Predavanje 2 zabilješke

Preslikavanja (funkcije)

Definicija Neka su X i Y bilo koja dva (neprazna) skupa. Postupak (pravilo, zakon) f koji svakom elementu $x \in X$ pridružuje tačno jedan element $y \in Y$ zovemo preslikavanje (ili funkcija) sa X u Y i pišemo:

$$f: X \to Y \quad \text{ili} \quad x \mapsto f(x),\ x \in X$$

Definicija Neka su X i Y skupovi i f relacija iz X u Y (tj $f \subseteq X \times Y$). Za relaciju f kažemo da je preslikavanje (ili funkcija) iz X u Y i pišemo $f: X \to Y$ ako su (istovremeno) zadovoljeni sljedeći uslovi:

1° $\forall (x \in X)(\exists y \in Y)\ (x,y) \in f$;

2° $((x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f) \Rightarrow (y_1 = y_2)$

- Skup X u prethodnim definicijama zovemo domen, a skup Y kodomen.
- Uslovi 1° i 2° mogu se ekvivalentno zamijeniti sa:

$$\forall (x \in X)(\exists! y \in Y)\ y = f(x)$$

Definicija: Neka su X i Y dva skupa. Preslikavanje (ili funkcija) skupa X u skup Y je uređena trojka (X, Y, f), koja se sastoji od skupa X, kojeg zovemo domen, skupa Y, kojeg zovemo kodomen, te nekog pravila f, pomoću kojeg svakom elementu $x \in X$ pridružujemo neki, potpuno uređen, element $y \in Y$ (koji ovisi o x). Uobičajena oznaka za preslikavanje je $f: X \to Y$ ili kraće f. O elementima $x \in X$ često se govori kao o nezavisnoj promjenljivoj (nezavisnoj varijabli) ili argumentu preslikavanja (funkcije), a o elementu $y \in Y$ govori se kao o zavisnoj promjenljivoj (zavisnoj varijabli) preslikavanja (funkcije) f.

- Graf (grafik, dijagram) preslikavanja (X, Y, f) je skup $F := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ $(\subseteq X \times Y)$
- Za dva preslikavanja (X_1, Y_1, f_1) i (X_2, Y_2, f_2) kažemo da su jednaka ako je $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, i za svaki $x \in X_1 (= X_2)$ je $f_1(x) = f_2(x)$.
- Preslikavanje $i: X \to Y$ definirano formulom $i(x) = x$, $x \in X$, zovemo ulaganje ili inkluzija.
- Preslikavanje $l_X: X \to X$, definirano izrazom $l_X(x) = x$, $x \in X$, zove se identiteta ili identično preslikavanje.
- Binarna operacija na skupu X je (po def.) svako preslikavanje $\omega: X \times X \to X$ ($\circ, *$, itd.). Uređen par (X, ω) se zove grupoid, a za X se kaže da je zatvoren u odnosu na operaciju ω. Npr. $\cap$ i $\cup$ su dvije binarne operacije na partitivnom skupu $X = P(I)$ proizvoljnog skupa I.
- Definicija: Neka su $f: X \to Y$ i $g: Z \to W$ dva preslikavanja (dvije funkcije), takva da je $R(f) \subseteq Z$. Tada preslikavanja $h: X \to W$ definirano formulom

$$h(x) = g(f(x)),\ x \in X$$

označavamo sa $g \circ f$ ili gf i zovemo kompozicija preslikavanja (kompozicija funkcija ili složena funkcija) f i g.

- Ako su $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ i $h: Z \to W$ preslikavanja, onda je $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, tj za kompoziciju preslikavanja vrijedi zakon asocijacije. Osim toga, ako su $l_X: X \to X$ i $l_Y: Y \to Y$ identična preslikavanja, onda je $f \circ l_X = l_Y \circ f = f$.

f^{-1} nije preslikavanje Y u X, ali u $P(X)$ $\quad f^{-1}(\{y\}) \in P(X)$

- Neka je $f: X \to Y$ preslikavanje i neka je $A, B \subseteq X$; $C, D \subseteq Y$. Tada vrijede formule

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
3) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$
4) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
6) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
7) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
8) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X) \subseteq C$

by Ahmed Suljic   doccentowski@hotmail.com

- Za preslikavanje (funkciju) $f: X \to Y$ kažemo da je surjekcija (ili preslikavanje na) ako je $f(X) = Y$, injekcija (ili "1-1" preslikavanje) ako $f(x_1) = f(x_2)$ implicira $x_1 = x_2$, bijekcija (ili obostrano jednoznačno preslikavanje) ako je f surjekcija i injekcija.
- Ako je dato $f: X \to Y$, za $g: Y \to X$ kažemo da je inverzno preslikavanje (ili inverzna funkcija) za f, ako je $gf = 1_X$ i $fg = 1_Y$
- Ako za $f: X \to Y$ postoji inverzno preslikavanje, onda je f bijekcija, i obrnuto. Svaka bijekcija f ima inverzno preslikavanje f^{-1}
- Za skup A kažemo da je **konačan** akko $A = \emptyset \vee (\exists n \in N) A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. Ako je $A = \emptyset$, onda kažemo da je kardinalni broj skupa A jednak 0. Ako je $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$, onda kažemo da je kardinalni broj skupa A jednak n i pišemo $|A| = n$. Za skup A kažemo da je beskonačan akko A nije konačan.
- Kažemo da su skupovi X i Y ekvipotentni (ekvivalentni) $(X \sim Y)$ ako postoji bijekcija $f: X \to Y$. Relacija ekvipotencije je relacija ekvivalencije u odnosu prema kojoj se skupovi svrstavaju u disjunktne klase. Klasa kojoj pripada X zove se potencija (kardinalni broj) skupa X ($\text{kard}(X)$ ili $\text{card}(X)$ ili $|X|$)
- Za skup A kažemo da je prebrojiv akko je A konačan $A \sim N$. $\text{card}(N)$ nazivamo alef nula ($\aleph_0$). Beskonačan skup koji nije ekvivalentan sa skupom prirodnih brojeva je neprebrojiv.

