *prvu* i *drugu fundamentalnu teoremu integralnog računa,* te dokazati drugu fundamentalnu teoremu integralnog računa, tj. izvesti *Newton- Leibnizovu formulu* koja povezuje neodređeni i određeni integral, uz objašnjenje njenog velikog značaja.).

45. Objasniti pojam integrala kao složene funkcije donje i gornje granice, a zatim formulisati i dokazati teoreme o metodi smjene (supstitucije) promjenljive i metodi parcijalne integracije za izračunavanje određenog integrala.

46. Pojmovi integrabilnosti funkcije u nesvojstvenom smislu i nesvojstvenih Riemannovih integrala prve i druge vrste i njihove glavne vrijednosti (definicije i primjeri). Osnovna svojstva nesvojstvenih integrala (formulacije svojstava i dokaz jednog od njih).

47. Osnovni kriterijumi za konvergenciju nesvojstvenih integrala. Pojam apsolutne konvergencije nesvojstvenih integrala.

48. Definicije pojmova površine lika u ravni, dužine luka krive, površine obrtne površi i zapremine obrtnog tijela i formule za izračunavanje vrijednosti tih veličina (izvesti jednu od formula za izračunavanje dužine luka krive, površine obrtne površi i zapremine obrtnih tijela, a ostale samo navesti i , eventualno, ukazati na glavne ideje u njihovom izvođenju, te formulisati i dokazati stav o potrebnom i dovoljnom uslovu izmjerivosti/kvadrabilnosti lika u ravni).

49. Pojmovi obične, apsolutne i uniformne konvergencije niza i reda funkcija. *Cauchyjev* i *Weierstrassov* kriterij uniformne konvergencije (formulacija tih kriterija i dokaz

Weierstrassovog kriterija). Svojstva uniformno konvergentnih funkcionalnih nizova i redova (formulacija).

50. Pojam stepenog (potencijalnog) reda. Formulisati i dokazati *Abelov* stav (kriterij konvergencije), pa navesti važnu posljedicu tog stava, a zatim definirati pojmove radijusa i intervala konvergencije za stepene redove i objasniti kako se ispituje konvergencja tih redova.).

51. Osnovna svojstva stepenog reda (Formulisati teoreme o osnovnim svojstvima stepenog reda, uključujući i *Abelovu* teoremu).

52. *Taylorov* red i *Maclaurinov* red (Definirati te pojmove, pa formulisati i dokazati stav o potrebnom i dovoljnom uslovu konvergencije Taylorovog reda, a zatim formulisati teoremu o dovoljnim uslovima da funkciju možemo prikazati njenim Taylorovim redom u okolini neke tačke. Navesti poznate Maclaurinove razvoje eksponencijalne funkcije, logaritamske funkcije i trigonometrijskih funkcija, te binomni razvoj.).

53. Stepeni redovi s kompleksnim članovima (Definirati pojam takvog reda, a zatim navesti koja se svojstva realnih stepenih redova proširuju i na kompleksne stepene redove, te objasniti kako se pomoću kompleksnih stepenih redova mogu definirati osnovne elementarne funkcije.) .

Napomene:

1. U skladu s rečenim na predavanjima, za odgovor na svako pitanje sa gore navedenog spiska i za diskusije i rješenja zadataka s parcijalnih / integralnih ispita i DZ dovoljno je koristiti:

[1] **Huse Fatkić**, *Inženjerska matematika* 1 , Sarajevo, 2006.; (http://courses.etf.unsa.ba/); *Predavanja iz* IM1 *u akademskoj* 2010/2011. *godini* (http://c2.etf.unsa.ba/).

[2] **Huse Fatkić, Vinko Dragičević,** *Diferencijalni račun funkcija dviju i više promjenljivih*, I.P. Svjetlost, Sarajevo, 2006. (Poglavlje Dodatak II - Ispitni zadaci iz Matematike I / IM1).

[3] **Pavle M. Miličić, Momčilo P. Ušćumlić,**

a) *Zbirka zadataka iz više matematike* I, (bilo koje novije izdanje), Građevinska knjiga/ IP Nauka, Beograd, 1984. (X izd.); XV izd. ... .

b) *Zbirka zadataka iz više matematike* II, (Glava I. Redovi), (bilo koje novije izdanje), Građevinska knjiga/ IP Nauka, Beograd, 1998. (X izd.); ... .

ili ostalu preporučenu osnovnu i dopunsku literaturu (http://c2.etf.unsa.ba/).

2. Usmeni završni ispit iz IM1 boduje se sa 40 bodova. Da bi postigao pozitivnu ocjenu, student na ovom ispitu mora ostvariti najmanje 15 bodova. Svaki od studenata koji ne ostvari ovaj minimum pristupa usmenom dijelu popravnog ispita.

3. Usmenom dijelu popravnog ispita može pristupiti svaki student koji je nakon polaganja pismenog dijela popravnog ispita iz IM1 uspio ostvariti ukupan skor od 40 ili više bodova; ovaj skor sastoji se od bodova ostvarenih kroz prisustvo nastavi, izradu DZ, polaganje parcijalnih ispita i polaganje pismenog dijela popravnog ispita. Usmeni popravni ispit iz IM1 boduje se sa 40 bodova. Da bi postigao pozitivnu završnu ocjenu, student na ovom ispitu mora ostvariti najmanje 15 bodova. Svaki student prve godine ETF-a koji ne ostvari ovaj minimum ponovo upisuje kurs iz IM1 (u narednoj akademskoj godini).

.... @ ....

Quod erat demonstrandum.
[Što je trebalo dokazati. Skraćeno: Q.e.d.]
(LATINSKI PREVOD EUKLIDOVIH RIJEČI.)

Predavanja za šestu sedmicu nastave
(u akademskoj 2011/2012. godini)

GLAVA 3
REALNE FUNKCIJE REALNE PROMJENLJIVE
(Opšta svojstva, osnovne elementarne funkcije i limesi)

U ovom poglavlju se nastavlja izlaganje osnova inženjerske matematičke analize. Glavni cilj ove glave je usvajanje pojma realne funkcije jedne realne nezavisno promjenljive te granične vrijednosti funkcije na skupu realnih brojeva, kao i pojmova nekih specijalnih klasa funkcija jednog argumenta (ograničene i neograničene funkcije, monotone funkcije, parne i neparne funkcije, periodične funkcije) te klase osnovnih elementarnih funkcija. U prethodnom poglavlju su proučavane specijalne realne funkcije, tj. beskonačni nizovi (funkcije definirane na skupu prirodnih brojeva), a u ovom poglavlju se ta proučavanja proširuju na realne funkcije koje su zadate (definirane) na bilo kakvom (fiksiranom) podskupu skupa **R** realnih brojeva, tj. detaljnije se ispituju realne funkcije u opštem slučaju. Od sada i dalje (u ovom kursu), ako drugačije ne bude kazano (naznačeno), riječ *funkcija* označava *realnu funkciju jedne realne nezavisno promjenljive.*

Napomenimo da je proučavanje funkcija centralni zadatak inženjerske matematike. Mnoge varijable od interesa za inženjere, npr, napon U, otpor R, jačina struje I, vrijeme t, snaga P, mogu se povezati odnosno opisati, koristeći pojmove funkcija. U okviru ovog kursa razmatrat ćemo neke osnovne inženjerske funkcije ($P = I^2R$, $R_E = \dfrac{R}{1+R}$, $U = IR$, $v = \begin{cases} V, & t<0, \\ Ve^{-\frac{t}{\tau}}, & t>0, \end{cases}$ ($\tau = RC$ vremenska konstanta) i dr.).

§ 3.1. Pojam i osobine realne funkcije realne promjenljive

3.1.1. Pojam i zadavanje realne funkcije realne promjenljive

U odjeljku 1.2.3. smo na više (uobičajenih) načina (intuitivno i formalno, odnosno sa i bez upotrebe pojma binarne relacije) uveli opšti pojam preslikavanja (funkcije), te definirali pojmove: grafik funkcije, jednakost i nejednakost dviju funkcija, ulaganje (inkluzija), identiteta (identično preslikavanje), binarna operacija, operacija kompozicije preslikavanja (složena funkcija), proširenje (ekstenzija) preslikavanja, suženje (restrikcija) preslikavanja, slika $f(A)$ skupa $A(\subseteq X)$ pri preslikavanju $f: X \to Y$, inverzna slika $f^{-1}(B)$ skupa $B(\subseteq Y)$ (ili original skupa B), sirjekcija (preslikavanje **na**), injekcija ((1–1)-preslikavanje), bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje), inverzno preslikavanje (inverzna funkcija).

No, ovdje ćemo navesti definiciju pojma realne funkcije realne promjenljive, te sa više detalja pojasniti zadavanje funkcije formulom (analitički).

Definicija 3.1.1. Svako preslikavanje $f: X \to Y$, definirano na nekom podskupu X skupa **R** realnih brojeva i sa vrijednostima iz nekog podskupa Y skupa **R**, zove se **realna funkcija jedne realne nezavisno promjenljive**[*)] (ili kraće **realna funkcija realne promjenljive**, ili funkcija realne promjenljive). Dakle, realna funkcija realne promjenljive je svaka uređena trojka (X, Y, f), koja se sastoji od skupa $X(\subseteq \mathbf{R})$, kojeg zovemo *oblast definiranosti*, skupa $Y(\subseteq \mathbf{R})$, kojeg zovemo *područje vrijednosti*, te nekog *pravila* f, pomoću kojeg svakom elementu $x \in X$ pridružujemo tačno jedan element $y \in Y$ (koji ovisi o x). Pridruženi element y zove se vrijednost funkcije na elementu (ili u) x i označava se sa $f(x)$ ili fx.

[*)] Umjesto "jedne realne nezavisno promjenljive" kaže se još i "jedne realne nezavisne **varijable**" ili "jednog realnog **argumenta**". Pri tome se o elementima $y = f(x) \in Y$ govori kao o zavisnoj promjenljivoj preslikavanja f.

Oblast definiranosti (definiciono područje, definicioni skup, domen(a), područje definicije, ulazni skup) realne funkcije realne promjenljive f najčešće označavamo sa $D(f)$ (ili $\mathcal{D}(f)$, ili $\mathcal{D}_f$) ili (kada je iz datog konteksta jasno o kojoj se funkciji radi) sa D (odnosno $\mathcal{D}$). U našim razmatranjima funkcija je najčešće zadana na intervalu (otvorenom, poluotvorenom, zatvorenom) ili uniji intervala.

Oblast (područje) vrijednosti (kodomen, antidomen, ulazni /dolazni/ skup) realne funkcije f često označavamo sa K, dok skup $f(D)$: $=\{ f(x) \mid x\in D \}$ $(\subseteq K \subseteq \mathbf{R})$ (svih) *vrijednosti funkcije* (*rang funkcije*) $f: D \to K$ označavamo sa $R(f)$ (ili $\mathcal{R}(f)$, ili $\mathcal{R}_f$). No, kada nam u datom kontekstu nije bitno svojstvo surjektivnosti, obično umjesto "realna funkcija $f: D \to K$ realne promjenljive" pišemo "funkcija $f: D \to \mathbf{R}$ realne promjenljive" (ili "funkcija $f: D \to \mathbf{R}$, $(D \subseteq \mathbf{R})$", ili "funkcija f definirana na skupu $D(\subseteq \mathbf{R})$", i sl.).

Funkcija f može biti zadata na razne načine (**analitički**, **tablični**, **grafički**, **riječima**, itd.). No, u *matematičkoj analizi* se realna funkcija najčešće zadaje nekom *formulom* ili, kako se to drugačije kaže, *analitičkim izrazom*. Npr. ako funkciju f zadamo sa:

$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2+1}, \tag{3.1.1}$$

onda je ova funkcija *zadata/data* (odnosno, *zadana/dana*) formulom. Za domen ove funkcije možemo uzeti (ako pod funkcijom podrazumijevamo realnu funkciju realne promjenljive) bilo koji (neprazan) podskup skupa **R**.

Ako funkciju g zadamo sa:

$$g(x) := \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}, \tag{3.1.2}$$

onda je i ova funkcija zadata formulom, ali za domen te (realne) funkcije (realne promjenljive) možemo uzeti svaki podskup od $\mathbf{R} \setminus (-1, 1)$ (ali ne i širi u smislu inkluzije od $\mathbf{R} \setminus (-1, 1)$).

Međutim, ako nije drugačije naznačeno (rečeno), pod domenom realne funkcije f realne promjenljive date analitičkim izrazom $f(x)$ obično se podrazumijeva maksimalan (u smislu inkluzije) podskup skupa **R** koji taj izraz dopušta, tj. domen $D(f)$ funkcije f zadane analitičkim izrazom $f(x)$ zadan je formulom

$$D(f) := \{ x\in \mathbf{R} \mid f(x) \text{ definirano (ima smisla) u } \mathbf{R} \}.$$

Kad tako postupamo u vezi s domenom funkcije zadane analitički, onda kažemo da smo tu funkciju definirali na njenom **prirodnom domenu/(***prirodnoj domeni***)**. Tako, npr. za funkciju f datu analitičkim izrazom (3.1.1.) (prirodni) domen je skup **R**, a za funkciju g datu sa (3.1.2.) (prirodni) domen je $(-\infty,-1] \cup [1, +\infty)$.

U formuli se pomoću matematičkih simbola određuje koje operacije treba izvršiti nad nezavisnom promjenljivom i kojim ih redom treba vršiti da bi se dobila odgovarajuća vrijednost zadate funkcije.

Napomenimo da pojam formule nije precizno definiran pojam, jer nije jednom za svagda određeno koje sve operacije mogu ulaziti u formulu. Za sada smatramo da u formulu (kojom se zadaje funkcija) ulaze osnovne računske radnje, stepenovanje, korjenovanje, logaritmiranje, trigonometrijske operacije i sl. Kasnije, kad uvedemo nove operacije (operacija prelaska na limes te operacije diferenciranja i integriranja), onda ćemo i takve operacije uključivati u formule kojim se zadaju realne funkcije realne promjenljive.

Također napomenimo da se kod funkcija zadanih analitički mogu pojaviti slučajevi u kojim za domen ne uzimamo prirodni domen, tj. postoje situacije kada neku funkciju f zadajemo na **užoj oblasti** od one koju analitički izraz $f(x)$ dozvoljava. Npr., neka je materijalna tačka (tijelo) u momentu $t = 0$ puštena da *slobodno pada* s visine h (> 0). Ako sa $s = s(t)$ označimo dužinu puta (u metrima) kojeg je ta tačka (tijelo) prešla za vrijeme t, (u sekundama) mjereno od početka pada, onda (kao što je iz mehanike poznato) vrijedi:

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2, \quad (g \approx 9{,}81 \text{ ms}^{-2}) \tag{3.1.3}$$

No, ova formula (iz fizikalnih razloga) vrijedi samo za svaki $t\in[0, t_h]$ gdje je $t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, a to je moment udara tačke (tijela) u Zemlju (izraz za t_h se dobije iz (3.1.3.) ako se izraz $s(t)$ zamijeni sa h, a t sa t_h). Jasno je da analitički izraz (u matematičkom smislu) u (3.1.3) dopušta svaki $t\in \mathbf{R}$, ali ako izučavamo slobodni pad tijela, onda je funkciju s zadatu formulom $s(t) = \frac{g}{2}t^2$, prirodno posmatrati samo na segmentu $[0, t_h]$.

Za **kodomen** realnih funkcija realne promjenljive zadanih analitički obično se uzima skup **R** ili (posebno, ako se razmatra i postojanje inverzne funkcije) skup svih vrijednosti (rang) posmatrane funkcije, osim kada se posebno istakne drugačije.

Funkcija se često zadaje i sa više **analitičkih izraza**. Npr., funkcija h, zadana formulom

$$h(x)=\begin{cases} x^2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x^2, & x<0, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

definirana je sa tri analitička izraza.

No, funkciju često zadajemo ne koristeći nikakvu formulu (analitički izraz u opisanom smislu). Naime, važno je samo da znamo pravila po kojem se svakoj vrijednosti nezavisno promjenljive pridružuje tačno jedan određen broj.

Posmatrajmo npr. funkciju [*)]:

$$y := \lfloor x \rfloor,\ x\in \mathbf{R} \tag{3.1.5}$$

koja se naziva **cijeli dio od** x, definiranu ovako:

$$\lfloor x \rfloor \text{ je najveći cijeli broj koji nije veći od } x. \tag{3.1.6}$$

Napomenimo da nema jasne granice između funkcija koje su zadane s jednom formulom (izrazom) i koje nisu zadane formulom, te onih sa zadate sa više formula (izraza). Npr. funkcija h data sa (3.1.4) definirana je sa tri analitička izraza. No, primjenom integralnog računa, pokazuje se da se ta funkcija h može definirati i samo jednom formulom.

$$h(x)=\frac{2}{\pi}x^2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}\,dt, \tag{3.1.7}$$

gdje je $D(x) := \int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}\,dt$ tzv. *Dirichletov integral* (za koji se pokazuje da je $D(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$).

Funkcija $f(x) := \lfloor x \rfloor$ (cijeli dio realnog broja x), definirana opisno (riječima) u (3.1.6) (dakle nije zadata analitičkim izrazom/formulom), može se definirati i beskonačnim skupom analitičkih izraza (koji u cjelini predstavljaju zakon korespondencije f ove funkcije):

$$y:=\lfloor x \rfloor=\begin{cases} \vdots & \\ -2, & -2\le x<-1, \\ -1, & -1\le x<0, \\ 0, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x<2, \\ 2, & 2\le x<3, \\ \vdots & \end{cases} \tag{3.1.8}$$

ili kraće: $y := \lfloor x \rfloor = k,\ x\in[k, k+1),\ (k\in \mathbf{Z})$.

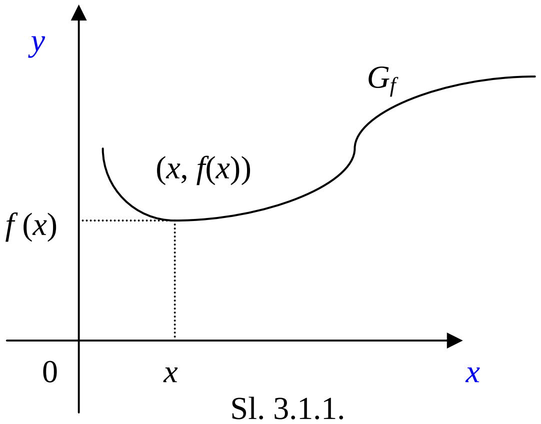
3.1.2. Grafik realne funkcije realne promjenljive

Neka je u nekoj ravni zadan *pravougli Dekartov koordinatni sistem* sa osama O_x, O_y. Tada svakoj tački iz te ravni odgovara potpuno određen uređen par realnih brojeva. Ti brojevi nazivaju se **koordinate** te tačke. Obrnuto, svakom uređenom paru realnih brojeva odgovara tačno određena tačka posmatrane ravni koju još zovemo i xy – ravan). Zbog toga ćemo tu ravan identificirati sa skupom svih uređenih parova realnih brojeva, tj. sa skupom **R**x**R** (=$\mathbf{R}^2$). Dakle, ne pravi se razlika između skupa $\mathbf{R}^2$ (Dekartovog proizvoda skupa **R** sa samim sobom) i xy – ravni. Isto tako nećemo praviti razliku između uređenog para (x, y) realnih brojeva x, y i njemu odgovarajuće tačke M iz xy – ravni. Zbog toga ćemo pisati $M = (x, y)$ i govoriti "tačka (x, y)" umjesto "tačka sa koordinatama x, y".

[*)] Oznaka $\lfloor x \rfloor$ koristi se u novije vrijeme (od kada se koristi i oznaka $\lceil x \rceil := -\lfloor -x \rfloor$ za *najmanji cijeli broj koji nije manji od realnog broja* x). Ranije se koristila oznaka $E(x)$, a zatim i oznaka $[x]$, za označavanje funkcije "cijeli dio od x".

Neka je $f: X \to Y$ realna funkcija realne promjenljive. Tada se skup svih onih tačaka $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ kod kojih je $x \in X$ i $y = f(x)$ naziva **grafikom** ili **grafom** funkcije f. Označavamo ga sa $G(f)$ (ili G_f, ili Γ_f, ili F). Prema tome, po definiciji je

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \quad (\subseteq X \text{ x } Y \subseteq \mathbf{R}^2) \quad \text{(v. sl. 3.1.1.).} \tag{3.1.9}$$



Sl. 3.1.1.

Umjesto termina "grafik" (graf) u upotrebi su još i neki drugi termini. Kaže se da je to **dijagram** ili **kriva linija** (ili, kraće, **kriva**). Za jednačinu (jednadžbu) $y = f(x)$ kaže se da je jednačina krive linije formirane pomoću funkcije f, tj. da je to **jednačina grafika funkcije** f.
Nadalje ćemo često, jednostavnosti izražavanja radi, govoriti da je "$y = f(x)$" kriva umjesto da govorimo "kriva čija je jednačina $y = f(x)$" (u pravouglom Dekartovom koord. sistemu O_{xy}).

Napomenimo da svaka funkcija, pa dakle i svaka realna funkcija, ima grafik (koji se može prikazati analitički u obliku kao u (3.1.9)), ali da postoje i realne funkcije jedne realne promjenljive čiji se grafik ne može geometrijski predstaviti (nacrtati) u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu. Takođe napomenimo da se osim pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema koriste i drugi koordinatni sistemi (kao što su *afini* / *kosougli* /, *polarni*, *trougaoni koord. sistem*, te *funkcijska skala* i dr.).

Npr., grafik (Dirichletove) funkcije χ (hi – gr. slovo) zadane sa $\chi(x) = 1$ ako je x racionalan broj i $\chi(x) = 0$ ako je x iracionalan broj ne može se nacrtati. (Postoje i *neprekidne funkcije* čiji se grafik ne može nacrtati).

No, pojam funkcije može se uvesti i na ovaj način:

Definicija 3.1.2. Neka su X i Y dva skupa i neka je F ma koji podskup od XxY. Tada se uređena trojka (F, X, Y) naziva **funkcijom (preslikavanjem)** ako u F nema elemenata koji predstavljaju uređene parove sa jednakim prvim i različitim drugim komponentama. Ako su pri tome $X \subseteq \mathbf{R}$ i $Y \subseteq \mathbf{R}$, onda se (F, X, Y) zove **realna funkcija realne promjenljive**.

