Predavanje 1 zabilješke

Iskazi i predikati

- **Matematička logika** je onaj dio logike u kojem se dominantno primjenjuje matematički aparat radi izvođenja prvenstveno matematičkih rasuđivanja (zaključivanja).
- Booleova algebra iskaza je dio matematičke logike koji proučava iskaze (izjave, logičke sudove). Moguće ju je zasnovati aksiomatski.
- Svaki iskaz ima jednu i samo jednu od osobina:
  (i) istinit (tačan)
  (ii) neistinit (netačan)
- U matematici se istinit iskaz naziva stav (tvrdnja, teorema).
- Složeni iskazi:
  - KONJUKCIJA ($p \wedge q$)
  - DISJUNKCIJA ($p \vee q$)
  - IMPLIKACIJA ($p \Rightarrow q$) - p je dovoljan uslov za q ; q je potreban uslov za p
  - EKVIVALENCIJA ($p \Leftrightarrow q$) - p je potreban i dovoljan uslov za q.
  - NEGACIJA ($\neg p$)
- Za iskaznu formulu F kažemo da je **tautologija** akko je $\tau(F) = \top$ za sve vrijednosti njenih iskaza.
- Operacija $\forall$ se zove univerzalni kvantor, a operacija $\exists$ egzistencijalni kvantor (kvantifikator).

Skupovi

- Georg Cantor je dao opisnu "definiciju" pojma skupa : Skup je objedinjenje različitih elemenata u jednu cjelinu.
- Sve teoreme koje je Cantor dobio mogu se izvesti iz slijedećih aksioma:
  (I) Aksioma o jednakosti dva skupa (Dva skupa su jednaka akko imaju iste elemente.)
  (II) Aksioma apstrakcije (Za unaprijed zadato svojstvo postoji skup čiji su elementi upravo oni (objekti) koji imaju to svojstvo.)
  (III) Aksioma izbora. (Za unaprijed zadato svojstvo postoji bar jedna funkcija čiji su originali neprazni podskupovi tog skupa, a slike su elementi originala.)

- Pojmovi skup i elementi skupa se obično ne definišu, već se uzimaju kao osnovni. Opisno: "Skup je objedinjenje nekog mnoštva elemenata u jednu cjelinu."
- Za svaki objekt x nastupa tačno jedna od dvije mogućnosti:
  (i) "x je element skupa X" ($x \in X$)
  (ii) "x nije element skupa X" ($x \notin X$)
- Dva skupa su jednaka akko su sastavljena od istih elemenata tj.

$$X = Y \Leftrightarrow (\forall x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$$

- Ako je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y, kažemo da je X podskup skupa Y. Prema tome, vrijedi

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow Y \supseteq X \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

- X je pravi nadskup skupa Y ako je $X \supseteq Y \wedge X \neq Y$. To se često označava sa $X \supset Y$.

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

- Za dati skup X posmatra se skup svih podskupova skupa X. Taj skup se naziva partitivni skup (ili bulean) skupa X i označava se sa $P(X)$ ili 2^X. ($P(X) := \{A : A \subseteq X\}$)

- Osnovne operacije sa skupovima:
  - $A \cup B$ $(\{x \in I : x \in A \lor x \in B\})$
  - $A \cap B$ $(\{x \in I : x \in A \land x \in B\})$
  - $A \setminus B$ $(\{x \in I : x \in A \land x \notin B\})$

- Skupovi A i B su DISJUNKTNI ako je $A \cap B = \emptyset$, a sijeku se ako je $A \cap B \neq \emptyset$

- Osnovne osobine operacija unije, presjeka i komplementa:
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (zakoni asocijacije)
  - $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (zakoni komutacije)
  - $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (zakoni apsorpcije)
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (zakoni distribucije)
  - $A \cup c(A) = I$, $A \cap c(A) = \emptyset$
  - $A \cup \emptyset = A$, $A \cap I = A$; (svojstvo praznog i univerzalnog skupa).
  - $A \cup I = I$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;
  - $c(A \cup B) = c(A) \cap c(B)$, $c(A \cap B) = c(A) \cup c(B)$ (A. De Morganova pravila);
  - $c(I) = \emptyset$, $c(\emptyset) = I$
  - $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (zakoni idempotencije)
  - $c(c(A)) = A$ (involucija)

Relacije

- Par elemenata a, b, kod koga se zna koja mu je prva (koordinata, projekcija), a koja druga, zove se uređen par i označava sa (a, b).