U definiciji 3.1.2. skup X predstavlja oblast definisanosti, a skup Y predstavlja oblast vrijednosti funkcije. Funkcija sa oblasti definisanosti X i oblasti vrijednosti funkcije Y zove se funkcija tipa XxY i ta se činjenica može formulisati na sljedeći način. Funkcija f je definisana u X i dobija svoje vrijednosti u Y, što se simbolizuje u obliku

$$X \to Y, \quad \text{ili} \quad f: X \to Y, \quad \text{ili} \quad f: (x, y)\ (x \in X,\ y \in Y), \quad \text{ili} \quad x \to f(x), x \in X, f(x) \in Y.$$

Neka je $f := (F, X, Y)$ proizvoljna funkcija. Ako je $(x, y) \in F$, element y se zove vrijednost funkcije na (ili u) x, x se zove originalom, a y slikom (fiksnog) elementa x, a za funkciju f se kaže da preslikava element x u element y. Vrijednost funkcije f u x označava se sa $f(x)$, pri čemu se piše $y = f(x)$. Funkcija $f := (F, X, Y)$ nije nigdje definirana ako je $F = \varnothing$.

3.1.3. Funkcije zadane parametarski

Osim eksplicitarnog zadavanja funkcije ponekad se koristi i parametarsko zadavanje (a i implicitno zadavanje) funkcije.

Neka su data ova preslikavanja $\varphi: M \to X$ i $\psi: M \to Y$, od kojih je bar jedno, npr. φ, bijekcija. Tada postoji inverzno preslikavanje $\varphi^{-1}: X \to M$ i preslikavanje $\psi \circ \varphi^{-1}$ takvo da $\psi \circ \varphi^{-1}: X \to Y$.

Za ovako definirano preslikavanje kažemo da je **zadano parametarski** sa preslikavanjima (funkcijama) φ i ψ, pri čemu elemente iz skupa M nazivamo **parametrima**. Specijalno, ako su M, X, Y podskupovi skupa **R** realnih brojeva, onda za funkciju $F = \psi\circ\varphi^{-1}: X\to Y$, tj. za funkciju $F(x) := \psi(\varphi^{-1}(x))$, kažemo da je *zadana parametarski sistemom* (skupom) realnih funkcija φ i ψ, odnosno da je funkcija $y := \psi(\varphi^{-1}(x))$ parametarski zadata sistemom*) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, ($t\in M\subseteq \mathbf{R}$).

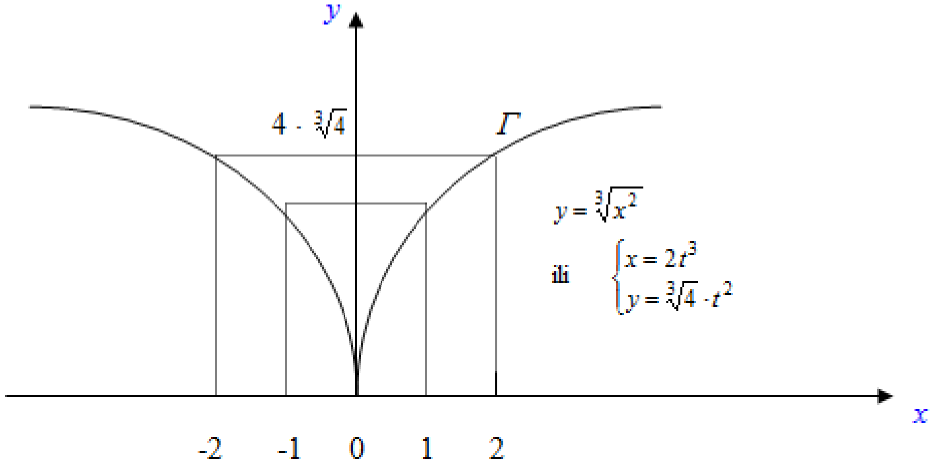
U opštem slučaju sistem $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($t\in M$) definira se višeznačno preslikavanje (višeznačna funkcija) $y = y(x)$ ili $x = x(y)$. Osim toga, često nije moguće iz sistema $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eliminirati parametar t, tj. dobiti zavisnost $y = y(x)$ niti zavisnost $x = x(y)$, ali to ne znači da i tada ne možemo ispitivati tok i nacrtati grafik (jednoznačne) funkcije ili višeznačne funkcije parametarski zadate tim sistemom jednačina.

Primjer 3.1.1. *Nacrtajmo krivu* (*u Dekartovom pravouglom koor. sist.*) *zadanu parametarski sistemom*: $x = 2t^3$, $y = t^2\cdot\sqrt[3]{4}$; *te ustanovimo da li dobivena kriva predstavlja grafik neke (jednoznačne) funkcije* f *iz* **R** *u* **R**.

Rješenje: Funkcije φ i ψ, parametarski zadate sa $\varphi(t) := 2t^3$, $\psi(t) := 4t^2$, su definirane za svaki $t\in\mathbf{R}$, tj. prirodne domene $D(\varphi)$, $D(\psi)$ su skup **R**. Na osnovu sljedeće tablice vrijednosti

t	$\to -\infty$	...	-2	-1	0	1	3/2	...
x	$\to -\infty$	...	-16	-2	0	2	27/4	...
y	$\to +\infty$	...	$4\cdot\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4}$	0	$\sqrt[3]{4}$	$(9/4)\cdot\sqrt[3]{4}$	...

konstruišemo odgovarajuće tačke $M_i = (x_i, y_i)$ u (Dekartovoj) ravni xOy koje pripadaju zadanoj krivoj, pa spajanjem tačaka M_i glatkom krivom dobijemo sljedeći grafik krivulje (tzv. **semikubna parabola**):



Sl. 3.1.2.

Parametar t ne gubi svoj geometrijski smisao (t se ne odvaja geometrijski).

Napisati eksplicitni oblik funkcije $y := \sqrt[3]{x^2}$, u jednostavnijem parametarskom obliku (od zadanog oblika).

Očito da kriva Γ na sl. 3.1.2. predstavlja grafik (jednoznačne) funkcije $f: \mathbf{R}\to Y$ ($Y\subseteq\mathbf{R}$) zadane sa $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Zadatak 3.1.1. *Po pravoj* O_x *kotrlja se bez klizanja krug poluprečnika a. Kriva koju opisuje određena tačka periferije tog kruga zove se* **cikloida**. *Dokažite da se ona može parametarski opisati jednačinama* $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, ($t\in\mathbf{R}$), *a zatim nacrtajte tu krivu.*

---

*) *Parametarske jednačine* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$ ($\subseteq\mathbf{R}$) predstavljaju parametarske jednačine krive u ravni i ove su jednačine često podesnije za ispitivanje krive (za ispitivanje implicitne funkcije, a i za izražavanje višeznačne funkcije jednoznačnim funkcijama).

3.1.4. Neka svojstva realnih funkcija jedne realne promjenljive

U daljnjem tekstu razmatramo realne funkcije jedne realne promjenljive, tj. preslikavanja kod kojih su domena D i kodomena K podskupovi skupa **R**, te umjesto $f : D \to K$, često pišemo $f : D \to \mathbf{R}$.

Za takve dvije funkcije definiramo:

(i) zbir (zbroj) $f + g : D \to \mathbf{R}$ funkcije f i funkcije g: $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$;

(ii) razlika $f - g : D \to \mathbf{R}$ funkcije f i funkcije g : $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$;

(iii) proizvod (produkt) $f \cdot g : D \to \mathbf{R}$ funkcije f i funkcije g : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

(iv) količnik (kvocijent) funkcije f i funkcije g $(f / g) : D_o \to \mathbf{R}$, $D_o = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Prilikom proučavanja (ispitivanja) toka i konstrukcije grafika (realne) funkcije (jedne realne varijable) promatraju se njene promjene pri čemu se pretpostavlja da se nezavisna promjenljiva mijenja od najmanje do najveće vrijednosti iz domene, odnosno na svakom od dijelova domene (ako se te vrijednosti dostižu), pri čemu se u (eventualnim) tačkama gomilanja domena (posmatrane funkcije) koje mu ne pripadaju određuju granične vrijednosti te funkcije. Pri tome se često koriste pojmovi: nule (korijeni, nul – tačke); parnost i neparnost; periodičnost; monotonost; ograničenost; neograničenost; infimum i supremum; *lokalni* i *globalni* (*totalni*, *apsolutni*) ekstremum; te *konveksnost*, *konkavnost* i *prevojne tačke* (tačke infleksije).

Neke od tih osobina su jednostavne i istovremeno određuju specijalne klase realnih funkcija: *klase parnih* i *neparnih funkcija*, *klasa periodičnih funkcija*, *klasa monotonih funkcija*, te *klase ograničenih* i *neograničenih* (realnih) *funkcija* (jedne realne varijable).

Definicija 3.1.3. Za skup $D(\subseteq \mathbf{R})$ kažemo da je simetričan u odnosu na nultu tačku (tj. tačku 0) ako za svaki $x \in D$ broj $-x$ takođe pripada skupu D. Kažemo da je funkcija $f : D \to K$ (D, $K \subseteq \mathbf{R}$), definirana na simetričnom skupu D, **parna** ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in D$, a **neparna** ako je za svaki $x \in D$ ispunjeno $f(-x) = -f(x)$.

Očigledno, grafik parne funkcije osno je simetričan u odnosu na y – osu (s obzirom na ordinatu), a grafik neparne funkcije centralno je simetričan u odnosu na kooridinatni početak (ishodište) $O := (0,0)$. To svojstvo olakšava crtanje grafika takvih funkcija.

Primjer 3.1.2. Funkcije $x \to x^2$, $x \to \sin x$, $x \to e^x$ imaju prirodnu domenu **R**. Prva od ovih funkcija je parna jer je $(-x)^2 = x^2$, druga je neparna budući da je $\sin(-x) = -\sin x$, a treća (tj. funkcija $x \to e^x$) nije ni parna ni neparna, jer nije ispunjena jednakost $e^{-x} = e^x$ za svaki $x \in \mathbf{R}$ niti važi $e^{-x} = e^x$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Napomenimo da najveći broj funkcija nisu ni parne ni neparne, ali se lako pokazuju da se svaka (realna) funkcija (jedne realne varijable) definirana na simetričnom skupu (u odnosu na nultu tačku) može prikazati u obliku zbira jedne parne i jedne neparne funkcije. Naime, za takvu funkciju f vrijedi da je $f(x) = g(x) + h(x)$ za svaki x iz domene $D(f)$, pri čemu je $g(x) := \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ parna funkcija, $h(x) := \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ neparna funkcija.

Definicija 3.1.4. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ **periodična** ako postoji broj $p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (koji se naziva **periodom** funkcije f), takav da važi:

$$\text{(i)}\ \forall (x \in D)\ x + p \in D\,; \quad \text{(ii)}\ \forall (x \in D)\ f(x + p) = f(x).$$

Najmanji pozitivan broj p (ako postoji) za koji su ispunjeni uslovi (i) i (ii) naziva se **osnovni** (**temeljni**) **period** funkcije f i obično se označava sa T.

Primjer 3.1.3. *Funkcija* $f(x) := A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ $(A, \omega, \varphi \in \mathbf{R})$ *je periodična i za* $A \neq 0$ *i* $\omega \neq 0$ *ima osnovi period* T *dat sa* $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$. *Isto svojstvo ima i funkcija* $g(x) := A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$, *dok funkcije* $\varphi(x) := A \cdot \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ *i* $\psi(x) := A \cdot \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ *imaju osnovni period* T *dat sa* $T = \dfrac{\pi}{|\omega|}$ $(A \neq 0,\ \omega \neq 0)$.

Ponekad je zgodnije datu funkciju f predstaviti u obliku:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

pri čemu su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ periodične sa osnovnim periodima $T_1, \ldots, T_n$, respektivno. Ako je pri tom $\frac{T_i}{T_j} \in \mathbf{Q}$ za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, onda je i funkcija f periodična. Ako nije ispunjen uslov da je $\frac{T_i}{T_j} \in \mathbf{Q}$ za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, onda funkcija f nije periodična. No, kako se svaki iracionalan broj može aproksimirati po volji tačno racionalnim brojevima, može se pokazati da ima uvijek cijelih brojeva r, s takvih da su rT_i i sT_j gotovo jednaki (ta činjenica je dovela do razvoja nove teorije "*gotovo periodičnih funkcija*" koja je važna i u *teoriji realnih funkcija* i u primjenama u *matematičkoj fizici* i *tehnici*). Naime, ako je f zbir od dvije periodične funkcije f_1, f_2 sa osnovnim periodima T_1, T_2 i ako je $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, gdje su p i q cijeli brojevi, onda je $pT_2 = qT_1$, pa je funkcija f periodična sa osnovnim periodom T jednakim zajedničkoj vrijednosti pT_2 ili qT_1. Otuda, primjenom metoda matematičke indukcije, lako zaključujemo da se ovo svojstvo za zbir dvije funkcije proširuje na sumu od n funkcija (za svaki $n \in \mathbf{N}$).

Međutim, ako bar jedna od funkcija $f_1, \ldots, f_n$ nije periodična, to još ne znači da je funkcija $f := \sum_{i=1}^{n} f_i$ neperiodična, jer npr. funkcija f data sa $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ je periodična sa osnovnim periodom $T = 1$ iako $f_1(x) := x$ i $f_2(x) := -\lfloor x \rfloor$ nisu periodične funkcije.

Zadatak 3.1.2. *Ispitati periodičnost i odrediti osnovne periode (ako postoje) funkcija*:

a) $f(x) = \sin x + \cos 3x$;

b) $f(x) = \sin x + \cos \pi x$;

c) $f(x) = A \cdot \cos \omega x + B \cdot \sin \omega x$, $(A, B, \omega \in \mathbf{R})$;

d) $f(x) = \cos x^2$;

e) $f(x) = 6tg\,\frac{x}{10} - 7tg\,\frac{x}{7}$

f) $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{C}. \end{cases}$

Rezultat: a) Funkcija f je periodična, $T = 2\pi$; b) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \notin \mathbf{Q}$ pa funkcija f nije periodična; c) funkcija f je periodična i, za $A \neq 0$ i $\omega \neq 0$, ima osnovni period $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, d) f nije periodična; e) f periodična s osnovnim periodom $T = 70\pi$; f) Dirichletova funkcija χ je periodična, jer za svaki $p>0$ vrijede uslovi (i) i (ii) iz definicije 3.1.4., ali ne postoji njen najmanji pozitivan period, jer je $\inf\{p \in \mathbf{R} \mid p > 0\} = 0$.

Definicija 3.1.5. Neka je $E \subseteq D \subseteq \mathbf{R}$. Za funkciju $f: D \to K$ $(K \subseteq \mathbf{R})$ kažemo da je:

1.^{o} **neopadajuća na skupu** E ako $(\forall x_1, x_2 \in E)$ $(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$;

2.^{o} **rastuća na skupu** E ako $(\forall x_1, x_2 \in E)$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;

3.^{o} **nerastuća na skupu** E ako $(\forall x_1, x_2 \in E)$ $(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$;

4.^{o} **opadajuća na skupu** E ako $(\forall x_1, x_2 \in E)$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Za funkciju f koja zadovoljava bilo koji od uslova 1.^{o} – 4.^{o} kažemo da je **monotona**, a za funkciju f koja zadovoljava uslov 2.^{o} ili uslov 4.^{o} da je **strogo monotona** na skupu E. Ako je u definiciji 3.1.5. skup E jednak domenu D funkcije f, onda se često izostavlja naznaka "na skupu E" uz riječ monotonost, odnosno njenu verziju.

Napomenimo da se umjesto termina neopadajuća, rastuća, nerastuća i opadajuća koriste termini rastuća, strogo rastuća, opadajuća i strogo opadajuća, respektivno.

Primjer 3.1.4. *Funkcija* $f(x) := x^3$ *je rastuća. Funkcija* $g(x) := e^{-x}$ $(=1/e^x)$ *je opadajuća, funkcija* $h_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ *je nerastuća, funkcija* h_1 *je opadajuća na* $(-\infty, 0]$ *i nije* *strogo monotona na* **R**. *Funkcija* $F(x) = x^2$ *je opadajuća na* $(-\infty, 0]$, *a rastuća na* $[0, +\infty)$, *dok na* **R** *nije monotona, već* "**monotona po dijelovima**" (*F nije bijekcija sa* **R** *na* $[0, +\infty)$, *te nema* (*jednoznačne*) *inverzne funkcije*).

Definicija 3.1.6. Za funkciju $f : D \to K$ ($D, K \subseteq \mathbf{R}$) kažemo da je **ograničena odozgo** (**odnosno ograničena odozdo**) na skupu $E (\subseteq D)$ ako je takav skup njenih vrijednosti (na E) $\{f(x) \mid x \in E\}$, tj. ako postoji broj $P \in \mathbf{R}$ (odnosno $p \in \mathbf{R}$), takav da za sve $x \in E$ vrijedi $f(x) < P$ (odnosno $f(x) > p$). Za funkciju koja je ograničena odozdo i ograničena odozgo na skupu E kažemo da je **ograničena na skupu** E. Sada se lako definiraju i pojmovi minimuma, maksimuma, te infimuma i supremuma funkcije.

Lako se vidi da je funkcija $f : D \to K$ ($D, K \subseteq \mathbf{R}$) ograničena na $E (\subseteq D)$ ako postoji $M > 0$, takav da za sve $x \in E$ vrijedi $|f(x)| < M$ (ili, što je ekvivalentno, $|f(x)| \leq M$). Takođe se lako dobije geometrijska interpretacija ogranične funkcije na podskupu domena, odnosno ograničene (na domenu).

Primjer 3.1.5. a) *Funkcija* $f(x) := \operatorname{arctg} x$ *je ograničena* (*na domenu* $D(f) = \mathbf{R}$), $\inf f = -\frac{\pi}{2}$, $\sup f = \frac{\pi}{2}$; *f nema* (*totalnog*) *ekstrema, jer* $(-\frac{\pi}{2}) \notin [R(f)] = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}) \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
b) *Funkcija* $f(x) := x^{2k}$ ($k \in \mathbf{N}$) *je ograničena odozdo, ali ne i odozgo na* **R**. *Međutim, ona je ograničena na svakom* (*konačnom*) *razmaku* $< a, b >$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

Zadatak 3.1.3. Za funkcije $f(x) = 2^{-x} + 1, g(x) = 2x - 1$, riješite nejednačinu

$$(f \circ g)(x) \leq (g \circ f)(x).$$

Zadatak 3.1.4. Odredite prirodnu domenu i ispitajte osnovna svojstva slijedećih funkcija: **a)** $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{2|\sin 3x| - \sqrt{2}}}$; **b)** $f(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$;

c) $f(x) = \sqrt{3\sin x + \cos 2x - 2}$; **d)** $f(x) = \sqrt[4]{\log_5 \cos \dfrac{2\pi x}{\sqrt{7}}}$.

§ 3.2. Pojam granične vrijednosti (limesa) realne funkcije jedne realne promjenljive. Ekvivalentnost Cauchyjeve i Heineove definicije limesa funkcije

Intuitivno govoreći, limes ili granična vrijednost neke funkcije u datoj tački x_0 je vrijednost koja se priključuje, nastavlja na vrijednosti koje ta funkcija prima u okolnim tačkama. Jasno je stoga da o limesu funkcije ima smisla govoriti samo kada x_0 nije izolovana (izolirana) tačka, tj. kada je x_0 tačka gomilanja domena te funkcije (koja mu može a ne mora pripadati), $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.

Definicija 3.2.1. (**Po Cauchyju**).[*)] Neka je $f : X \to Y$ realna funkcija realne promjenljive i $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka gomilanja skupa X. Kažemo da je $y_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ **granična vrijednost** (**limes**) funkcije f u tački x_0 (ili da funkcija $f(x)$ teži (graničnoj / vrijednosti y_0 kada x teži vrijednosti x_0) i simbolički to označavamo sa $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ ili $\lim_{x_0} f = y_0$, ako za svaku okolinu $V(y_0)$ tačke y_0 postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0, takva da vrijedi

$$(\forall x \in X)\ \ ((x \in U(x_0), x \neq x_0) \Rightarrow (f(x) \in V(y_0))). \tag{3.2.1}$$

Ako je pri tome y_0 iz **R**, onda kažemo da funkcija f ima **konačnu graničnu vrijednost**, a ako je $y_0 = -\infty$ ili $+\infty$, onda kažemo da f ima **beskonačnu graničnu vrijednost** u tački

---

[*)] Ta definicija (u terminologiji okolina), odnosno njena (za slučaj konačne granične vrijednosti u konačnoj tački) varijanta u simboličkom obliku (3.2.3), potječe od A.L. CAUCHYJA (Analyse algébrique, 1821.), mada se njome već i prije služio B. BOLZANO (Prag, 1817).

x_0 (konačnoj tački ili beskonačnosti /$-\infty$ ili $+\infty$ /).

Napomena 3.2.1. Granična vrijednost $\lim_{x_0} f$ iz definicije 3.2.1. definira se neovisno o vrijednosti $f(x_0)$. Zato definicija 3.2.1. za limes $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ima smisla i primjenjuje se i u slučaju kada je f definirano samo na $X \setminus \{x_0\}$. Ako je U_x ($=U\cap X$) neka okolina u skupu X tačke x_0, onda $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ovisi samo o $f\,|\,U_x \setminus\{x_0\}$ (tj. ovisi samo o restrikciji funkcije f na skup $(U\cap X)\setminus\{x_0\}$, gdje je U proizvoljna okolina tačke $x_0\in\overline{\mathbf{R}}$ / okolina u $\mathbf{R}$ ako je $x_0\in\mathbf{R}$, odnosno okolina u $\overline{\mathbf{R}}$ ako je $x_0=-\infty$ ili $x_0=+\infty$ /).

Ako je $U(x_0)$ neka okolina tačke $x_0\in\overline{\mathbf{R}}$, onda sa $\mathring{U}(x_0)$ označavamo skup $U(x_0)\setminus\{x_0\}$, a sa $\mathring{U}_X(x_0)$ označavamo skup $\mathring{U}(x_0)\cap X$. Skup $\mathring{U}_X(x_0)$ se naziva **šuplja** (ili **probušena**) okolina u skupu X tačke x_0. Koristeći takvu oznaku okoline tačke, vidimo da definiciju 3.2.1. možemo izreći i u sljedećem (ekvivalentnom) obliku:

Neka je $f: X\to Y$ realna funkcija realne promjenljive i $x_0\in\overline{\mathbf{R}}$ tačka gomilanja skupa X. Kažemo da funkcija $f(x)$ teži ka $y_0\in\overline{\mathbf{R}}$ i pišemo $y_0=\lim_{x\to x_0} f(x)$ (ili $f(x)\to y_0$ *kad* $x\to x_0$), ako za svaku okolinu $V(y_0)$ tačke y_0 postoji neka okolina $U(x_0)$ tačke x_0 takva da vrijedi

$$f(\mathring{U}_X(x_0))\subseteq V(y_0). \tag{3.2.2}$$

Da bismo dobili operativniju definiciju granične vrijednosti, treba odvojeno posmatrati slučajeve konačnih, odnosno beskonačnih vrijednosti x_0, y_0. Tako, npr. ako su x_0 i y_0 konačni brojevi, imamo (u terminologiji „ε - δ"):

$$(\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\,\delta:=\delta(\varepsilon)>0)\,(\forall x\in X)\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-y_0|<\varepsilon_0). \tag{3.2.3}$$

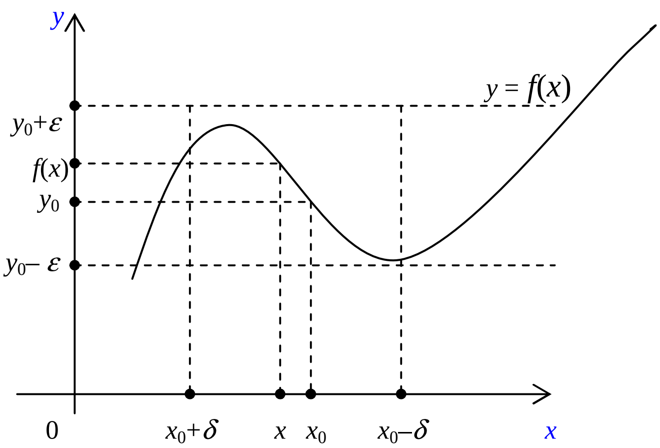
Na sličan način se zapisuju odgovarajući uslovi kada su jedan ili oba broja x_0, y_0 jednaka $+\infty$ ili $-\infty$. U tom smislu, beskonačna granična vrijednost $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, može se uvesti sljedećom definicijom (koja se dobije iz definicije 3.2.1. ako se za tačku $x_0:=+\infty$ uzme okolina $U(x_0):=(N,+\infty]$, a za tačku $y_0:=+\infty$ okolina $V(y_0):=(M,+\infty]$ u proširenom prostoru $\overline{\mathbf{R}}$ realnih brojeva).

Definicija 3.2.2. Neka je $f: X\to Y$ realna funkcija realne varijable i $+\infty$ tačka gomilanja skupa X. Kažemo da funkcija $f(x)$ ima za graničnu vrijednost $+\infty$ kad argument x teži ka $+\infty$, ako za proizvoljan unaprijed dati broj M (koliko se hoće veliki) postoji takav broj N da je nejednakost $f(x)>M$ ispunjena za sve vrijednosti $x\in X$ za koje je $x>N$, tj.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall M\in\mathbf{R})\ (\exists N\in\mathbf{R})\ (\forall x\in X)\ (x>N \Rightarrow f(x)>M). \tag{3.2.4}$$

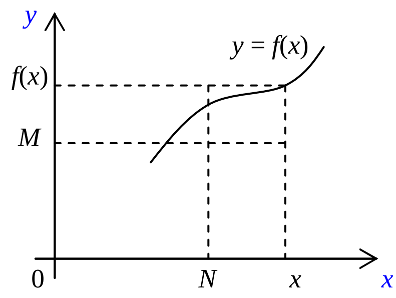
Geometrijska interpretacija: 1° Za slučaj granične vrijednosti $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$, pri čemu su $x_0\in\mathbf{R}$ i $y_0\in\mathbf{R}$, posmatrajmo pojas (u Dekartovoj ravni Oxy) ograničen pravama paralelnim apscisnoj osi: $y=y_0-\varepsilon$ i $y=y_0+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), koji ima širinu 2ε.

Postojanje nejednakosti $|f(x)-y_0|<\varepsilon$, odnosno njoj ekvivalentne dvostruke nejednakosti $y_0-\varepsilon<f(x)<y_0+\varepsilon$, pri uslovima $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ i $x\neq x_0$ (za funkciju f kojoj se grafik može geometrijski predstaviti) geometrijski znači da, ma kako bio uzan posmatrani pojas, tačke grafika funkcije f, osim, možda tačke $(x_0, f(x_0))$, sadržane su u unutrašnjosti toga pojasa, ako se



Sl. 3.2.1.

vrijednosti argumenta x sadrže u intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, tj. u δ - okolini tačke x_0 (v. sl. 3.2.1. i relaciju (3.2.3).



Sl. 3.2.2.

2° Za slučaj beskonačne granične vrijednosti (u beskonačnosti) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ imamo : Za proizvoljno veliki unaprijed dati broj M, a za sve vrijednosti argumenta x veće od N, grafik funkcije $y := f(x)$ sadrži se iznad prave date (u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu Oxy) sa $y = M$ (v. sl. 3.2.2. i relaciju (3.2.4).

Analogno se može dati geometrijska interpretacija limesa $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ i u ostalim slučajevima (jasno, ako je moguće grafik / ili bar jedan njegov odgovarajući dio / funkcije f geometrijski predstaviti).

Primjer 3.2.1. 1° *Ako je* $f(x) := 5x - 10$, *na osnovu definicije granične vrijednosti dokazati da je* $\lim_{x\to 4} f(x) = 10$.

Dokaz: Neka je dat broj $\varepsilon > 0$. Iz nejednakosti $|f(x) - 10| < \varepsilon$, tj. iz $5|x-4| < \varepsilon$, slijedi $|x-4| < \frac{\varepsilon}{5}$. Uzimajući za δ funkciju od ε: $\delta := \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$, dobijemo da je za sve vrijednosti argumenta x za koje je $|x-4| < \delta$ ispunjena nejednakost $|f(x) - 10| < \varepsilon$, što, po definiciji znači da je zaista $\lim_{x\to 4} f(x) = 10$ (u ovom slučaju tačka gomilanja $x_0 := 4$ pripada domenu $D(f) = \mathbf{R}$ funkcije f). Q.E.D.

2° Na osnovu definicije granične vrijednosti pokažite da je:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 1.$$

Dokaz: Funkcija f iz $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$ zadana analitičkim izrazom $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ ima (prirodni) domen

$$D(f) := \{x\in\mathbf{R} \mid x^2-1\geq 0 \quad\wedge\quad x-1\neq 0\} = \{x\in\mathbf{R} \mid\ |x|\geq 1, x\neq 1\} = (-\infty, -1]\cup(1, +\infty).$$

Očigledno je $+\infty$ tačka gomilanja skupa $D(f)$ (koja mu ne pripada), pa ima smisla limes $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i pri tome se razmatranje može ograničiti na vrijednosti argumenta x za koje je $x > 1$. Kako je (za svaki $x\in(1, +\infty)$)

$$|f(x)-1| = \left|\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt{x^2-1}-x+1}{x-1}\right| = \frac{|x^2-1-(x^2-2x+1)|}{(x-1)(\sqrt{x^2-1}+x-1)} = \frac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{x^2-1}+x-1)} = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}+x-1} < \frac{2}{x-1}$$

(pri čemu je znak apsolutne vrijednosti izostavljen, jer za sve $x > 1$ vrijedi da je $x-1 > 0$ *i* $x > 0$), to je, za svaki $\varepsilon > 0$, nejednakost $|f(x) - 1| < \varepsilon$, tj. nejednakost $\frac{2}{x-1} < \varepsilon$, ispunjena za sve vrijednosti argumenta x za koje je $x - 1 > \frac{2}{\varepsilon}$, tj. za $x > \frac{2}{\varepsilon} + 1$.

U ovom slučaju, uzimajući da je $N = \frac{2}{\varepsilon} + 1$ (odnosno $N = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$), imamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji broj $N := N(\varepsilon)\in\mathbf{R}$ (odnosno $N := N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$) takav da je

$$(\forall\, x\in D(f))\ \ (x > N \ \Rightarrow\ |f(x) - 1| < \varepsilon),$$

te je zaista $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

3° Za Dirichletovu funkciju *) χ, tj. za funkciju χ data sa

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}, \end{cases}$$

$\lim_{x\to x_0} \chi(x)$ ne postoji ni za jedno $x_0\in\overline{\mathbf{R}}$, jer se u svakoj okolini $U(x_0)$ tačke x_0 nalaze kako racionalni, tako i iracionalni brojevi.

---

*) Lako se vidi da je $\chi(x) = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} (\cos(m!\pi x))^{2n})$, $\forall(x\in\mathbf{R})$. Naime, $\forall(x\in\mathbf{Q})\ (\exists\, m_0\in\mathbf{N})\ m \geq m_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m!x\in\mathbf{Z}$, a odavde slijedi $(\cos(m!\pi x))^2 = 1$. Nadalje, $\forall(x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})\ (\forall m\in\mathbf{N})\ (\cos(m!\pi x))^2 < 1$.

Ako je $f : X \to Y$ realna funkcija realne varijable, A podskup od X i $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka gomilanja skupa A, onda se može posmatrati **limes funkcije** f u tački x_0 s **obzirom na skup** A, tj. $\lim_{x\to x_0} (f|A)$. Taj se limes označava sa $\lim_{A\ni x\to x_0} f(x)$ ili $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)$ (ili $\lim_{x_0, A} f$ ili $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $(x\in A)$). Ako je $A_1 \subseteq A_2$, pa je $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka gomilanja skupa A_1, onda je x_0 i tačka gomilanja skupa A_2 i postojanje $\lim_{A_2\ni x\to x_0} f(x)$ povlači postojanje $\lim_{A_1\ni x\to x_0} f(x)$ i vrijedi jednakost

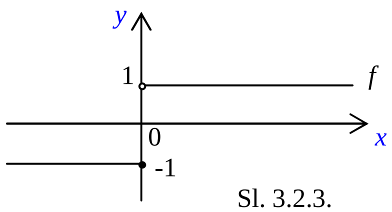
$$\lim_{A_2\ni x\to x_0} f(x) = \lim_{A_1\ni x\to x_0} f(x). \tag{3.2.5}$$

Zaista, iz egzistencije limesa $\lim_{x\to x_0} f(x) := y_0$ $(x\in A_2)$, imamo da za proizvoljnu okolinu $V(y_0)$ tačke y_0 postoji okolina $\mathring{U}_{A_2}(x_0)$ tačke x_0 takva da je $f(x) \in V(y_0)$ za svaki $x \in \mathring{U}_{A_2}(x_0)$. Kako je $A_1 \subseteq A_2$, to je $f(x) \in V(y_0)$ ako je $x \in \mathring{U}_{A_1}(x_0)$, tj. $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ $(x\in A_1)$.

Obrnuti zaključak od onog u prethonoj činjenici (vezanoj za jednakost (3.2.5)) ne vrijedi. Naime, npr., neka je $X = Y = \mathbf{R}$, neka je $f : X \to Y$ funkcija definirana formulom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \le 0, \end{cases} \qquad (3.2.5)$$

i neka je $A_1 = (0, 1]$, $A_2 = [-1, 1]$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Tada je očito $\lim_{A_1\ni x\to 0} f(x) = 1$. Ipak $\lim_{A_2\ni x\to 0} f(x)$ ne postoji



Sl. 3.2.3.

jer se lako vidi da je $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ ($(x\in[-1, 0]$) (v. prim. 3.2.2.1° i sl. 3.2.3).

Definicija 3.2.3. Neka je $x_0 \in \mathbf{R}$ tačka gomilanja skupa $\mathbf{R}^+_{x_0} \cap X := \{x\in X \mid x > x_0\}$ i $f : X\to Y$ $(X\subseteq\mathbf{R},\ Y\subseteq\mathbf{R})$. Vrijednost $\lim_{\mathbf{R}^+_{x_0}\cap X\ni x\to x_0} f(x)$ (ako postoji) označava se sa $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ (ili $\lim_{x_0+0} f$ ili $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ ili $\lim_{x\downarrow x_0} f(x)$) ili $f(x_0 + 0)$ (ili $f(x_0+)$) i zove **desna granična vrijednost funkcije** f **u tački** x_0 (ili **limes zdesna u tački** x_0).
Specijalno, ako je $x_0 = 0$, pišemo $\lim_{x\to +0} f(x)$ (ili $\lim_{x\to 0+} f(x)$) ili $f(+0)$ (ili $f(0+)$).

Analogno se definira **lijeva granična vrijednost funkcije** f u tački x_0 (ili **limes slijeva u tački** x_0) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ (ili $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x)$) (odnosno $\lim_{x\to -0} f(x) = f(-0)$ / ili $\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0-)$ /ako je $x_0 = 0$).

Iz činjenice vezane za jednakost (3.2.5) neposredno slijede ove posljedice:

(i) Neka je $f : D\to\mathbf{R}$, $D\subseteq\mathbf{R}$, funkcija realne promjenljive, D_1 i D_2 podskupovi skupa D i neka je $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka gomilanja ovih skupova. Ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ $(x\in D_1)$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = B$ $(x\in D_2)$ *i* $A \ne B$, onda $\lim_{x\to x_0} f(x)$ $(x\in D)$ ne postoji. Specijalno, ako je $\lim_{x\to x_0+} f(x) \ne \lim_{x\to x_0-} f(x)$, onda ne postoji $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

(ii) Ako znamo da postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $(x\in D)$, onda je za njegovo izračunavanje dovoljno izdvojiti proizvoljan podskup $D_1 \subseteq D$ pri čemu je $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka gomilanja skupa D_1 i naći $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $(x\in D_1)$.

Specijalno, ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, onda je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0+0)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0-0)$ (ako i $f(x_0+0)$ i $f(x_0-0)$ imaju smisla, ali iz egzistencije $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ slijedi da bar jedan od $f(x_0+0)$ i $f(x_0-0)$ ima smisla, tj. da je tačka x_0 tačka gomilanja bar jednog od skupova: skupa vrijednosti argumenta većih od x_0 i skupa vrijednosti argumenta manjih od x_0).

Primijetimo da svaka izolovana tačka skupa D po definiciji pripada skupu D, dok tačka gomilanja, lijeva tačka gomilanja i desna tačka gomilanja skupa D $(\subseteq \mathbf{R})$ mogu a ne moraju pripadati skupu D. Npr., neka je $D := (0,9)\cup\{10\}$. Tada je tačka 10 izolovana tačka skupa D. Sve ostale tačke skupa D su ujedno i tačke gomilanja tog skupa. Te tačke gomilanja, dakle, pripadaju skupu D. No, očigledno je da su tačke 0 i 9 takođe tačke gomilanja skupa D (0 je desna, a nije lijeva tačka gomilanja, dok je 9 lijeva a nije desna tačka gomilanja skupa D), ali one tom skupu ne pripadaju .

Ako je x_0 desna ali nije lijeva tačka gomilanja skupa D, onda između pojma limesa i desnog limesa funkcije $f: D\to\mathbf{R}$ u tački x_0 nema razlike. Isto tako, ako je x_0 lijeva ali nije desna tačka gomilanja skupa D, onda između pojma limesa i lijevog limesa funkcije $f: D\to\mathbf{R}$ u tački x_0 nema razlike. No, ako je x_0 i lijeva i desna tačka gomilanja skupa D, onda vrijedi sljedeće:

Granična vrijednost $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ postoji akko postoje oba limesa $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)$ i ako vrijedi $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)$. U slučaju da je ovaj uslov zadovoljan, onda vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \tag{3.2.6}$$

Napomena 3.2.2.

Definiciju 3.2.1. za slučaj $y_0 \in \mathbf{R}$ možemo iskazati i ovako:

Vrijedi $f(x) \to y_0$ kad $x \to x_0$ ako se razlika $f(x) - y_0$ može po aspolutnoj vrijednosti učiniti po volji malom približi li se $x\in X$, $x \neq x_0$, dovoljno blizu tačke x_0.

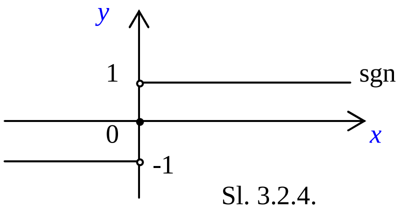
Primjer 3.2.2. 1° Za funkcija f datu formulom (3.2.5) očito vrijedi

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0+} f(x),$$

pa (prema prethodnoj posljedici (i) slijedi da $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne postoji.

2° Funkcija sgn: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definirana pomoću

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

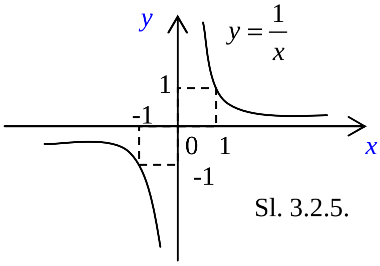


Sl. 3.2.4.

Za tu funkciju je $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1 \neq \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, tj. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ ne postoji.

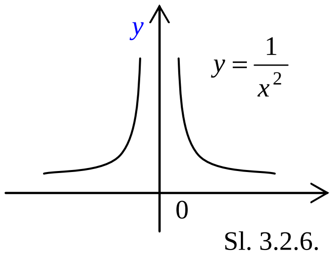
No, primijetimo da je $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1 \neq \operatorname{sgn}$ (v. sl. 3.2.4.).

3° $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ (v. sl. 3.2.5.), dok $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ne postoji (jer $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}$).



Sl. 3.2.5.

4^o $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (v. sl.3.2.6),



Sl. 3.2.6.

5^o $\lim_{\mathbf{N}\ni x\to\infty} (x - \lfloor x \rfloor) = 0$, jer za $\forall(x = n\in \mathbf{N})$ vrijedi $\lfloor x \rfloor = n$ pa je $x - \lfloor x \rfloor = n - n = 0$ (gdje je, za svaki $x\in \mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ /donji/ cijeli dio od x, tj. najveći cijeli broj koji nije veći od x, dok je $x - \lfloor x \rfloor := \{x\}$ razlomljeni dio od x).

Primijetimo da je slučaj 5^o primjera 3.2.2. specijalan slučaj sljedeće situacije:
Neka je $f : D \to \mathbf{R}$ funkcija realne promjenljive i neka je pri tome $+\infty$ tačka gomilanja skupa $D\cap\mathbf{N}$. U tom slučaju zajedno sa funkcijom f možemo posmatrati funkciju $f|D\cap\mathbf{N}$, tj. niz (x_n), gdje je $x_n = f(n)$, je definiran za dovoljno velike vrijednosti n $(\in \mathbf{N})$. Otuda vidimo da je pojam granične vrijednosti niza realnih brojeva uveden u okviru izlaganja teorije nizova zapravo specijalan slučaj pojma granične vrijednosti realne funkcije realne promjenljive opisane u definiciji 3.2.1, jer je $\lim_{n\to\infty} x_n$ jednostavno druga oznaka za $\lim_{\mathbf{N}\ni x\to+\infty} f(x)$. Prema već rečenom, jasno je da ako postoji $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, onda postoji i $\lim_{n\to\infty} x_n$, dok obrnuto ne mora da važi (v. primjere 3.2.2.5^o i 3.2.3.).

U opštem slučaju veza između granične vrijednosti funkcije $\lim_{x\to x_0} f(x)$ i granične vrijednosti nizova $(f(x_n))$ za razne nizove (x_n) za koja je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ može se precizno izraziti sljedećom teoremom (koja pokazuje da se pojam granične vrijednosti funkcije može u potpunosti opisati pomoću pojma granične vrijednosti niza).

Teorema 3.2.1. Granična vrijednost realne funkcije $f : D\to K$ realne promjenljive u tački $x_0\in \overline{\mathbf{R}}$ jednaka je y_0 ($y_0\in \overline{\mathbf{R}}$), tj. $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, akko za svaki niz (x_n), takav da je $x_n\in D\setminus\{x_0\}$ za svaki $n\in \mathbf{N}$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, vrijedi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Navedeni potrebni i dovoljni uslovi u ovoj teoremi mogu se uzeti za definiciju pojma granične vrijednosti funkcije "na jeziku nizova", koju je prvi koristio H. E. HEINE (1872). *)

Definicija 3.2.4. (**Po Heineu**). Za funkciju $f : D \to \mathbf{R}$ realne promjenljive kaže se da ima u tački $x_0\in \overline{\mathbf{R}}$ graničnu vrijednost jednaku y_0 ($y_0\in \overline{\mathbf{R}}$), ako za svaki niz $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ tačaka iz D, za koji je $x_n \neq x_0$ za svaki $n\in \mathbf{N}$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, važi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

U Heineovoj koncepciji definicije limesa funkcije kao polazna tačka se javlja pojam limesa niza, dok se pojam limesa funkcije javlja kao izvedeni pojam.

Za pojam graničnog teženja funkcije (u opštoj definiciji 3.2.4) bitno je da svaki način teženja argumenta x broju c (koji može, ali ne mora pripadati području definicije argumenta x), tj. bilo koji niz (x_n) iz područja definicije argumenta x, kojem su svi članovi različiti od c, a teže ka c, "vodi" do iste granične vrijednosti g. Vidjet ćemo iz narednog primjera da različiti načini teženja promjenljive x mogu voditi do različitih vrijednosti g, pa se u tom slučaju ne govori o jedinstvenoj graničnoj vrijednosti u gornjem smislu. Međutim, važno je primijetiti da je dovoljno zahtijevati da je za svaki niz (x_n) iz područja promjenljive x koji teži vrijednosti c niz (y_n) vrijednosti funkcije $y(x)$ konvergentan, jer iz toga već slijedi da svi nizovi (y_n) teže istoj graničnoj vrijednosti g. Zaista, ako bi niz (y_n) težio vrijednosti g' kada (x_n) teži ka c, a niz $(\overline{y}_n)$ drugoj vrijednosti g'', kad i $(\overline{x}_n)$ teži ka c, težio bi i niz $y_1, \overline{y}_1, \ldots, y_n, \overline{y}_n, \ldots$ koji nastaje iz zadanih nizova uzimajući naizmjenično po redu članove prvog i drugog niza, također nekoj vrijednosti $\overline{g}$, jer je i to niz vrijednosti funkcije $y(x)$ koje odgovaraju vrijednostima argumenta x iz njegova područja definicije koje teže ka c. No, nizovi (y_n) i $(\overline{y}_n)$ su podnizovi iz novog (navedenog) niza, pa, prema teoremu o jednoznačnosti granične vrijednosti niza, teže i oni istoj graničnoj vrijednosti $\overline{g}$. Iz teoreme 3.2.1. i upravo dokazane činjenice neposredno slijedi sljedeća teorema:

---

*) E. Edudard Heine (1821 – 1881) - njemački matematičar.