- Definicija: Uređen par redom elemenata a i b, u oznaci (a,b), jeste skup $\{\{a\}, \{a,b\}\}$. U uređenom paru (a,b) element a se zove prva komponenta, a b - druga komponenta.

- Teorema: Dva uređena para su međusobno jednaka akko su im jednake (međusobno) odgovarajuće komponente, tj. $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \land b = d)$

- Ako su A i B skupovi, onda skup svih uređenih parova (a,b) kod kojih je $a \in A$ i $b \in B$, označavamo sa $A \times B$ i nazivamo Dekartov proizvod skupa A i B, tj. $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \land b \in B\}$.

Definicija Dekartov (ili direktni) proizvod redom skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$, u oznaci $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ (ili $\prod_{k=1}^{n} A_k$, ili $\bigtimes_{k=1}^{n} A_k$) jeste skup svih uređenih n-torki $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ gdje je $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$; odnosno $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$

Definicija Svaki podskup R Dekartovog proizvoda $A \times B$ zove se binarna relacija iz A u B (ili relacija od A prema B, ili binarna relacija između elemenata skupa A i elemenata skupa B). Pritom A je polazni skup (ili skup polaženja) binarne relacije R, a B je dolazni skup (ili skup dolaženja) binarne relacije R. Za element $a \in A$ kaže se da je u relaciji R sa $b \in B$ i pišemo $R(a,b)$, ili aRb akko je $(a,b) \in R$. Umjesto simbola R, često se koristi i oznaka ρ.

Teorema (o osobinama binarnih relacija) Neka su R_1, R_2, R_3, R binarne relacije. Neka su A, B skupovi. Tada (pod uslovom da su sve binarne relacije koje se pojavljuju definirane) vrijedi:

(i) $(R^{-1})^{-1} = R$

(ii) $(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$

(iii) $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$

(iv) $R_2 \circ R_1(A) = R_2(R_1(A))$, gdje je $R_1(A) := \{b \in B \mid (a,b) \in R$ za neki $a \in A\}$ (tzv. R-slika u B skupa A)

(v) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$

(vi) $R(A \cap B) \subseteq R(A) \cap R(B)$

Definicija Za binarnu relaciju $\rho \subseteq A\times A$ kažemo da je:

(i) refleksivna akko $\forall(a\in A)\ a\rho a$ (ekvivalentno: $\Delta_A \subseteq \rho$);
(ii) antirefleksivna akko $\forall(a\in A)$ a nonρ a (ekvivalentno: $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$);
(iii) simetrična akko $(x\rho y \Leftrightarrow y\rho x)$ (ekvivalentno: $\rho = \rho^{-1}$);
(iv) antisimetrična akko $(x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x=y$ (ekvivalentno: $\rho \cap \rho^{-1} = \Delta_A$);
(v) tranzitivna akko $(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$ (ekvivalentno: $\rho\circ\rho \subseteq \rho$);
(vi) jednoznačna akko presjek (lijevi presjek) relacije ρ (lijevi presjek binarne relacije $\rho \subseteq A\times B$ elementom $a\in A$ definira se sa $\rho(a) := \{b\in B \mid (a,b)\in\rho\}$) bilo kojim elementom $a\in A$ je ili prazan skup, ili jednočlan skup;
(vii) relacija ekvivalencije akko (I) $\wedge$ (III) $\wedge$ (V);
(viii) relacija pretporetka akko (I) $\wedge$ (V);
(ix) relacija parcijalnog poretka akko (I) $\wedge$ (IV) i (V)
(x) relacija totalnog poretka akko (I) $\wedge$ (IV) $\wedge$ (V) $\wedge$ (d), gdje je (d) uslov dihotomije, tj. (d) $\forall(x,y\in A)\ (x\rho y)\vee(y\rho x)$