Teorema 3.2.2. Neka je na skupu $D\ (\subseteq\mathbf{R})$ definisana (realna) funkcija $f(x)$ i neka je $x_0\in\overline{\mathbf{R}}$ (tačka gomilanja skupa D). Tada su dvije sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:

1) Postoji $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

2) Za svaki niz (x_n) tačaka iz D $(x_n\neq x_0$ za svaki $n\in\mathbf{N})$ koji teži ka x_0 postoji $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

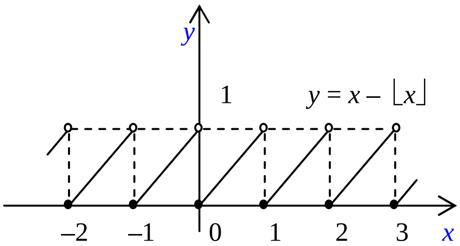
Primijetimo da se teoremom 3.2.1 - iskazuje ekvivalentnost definicije 3.2.1. granične vrijednosti funkcije, tj. Košijeve (Cauchy) definicije, koja se još naziva i definicijom "na jeziku okolina" (ili "na jeziku ε-δ", ako se uzme u obzir njen zapis za konačne x_0 i y_0), i Hajneove (Heine) definicije granične vrijednosti funkcije (tj. definicije 3.2.4). Zato se teorema 3.2.1. može iskazati i u ovom (ekvivalentnom) obliku:

Teorema 3.2.3. *Cauchyjeva definicija limesa funkcije i Heineova definicija limesa funkcije su međusobno ekvivalentne.*

Primjer 3.2.3. *Dokazati da ne postoji* $\lim_{x\to+\infty}(x-\lfloor x\rfloor)$.

Rješenje: Funkcija f data formulom $f(x):=x-\lfloor x\rfloor$ ima prirodni domen $D:=\mathbf{R}$ i vrijedi (v. sl. 3.2.7)

$$f(x)=x-\lfloor x\rfloor=\begin{cases}\vdots & \\ x-(-1)=x+1, & -1\le x<0,\\ x-0=x, & 0\le x<1,\\ x-1, & 1\le x<2,\\ \vdots & \end{cases}$$



Slika 3.2.7.

Kako je $x_0:=+\infty$ tačka gomilanja domena date funkcije, to dati limes ima smisla. Za $x'_n:=n$ imamo $x'_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ i $f(x'_n)=0\to 0$ $(n\to\infty)$, a za $x''_n:=n+\alpha$, gdje je $0<\alpha<1$ (npr., $\alpha=\frac{1}{2}$), imamo takođe $x''_n\to+\infty$, ali $f(x''_n)=n+\alpha-\lfloor n+\alpha\rfloor=n+\alpha-n=\alpha\to\alpha\neq 0$ $(n\to\infty)$. Zato ne može postojati vrijednost $y_0\in\overline{\mathbf{R}}$ kojoj bi težio niz $(f(x_n))$ za svaki niz (x_n) koji teži ka $+\infty$, pa prema prethodnoj teoremi 3.2.3. slijedi da ne postoji $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

U jednom od narednih odjeljaka dokazat ćemo da vrijede sljedeće važne jednakosti: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, koje se često koriste u rješavanju zadataka.

§ 3.3. Opšte osobine konačnih i beskonačnih graničnih vrijednosti funkcija (Osnovne teoreme teorije graničnih vrijednosti funkcija)

U prethodnom paragrafu §3.2. izvedena je veza između pojma granične vrijednosti funkcije i granične vrijednosti niza. Ta se veza koristi kod određivanja limesa nizova (npr., limes niza $(n\sin\frac{1}{n})$ se može odrediti pomoću limesa funkcije $f(x):=\dfrac{\sin x}{x}$ u tački 0, jer za $x_n=\dfrac{1}{n}$ imamo da je $y_n:=n\cdot\sin\dfrac{1}{n}=f(x_n)$, pa iz $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ i $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ slijedi da je $\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to 0}f(x)=1$), ali se može korisno primijeniti, između ostalog i pri dokazu mnogih osobina koje su u vezi sa graničnim vrijednostima funkcija. Zapravo, preko odgovarajućih osobina nizova, primjenom teoreme o ekvivalentnosti Cauchyjeve i Heineove definicije granične vrijednosti funkcija, možemo praktično za sve osobine graničnih vrijednosti nizova koje su poznate (i izvedene) u teoriji nizova dokazati analogne kad su u pitanju limesi realnih funkcija realne promjenljive. Na taj način se mogu dokazati svi stavovi (teoreme) koje navodimo u okviru ovog paragrafa, a ovdje ćemo radi uvježbavanja upotrebe pojmova definicije 3.2.1. i nekih njenih ekvivalenata dokazati neke od njih “na jeziku okolina” (ili “na jeziku $\varepsilon - \delta$”, za slučajeve konačnog limesa funkcije u konačnoj tački).

Teorema 3.3.1. *Funkcija* $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ *ne može imati u tački* x_0 $(\in \overline{\mathbf{R}})$ *dvije različite granične vrijednosti (tj. ako funkcija* f *ima limes u tački* x_0, *on je jednoznačno određen).*

Teorema 3.3.2. *Ako funkcija* $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ *ima konačnu graničnu vrijednost u tački* x_0 $(\in \overline{\mathbf{R}})$, *onda postoji okolina* $U(x_0)$ *tačke* x_0, *takva da je funkcija* f *ograničena na skupu* $\mathring{U}_D(x_0)$.

Dokaz: Kako je $\{ f(x) \mid x \in \mathring{U}_D(x_0)\} = f(\mathring{U}_D(x_0)) \subseteq V(y_0)$ za proizvoljnu okolinu $V(y_0)$ tačke y_0 $(\in \mathbf{R})$ i pogodno odabranu okolinu $U(x_0)$ tačke x_0 $(\in \overline{\mathbf{R}})$, gdje je $y_0 := \lim_{x\to x_0} f(x)$, i kako oklinu $V(y_0)$ možemo izabrati tako da bude ograničen skup, to je i skup $\{ f(x) \mid x \in \mathring{U}_D(x_0)\}$ ograničen. Q.E.D.

Napomenimo da obrnuta teorema (od teoreme 3.3.2) ne važi.

Definicija 3.3.1. Ako je $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ $(x_0 \in \overline{\mathbf{R}})$, kažemo da je funkcija realne promjenljive $\alpha : D \to \mathbf{R}$ **beskonačno mala** kad $x \to x_0$ (beskonačno mala /veličina/ u tački x_0). Funkcija $\alpha : D \to \mathbf{R}$ $(D \subseteq \mathbf{R})$ naziva se **beskonačno velikom** kad $x \to x_0$ $(x_0 \in \overline{\mathbf{R}})$ (beskonačno velika veličina kad $x \to x_0$) ako za svaki $M \in \mathbf{R}$ postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0, takva da za svaki $x \in \mathring{U}_D(x_0)$ vrijedi $|\alpha(x)| > M$. Ako je α beskonačno mala kad $x \to x_0$, pišemo [*)]

$\alpha = o(x_0)$ $(x \to x_0)$ (čitamo: α je malo o od x_0).

Teorema 3.3.3. (i) *Za svaku fukciju* $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ *važi da je* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ $(b \in \mathbf{R}, a \in \overline{\mathbf{R}})$ *akko je* $f(x) = b + \alpha(x)$, *gdje je* α *beskonačno mala kad* $x \to a$. *(Iz* $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}$ *slijedi* $\lim_{x\to a} (f(x) - b) = 0$.)

(ii) *Zbir i razlika dvije beskonačno male funkcije kad* $x \to a$ *su beskonačno male kad* $x \to a$ *(pri čemu se podrazumijeva da su zbir i razlika definirani na presjeku domena sabiraka, tako da je* x_0 *tačka gomilanja toga presjeka).*

(iii) *Ako je* $\alpha : D \to \mathbf{R}$ $(D \subseteq \mathbf{R})$ *beskonačno mala funkcija kad* $x \to a$, *a funkcija* β *ograničena na skupu* $\mathring{U}_D(a)$ *za neku okolinu* $U(a)$ *tačke* a, *onda je* $\alpha\beta$ *beskonačno mala kad* $x \to a$.

Ako je $f(x) = c \in \mathbf{R}$ za svaki x iz neke okoline tačke x_0, onda je, očito, $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.

Teorema 3.3.4. *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ $(\in \mathbf{R})$, *onda je* $\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$, *tj.* $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$, $(a \in \overline{\mathbf{R}})$.

Dokaz: Tačnost ove teoreme slijedi iz nejednakosti $||f(x)| - |A|| \le |f(x) - A|$.

Sljedeća teorema odnosi se na osobine limesa funkcije koje su u vezi relacije poretka u $\mathbf{R}$.

Teorema 3.3.5. (O nejednakostima). (i) *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, $(a \in \overline{\mathbf{R}})$, *onda postoji okolina* $U(a)$ *tačke* a, *takva da je* $f(x) < g(x)$ *za svaki* $x \in \mathring{U}_D(a)$, *gdje je* D *presjek domena* $D(f)$ *i* $D(g)$. *Specijalno, ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = b < c$, *gdje je* c *realan broj, onda postoji okolina* $U(a)$ *tačke* a *takva da je* $f(x) < c$ *za svaki* $x \in \mathring{U}_D(a)$ *(gdje je* D *domen od* f).

[*)] O asimptotskim oznakama o (malo o), O (veliko O), $\sim$ (ekvivalentno) (simbole o i O nazivamo **simboli Landaua**, prema E. Landau) i njihovim osobinama izlažemo u posebnom odjeljku ovog poglavlja.

Analogno važi kada se znak $<$ *zamijeni znakom* $>$ (*ili sa* $\leq$, *odnosno sa* $\geq$).

(ii) *Ako postoje granične vrijednosti* (*konačne ili beskonačne*) $\lim_{x\to a} f(x)$ *i* $\lim_{x\to a} g(x)$ ($a\in \overline{\mathbf{R}}$), *pri čemu je za neku okolinu* $U(a)$ *tačke a ispunjeno* $f(x)\leq g(x)$ *za sve* $x\in \mathring{U}_D(a)$ (*gdje je* D *presjek domena* $D(f)$ *i* $D(g)$ *kojem je tačka* a *tačka gomilanja*), *onda je i* $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Analogno važi kada se znak $\leq$ *zamijeni znakom* $\geq$.

(iii) (**Teorema o dva žandara**, teorema o stezanju / uklještenju /). *Neka su* f, g, h *tri realne funkcije jedne realne promjenljive,* D *presjek domena* $D(f), D(g)$ *i* $D(h)$ *kojem je tačka* a *tačka gomilanja i neka je* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *za sve* $x\in \mathring{U}_D(a)$, *gdje je* $U(a)$ *neka okolina tačke* a ($\mathring{U}_D(a) := U(a) \cap D \setminus \{a\}$). *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$ ($a, b \in \overline{\mathbf{R}}$), *onda je i* $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

Sljedeća teorema daje jednostavnu vezu između algebarskih operacija u skupu $\mathbf{R}$ i graničnog prelaza za funkcije.

Teorema 3.3.6. (**O algebarskim operacijama za limese funkcija**). *Neka je* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *i* $\lim_{x\to a} g(x) = c$ ($b, c \in \mathbf{R}$), *gdje je tačka* a ($\in \overline{\mathbf{R}}$) *tačka gomilanja presjeka* D ($\subseteq \mathbf{R}$) *domena* $D(f)$ *i* $D(g)$ *realnih funkcija* f *i* g. *Tada je* :

$a)$ $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c \quad (= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x))$;

$b)$ $\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)] = k\cdot \lim_{x\to a} f(x), \quad (k\in \mathbf{R})$;

$c)$ $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = b\cdot c \quad (= \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x))$;

$d)$ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}\left(= \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\right)$ *ako je* $c\neq 0$.

Napomena: Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, onda o graničnoj vrijednosti funkcije $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ u tački a ne možemo na osnovu prethodnih teorema ništa određeno kazati. Svojstva $a)$ i $b)$ mogu se proširiti na linearnu kombinaciju $\sum_{i=1}^{n} k_i\cdot f_i(x)$, a svojstvo $c)$ na proizvod $\prod_{i=1}^{n} f_i(x)$ i, specijalno, na stepen $(f(x))^n$ ($n\in \mathbf{N}$).

Teorema 3.3.7. (**O nekim svojstvima beskonačnih graničnih vrijednosti**).

1.° *Ako je* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (*ili* $-\infty$), ($x_0\in \overline{\mathbf{R}}$), *onda je* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

2.° *Ako je* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ ($x_0\in \overline{\mathbf{R}}$), *onda je* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

3.° *Ako je* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *i ako je* $f(x)\neq 0$ *u nekoj okolini* $\mathring{U}_D(x_0)$ (*gdje je* $D\subseteq\mathbf{R}$ *domen funkcije* f), *onda je* $\lim_{x\to x_0}\dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$, ($x_0\in \overline{\mathbf{R}}$).

4.° *Ako je* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($x_0\in \overline{\mathbf{R}}$), *a funkcija* g *ograničena odozdo u nekoj okolini* $\mathring{U}^*_D(x_0)$, *gdje je* D *presjek domena* $D(f)$ *i* $D(g)$ *kojem je* x_0 *tačka gomilanja, i, specijalno ako je* $\lim_{x\to x_0} g(x) = b\in \mathbf{R}$, *onda je*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = +\infty.$$

5.° *Ako je* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A\in \mathbf{R}$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *onda je* $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \operatorname{sgn} A\cdot\infty$ *za* $A\neq 0$ *i* $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Dokaz: 4.° Iz uslova dijela 4.° ove teoreme slijedi da postoji broj $p\in\mathbf{R}$, takav da je $p < g(x)$ za svaki $x\in \mathring{U}^*_D(x_0)$, i da za svaki dovoljno veliki broj $\Delta > 0$ postoji okolina $U'(x_0)$ tačke x_0 takva da je $f(x) > \Delta - p$ za svaki $x\in \mathring{U}'_D(x_0)$. Otuda slijedi da postoji okolina $U(x_0)$, sadržana u okolinama $U^*(x_0)$ i $U'(x_0)$, takva da je $f(x) + g(x) > \Delta$ za svaki $x\in \mathring{U}_D(x_0)$, pa je $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$.

Polazeći od definicije limesa funkcije, iz egzistencije naznačenog limesa lako se dokažu i osatli dijelovi (tj. 1.° – 3.° i 5.°) ove teoreme. Q.E.D.

I kod funkcija definiraju se limes inferior i limes superior, slično kao kod nizova. **Limes inferior** (odnosno **limes superior**) funkcije $f : D\to K$ $(D, K\subseteq \mathbf{R})$ kad $x\to a$, u oznaci $\liminf\limits_{x\to a} f(x)$ ili $\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$ (odnosno $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ ili $\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$), je najmanja (odnosno najveća) granična vrijednost niza $(f(x_n))$ po svim nizovima (x_n) $(x_n\in D)$ koji teže ka a. Za razliku od limesa, limes inferior i limes superior uvijek postoje u $\overline{\mathbf{R}}$.
Lako se vidi da funkcija $f : D\to K$ $(D, K\subseteq \mathbf{R})$ ima graničnu vrijednost A kad $x\to a$ akko je $\liminf\limits_{x\to a} f(x)=\limsup\limits_{x\to a} f(x)=A$, $(A\in \overline{\mathbf{R}}$, $a\in \overline{\mathbf{R}}$, gdje je a tačka gomilanja od $D)$.

Npr., $\liminf\limits_{x\to+\infty} f \sin x=-1\neq 1=\limsup\limits_{x\to+\infty}\sin x$, pa $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ ne postoji.

§ 3.4. Osnovne elementarne funkcije realne promjenljive

Osnovne elementarne funkcije realne promjenljive su (*konstante* i *identička funkcija* i) *eksponencijalne* i *logaritamske funkcije*, *stepene funkcije*, *trigonometrijske* i *inverzne trigonometrijske funkcije*. U narednom poglavlju ćemo vidjeti da se sve tzv. elementarne funkcije mogu izraziti samo pomoću eksponencijalne i kogaritamske funkcije, koje su, prema tome, **osnovne funkcije** u matematici. To praktično znači da, ako se ove dvije funkcije dovoljno rigorozno (strogo) definiraju (u realnom i u kompleksnom domenu), time je riješeno pitanje stroge definicije svih ostalih elementarnih funkcija. Zato ćemo ovdje detaljno opisati samo strogo uvođenje eksponencijalne funkcije i ustanoviti egzistenciju njene(jednoznačne) inverzne funkcije (u realnom domenu) koja se naziva *logaritamskom funkcijom*. Inače, osnovne elementarne funkcije mogu se definirati ili neposredno pomoću osnovnih računskih operacija ili polazeći od geometrijske interpretacije. Međutim, uglavnom one imaju određenu "očiglednost", što i opravdava njihov naziv. U skladu sa navedenom konvencijom u §3.1., pod **domenom osnovne elementarne** (i, uopšte, elementarne, kao i proizvoljne realne funkcije f jedne realne promjenljive date analitičkim izrazom $f(x)$) funkcije podrazumijeva maksimalan (u smislu inkluzije) podskup skupa $\mathbf{R}$ koji dopušta izraz kojim je ta funkcija zadana (ako nije drugačije rečeno).

3.4.1. Pojmovi stepena, korijena i logaritma. Eksponencijalne i logaritamske funkcije

U prethodnim odjeljcima operirali smo sa funkcijama kao što su npr. eksponencijalna funkcija, a da ih zapravo nismo definirali u svim slučajevima (koji imaju smisla u realnom domenu). Izrazi oblika a^n, gdje je n prirodan broj, mogu se definisati svođenjem na operaciju množenja. Naime, stepen a^n sa prirodnim izložiocem n i bazom a iz $\mathbf{R}$ definira se kao ponovljeno množenje:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{puta}},\qquad (n\in\mathbf{N},\ a\in\mathbf{R}). \tag{3.4.1}$$

Za $n = 0$ i za svaki $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$, stepen a^n definiramo formulom

$$a^0 = 1, \tag{3.4.2}$$

a za negativne cijele izložioce $-n$ i za svaki $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$, definiramo

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}. \tag{3.4.3}$$

Ovim je definiran pojam stepena sa cijelim izložiocem. Izrazi oblika $a^{\frac{m}{n}}$, gdje su m i n prirodni brojevi, mogu se takođe svesti na osnovne operacije stepenovanja i korjenovanja. Ali, izrazi oblika a^x, gdje je x iracionalan broj, ne mogu se automatski svesti na osnovne operacije, već se moraju definirati. Jedan prirodan način da se to definiranje uradi je sljedeći:

Ako je (r_k) niz racionalnih brojeva koji konvergira ka realnom broju $x\in\mathbf{R}$, za svaki $a\in\mathbf{R}^+$, definiramo

$$a^x := \lim_{k\to+\infty} a^{r_k}. \tag{3.4.3}$$

Da bi ovo bilo dobro (valjano) definirano, treba dokazati da limes u (3.4.3) postoji i da ne zavisi od izbora niza (r_k) racionalnih brojeva koji konvergira ka x. To se može postići polazeći od osobina funkcije $r \to a^r$ definirane na skupu $\mathbf{Q}$ racionalnih brojeva.

Drugi način, za koji se pokazuje da je ekvivalentan navedenom, da se defnira stepen a^x sa realnim (ne nužno racionalnim) izložiocem $x\in\mathbf{R}$ i bazom (osnovom) $a\in\mathbf{R}^+$, odnosno da se definira eksponencijalna funkcija $x \to a^x$ $(x\in\mathbf{R},\ 0 < a \neq 1)$, jeste da se stavi

$$a^x := \sup_{\mathbf{Q}\ni r\le x} a^r = \inf_{\mathbf{Q}\ni r\ge x} a^r, \tag{3.4.4}$$

pri čemu treba pokazati da supremum i infimum u (3.4.4) postoje i da su jednaki.

Logaritamska funkcija $x \to \log_a x$ $(x\in\mathbf{R}^+,\ 0 < a \neq 1)$ se definira kao funkcija inverzna eksponencijalnoj funkciji $x \to a^x$ $(x\in\mathbf{R},\ 0 < a \neq 1)$, a zatim se pomoću ovih funkcija mogu definirati i sve ostale elementarne funkcije (kao što je već rečeno).

No, primijetimo da ni opisana definicija nije stroga, jer se bazira na intuitivnom značenju operacija stepenovanja i korjenovanja. U potpuno strogom zasnivanju elementarnih funkcija, polazi se od aksioma realnih brojeva (ili od nekog konstruktivnog načina uvođenja realnih brojeva), a zatim se dokazuje postojanje stepena i racionalnih korijena. U tom smislu dajemo sljedeći postupak:

Pomoću principa matematičke indukcije, za svaki $n\in\mathbf{N}$, definiramo (na način opisan u odjeljku o realnim brojevima) zbir (sumu) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ i proizvod $\prod_{i=1}^{n} x_i$ realnih brojeva $x_1, \ldots, x_n$, kao i pojam **stepena** (potencije) **sa prirodnim eksponentom** (izložiocem) x^n za svaki $x\in\mathbf{R}$.

Koristeći se cijelim brojevima, proširujemo pojam stepena ovako:

$$\forall (x\in\mathbf{R}\setminus\{0\})\quad x^0 = 1,\ x^{-n} = (x^n)^{-1} \quad \text{za svaki } n\in\mathbf{N}.$$

Aksioma neprekidnosti omogućava nam da uvedemo korjenovanje ili što je isto, stepenovanje sa racionalnim izložiocem. U tom smislu imamo sljedeću teoremu.