- Relacije poretka ((ix) i (x)) su $\leq, \geq, \ldots$
- Element $m\in X$ je minoranta skupa A u $(X,\leq)$, ako za svaki $a\in A$ vrijedi $m\leq a$.
- Za skup A kažemo da je **ograničen** (omeđen) odozdo (s lijeva), ako postoji bar jedna minoranta skupa A u uređenom skupu $(X,\leq)$.
- Majoranta je **element** iz skupa A u odnosu na dualno uređenje $(X,\geq)$. Ako postoji bar jedna majoranta u skupu A, kažemo da je ograničen (omeđen) odozgo (zdesna).
- Ako postoje elementi $p, P\in X$, takvi da je $p\leq A\leq P$ za svaki $a\in A$, kažemo da je skup A ograničen (u $(X,\leq)$).
- Najveći element u skupu svih minoranti skupa A u $(X,\leq)$ zove se donja međa ili infimum skupa A u $(X,\leq)$ [inf A] koji ima dva svojstva (i) inf A je minoranta skupa A; (ii) za svaku minorantu m skupa A vrijedi $m\leq \inf A$
- Najmanji element u skupu majoranti je gornja međa ili supremum skupa A u $(X,\leq)$ [sup A]

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

Tutorijal 1

*Predavanje 1, zad. 126. b) Ako za realnu funkciju f jedne realne promjenljive vrijedi da je $f(x)-2f(1-x)=x$ za svaki $x\in\mathbb{R}$, riješite trigonometrijsku jednačinu $f(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{2}-4}{6}$

$f(x)=kx+n$ $\qquad f(1-x)=a(1-x)^2+b(1-x)+c$

$f(x)=ax+b$

Pretpostavka: $f(x)=ax^2+bx+c$

$$ax^2+bx+c-2[a(1-x)^2+b(1-x)+c]=x$$

$$ax^2+bx+c-2a(1-x)^2-2b(1-x)-2c=x$$

$$ax^2+bx+c-2a(1-2x+x^2)-2b+2bx-2c=x$$

$$ax^2+bx+c-2a+4ax-2ax^2-2b+2bx-2c-x=0$$

$$-ax^2+(3b+4a-1)x-c-2a-2b=0$$

I $\quad -a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

II $\quad 3b+4a-1=0$

$3b=1$

$\boxed{b=\frac{1}{3}}$

III

$-c-2a-2b=0$

$-c-\frac{2}{3}=0$

$\boxed{c=-\frac{2}{3}}$

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(\sin x+\cos x)=\frac{1}{3}(\sin x+\cos x)-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}(\sin x+\cos x)-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2}-4}{6}\quad /\cdot 3 \qquad \left(\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ (*)\right)$$

$$\sin x+\cos x-2=\frac{\sqrt{2}-4}{2}$$

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}-4+4}{2}\overset{(*)}{\Rightarrow}\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(**)\left(\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow}2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{2x-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad /:\frac{\sqrt{2}}{2}$$

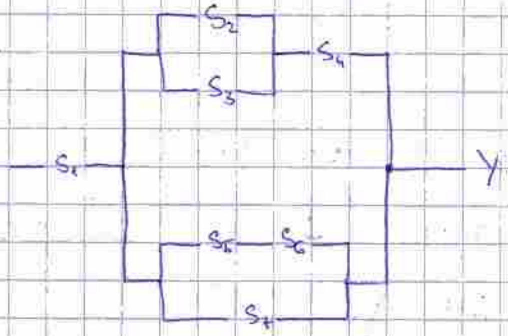
$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$1^\circ\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi}$$

$$2^\circ\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \boxed{x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi}$$

*Ušćumlić, račun iskaza, 164. Napisati Booleovu jednačinu za strujno kolo na slici:



$$Y=S_1\cdot\left[(S_2+S_4)S_4+S_5\cdot S_6+S_7\right]$$

*Ušćumlić, skupovi, 178. Neka su A, B, C i D bilo koji skupovi. Dokazati tačnost sljedećih iskaza:

$1^\circ\ (A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$

$2^\circ\ (A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$

Definicija presjeka skupova: Pod presjekom skupa A sa B podrazumijevamo skup $A\cap B$ svih zajedničkih elemenata A i B, tj.: $A\cap B\overset{def}{=}\{x : x\in A\wedge x\in B\}$

Definicija unije skupova: Pod unijom skupa A sa B podrazumijevamo skup $A\cup B$ svih elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova A i B, tj.:
$A\cup B\overset{def}{=}\{x : x\in A\vee x\in B\}$

Definicija razlike skupova: Skup svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B nazivamo razlika skupova A i B, tj. $A\setminus B\overset{def}{=}\{x : x\in A\wedge x\notin B\}$

Iskaz $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ dokazat ćemo preko tablice istinitosti uvrštavajući smjene po definiciji

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \land x \in B$	$x \in A \land x \in B \land x \notin C$	$x \in A \land x \notin C$	$x \in B \land x \notin C$	$(x \in A \land x \notin C) \land (x \in B \land x \notin C)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Vidimo da su 5. i 8. kolona tablice istinitosti identične, a iskaz $x \in A \land x \in B \land x \notin C$ je po definiciji isto što i $(A \cap B) \setminus C$, a iskaz $(x \in A \land x \notin C) \land (x \in B \land x \notin C)$ isto što i $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$, pa smo ovom tablicom dokazali iskaz $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ za bilo koju vrijednost x $(\forall x)$.