Teorema 3.4.1. *Za svaki dati pozitivan realan broj x i za svaki prirodan broj n postoji i jednoznačno je određen pozitivan realan broj y, takav da je $y^n = x$, ili simbolički:*

$$\forall (n\in\mathbf{N},\ x\in\mathbf{R}^+)\ (\exists!\ y\in \mathbf{R}^+)\quad y^n = x.$$

Dokaz: Označimo sa A skup $\{z\in[0,+\infty) \mid z^n \le x\}$. Ova jskup A je očigledno neprazan (jer sadži npr. element 0) i ograničen odozgo (npr. brojem 1 ako je $x \le 1$ i brojem x ako je $x \ge 1$). Otuda prema teoremu o supremumu postoji $\sup A$ u $\mathbf{R}$ kojeg ćemo označiti sa y, tj. $y := \sup A$. Očito vrijedi da je $y > 0$. Dokažimo da je y traženi broj, tj. da je $y^n = x$. Pretposatvimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $y^n \neq x$.

Dokažimo da je $y^n < x$ nemoguće. Ako bi bilo $y^n < x$, onda bi vrijedilo $x - y^n > 0$. Označimo razliku $x - y^n$ sa ε. Za svaki $h \in (0, 1]$, prema Newtonovoj binomnoj formuli ,važi:

$$(y+h)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} y^{n-k}h^k = y^n + h\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} y^{n-k}h^{k-1} \le y^n + h\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} y^{n-k}$$

$$= y^n + h\cdot\left[\left(1+y\right)^n - y^n\right].$$

Na osnovu posljedice Arhimedovog svojstva uređenog polja **R**, prema kojoj "za sve $a, b \in \mathbf{R}$ za koje je $a < b$, postoji racionalan broj c, takav da je $a < c < b$", postoji $h \in (0, 1]$ takav da je $h < \varepsilon / [(1+y)^n - y^n]$. Otuda je $(y + h)^n \le y^n + \varepsilon = x$, a to znači da postoji element $y + h$ u skupu A koji je veći od y, što je u suprotnosti sa $y = \sup A$. Prema tome nemoguće je da bude $y^n < x$.

Slično se dokazuje da je $y^n > x$ nemoguće. Zato je $y^n = x$, čime je završen dokaz egzistencije traženog elementa y. Jednoznačna određenost elementa $y\in \mathbf{R}^+$ sa osobinom $y^n = x$ jasna je, jer ako bi postojala dva međusobno različita elementa $y_1, y_2 \in \mathbf{R}^+$, takva da je $y_1^n = x$ i $y_2^n = x$ onda bi za , npr., $y_1 < y_2$, bilo $x = y_1^n < y_2^n = x$, što je nemoguće.
Time je dokaz teoreme 3.4.1. završen.

Definicija 3.4.1. Broj $y\in \mathbf{R}^+$ za koji je $y^n = x$ ($n\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{R}^+$), čija je egzistencija i jednoznačnost osigurana prethodnom teoremom 3.4.1., naziva se n – **ti korijen broja** x i označava sa $y := \sqrt[n]{x}$ ili $y := x^{\frac{1}{n}}$.

Prema tome , pojam **stepena sa racionalnim izložiocem** a^r, $r\in\mathbf{Q}$, može se definirati za svaki $a > 0$ sa: $a^r (= a^{\frac{m}{n}}) = \sqrt[n]{a^m} (= (a^m)^{\frac{1}{n}})$ za $r = \dfrac{m}{n}$, (m, $n\in\mathbf{N}$); $a^r = 1$ za $r = 0$; $a^r = (a^{\frac{m}{n}})^{-1} (= \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}})$ za $r = -\dfrac{m}{n}$, (m, $n\in\mathbf{N}$).

Za novouvedenu operaciju **korjenovanja**, odnosno **stepenovanja sa racionalnim izložiocem** vrijede poznata pravila (za sve $a, b\in\mathbf{R}^+$; $m, n\in\mathbf{N}$; $r, r_1, r_2 \in\mathbf{Q}$) :
(i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; (ii) $a^{r_1}\cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$, $\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 r_2}$, $(ab)^r = a^r b^r$.

$\boxed{1.°}$ Neka je $a\in\mathbf{R}$, takav da je $a > 1$. Tada se lako vidi da, osim osobina (i) i (ii), vrijede i ove osobine:
(iii) $\forall(r_1, r_2 \in\mathbf{Q})$ $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$; (iv) ako je $r_0 \in\mathbf{Q}$, onda je $\lim\limits_{\mathbf{Q}\ni r\to r_0} a^r = a^{r_0}$.

Naš sljedeći korak je da pojam stepena sa racionalnm izložiocem a^r ($a > 0$, $r\in\mathbf{Q}$) proširimo na pojam stepena sa proizvoljnim realnim izložiocem a^x ($a > 0$, $x\in\mathbf{R}$) , tj. da definiramo šta ćemo podrazumijevati pod a^x ako je x realan broj (pa, dakle, i ako je x racionalan broj). No, prije toga razmotrimo ovaj primjer: Većina korisnika matematike i ne razmišlja o tome kako bi se definirao izraz (a time i izračunala njegova vrijednost), npr., $2^{\sqrt{3}}$. Ako neko ima potrebu da izračuna vrijednost ovog izraza, izračunaće je pomoću nekog tehničkog pomagala (digitrona / kalkulatora, elektronskog računara). Tako može dobiti da je

$$2^{\sqrt{3}} \cong 3{,}321997084,$$

tj. dobiće samo približnu vrijednost, sa određenim brojem decimala. Pomoću standardne aproksimacije $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ možemo dobiti $2^{\sqrt{3}} \approx 2^{1{,}73} = 2^{\frac{173}{100}}$, čime smo izraz $2^{\sqrt{3}}$ sveli na stepen sa racionalnim izložiocem. Ovako izračunata približna vrijednost izraza $2^{\sqrt{3}}$ iznosi 3,317. Ako $\sqrt{3}$ aproksimiramo sa više decimalnih mjesta, npr., $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, dobijemo $2^{\sqrt{3}} \approx 2^{1{,}732} = 2^{\frac{1732}{1000}} \approx 3{,}32188$. Još tačnije, dobijemo da je $2^{\sqrt{3}} \approx 2^{1{,}73205} = 2^{\frac{173205}{100000}} \approx 3{,}321995226$, itd. Ovaj algoritam nam daje ideju kako se u opštem slučaju može definirati stepen a^x, za proizvoljan $x\in\mathbf{R}$ ($a > 0$), što smo već i iskazali kroz formule (3.4.3) i (3.4.4). Sada ćemo dati postupak (strogog) uvođenja pojma stepena a^x ($a > 0$), ako je x proizvoljan realan broj. U tom smislu nastavimo započetu proceduru za slučaj kada je $a > 1$.

Neka je, dakle, $a \in (1, +\infty)$ i $x \in \mathbf{R}$. Skupove $\{ a^r \mid r \in \mathbf{Q}, r < x\}$ i $\{ a^r \mid r \in \mathbf{Q}, r > x \}$ označimo sa A i B, respektivno. Iz svojstva (i) slijedi da je skup A ograničen odozgo (proizvoljnim elementom skupa B), a skup B ograničen odozdo (proizvoljnim elementom skupa A). Prema teoremama o supremumu i infimumu postoje konačni $\sup A$ i $\inf B$. Očigledno je $\sup A \le \inf B$. Dokažimo da je zapravo $\sup A = \inf B$.

Zaista, za $r_1 < x < r_2$ $(r_1, r_2 \in \mathbf{Q})$ je $a^{r_1} \le \sup A \le \inf B \le a^{r_2}$, odakle je

$$0 \le \inf B - \sup A \le a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) \le \sup A \cdot (a^{r_2 - r_1} - 1).$$

No, na osnovu svojstva (ii), za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da vrijedi

$$\forall (r_1, r_2 \in \mathbf{Q}) \quad 0 < r_2 - r_1 < \delta \;\Rightarrow\; a^{r_2 - r_1} - 1 < \frac{\varepsilon}{\sup A}.$$

Otuda slijedi da je $0 \le \inf B - \sup A < \varepsilon$, odakle, zbog proizvoljnosti broja ε $(\varepsilon > 0)$, slijedi da je $\sup A = \inf B$.

Prema tome, pojam stepena a^x $(a > 1,\ x \in \mathbf{R})$, a samim tim i pojam eksponencijalne funkcije $x \to a^x$ $(x \in \mathbf{R})$, sa osnovom $a > 1$, može se definirati na sljedeći način.

Definicija 3.4.2. **Stepen sa realnim izložiocem** (eksponentom) x i **osnovom** (bazom) a, $(a > 1)$, je izraz a^x defniran sa

$$a^x = \sup A = \inf B .$$

Funkcija $x \to a^x$ zove se **eksponencijalna funkcija sa osnovom** (**bazom**) a .

Lako se provjerava da je ovako uvedena funkcija proširenje funkcije $\mathbf{Q} \ni r \to a^r$, te da ona zadržava osnovna svojstva funkcije $\mathbf{Q} \ni r \to a^r$, a ima i neka nova. Sljedećim stavom su data osnovna svojstva eksponencijalnih funkcija sa osnovom $a > 1$.

Stav 3.4.1. *Neka je* $a > 1$. *Tada*:

(a) $\forall (x \in \mathbf{R})$ $\lim_{\mathbf{Q} \ni r \to x} a^r = a^x$; (b) $\forall (x_1, x_2 \in \mathbf{R})$ $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;

(c) $\forall (x_1, x_2 \in \mathbf{R})$ $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$; (d) $\forall (x_0 \in \mathbf{R})$ $\lim_{\mathbf{R} \ni x \to x_0} a^x = a^{x_0}$;

(e) *funkcija* $x \to a^x$ *preslikava skup* $\mathbf{R}$ *na skup* $(0, +\infty)$, *tj. rang svake eksponencijalne funkcije* $x \to a^x$ $(a > 1)$ *je skup* $\mathbf{R}^+$.

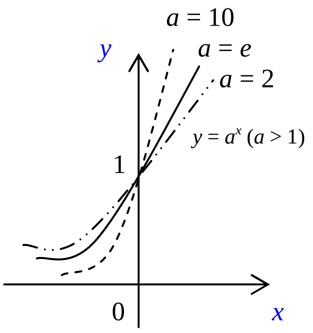
$\boxed{2.^\circ}$ Za slučaj $a \in \mathbf{R}$, $0 < a < 1$, opisana procedura u slučaju 1.° (za $a > 1$) se može ponoviti, uz očigledne izmjene. Na taj način se dolazi do pojma stepena a^x $(0 < a < 1)$ sa realnim izložiocem, odnosno do funkcije $x \to a^x$ koja ima osobine kao i funkcija $x \to a^x$ $(a > 1)$, osim što se osobina (b) u stavu 3.4.1. zamjenjuje sa osobinom

$$\text{(b')} \quad \forall (x_1, x_2 \in \mathbf{R}) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2},$$

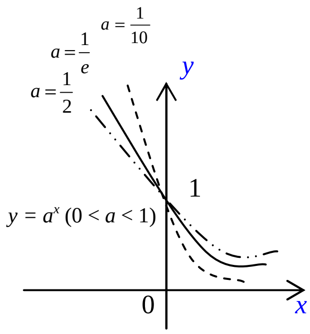
tj. eksponencijalna funkcija $x \to a^x$ je rastuća ako je $a > 1$, a opadajuća za $0 < a < 1$.

$\boxed{3.^\circ}$ Ako je $a = 0$ definiramo $a^x = 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}^+$, a za $a = 1$ još stavljamo $a^x = 1$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Primjer 3.4.1. Grafici eksponencijalnih funkcija: $f_2(x) := 2^x$, $f_e(x) = e^x$, $f_{10}(x) = 10^x$ su prikazani na sl. 3.4.1. i svi su istog oblika, kao i grafik proizvoljne funkcije iz familije $\{f_a \mid a > 1\}$ eksponencijalnih funkcija $f_a := a^x$, s tim što eksponencijalna funkcija brže raste (grafik je "strmiji") ako joj je baza veća. Grafici eksponencijalnih funkcija: $f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x (= 2^{-x})$, $f_{\frac{1}{e}}(x) = e^{-x}$, $f_{\frac{1}{10}}(x) = 10^{-x}$ su prikazani na sl. 3.4.2. i svi su istog oblika kao i grafik proizvoljne funkcije iz familije $\{f_a : 0 < a < 1\}$ eksponencijalnih funkcija $f_a(x) := a^x$, s tim što eksponencijalna funkcija osnove $a \in (0, 1)$ sporije opada što joj je baza veća.



Sl. 3.4.1.



Sl. 3.4.2.

U matematici i njenim primjenama posebno je važna eksponencijalna funkcija sa osnovom e (*Eulerov*[*)] *broj*). Za eksponencijalnu funkciju sa osnovom e koristi se oznaka exp, tako da je $\exp x := e^x$ za svaki $x \in \mathbf{R}$. Takođe se za funkciju $x \longrightarrow a^x$ koristi simbol $\exp_a x$.

Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, data sa $f(x) = a^x$ za $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, prema svojstvima (b) i (e) u stavu 3.4.1., jeste bijekciija, pa ima (jednoznačnu) inverznu funkciju $f^{-1} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, tj. ima smisla sljedeća definicija.

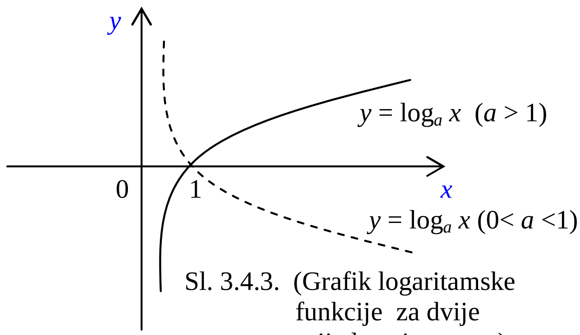
Definiija 3.4.3. Inverzna funkcija $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ funkcije $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ date sa $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$, tj. funkcije $\exp_a x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ naziva se **logaritamska funkcija sa osnovom** (bazom) a i označava simbolom

$$\log_a : \ \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}\,.$$

Pri tome, $\log_a (x)$, $(x > 0)$, pišemo kao $\log_a x$, i zovemo **logaritam broja** x **po bazi** a (ili u odnosu na bazu a). Dakle, $x = \log_a y \ \Leftrightarrow\ y = a^x$.

Logaritamsku funkciju ili logaritam sa osnovom $a = e$ nazivamo *prirodni logaritam* i označavamo $\ln : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ (ln = logarithmus naturalis), tj. $\ln x := \log_e x$. No, u novije vrijeme preovlađuje oznaka $\log x$ (koja je ranije korištena za logaritme za osnovu 10) umjesto oznake $\ln x$. Takođe se ponekad koristi i oznaka lg za logaritme sa osnovom 10 (npr., u ruskoj literaturi, posebno starijoj).

Poznavajući graf(ik) eksponencijalne funkcije, graf(ik) funkcije $\log_a x$ možemo dobiti (kao grafik invezne funkcije) tako da napravimo osno simetričnu sliku grafa eksponencijalne funkcije $\exp_a$ s obzirom na simetralu I. i III. kvadranta, tj. pravca datog sa $y = x$. Iz sl. 3.4.3. se vidi da je logaritamska funkcija za $a > 1$ (strogo) rastuća, a za $0 < a < 1$ (strogo) opadajuća funkcija. Jedina nula logaritamske funkcije $x \to \log_a x$ je $x_0 = 1$ jer je $a^0 = 1$ (za svaki $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$).



Sl. 3.4.3. (Grafik logaritamske funkcije za dvije vrijednosti osnove.)

Po definiciji logaritamske funkcije, kao inverzne od eksponencijalne funkcije sa osnovom a $(0 < a \neq 1)$, imamo:

[*)] **Leonhard Euler** (1707 – 1783) rođen je u Švajcarskoj, ali se razdoblje njegova najplodnijeg rada povezuje s Berlinom u vrijeme Fredericka Velikog i Sant Petersburgom u vrijeme Katarine Velike. Uz Joseph – Louis Lagrangea (1736 – 1813), francuskog matematičara (koji je većinu svojih radova uradio u Berlinu, gdje je naslijedio Eulera u Akademiji), smatra se najvećim i najplodnijim matematičarom 18. stoljeća. Objavio je brojne radove iz teorijske i primijenjene matematike. Njemu se pripisuju danas standardne oznake : π, e, i, te oznake za sumaciju $\sum$ i vrijednost funkcije $f(x)$.

$$\forall(x\in\mathbf{R})\ \log_a(a^x)=x,\quad \forall(y\in\mathbf{R}^+)\ a^{\log_a y}=y\,.$$

Neposredno iz definicije 3.4.3.i stava 3.4.1. slijede osnovne osobine logaritamske funkcije.

Stav 3.4.2. *Neka je* $0<a,\ a\neq 1;\ y_0, y_1, y_2>0$. *Tada*:

1) $\log_a a=1,\ \log_a 1=0$; 2) $\log_a(y_1\cdot y_2)=\log_a y_1+\log_a y_2$;

3) $(y_1<y_2)\Leftrightarrow(\log_a y_1<\log_a y_2)$, *ako je* $a>1$,

$(y_1<y_2)\Leftrightarrow(\log_a y_1>\log_a y_2)$, *ako je* $0<a<1$;

4) *skup svih vrijednosti funkcije* $\log_a:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ *je skup* $\mathbf{R}$ *svih realnih brojeva*;

5) $\lim\limits_{y\to y_0}\log_a y=\log_a y_0$.

Dokaz: Svojstva 1) – 4) slijede iz odgovarajućih osobina eksponencijalne funkcije $x\to a^x$ i definicije logaritamske funkcije, odnosno logaritma. Tako je $\log_a a=1\Leftrightarrow a^1=a$, što je tačno na osnovu definicije stepena. Isto tako je $\log_a 1=0\Leftrightarrow a^0=1$, što vrijedi za svaki $0<a\neq 1$ (čak za svaki $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$). Ostaje da se dokaže svojstvo 5). No, na osnovu 2) je

2') $$\log_a y-\log_a y_0=\log_a\frac{y}{y_0}\,.$$

Zato su nejednakosti $-\varepsilon<\log_a y-\log_a y_0<\varepsilon$ ekvivalentne sa $\log_a(a^{-\varepsilon})=-\varepsilon<\log_a\frac{y}{y_0}<\varepsilon=\log_a(a^{\varepsilon})$, odnosno, na osnovu svojstva 3), sa $a^{-\varepsilon}<\frac{y}{y_0}<a^{\varepsilon}$ za $a>1$ i $a^{\varepsilon}<\frac{y}{y_0}<a^{-\varepsilon}$ za $0<a<1$. U svakom slučaju dobijemo da je $y_0\cdot a^{-\varepsilon}<y<y_0\cdot a^{\varepsilon}$ za $a>1$ ili $y_0\cdot a^{\varepsilon}<y<y_0\cdot a^{-\varepsilon}$ za $0<a<1$, odnosno $-\varepsilon<\log_a y-\log_a y_0<\varepsilon$. Time smo dokazali da je $\lim\limits_{\mathbf{R}^+\ni y\to y_0\in\mathbf{R}^+}\log_a y=\log_a y_0$. Q.E.D.

Razlikujući slučajeve kada je $\alpha=n\in\mathbf{N}$; $\alpha=-1$; $\alpha=0$; $\alpha=\frac{1}{n}$, $(n\in\mathbf{N})$; $\alpha=\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{Q}\ni r\to\alpha(\in\mathbf{R})$, dokazuje se da vrijedi i važno svojstvo:

6) $\forall(b\in\mathbf{R}^+,\ \alpha\in\mathbf{R})\ \log_a(b^{\alpha})=\alpha\cdot\log_a b$,

odakle odmah slijedi da za sve $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ i za svaki $a\in\mathbf{R}^+$ vrijedi jednakost: $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$.

Primijetimo da se realcije 2) i 2') mogu poopštiti tako da važi:

$$\log_a(y_1\cdot y_2)=\log_a|y_1|+\log_a|y_2|,\ \text{ i }\ \log_a\frac{y_1}{y_2}=\log_a|y_1|-\log_a|y_2|$$

za sve $a\in\mathbf{R}^+$; $y_1, y_2\in\mathbf{R}$ tako da je $y_1\cdot y_2>0$. Također napomenimo da vrijedi relacija $\log_a x^{2n}=2n\cdot\log_a|x|$, za sve $n\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ i $a\in\mathbf{R}^+$. Za $a<0$ funkcija f iz $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$ zadana formulom $f(x)=a^x$ definirana je samo za one $x\in\mathbf{R}$ za kojeje $x=0$ ili $x=\frac{p}{q}$, gdje su p i q relativno prosti cijeli brojevi i q neparan. **Domen takve funkcije je "siromašan", pa najčešće takve funkcije nisu od određenog interesa.** Analogno važi i za njihove inverzne funkcije $f^{-1}(x):=\log_a x$. Zbog ovog i rečenog u 3°, uglavnom se ograničavamo, kod funkcija zadanih relacijom $f(x):=a^x$, na slučajeve $0<a\neq 1$.

Zadatak 3.4.1. [gr.sl.)] Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x)=(-2)^x$. Ispitati da li je ta funkcija injekcija i da li ima (jednoznačnu) inverznu funkciju.

[gr.sl.)] Zadatak zadan za pismeni i završni ispit iz Inženjerske matematike 1 (**IM1**) na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu (održan 17.9.2010).

Zadatak 3.4.2. Odrediti (prirodni) domen D i osnovni period T realne funkcije f jedne realne promjenljive zadane formulom $f(x) := \dfrac{1}{1 - \cos^6 x - \sin^6 x}$.

[*Rezultat.* $D = \left\{ x \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T = \dfrac{\pi}{2}$.]

Zadatak 3.4.3. Odrediti (prirodni) domen, ispitati periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odrediti osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g jedne realne promjenljive zadanih formulama

$$f(x) = 3\cos(4x+6) + \cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{\ln \sin^2 x}, \quad g(x) = \mathrm{tg}|x|.$$

[*Rezultat.* $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T(f) = \pi$; $D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, g nije periodična.]

Zadatak 3.4.4. Odrediti (prirodni) domen, ispitati periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odrediti osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g jedne realne promjenljive zadanih formulama

$$f(x) = 2\cos(3x+6) + (\sin 2x)^{-1} + (\cos^4 x + \sin^4 x)^{-1}, \quad g(x) = \sin|x| + \log\left(x + \sqrt{1-9x^2}\right).$$

[*Rezultat.* $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T(f) = 2\pi$; $D(g) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{1}{3} \right]$, g nije periodična.]