2° $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	$x\in D$	$x\in A\wedge x\notin B$	$x\in C\wedge x\notin D$	$(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in C\wedge x\notin D)$	$x\in A\wedge x\in C$	$x\in B\vee x\in D$	$(x\in B\vee x\in D)'$	$(x\in A\wedge x\in C)\wedge(x\in A\vee x\in D)'$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

Dokazali smo jednakost iskaza $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$!

*Ušćumlić relacije, 187. Neka je C skup svih cijelih brojeva i $a\rho b \Leftrightarrow a-b$ jednako cijelom umnošku od k (k fiksiran cijeli broj). Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. (Ova relacija se zove još i kongruencija, a obilježava $a\equiv b \pmod{c}$).

-Kaže se da je x gdje $x\in X$ u relaciji ρ sa y, pri čemu $y\in Y$, tada i samo tada ako je par $(x,y)\in\rho$ i piše se $x\rho y$. Ukoliko je skup $Y=X$, ρ se naziva binarnom relacijom u skupu X.

Neke binarne relacije imaju sljedeće osobine:

1° $a \rho a$ za $\forall (a \in X)$ - reflektivnost

2° $a \rho a \Rightarrow b \rho a$ za $\forall a, b \in X$ - simetričnost

3° $a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$ - anti simetričnost

4° $a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$ - tranzitivnost

- Binarna relacija ρ je relacija ekvivalencije u skupu X ako ima osobine 1,2 i 4;
- Binarna relacija ρ je relacija poretka u skupu X ako ima osobine 1,3 i 4.

Dokazujemo da je ρ relacija ekvivalencije:

1° $a \rho a \Leftrightarrow a - a = 0 \cdot k$ (T)

2° $\left.\begin{aligned} a \rho b &\Leftrightarrow a - b = x \cdot k \\ b \rho a &\Leftrightarrow b - a = -x \cdot k \end{aligned}\right\}$ (T)

3° $\left.\begin{aligned} a \rho b &\Leftrightarrow a - b = x \cdot k \\ b \rho c &\Leftrightarrow b - c = y \cdot k \end{aligned}\right\} +$

$$a - b + b - c = (x+y)k$$

$$a - c \Leftrightarrow a \rho c = (x+y)k \quad \text{(T)} \quad (x \in C)$$

ŽFS 1.4 Riješiti po p, q i r u skupu $(\top, \perp)$ jednačinu $(p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)) = \perp$

Definicija implikacije: Ako su p i q iskazi $p \Rightarrow q$ je oznaka za iskaz "ako je p, onda je q" koji ćemo zvati implikacijom iskaza p sa iskazom q i koji ćemo smatrati netačnim akko je iskaz p $\top$, a iskaz q $\perp$

Tablica istinitosti implikacije:

p	q	p⇒q
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤

$\boxed{p = \top}$ $\quad p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r) = \perp$

$\neg q \Rightarrow r = \perp \Rightarrow \neg q = \top$, a $\boxed{r = \perp} \Rightarrow \boxed{q = \perp}$

ŽFS 4.16. Dat je skup $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ i u njemu relacija ρ koja predstavlja skup uređenih parova: $\rho=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(1,4),(5,5),(6,5),(6,6)\}$.
Da li je relacija ρ:

a) refleksivna

b) simetrična

c) tranzitivna

d) relacija ekvivalencije,

ako nije, dopuniti je minimalnim brojem uređenih parova tako da bude relacija ekvivalencije.

a) refleksivnost

$a \rho a \quad \forall a \in \rho \qquad (4,4)$

b) simetričnost

$a \rho b \Rightarrow b \rho a \quad (2,1)\ (4,1)\ (5,6)$ - dopuniti

c) tranzitivnost

$a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c \quad (2,4),(4,2)$

d) relacija ekvivalencije $(4,4),(2,1),(4,1),(5,6),(2,4),(4,2)$