Zadatak 3.4.5.* Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}.$$

a) Odrediti prirodni domen funkcije $g(x) := \sqrt{f(\mathrm{tg}\,x)}$ za $x \neq 0$, $g(0) = t$ $(t \geq 0)$, gdje je f zadana funkcija.

b) Ispitati ograničenost, parnost / neparnost, monotonost i periodičnost funkcije g definirane u a).

---

[*] Zadatak zadan nekoliko puta (s neznatnim izmjenama) za završni ispit iz Inženjerske matematike 1 (**IM1**) na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu u akademskoj 2010/2011. godini (počev od 07. 02. 2011).

Verba rebus proba.
[Potvrdi riječi činjenicama! Pridonesi dokaze.]
(Latinska izreka)

Predavanja za sedmu sedmicu nastave
(u akademskoj 2011/2012. godini)

3.4.2. Stepena funkcija

U prethodnoj tački smo definirali opšti pojam stepena a^x u skupu $\mathbf{R}$, te pojmove eksponencijalne funkcije $x \mapsto a^x$ i logaritamske funkcije $x \mapsto \log_a x$ (baza a je fiksna). Ako sada fiksiramo eksponent, a pretpostavimo da se baza mijenja, u uobičajenim oznakama dobijemo sljedeću definiciju.

Definicija 3.4.4. Za svaki $\alpha \in \mathbf{R}$, funkcija $x \mapsto x^{\alpha}$, definirana na $\mathbf{R}^{+}$ naziva se **stepena funkcija** (ili **potencijalna funkcija**) *sa eksponentom* α.

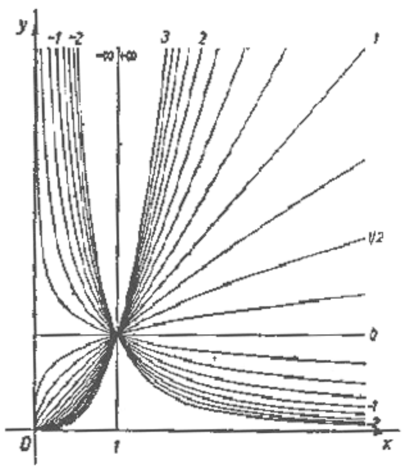
Osnovna svojstva stepene funkcije lako se dobiju iz osnovnih svojstava eksponencijalne i logaritamske funkcije, tj. tako dobijemo ova svojstva:

(*i*) $x^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$, ($x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < a \neq 1$);
(*ii*) $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$, ($x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 < a \neq 1$);
(*iii*) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$, ($x > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$);
(*iv*) funkcija $x \mapsto x^{\alpha}$ je (strogo) rastuća za $\alpha > 0$, a (strogo) opadajuća za $\alpha < 0$ (na $\mathbf{R}^{+}$);
(*v*) za $\forall \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ funkcija $x \mapsto x^{\alpha}$ preslikava $\mathbf{R}^{+}$ bijektivno na $\mathbf{R}^{+}$. (v. sl. 3.4.4)

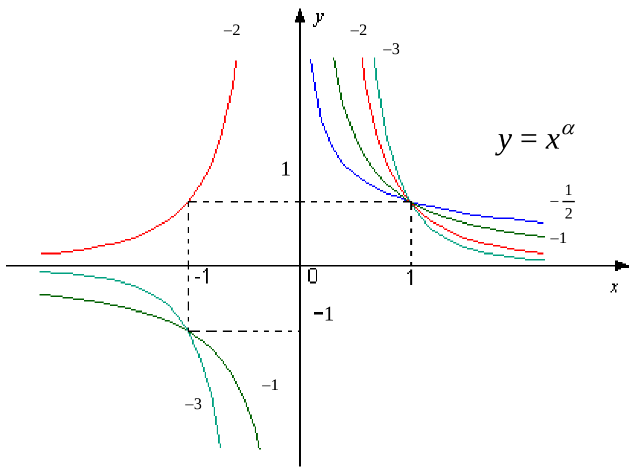
Primijetimo da se za neke vrijednosti eksponenta α domen funkcije $x \mapsto x^{\alpha}$ može proširiti. Tako, ako je $\alpha = \frac{p}{q}$ racionalan broj i njegov imenilac q je neparan, izraz x^{α} možemo za $x < 0$ definirati sa:

$$x^{\alpha} = \begin{cases} |x|^{\alpha}, & \text{ako je } p \text{ paran,} \\ -|x|^{\alpha}, & \text{ako je } p \text{ neparan.} \end{cases}$$

Ako je $\alpha > 0$ još definiramo: $0^{\alpha} = 0$. Lako se vidi kako se dobiju proširenja domena funkcije $x \mapsto x^{\alpha}$ i u ostalim mogućim slučajevima.



Sl. 3. 4. 4.



Sl. 3 .4. 5.

Obično se pod *pojmom stepena funkcija* sa eksponentom α podrazumijeva svaka realna funkcija f (jedne realne promjenljive) koja je zadana formulom $f(x) := x^{\alpha}$. Ovako definiran pojam stepene funkcije je proširenje pojma stepene funkcije uvedenog u definiciji 3.4.4. Lako se izvode i osnovna svojstva ovako proširene stepene funkcije.

Za bilo kakvo $\alpha \in \mathbf{R}$ funkcija f zadana formulom $f(x) := x^{\alpha}$ je definirana za sve $x \in \mathbf{R}^{+}$, dok za $x \le 0$ stepena funkcija f može za neke vrijednosti promjenljive x biti definirana, a za druge ne mora. Naime, imamo ove slučajeve:

1) Ako je $\alpha := \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}^{+}$, onda je funkcija $x \mapsto x^{\alpha}$ definirana na $\mathbf{R}$ ako je q neparan ili ako su i p i q parni, dok u slučaju kada je q paran a p neparan funkcija $x \mapsto x^{\alpha}$ nije definirana za negativne vrijednosti promjenljive x.

2) Za $\alpha \ge 0$, pri čemu je α iracionalan broj, funkcija $x \mapsto x^{\alpha}$ je definirana samo za $x \ge 0$, tj. definirana je na beskonačnom polusegmentu $[0, +\infty)$.

3) Za $\alpha < 0$ vrijedi sve rečeno o domenu kao u slučajevima 1) i 2), s tim što tada stepena funkcija $x \mapsto x^{\alpha}$ nije definirana u tački $x := 0$.

Inverzna funkcija od stepene, ukoliko postoji, takođe je stepena funkcija, tj. ako je $f(x) := x^{\alpha}$ i ako postoji (jednoznačna !) inverzna funkcija f^{-1}, onda je $f^{-1} = x^{\frac{1}{\alpha}}$. Npr. funkcije $f_1(x) := x$, $f_2(x) := x^3$, $f_3(x) := \sqrt{x}$ imaju inverzne funkcije, respektivno, $f_1^{-1}(x) = x$ (tj. $f_1^{-1} = f_1$), $f_2^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_3^{-1}(x) = x^2$ ($x \ge 0$), dok funkcije $f_4(x) = x^2$, $f_5(x) = \sqrt[3]{x^2}$ nemaju inverzne funkcije. Primijetimo da funkcija $f(x) := x^2$ ($x \ge 0$), tj. funkcija $f := f_3^{-1}$ ima inverznu funkciju $f^{-1} := f_3$. (Ovdje je funkcija $f(x) := x^2$ ($x \ge 0$) restrikcija funkcije $f_4(x) := x^2$ na skup $[0, +\infty)$!).

Za $\alpha > 0$ stepena funkcija $f_{\alpha}(x) := x^{\alpha}$ raste u intervalu $(0, +\infty)$ i njen grafik prolazi kroz tačke $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Pravom čija je jednačina $y = x$ grafici funkcija f_{α} $(\alpha > 0)$ su podijeljeni u dvije klase: za $0 < \alpha < 1$ i za $\alpha > 1$. Krive date sa $y = x^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ nazivaju se **parabole**.

Za $\alpha < 0$ stavimo $\alpha = -\beta$ $(\beta > 0)$. Tada je $f_{\alpha} = f_{-\beta}$, gdje je $f_{-\beta}(x) = \frac{1}{x^{\beta}}$. Grafik funkcije $f_{-\beta}$ $(\beta > 0)$ zove se **hiperbola**. Kad x neograničeno raste, $y := f_{-\beta}(x)$ neograničeno opada ka nuli, a kad x opada ka nuli, y neograničeno raste; ose Ox i Oy su *asimptote* krivih $y = f_{-\beta}(x)$, $(\beta > 0)$. Svaka od ovih krivih prolazi kroz tačku $(1, 1)$ a odvaja ih hiperbola čija je jednačina $y = \frac{1}{x}$ na skup hiperbola za $\beta > 1$ i na skup za $0 < \beta < 1$. Za $\alpha = -\beta \in \{-3, -2, -1, -½\}$ grafici funkcija f_{α} su dati na sl.3.4.5.

Grafici stepene funkcije zovu se **politropne krive linije**.

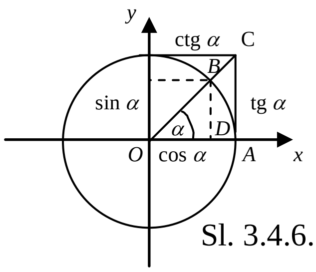
Primjer 3.4.1. U termodinamici je stepenom funkcijom $p = c \cdot v^{-\gamma}$, gdje su c i γ konstante, izražen *Poissonov zakon*, odakle se za $\gamma = 1$ dobije *Boyl – Mariottov* zakon : $p \cdot v = c$ $(c = \text{const})$.

3. 4. 3. Trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije

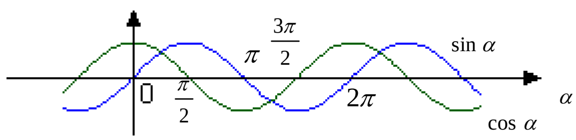
Trigonometrijske funkcije sin, cos, tg i ctg mogu se definirati za uglove trougla polazeći od geometrijskih činjenica, a zatim ih proširiti i za proizvoljne uglove (pomoću trigonometrijske kružnice), odnosno za proizvoljan luk ili proizvoljan realni broj (pomoću brojevne kružnice). Zapravo, te funkcije se mogu uvesti elementarnim putem koristeći centralnu kružnicu radijusa 1, čija je jednačina $x^2 + y^2 = 1$.

Iako ćemo podrazumijevati da je poznato uvođenje trigonometrijskih funkcija pomoću trigonometrijskog kruga, ipak ćemo ukratko opisati taj postupak. U tom smislu posmatrajmo kružni isječak OAB na slici 3.4.6, gdje je $A := (1, 0)$, $B := (x, y)$. Označimo površinu I isječka OAB sa $\frac{\alpha}{2}$.

Tada iz izraza $I = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^{\circ}}$ ili $I = \frac{r \cdot l}{2}$ slijedi da je dužina l luka AB data sa $l = \alpha$.



Sl. 3.4.6.



Sl. 3.4.7.

Geometrijska definicija funkcija sin i cos (a sa slike 3.4.6. se vidi kako se može formulisati i definicija funkcija tg, ctg) glasi:

Trigonometrijska funkcija **sinus** (odnosno **cosinus**) argumenta α (ugla, luka, realnog broja), u oznaci $\sin \alpha$ (odnosno $\cos \alpha$) je ordinata y (odnosno apscisa x) krajnje tačke B kružnog isječka površine $\frac{\alpha}{2}$ (B je tačka presjeka trigonometrijske kružnice čija je jednačina $x^2 + y^2 = 1$ i poluprave povučene iz tačke O pod uglom (veličine) α u odnosu na apscisnu osu). Dakle, vrijedi

$$x = \cos \alpha ,\ y = \sin \alpha .$$

Ako se mijenjaju koordinate tačke B promjenom veličine α:

$$x(\alpha) = \cos \alpha ,\ y(\alpha) = \sin \alpha ,$$

dobijemo odgovarajuće grafike funkcija sin i cos u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, kao na slici 3.4.7, tj. dobijemo poznate “valovite” linije, koje imaju osnovni period 2π (pri čemu je broj π definiran kao površina kruga radijusa 1, a ne kao dužina polukružnice istog radijusa).

Prethodni postupak se može primijeniti i pri uvođenju eksponencijalne funkcije i logaritamske funkcije, s tim što se, umjesto kruga, razmatra hiperbola čija je jednačina $x^2 - y^2 = 1$ (i njene *asimptote*).

Međutim, jedan mogući način strogog uvođenja trigonometrijskih funkcija sin, cos dobije se primjenom funkcionalnih jednačina. Naime, dokazuje se da postoje i da su jednoznačno određene funkcije $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju uslove (f = sin, g = cos):

(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)g(x_2) + g(x_1) f(x_2)$, $g(x_1 + x_2) = g(x_1)\, g(x_2) - f(x_1)\, f(x_2)$;

(ii) $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$; (iii) $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $g(\frac{\pi}{2}) = 0$;

(iv) za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ je $0 < f(x) < x$.

U dokazima nekih stavova (svojstava) vezanih za trigonometrijske funkcije pozivaćemo se na očiglednost, jer ćemo koristiti (nestorgu) geometrijsku definiciju tih funkcija. Takođe ćemo pretpostavljati da su poznata osnovna svojstva tih funkcija (definiranost, parnost / neparnost, periodičnost, ograničenost / neograničenost, monotonost / monotonost po dijelovima, adicione formule i ostali trigonometrijski identiteti).

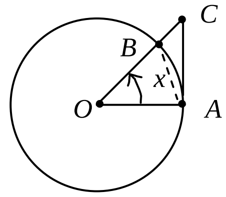
Lako se vidi da vrijede sljedeće jednostavne nejednakosti:

(S 1) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\forall (x \in (0, \frac{\pi}{2}))$; (3.4.1)

(S 2) $|\sin x| \le |x|$, $\forall (x \in \mathbf{R})$, odnosno $|\sin x| < |x|$, $\forall (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$; (3.4.2)

(S 3) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$, $\forall (x, y \in \mathbf{R})$. (3.4.3)

Zaista, uočimo u jediničnom / trigonometrijskom krugu (pogodno je promatrati i krug proizvoljnog poluprečnika r), sa centrom u tački O, oštar ugao $x: = \angle AOB$,\tetivu AB i tangentu AC na krug u tački A (v. sl. 3.4.8).



Sl. 3.4.8.

Očito je da je površina trougla AOB manja od površine kružnog isječka AOB, a ova je manja od površine trougla AOC. Kako je površina trougla AOB jednaka $\frac{1}{2} r^2 \sin x$, površina kružnog isječka AOB jednaka $\frac{1}{2} r^2 x$, a površina trougla AOC jednaka $\frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$, imamo da je (budući da je $r = 1$)

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

odakle, množenjem sa 2, dobijemo nejednakost (S 1).

Nejednakost (S 2) za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ slijede iz nejednakosti (S 1). Za $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ nejednakosti (S 2) slijede zbog neparnosti funkcija $x \mapsto x$ i $x \mapsto \sin x$. Za $|x| \ge \frac{\pi}{2}$ nejednakosti (S 2) su trivijalno tačne, jer je tada $|\sin x| \le 1 < |x|$. Za $x = 0$ je i $\sin x = 0$, pa i u tom slučaju vrijedi prva nejednakost u (S 2).

Nejednakost (S 3) dobije se primjenom formule (identiteta) za pretvaranje razlike sinusa u proizvod. Naime, prema toj formuli je

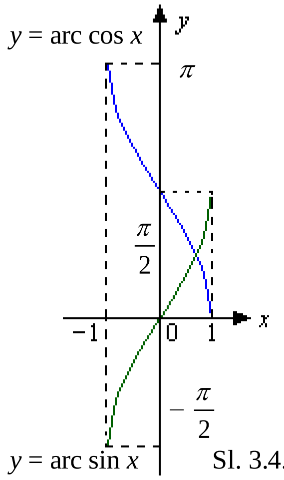
$$|\sin x - \sin y| = 2\cdot\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|,$$

a odatle, zbog nejednakosti (S 2) i svojstva $|\cos t| \le 1$ za svaki $t\in\mathbf{R}$, imamo

$$|\sin x - \sin y| \le 2\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right|\cdot 1 = |x-y|$$

i nejednakost (S 3) je dokazana.

Niti jedna od trigonometrijskih funkcija sin, cos, tg i ctg, posmatrana na cijelom svom prirodnom domenu, očito nije injektivna, te nema (jednoznačne) inverzne funkcije. Međutim, određene restrikcije tih funkcija su bijekcije, te imaju inverzne funkcije. U tom smislu su posebno od interesa sljedeće restrikcije:



Sl. 3.4.9.

1) Neka je $f_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ restrikcija funkcije sin.

Ova funkcija je bijektivna, pa ima inverznu funkciju $f_1^{-1} : [-1, 1] \to$ $\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, koju označavamo sa arc sin (ili $\sin^{-1}$). Dakle,

$$(\, y = \sin x \ \wedge\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,) \ \Leftrightarrow\ (\, x = \text{arc sin}\, y\,),$$

odnosno vrijedi

arc sin (sin x) = x, $\forall$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$); sin (arc sin x) = x, $\forall$ ($x \in [-1, 1]$).

2) Neka je $f_2 : [0, \pi] \to [-1, 1]$ restrikcija funkcije cos.
Inverznu funkciju $f_2^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ označavamo sa arc cos x (ili $\cos^{-1}$). Dakle, ($y = \cos x \ \wedge\ x \in [0, \pi]$) $\Leftrightarrow$ (x = arc cos y), odnosno imamo

arc cos (cos x) = x za $0 \le x \le \pi$, cos (arc cos x) = x za $-1 \le x \le 1$.

3) Neka je $f_3 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$ restrikcija funkcije tg. Funkcija f_3 je bijekcija, pa ima inverznu funkciju. Inverznu funkciju $f_3^{-1} : \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ funkcije f_3 označavamo sa arc tg (ili tg^{-1}, ili $\tan^{-1}$). Dakle,

arc tg (tg x) = x za svaki $x\in(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

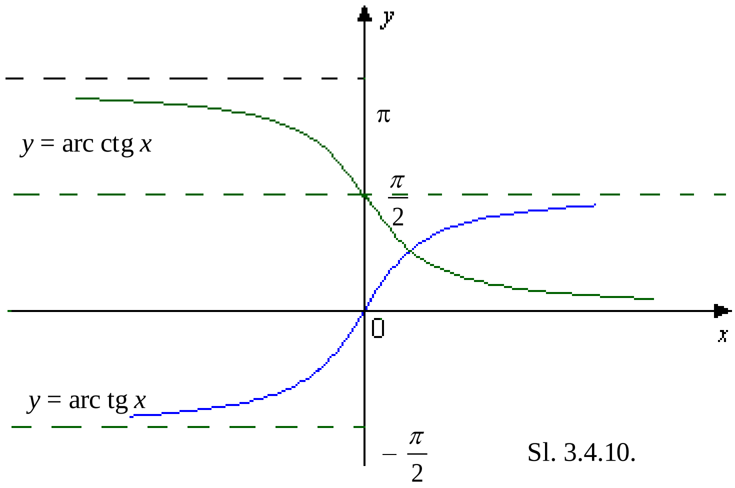
tg (arc tg x) = x za svaki $x\in\mathbf{R}$.

4) Neka je $f_4 : (0, \pi) \to \mathbf{R}$ restrikcija funkcije ctg. Tada je f_4 bijekcija, pa postoji inverzna funkcija $f_4^{-1} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$, koju označavamo sa arc ctg (ili ctg^{-1}). Dakle,

arc ctg (ctg x) = x za svaki $x\in(0, \pi)$;

ctg (arc ctg x) = x za svaki $x\in\mathbf{R}$.

Funkcije arc sin, arc cos, arc tg, i arc ctg nazivamo **inverznim trigonometrijskim funkcijama** ili *ciklometrijskim funkcijama*.



Sl. 3.4.10.

Funkcije sin, cos, tg i ctg (a i funkcije sec i cosec) imaju višeznačne inverzne funkcije koje označavamo, respektivno, sa Arc sin, Arc cos, Arc tg i Arc ctg (odnosno Arc sec, Arc cos), pri čemu je

$$y = \text{Arc}\sin x \iff x = \sin y, \quad y = \text{Arc}\cos x \iff x = \cos y;$$
$$y = \text{Arc tg}\, x \iff x = \text{tg}\, y, \quad y = \text{Arc ctg}\, x \iff x = \text{ctg}\, y.$$

Osim toga, imamo:

$$\text{Arc}\sin x = (-1)^n \arcsin x + n\pi = \begin{cases} \text{arc}\sin x + 2k\pi, \\ (\pi - \arcsin x) + 2k\pi, \end{cases} \quad (n, k \in \mathbf{Z}),$$

pri čemu se $\text{arc}\sin x$ zove glavna vrijednost skupa funkcija $\text{Arc}\sin x$;

$$\text{Arc}\cos x = \begin{cases} \text{arc}\cos x + 2k\pi, \\ -\arccos x + 2k\pi, \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z});$$

$$\text{Arctg}x = \text{arctg}x + k\pi, \quad (k \in \mathbf{Z}); \quad \text{Arcctg}x = \text{arcctg}x + k\pi, \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

§ 3. 5. Cauchyjev princip egzistencije limesa realne funkcije. Egzistencija limesa monotone funkcije

Cauchyjev princip konvergencije nizova u $\mathbf{R}$ i princip konvergencije monotonih nizova u $\mathbf{R}$ imaju svoj analogon u teoriji graničnih vrijednosti realnih funkcija. Ti značajni analogoni su dati sljedećim teoremama.

Teorema 3.5.1. (**Cauchyjeva teorema o egzistenciji limesa funkcije**). *Za egzistenciju konačne granične vrijednosti funkcije* $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ *u tački* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ (*koja je tačka gomilanja skupa* D, *ali mu ne mora pripadati*) *potrebno je i dovoljno da za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji okolina* U *tačke* a *takva da vrijedi*

$$\forall (x_1, x_2 \in D) \ (x_1, x_2 \in \mathring{U} \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon).$$

Definicija 3.5.1. **Oscilacija** funkcije $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ na skupu $A \subseteq D$ je broj $\omega(f, A) \in \overline{\mathbf{R}}$ dat sa

$$\omega(f, A) := \sup_{x_1, x_2 \in A} | f(x_1) - f(x_2) | \ \left(= \sup \left\{ | f(x_1) - f(x_2) | : x_1, x_2 \in A \right\}\right).$$

Primjer 3.5.1. Za funkcije sin, cos, tg, ctg, arc sin, arc tg, i sgn imamo:

$\omega(\sin, \mathbf{R}) = \omega(\cos, \mathbf{R}) = 2$, $\omega(\text{tg}, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \omega(\text{ctg}, (0, \pi)) = +\infty$, $\omega(\text{arc}\sin, [-1, 1]) = \text{arc}\sin(1) - \text{arc}\sin(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$, $\omega(\text{arc tg}, \mathbf{R}) = \pi$, $\omega(\text{sgn}, [0, +\infty]) = 1$.

Ako se koristi pojam oscilacije funkcije na skupu, teoremi 3.5.1. može se dati ova formulacija:

Posljedica 3.5.1. Funkcija $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ ima konačnu graničnu vrijednost u tački $a \in \overline{\mathbf{R}}$ (koja je tačka gomilanja skupa D) akko za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takva okolina U tačke a da je $\omega(f, \mathring{U}_D) < \varepsilon$.

Zadatak 3.5.1. Dokažite da funkcija $f(x) := \cos\frac{1}{x}$ nema graničnu vrijednost u tački 0.

Dokaz: Prirodni domen D date funkcije f dat je sa $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, a tačka 0 je tačka gomilanja skupa D, pa ima smisla $\lim_{x\to 0} f(x)$. Međutim, ako izaberemo dva niza (x_n') i (x_n'') data sa

$$x_n' = \frac{1}{2n\pi}, \quad x_n'' = \frac{1}{\pi + 2n\pi},$$

koji očigledno konvergiraju ka nuli, onda dobijemo da u svakoj okolini U tačke 0 postoje članovi oba niza (x_n') i (x_n''), a pri tome je $f(x_n') = 1$ i $f(x_n') = -1$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Odatle slijedi da je $\omega(f, \mathring{U}) \geq 2$ (a lako se vidi da je $\omega(f, \mathring{U}) = 2$), te ta oscilacija ne može biti proizvoljno mala. Pomoću Cauchyjevog principa egzistencije konačnog limesa funkcije zaključujemo da ne postoji $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$. Skicirajte grafik funkcije $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$.

Teorema 3.5.2. *Neka je* $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ *neopadajuća funkcija i neka su* $i := \inf D$ *i* $s := \sup D$ *tačke gomilanja skupa* D. *Tada postoje* $\lim_{x\to i} f(x)$ *i* $\lim_{x\to s} f(x)$. *Da bi limes*

$\lim_{x\to i} f(x)$ *bio konačan potrebno je i dovoljno da funkcija* f *na skupu* D *bude ograničena odozdo*; *analogno važi za funkciju* $\lim_{x\to s} f(x)$.

Analogna tvrđenja važe za nerastuće funkcije.

Dokaz teoreme 3.5.2. izvodi se analogno kao i dokaz principa konvergencije monotonih nizova u **R**.

Primijetimo da je za neopadajuću funkciju f donja međa (infimum, *ekstremum inferior*) m data sa $m = \lim_{x\to i} f(x)$, a gornja međa (supremum, *ekstremum superior*) M data sa $M = \lim_{x\to s} f(x)$. Analogno važi za nerastuću funkciju.

Napomenimo da se ne može garantovati postojanje limesa monotone funkcije f u tačkama različitim od infimuma i supremuma njenog domena. Npr., funkcija f zadana formulom

$$f(x) := \begin{cases} \log_2 x, & x \le 2, \\ x^2, & x > 2, \end{cases}$$

iako strogo rastuća na $(0, +\infty)$, nema graničnu vrijednost u tački 2 (jer je $\lim_{x\to 2-} f(x) = \log_2 2 = = 1 \ne 4 = \lim_{x\to 2+} f(x)$. Jedino što važi (po pitanju postojanja limesa monotone funkcije u tačkama različitim od infimuma i supremuma njenog domena) jeste sljedeće svojstvo:

Posljedica 3.5.1. Neka je $f : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ monotona funkcija i neka je a tačka gomilanja skupa $\mathbf{R}_a^- \cap D := \{ x \in D \mid x < a\}$ (odnosno $\mathbf{R}_a^+ \cap D := \{ x \in D \mid x > a\}$). Tada postoji $\lim_{x\to a-0} f(x)$ (odnosno $\lim_{x\to a+0} f(x)$).

Ova posljedica slijedi neposredno iz teoreme 3.5.1. ako se posmatra restrikcija funkcije f na skupove $\mathbf{R}_a^- \cap D$ (odnosno $\mathbf{R}_a^+ \cap D$).

§ 3. 6. Granična vrijednost složene funkcije

Mnogi jednostavni primjeri pokazuju da uslovi $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$ nisu dovoljni da bi bilo $\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$, tj. da bismo graničnu vrijednost $\lim_{x\to a} g(f(x))$ mogli da izračunamo "uvođenjem smjene $y = f(x)$". Razmotrimo jedan takav primjer:

Primjer 3.6.1. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$ i $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(y) = (\operatorname{sgn} y)^2$. Tada je $g\circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(g\circ f)(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$, ali je $\lim_{x\to 0} (g\circ f)(x) = 0 \ne 1$.

Dovoljne uslove za izračunavanje granične vrijednosti $\lim_{x\to a} g(f(x))$ metodom uvođenja smjene $y = f(x)$, odnosno za izračunavanje granične vrijednosti složene funkcije F date sa $F(x) = g(f(x))$ daje svaka od sljedeće dvije teoreme.

Teorema 3.6.1. *Neka su ispunjeni uslovi:* (*i*) $B \subseteq \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ *tačka gomilanja skupa* B, $g : B \to \mathbf{R}$ *i* $\lim_{y\to b} g(y) = c$; (*ii*) $A \subseteq \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *tačka gomilanja skupa* A, $f : A \to \mathbf{R}$ *i za svaku okolinu* V *tačke* b *postoji takva okolina* U *tačke* a *da je* $f(\mathring{U} \cap A) \subseteq \mathring{V} \cap B$. *Tada je* $\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$.

Dokaz teoreme 3.6.1. slijedi neposredno iz definicije pojmova složene funkcije i limesa funkcije.

Teorema 3.6.2. *Neka je* :

1) *tačka* a *tačka gomilanja domena složene funkcije* : $y = f(\varphi(x))$, *gdje je* $u = \varphi(x)$ *i* $y = f(u)$;
2) $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$, $\lim_{u\to b} f(u) = c$; 3) *u nekoj okolini* U *tačke* a *je* $\varphi(x) \ne b$ *za* $x \ne a$.

Tada je $\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = c$.

Dokaz: Iz egzistencije granične vrijednosti $\lim_{u\to b} f(u) = c$ slijedi da za proizvoljnu okolinu $W(c)$ tačke c postoji okolina $V(b)$ tačke b takva da je $f(u) \in W(c)$ za sve vrijednosti u iz domena funkcije f za koje je $u \in \mathring{V}(b)$, a iz egzistencije granične vrijednosti $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ slijedi da za okolinu $V(b)$ tačke b postoji okolina $U'(a)$ tačke a za koju je $\varphi(x) \in V(b)$ za svaki x iz domena funkcije φ za koji je $x \in \mathring{U}'(a)$. No, prema uslovu 3) postoji takva okolina U'' tačke a da je $\varphi(x) \ne b$ za $x \ne a$. Kako je (prema poznatom svojstvu okolina tačke) $U(a) := U' \cap U''$ okolina tačke a, to otuda slijedi da za svaku okolinu $V(b)$ tačke b postoji okolina $U(a)$ tačke a za koju je $\varphi(x) \in \overset{\circ}{V}(b)$ za svaki $x \in \mathring{U}(a)$ koji je iz domena funkcije φ. Toznači da za svaku okolinu $W(c)$ tačke c postoji okolina $U(a)$ tačke a za koju je $f(\varphi(x)) \in W(c)$ za svaki $x \in \mathring{U}(a)$ koji je iz domena funkcije $f \circ \varphi$, što dokazuje da je $\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = c$, jer za $A := \mathbf{R}$ i za svaku okolinu U tačke o vrijedi $f(\mathring{U} \cap A) = f(U \setminus \{o\}) = \{o\} \not\subseteq \overset{\circ}{V} \cap B$, gdje je $B := \mathbf{R}$ a V proizvoljna okolina tačke o.

Primijetimo da u primjeru 3.6.1. nisu zadovoljeni svi uslovi teoreme 3.6.1, a ni teoreme 3.6.2.

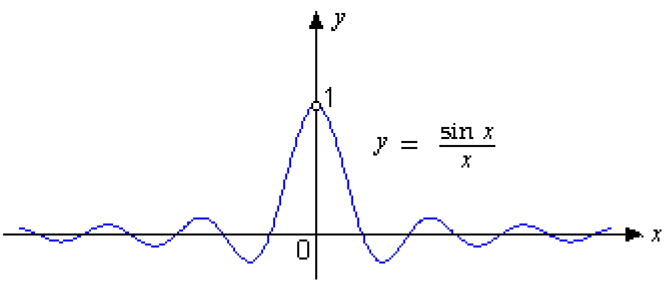
Primjer 3.6.2. Neka je $f(u) := \sqrt{u}$, $u := \varphi(x) = -x^2$. Tada je $\lim_{u\to 0} f(u) = \lim_{u\to 0+} \sqrt{u} = 0$, $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$, ali $\lim_{x\to 0} f(\varphi(x))$ nema smisla, jer je domen složene funkcije $y := f \circ \varphi$ skup $D := \{ x \in \mathbf{R} \mid u = \varphi(x) = -x^2 \geq 0\} = \{0\}$ kojem tačka 0 nije tačka gomilanja (jer konačan skup nema niti jedne tačke gomilanja).

§ 3.7. Neke važne granične vrijednosti

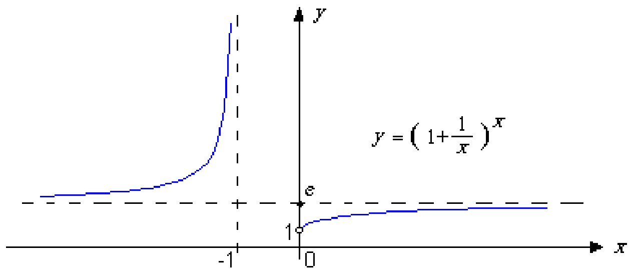
Pokažimo da vrijede ranije navedene jednakosti:

$$(i)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad (ii)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

1) Uočimo najprije da je prirodni domen D funkcije $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ dat sa $D = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ i da mu je 0 tačka gomilanja pa ima smisla granična vrijednost $\lim_{x\to 0} f(x)$. Dokažimo da ta granična vrijednost postoji i da je jednaka broju 1 (v. sl. 3.7.1).



Sl. 3.7.1.



Sl. 3.7.2.

Zaista, neka je dat $\varepsilon > 0$. Za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ iz (3.4.1.) slijedi $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$, odnosno $-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$, odakle je $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$. Kako je $1 - \cos x \equiv 2\sin^2\frac{x}{2}$, $|\sin x| < |x|$ za $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, odnosno $\sin x < x$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, te $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to vrijedi $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$, odakle je

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|, \tag{3.7.1}$$

pri čemu nejednakost (3.4.1) (zbog parnosti funkcija $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ i $x \mapsto |x|$) ostaje da važi i za $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Iz (3.7.1) neposredno slijedi da za $0 < |x| < \varepsilon$ vrijedi $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (npr. $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$), takav da za svaki $x \in D$, za koji je $0 < |x - 0| < \delta$, vrijedi $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$, a to po definiciji limesa znači da je $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Time je relacija u (i) dokazana.

2) Neka je $f(x) := \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Prirodni domen $D(f)$ ove funkcije je dat sa $D(f) = \{\, x \in \mathbf{R} : x \neq 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \in \mathbf{R} \,\}$. Ako se ograničimo na slučaj $1+\frac{1}{x} > 0$, onda dobijemo da je data funkcija definirana na skupu $D := (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Međutim, treba primijetiti da postoje tačke u intervalu $(-1, 0)$ u kojima je data funkcija takođe definirana (npr. za $x = -\frac{1}{3}$ je $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt[3]{-2}} \in \mathbf{R}$, dok za $x = -\frac{1}{2}$ je $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \notin \mathbf{R}$). Očito je da su tačke $\pm\infty$ tačke gomilanja domena date funkcije f pa imaju smisla limesi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Dokažimo da ti limesi postoje i da su jednaki broju e. Najprije dokažimo da je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$.

Neka je $B := \mathbf{N}$, a $g_1, g_2 : B \to \mathbf{R}$ funkcije date sa

$$g_1(n) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \qquad g_2(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Tada je $\lim_{n\to\infty} g_1(n) = \lim_{n\to\infty} g_2(n) = e$. Neka je dalje $A := \{\, x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\}$, a $\varphi : A \to \mathbf{N}$ funkcija data izrazom $\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$. Tada je $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Osim toga, za svaku okolinu $\overset{\circ}{V}_B = \{n \in \mathbf{N} : n > n_0\}$ tačke $+\infty$ u skupu B postoji takva okolina $\overset{\circ}{U}_A := \{\, x \in \mathbf{R} \mid x > n_0 + 1\}$ tačke $+\infty$ u skupu A da je $f(\overset{\circ}{U}_A) \subseteq \overset{\circ}{V}_B$. Otuda slijedi da su ispunjeni uslovi teoreme o limesu složene funkcije, pa funkcije

$$(g_1 \circ \varphi)(x) = \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor+1}\right)^{\lfloor x \rfloor}, \qquad (g_2 \circ \varphi)(x) = \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor+1}$$

imaju limes jednak e kad $x \to +\infty$. Kako je za svaki $x > 1$ ispunjeno

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor+1}\right)^{\lfloor x \rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor+1},$$

to slijedi da postoji $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ i da je $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Dokažimo još da je $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Zaista, koristeći smjene $x = -t$ i $u = t-1$ dobijemo:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1} = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u \cdot \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Iz $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, koristeći smjenu $x = \frac{1}{t}$, dobijemo $\lim_{t\to 0\pm}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$, tj.

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \tag{3.7.2.}$$

Primjeri 3.7.1. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \log_a e, \quad (0 < a \neq 1)$;

b) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left|\begin{array}{l} a^x - 1 = t \\ x\to 0 \Leftrightarrow t \to 0 \\ x = \log_a(1+t)\end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a, \quad (0 < a \neq 1)$, odakle je, specijalno, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3} = e^3$;

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = |x = kt| = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k = \left[\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k = e^k, \quad (k>0)$;

e) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x} = |kx = z| = \lim_{z\to0} k\frac{\ln(1+z)}{z} = k\cdot\lim_{z\to0}\frac{\ln(1+z)}{z} = k\cdot\lim_{z\to0}\ln(1+z)^{\frac{1}{z}} = k, \quad (k>0)$.

§ 3. 8. Asimptotske oznake *o, O,* ~ . Komparacija beskonačno malih (velikih) veličina i primjena asimptotskih razvoja za izračunavanje limesa

Kada se upoređuje ponašanje neke funkcije u okolini neke fiksirane tačke iz $\overline{\mathbf{R}}$ sa ponašanjem neke druge (najčešće jednostavnije) funkcije, kažemo da se ispituje **asimptotsko ponašanje** prve funkcije u okolini te tačke.

U daljem tekstu u ovom paragrafu simbol a označava neku fiksiranu tačku iz $\overline{\mathbf{R}}$ koja je tačka gomilanja zajedničkog domena D svih funkcija o kojima se govori u svakom konkretnom slučaju.

Definicija 3.8.1. Kažemo da je funkcija f **beskonačno mala** u odnosu na funkciju g kad $x \to a$ (ili u tački $x = a$, odnosno u okolini tačke a) i pišemo

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{3.8.1}$$

ako postoji takva okolina tačke a da je $f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$ za svaki $x \in \overset{\circ}{U}_D$, gdje je $\alpha(x)$ beskonačno mala funkcija kad $x \to a$, tj. $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$. Relacija (3.8.1) čita se kao " f je malo o od g kad $x \to a$".

Primijetimo da u definiciji 3.8.1. nije nužno da same funkcije f, g budu beskonačno male veličine, a ako one to jesu, govorit ćemo da je f **beskonačno mala višeg reda** u odnosu na g kad $x \to a$. Jasno, moguće je i da f i / ili g budu beskonačno velike funkcije, pri čemu za funkciju $F : D \to K$ $(D, K \subseteq \mathbf{R})$ kažemo da je **beskonačno velika funkcija** (*beskonačno velika veličina*) kad $x \to a$ $(a \in \overline{\mathbf{R}})$ ako za svaki proizvoljno veliki pozitivni broj M postoji takva okolina U tačke a da je za svaki $x \in \overset{\circ}{U}_D$ ispunjena nejednakost $|f(x)| > M$.

Definicija 3.8.2. Ako postoji okolina U tačke a i funkcija β koja je ograničena na $\overset{\circ}{U}_D$, tako da je $f(x) = \beta(x)\; g(x)$ za svaki $x \in \overset{\circ}{U}_D$, pišemo

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a) \tag{3.8.2}$$

i čitamo " $f(x)$ je veliko O od $g(x)$ kad $x \to a$ ". Ako je istovremeno $f(x) = O(g(x))$ i $g(x) = O(f(x))$ $(x \to a)$, kažemo da su funkcije f i g **istog reda**. Ako je istovremeno $f(x) = O(g(x)^k)$ i $(g(x))^k = O(f(x))$ $(x \to a)$, onda kažemo da je f funkcija k – **tog reda** u odnosu na g kad $x \to a$.

Definicija 3.8.3. Neka postoji okolina U tačke a i funkcija γ, takve da je $\lim_{x\to a}\gamma(x)=1$ i $f(x) = \gamma(x)\; g(x)$ za svaki $x \in \overset{\circ}{U}_D$. Tada kažemo da se funkcija f **asimptotski ponaša** kao funkcija g kad $x \to a$ (ili da su f i g **ekvivalentne funkcije** kad $x \to a$) i pišemo

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to a), \tag{3.8.3}$$

(što se čita i " $f(x)$ je ekvivalentno sa $g(x)$ kad $x \to a$ ").

Izrazi (3.8.1) – (3.8.3) zovu se **asimptotske relacije** / **razvoji** .

Oznaka $\alpha(x) = o(1)$ $(x \to a)$ jednostavno znači da je $\lim_{x\to a} f(x)=0$, tj. $\alpha(x)$ beskonačno mala veličina kad $x \to a$, dok oznaka $1 = O(\alpha)$ znači da α u datom procesu (npr. kad $x \to a$) predstavlja beskonačno veliku veličinu. Najzad, ako je α ograničena veličina u izvjesnom graničnom procesu, koristi se oznaka $\alpha = O(1)$.

Primijetimo da iz definicija 3.8.1. i 3.8.2. slijedi da je α beskonačno mala respektivno višeg reda od β, nižeg reda od β ili istog reda sa β u zavisnosti od toga da li je respektivno (u izvjesnom procesu) $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, odnosno $+\infty$ ili $-\infty$, odnosno konačan broj različit od 0.

Nula se smatra beskonačno malom veličinom koja se ne poredi sa drugom beskonačno malom veličinom.

Lako se vidi da vrijede sljedeći stavovi.

Stav 3.8.1. *Granična vrijednost količnika beskonačno malih veličina ne mijenja se ako ove zamijenimo ekvivalentnim beskonačno malim veličinama .*

Dokaz: Ako je $\alpha\sim\alpha'$ i $\beta\sim\beta'$, onda je $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Iz ovog stava slijedi da se pri izračunavanju limesa količnika $\frac{\alpha}{\beta}$ mogu u brojiocu i imeniocu zanemariti beskonačno male veličine višeg reda i time uprostiti izračunavanje granične vrijednosti $\lim\frac{\alpha}{\beta}$.

Stav 3.8.2. $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$ *akko* $f(x)=g(x)+o(g(x))\ (x\to a)$.

Stav 3.8.3. 1) $f\sim g\ (x\to a)\ \Rightarrow\ o(f)=o(g)\ (x\to a)$; 2) $f\cdot o(g)=o(fg)\ (x\to a)$; 3) $o(f)\pm o(f)=o(f)\ (x\to a)$; 4) $o(o(f))=o(f)\ (x\to a)$; 5) $g=o(f)\Rightarrow g=O(f)\ (x\to a)$; 6) $O(f)+O(f)=O(f)\ (x\to a)$; 7) $o(cf)=o(f)\ (x\to a)$ *ako je* $c=\text{const.}$; 8) *ako je* $g(x)\neq 0$, *onda je* $\frac{o(f)}{g}=o\left(\frac{f}{g}\right)$ *i* $\frac{O(f)}{g}=O\left(\frac{f}{g}\right)$ $(x\to a)$; 9) $o(f+o(f))=o(f)\ (x\to a)$; 10) $o(f)+O(f)=$ $=O(f)\ (x\to a)$; 11) $f=O(g)\ (x\to a)$ *akko postoji konstanta* c *da u nekoj okolini* $\overset{\circ}{U}_D$ *tačke* a *vrijedi* $|f(x)|\le c\cdot|g(x)|$.

Dokaz: Prvo primijetimo da $o(f)\ (x\to a)$ nije oznaka za jednu funkciju, već za skup funkcija koju su beskonačno male u odnosu na f kad $x\to a$. Analogno vrijedi i za iznaku $O(f)\ (x\to a)$. To ujedno znači da se realcije u kojima figurišu simboli o i / ili O ne smiju čitati "zdesna ulijevo". Tako, npr., važi $x^3=o(x)\ (x\to 0)$, ali očito nema smisla napisati $o(x)=x^3\ (x\to 0)$, jer ima i mnogo drugih funkcija koje su "malo o od x kad $x\to 0$ ".

Dokažimo relaciju 1). Zaista, iz $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$ slijedi da postoji okolina U tačke a i funkcija γ, takve da je $\lim_{x\to a}\gamma(x)=1$ i $f(x)=\gamma(x)\,g(x)$ za svaki $x\in\overset{\circ}{U}_D$. Neka je $h(x)=o(f(x))\ (x\to a)$. Tada je $h=\beta f$, gdje je $\lim_{x\to a}\beta(x)=0$, odakle je $h(x)=(\beta\gamma)\,g(x)$, gdje je $\lim_{x\to a}(\beta\gamma)(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)\gamma(x)=0$, pa je $h(x)=o(g(x))$ $(x\to a)$. Slično se dobije i obrnuto, tj. dobije se da iz $h=o(g)$ slijedi $h=o(f)\ (x\to a)$. Time je dokazana jednakost $o(f)=o(g)\ (x\to a)$. Lako se dokazuju i ostale relacije 2) – 11) .

Obično se prilikom komparacije beskonačno mnalih / velikih veličina kao neka vrsta "*etalona*" koriste najjednostavnije funkcije, kao što je funkcija oblika $(x-a)^k\ (x\to a)\ (a\in\mathbf{R})$, odnosno x^k $(x\to\pm\infty)$, gdje je $k\in\mathbf{R}$. Međutim, nije uvijek moguće datu funkciju uporediti sa nekom stepenom funkcijom.

Dokazuje se da vrijedi ova *hijerarhija* u beskonačnosti : logaritamska funkcija sporije raste od stepene, a stepena od eksponencijalne funkcije, odnosno da vrijede relacije:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0,\quad (0<a\neq 1,\ \alpha>0);\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\quad (\alpha\in\mathbf{R},\ a>1),$$

što se može zapisati, respektivno, u obliku

$$\log_a x=o(x^\alpha)\ (x\to+\infty)\ \text{ za }\ \alpha>0,\ 0<a\neq 1;\quad x^\alpha=o(a^x)\ (x\to+\infty)\ \text{ za }\ \alpha\in\mathbf{R},\ a>1,$$

(odnosno u obliku $x^\alpha >> \log_a x$ za dovoljno velike x i za $\alpha>0$ i $0<a\neq 1$; $a^x >> x^\alpha$ za dovoljno velike x i za $\alpha\in\mathbf{R}$, $a>1$).

Primjer 3.8.1. a) Iz $\lim_{x\to 0}\frac{x^{10}}{x}=\lim_{x\to 0}x^9=0$ slijedi da je $x^{10}=o(x)$ $(x\to 0)$, tj. x^{10} je beskonačno mala višeg reda u odnosu na x kad $x\to 0$. Međutim, iz $x=\frac{1}{x^9}\cdot x^{10}$ za $x\neq 0$ slijedi da je $x=o(x^{10})$ $(x\to\pm\infty)$, pa je x^{10} beskonačno velika veličina višeg reda u odnosu na x kad $x\to\pm\infty$.

b) Iz $\lim_{x\to 0}x\cos x=0$ slijedi da je $x\cos x=o(x)$ $(x\to 0)$. S druge strane je $x\cos x=O(x)$ $(x\to\pm\infty)$, jer je $f(x):=x\cos x=\gamma(x)\cdot g(x)$ u nekoj okolini tačke $+\infty$ (ili $-\infty$) u $\mathbf{R}$, gdje je $\gamma(x):=\cos x$ ograničena funkcija u toj okolini.

c) Iz $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ slijedi da je $\sin x\sim x$ $(x\to 0)$.

d) $\ln(1+x)\sim x$ $(x\to 0)$. e) $e^x\sim 1+x$ $(x\to 0)$.

f) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{10x}-e^{5x}}{\sin 10x-\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{[1+10x+o(x)]-[1+5x+o(x)]}{[10x+o(x)]-[5x+o(x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)}{5x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=1.$

§ 3. 9. Neki riješeni zadaci o limesima funkcija

Napomena 3.9.1. U nekim slučajevima pri izračunavanju limesa kombinacije dvije (ili više) funkcija (specijalno, nizova), rezultat se ne može unaprijed odrediti kao npr. u slučajevima limesa zbira, razlike i proizvoda funkcija koje imaju konačan limes. Tada kažemo da je granična vrijednost **neodređena** ili **neodređenog tipa** (ili **neodređenog oblika**). To ne znači da ova granična vrijednost ne postoji, već samo da se ne može unaprijed odrediti primjenom poznatih pravila. Npr., ako je $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ može postojati (kao konačan ili beskonačan) ili ne postojati. U svakom konkretnom slučaju, primjenom nekih transformacija, određujemo graničnu vrijednost datog izraza. *Postoji sedam tipova neodređenosti* : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

Napomena 3.9.2. U računanju limesa date funkcije $f(x)$ u $x=a\in\overline{\mathbf{R}}$ (tj. uključujući i kada je $a=\pm\infty$), obično se ne koristimo (neposredno) definicijom, nego svojstvima limesa u odnosu na algebarske operacije među funkcijama, te prelazom sa *beskonačno velikih* na konačne i proizvoljno male (dijeljenjem s najvećim stepenom). Tako postupamo u slučaju neodređenog oblika $\frac{\infty}{\infty}$ ili $\frac{0}{0}$. U tom smislu treba znati da je

$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}=\pm\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}q^x=0 \ \text{ za } |q|<1.$$

Napomena 3.9.3. U slučaju računanja limesa funkcija kod kojih se nakon uvrštavanja $x=a\in\overline{\mathbf{R}}$ pojavljuje neodređeni oblik $\infty-\infty$ potrebno je datu funkciju transformisati koristeći razne "trikove" (racionaliziranje, faktoriziranje, i dr.) na oblik $\frac{\infty}{\infty}$ (ili $\frac{0}{0}$), pa nastaviti u smislu prelaza sa beskonačno velikih na konačne i proizvoljno male veličine (dijeljenjem brojnika i nazivnika sa najvećim stepenom u brojniku i / ili nazivniku).

Napomena 3.9.4. Pri računanju limesa funkcija oblika $x\mapsto(f(x))^{g(x)}$ kod kojih nakon uvrštavanja $x=a\in\overline{\mathbf{R}}$ dobijemo oblik 1^∞ koristimo jednakost $\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ i druga poznata svojstva limesa. Pri tome treba primijeniti odgovarajuće transformacije pomoću kojih se dati oblik $y=(f(x))^{g(x)}$ svodi na eksponencijalni oblik $e^{\frac{\infty}{\infty}}$, pa potom u eksponentu primijeniti opisani postupak za neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$.

Zadatak 3.9.1. Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^3+x^2-9}{x^2-x+10}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+3x}}{2x+3}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}+3x-4}{\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{x^2-1}}$.

Rješenje:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^3+x^2-9}{x^2-x+10}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x+\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}=\pm\infty$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+3x}}{2x+3}=\left|x\leftrightarrow(-x)\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-x)-\sqrt{x^2-3x}}{2\cdot(-x)+3}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-2+\frac{1}{x}}=1$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}+3x-4}{\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^5}}+3-\frac{4}{x}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1+3}{1+1}=2$.

Zadatak 3.9.2. Izračunati sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\right)}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-3x+4}\right)$.

Rješenje:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-|x|\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=-\infty$ (jer je $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ za $x<0$),

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+4}\right)\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2-3x+4}}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-(x^2-3x+4)}{x+\sqrt{x^2-3x+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\frac{4}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\dfrac{3}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}(x+3-x+4)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}{7}=\dfrac{2}{7}$; c) Rez. $\dfrac{3}{2}$.

Zadatak 3.9.3. Izračunati sljedeći limes funkcije $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+b}\right)^x$ $(a,b\in\mathbf{R})$.

Rješenje:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+b}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x-a}{x+b}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{b-a}{x-b}\right)^x=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-b}{b-a}}\right)^{\frac{x-b}{b-a}\cdot\frac{(b-a)x}{x-b}}=e^{(b-a)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-b}}=e^{b-a}$ $(a\neq b)$. Za $a=b$ je očito zadani limes jednak broju 1, pa je i u tom slučaju zadani limes jednak broju e^{b-a}.

Zadatak 3.9.4. Izračunati : a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{10}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje: a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{10}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{10\ln(1+x)}-1}{10\ln(1+x)}\cdot\dfrac{10\ln(1+x)}{x}\right)=1\cdot10\cdot\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=10$;

b) Iz $\ln\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\cdot\ln\dfrac{1+x\ln a+1+x\ln b+1+x\ln c+o(x)}{3}=\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left[1+x\ln\sqrt[3]{abc}+o(x)\right]=\ln\sqrt[3]{abc}+o(1)$

slijedi da je $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln\sqrt[3]{abc}+o(1)}=\sqrt[3]{abc}$.

Zadatak 3.9.5. Dokazati da je

a) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, $(a\in\mathbf{R})$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

Dokaz: a) Iz $|\sin x-\sin a|=2\cdot\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}\right|\le 2\cdot\dfrac{|x-a|}{2}=|x-a|$ slijedi $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\dfrac{3}{5}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\overset{f)}{=}\dfrac{1}{2}$ (odakle je tg$x$ – sin$x$ ~ ½ x^3 ($x\to 0$); tg$x$ – sin$x$ je beskonačno mala veličina trećeg reda u odnosu na x kad $x\to 0$).

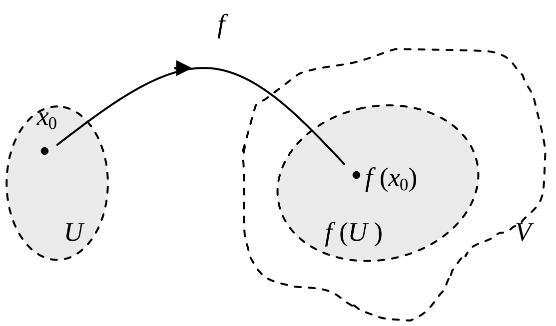
G L A V A 4

N E P R E K I D N O S T F U N K C I J A. E L E M E N T A R N E I I N Ž E N J E R S K E F U N K C I J E

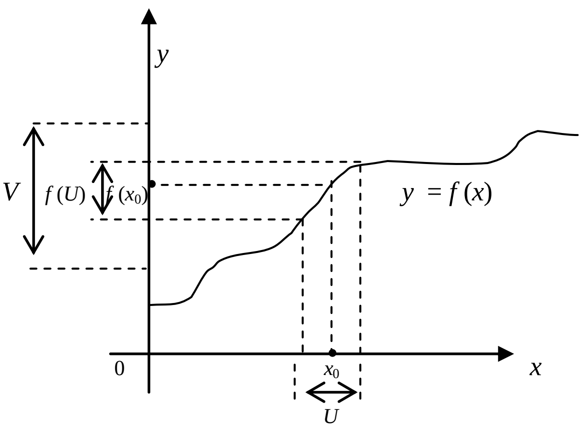
Često želimo odrediti vrijednost neke funkcije f u tački x_0, koju znamo tek približno, te o vrijednosti $f(x_0)$ treba zaključiti na osnovu vrijednosti $f(x)$ koje f poprima u tačkama iz neke okoline tačke x_0. Zato su od posebne važnosti funkcije kod kojih vrijednost $f(x)$ aproksimira $f(x_0)$ s tačnošću zadanom po volji ako x aproksimira x_0 dovoljno dobro. Intuitivno, za funkcije s takvim svojstvom kažemo da su *neprekidne*. No, takve funkcije ćemo u prvom paragrafu ovog poglavlja i egzaktno definirati za slučaj realnih funkcija realne promjenljive, mada se taj pojam može uvesti u mnogo opštijim situacijama (za *kompleksne funkcije*, za funkcije u *metričkim prostorima*, pa i u proizvoljnim *topološkim prostorima*).

§ 4.1. Neprekidnost i tačke prekida

Definicija 4.1.1. Neka su D, K podskupovi od $\mathbf{R}$ i $f: D\to K$ funkcija. Kažemo da je funkcija f **neprekidna** (**neprekinuta**, **kontinuirana**) u tački $x_0\in D$ ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ u K postoji okolina U tačke x_0 u $\mathbf{D}$ takva da je $f(U)\subseteq V$ (v. sl. 4.1.1. i 4.1.2). U protivnom slučaju kaže se da je f **prekidna** (**prekinuta**, **diskontinuirana**) **u tački** x_0 , a u tom slučaju se za tačku x_0 kaže da je **tačka prekida** (**tačka diskontinuiteta**) funkcije f .



Sl. 4.1.1.



Sl. 4.1.2.

Na " jeziku ε-δ" uslov neprekidnosti funkcije f u tački x_0 možemo zapisati ovako:

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)\ (\forall x\in D)\ (\ |\ x - x_0\ | < \delta\ \Rightarrow\ |\ f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Primijetimo odmah da definicija neprekidnosti ima sličnosti sa definicijom granične vrijednostifunkcije u tački. Međutim, postoje i neke važne razlike. Naime, tačka $x_0\in D$ u kojoj se definira neprekidnost funkcije f ne mora biti tačka gomilanja skupa D. Ta tačka može biti i *izolovana* tačka tog skupa (tj. može imati svojstvo da u nekoj okolini $U(x_0)$ nema drugih tačaka skupa D osim nje same).

Očito da se u tom slučaju ne može govoriti o graničnoj vrijednosti $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Kako je tada $f(U(x_0)) = \{\ f(x_0)\} \subseteq V$ za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$, to je funkcija f neprekidna u tački x_0. To je trivijalan slučaj, pa će nas nadalje zanimati uglavnom slučaj kada je x_0 tačka gomilanja od D (koja mu pripada).

Druga važna razlika u definiciji neprekidnosti i definiciji limesa funkcije f u tački x_0 je u tome što u definiciji limesa ne pretpostavljamo da je funkcija f definirana u samoj tački x_0, a ako i jeste, vrijednost $f(x_0)$ ne utiče na graničnu vrijednost $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Stav 4.1.1. *Neka je $f : D\to K$ realna funkcija realne promjenljive i $x_0\in D$ tačka gomilanja skupa D. Tada su sljedeće izjave ekvivalentne* :

(i) *funkcija f je neprekidna u tački x_0* ; (ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, tj. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$;

(iii) *za svaki niz* (x_n), $x_n\in D$ *za svaki* $n\in\mathbf{N}$, *za koji je* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *važi* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Dokaz: Ekvivalentnost uslova (i) i (iii) slijedi neposredno iz definicije neprekidnosti i definicije limesa funkcije, a ekvivalentnost uslova (ii) i (iii) slijedi iz ekvivalencije Cauchyjeve i Heineove definicije limesa funkcije.

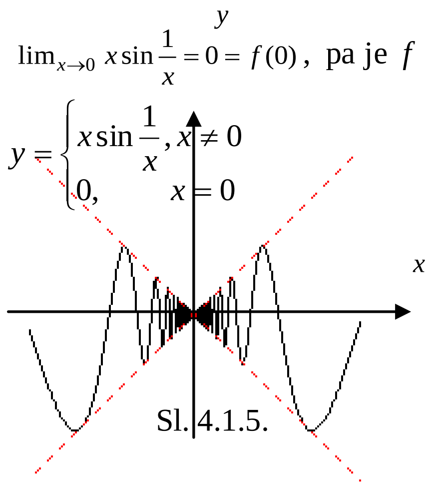
Primjer 4.1.1. Konstantna funkcija $f\ (x) = c$ $(\forall x\in D \subseteq \mathbf{R})$ i identična funkcija $f\ (x) = x$ $(\forall x\in D\subseteq \mathbf{R})$ neprekidne su u svakoj tački svog domena .

Primjer 4.1.2. U skladu sa navedenim u prethodnim paragrafima ovog poglavlja, eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$, logaritamska funkcija $x \mapsto \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ i trigonometrijske funkcije sin, cos, tg i ctg su neprekidne u svakoj tački svog domena.

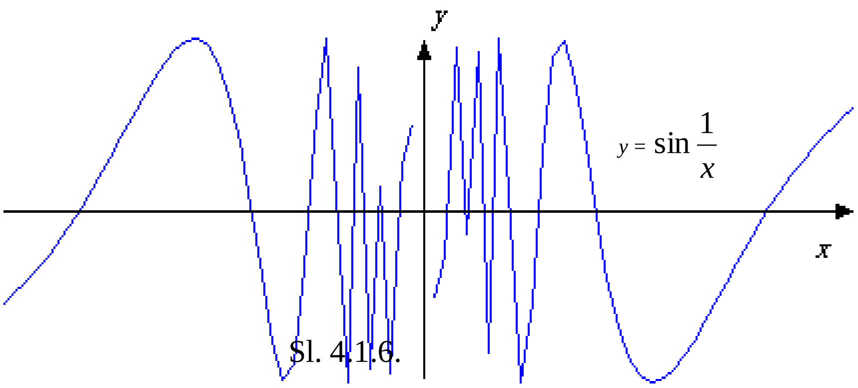
Primjer 4.1.3. Funkcije sgn, |sgn| i sgn^2 su prekidne u tački 0, dok je (Dirichletova) funkcija $\chi(x) := \begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$ prekidna u svakoj tački $x\in\mathbf{R}$.

Primjer 4.1.4. Svaki niz realnih brojeva, shvaćen kao funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, neprekidan je u svakoj tački $n\in\mathbf{N}$, jer je svaka takva tačka izolovana u skupu $\mathbf{N}$.

Primjer 4.1.5. Funkcija f data sa $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ je neprekidna u svakoj tački $x\in\mathbf{R}$, jer za svaki $x_0\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ očito vrijedi $\lim_{x\to x_0} x\sin\dfrac{1}{x} = x_0\sin\dfrac{1}{x_0} = f(x_0)$, a kako je $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$ kad $x\to 0$, to je $\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$, pa je f neprekidna i u tački $x = 0$ (v. s. 4.1.5.).



Sl. 4.1.5.



Sl. 4.1.6.

Neka je $U_D^{\delta}(x_0)$ δ- okolina tačke x_0 u skupu D, tj. $U_D^{\delta}(x_0)=\{x\in D : \ |f(x)-f(x_0)|<\delta\}$. Tada je funkcija $\delta \mapsto \omega(f, U_D^{\delta}(x_0))$, gdje je $\omega(f, U_D^{\delta}(x_0))$ oscilacija funkcije f na skupu $U_D^{\delta}(x_0)$, za $\delta>0$ neopadajuća i ograničena odozdo (nulom) funkcija od δ. Na osnovu teoreme o limesu monotone funkcije slijedi da postoji $\lim_{\delta\to 0+} \omega\left(f, U_D^{\delta}(x_0)\right)$. Ova granična vrijednost zove se **oscilacija funkcije** f **u tački** x_0 i obično označava sa $\omega(f, x_0)$. Otuda slijedi da važi:

Stav 4.1.2. *Funkcija* $f: D\to K$ $(D, K\subseteq \mathbf{R})$ *je neprekidna u tački* x_0 *ako i samo ako je* $\omega(f, x_0)=0$.

U skladu sa definicijom 4.1.1. tačka u kojoj neka funkcija nije definirana ne može biti njena tačka prekida (čak i ako je tačka gomilanja njenog domena). Tako, npr., tačka $x=0$ nije tačka prekida funkcije $f(x):=\frac{1}{x}$, jer se podrazumijeva da joj je domen $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Međutim, napomenimo da se termin "tačka prekida" koristi u literaturi i za one tačke gomilanja domena funkcije koje mu ne pripadaju, pa se u skladu s tim, npr. za navedenu funkciju $f(x):=\frac{1}{x}$ kaže da ima prekid (*druge vrste*) u nuli; iako nije definirana u tački $x=0$. No, u skladu s novijim pristupima, svaku tačku gomilanja x_0 domena D funkcije $f: D\to K$ $(D, K\subseteq\mathbf{R})$ ćemo, zvati **singularna tačka** ili **singularitet** funkcije f ako $x_0\notin D$.

Zadatak 4.1.1. Ispitati neprekidnost i skicirati grafik funkcije f iz $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$ definirane ovako :

a) $f(x):=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ (v. sl. 1.4.6); **b)** $f(x):=x\cos\frac{1}{x}$ za $x\neq 0$, $f(0)=0$.

Zadatak 4.1.2. Izvesti formulu za iznos na računu kada bi se složeno ukamaćivanje glavnice C_0 vršilo svakog trenutka (*neprekidno ukamaćivanje*), na kraju vremenskog razdoblja od n godina, uz *godišnju kamatnu stopu p*. Zatim primjenom dobivenog rezultata riješiti zadatak : "Broj stanovnika nekog grada kroz dvije godine povećao se sa 1 200 000 na 1 220 000. Kakvo je predviđanje broja stanovnika za naredne dvije godine?"

[*Uputa i rezultat.* Tražena formula je: $C=C_0\, e^{n\,p}$. Po toj formuli odvija se prirast biljne mase u šumi, prirast stanovništva i sl. Primjenom te formule na postavljeni zadatak dobije se da je $1{,}22=1{,}20\; e^{2\,p}$, odakle je p približno jednako 0.83% (*godišnja stopa rasta stanovništva*), pa je C približno jednako 1 240 420 (*stanovnika*).]

Zadatak 4.1.3. Funkcija f iz $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$ zadana je formulom $f(x)=x+\sqrt{x^2-5x+4}$.

a) * Izračunati $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (uz prethodno određivanje prirodnog domena zadane funkcije i ustanovljenje da je $-\infty$ tačka gomilanja toga skupa / Objasniti zašto je to potrebno!/). [*Rezultat:* 2,5.]

b) Ispitati ponašanje zadane funkcije f na rubovima područja Dom (f) i odrediti njene eventualne asimptote(vertikalne i horizontalne) i skup svih tačaka njene neprekidnosti.

c) Odrediti eventualne presjeke grafika $G(f)$ sa koordinatnim osama i ispitati znak zadane funkcije f, pa skicirati njen grafik.

Zadatak 4.1.4. Zadana je funkcija $S_k(t):=\sum_{n=1}^{k} e^{i\,n\,t}$ (gdje je i – imaginarna jedinica, $k\in\mathbf{N}$).

a) *Odrediti (prirodni) domen, ispitati ograničenost, parnost/neparnost, periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odrediti osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g, h jedne realne promjenljive zadanih formulama $f(x)=\mathrm{Im}(S_2(|x|))$, $g(x)=|(S_2(x)|$, $h(x)=\mathrm{Re}\,(S_2(x))$.

b) * Skicirati grafike funkcija f i h zadanih u a).

c) Ispitati neprekidnost funkcije $k:=\dfrac{f}{h}$, gdje su f i h funkcije zadane u a).

---

* Zadatak sa prvog (redovnog) parcijalnog ispita iz Inženjerske matematike 1 (IM1) na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu. u akademskoj 2010/2011. godini (održanog 07. 11. 2010.).