Realni brojevi

Definicija: Polje realnih brojeva je skup $\mathbb{R}$ u kojem su definirane dvije binarne operacije + i · (sabiranje i množenje) i jedna binarna relacija $\leq$ (manje ili jednako) tako da vrijedi:

(R1) $\forall (x,y,z \in \mathbb{R})\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (asocijacija za sabiranje),
(R2) $\exists (0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x+0 = 0+x = x$ (egzistencija nule),
(R3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})\ (-x)+x = x+(-x) = 0$ (egzistencija inverznog elementa za sabiranje),
(R4) $\forall (x,y \in \mathbb{R})\ x+y = y+x$ (komutacija za sabiranje),
(R5) $\forall (x,y,z \in \mathbb{R})\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asocijacija za množenje),
(R6) $\exists (1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (egzistencija jedinice),
(R7) $\forall (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})\ x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ (egzistencija inverznog elementa za množenje),
(R8) $\forall (x,y,z \in \mathbb{R})\ x(y+z) = xy + xz;\ (x+y)z = xz + yz$ (distribucija množenja prema sabiranju),
(R9) $\forall (x,y \in \mathbb{R})\ xy = yx$ (komutacija za množenje),
(R10) $\forall (x,y,z \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivnost relacije $\leq$),
(R11) $\forall (x,y \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisimetrija relacije $\leq$),
(R12) $\forall (x,y \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \vee (y \leq x)$ (uporedljivost),
(R13) $\forall (x,y,z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$ (kompatibilnost relacije $\leq$ prema sabiranju),
(R14) $\forall (x,y \in \mathbb{R})\ (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (kompatibilnost relacije $\leq$ prema množenju),
(R15) ako su A i B neprazni podskupovi skupa $\mathbb{R}$, takvi da je $x \leq y$ za sve $x \in A$, $y \in B$, onda postoji element $z \in \mathbb{R}$, takav da je $x \leq z \leq y$ za sve $x \in A$, $y \in B$.
Elementi skupa $\mathbb{R}$ zovu se realni brojevi.

- Aksiome (R1)-(R4) iskazuju da je $(\mathbb{R}, +)$ (aditivna) Abelova grupa, a aksiome (R5)-(R7) i (R9) da je $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ (multiplikativna) Abelova grupa. Zajedno sa ovim aksiomama, aksiom (R8) označava da je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ polje. Aksiome (R10), (R11) i (R12) iskazuju da je binarna relacija $\leq$ jedna relacija (totalnog) uređaja. Ako u uređenom skupu vrijedi aksiom R(15), onda kažemo da je taj skup uređajno potpun ili da je potpun uređen skup. Prema tome, skup $(\mathbb{R}, \leq)$ realnih brojeva je uređajno potpun.
- Aksioma (R15) se naziva aksiomom potpunosti ili aksiomom neprekidnosti.

- Za sve $x,y,z,u,v \in \mathbb{R}$ vrijede svojstva:

(i) $-(-x)=x$;
(ii) $x\cdot 0 = 0\cdot x = 0$;
(iii) $x\cdot(-y) = -(xy) = (-x)\cdot y$;
(iv) $(-x)\cdot(-y) = xy$;
(v) $x \le 0 \Rightarrow -x \ge 0$;
(vi) $x \le y \Rightarrow -x \ge -y$
(vii) $(x\le 0)\wedge(y\le 0) \Rightarrow x\cdot y \ge 0$
(viii) $(x\le y)\wedge(z\le u) \Rightarrow x+z \le y+u$;
(ix) $0<1$;
(x) $x\cdot y = 0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$;

(xi) $x-(-y) = x+y$;
(xii) $x=-y \Leftrightarrow -x=y$;
(xiii) $-0=0$;
(xiv) $x^2 \ge 0$; $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
(xv) $(x\neq 0)\wedge(y\neq 0) \Rightarrow (xy)^{-1} = (x^{-1})\cdot(y^{-1})$
(xvi) $x^2=y^2 \Leftrightarrow (x=y \vee x=-y)$
(xvii) $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}$ $(y,z\neq 0)$;
(xviii) $\frac{x}{y}+\frac{u}{v} = \frac{xv+yu}{yv}$; $\frac{x}{y}\cdot\frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}$, za $y,v\neq 0$
(xix) $xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$;
(xx) $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ za $x>0, y>0$

- Za svaki realni broj $x\in\mathbb{R}$ definira se apsolutna vrijednost (modul) $|x|$ realnog broja x izrazom: $|x| := \begin{cases} x, & \text{za } x\ge 0, \\ -x, & \text{za } x<0. \end{cases}$ (*) $\Rightarrow |x| = \max\{-x,x\}$.
- Iz (*) i svojstva relacije $\le$, slijedi da za svaki $\varepsilon>0$ vrijede nejednakosti
$|x|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x<\varepsilon$, $|x|\le\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon\le x\le\varepsilon$,
$|x|>\varepsilon \Leftrightarrow (x<-\varepsilon \vee x>\varepsilon)$; $|x|\ge\varepsilon \Leftrightarrow (x\le-\varepsilon \vee x\ge\varepsilon)$.
- Funkcija $|\,|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:
1) $\forall(x\in\mathbb{R})\ |-x|=|x|$;
2) $\forall(x,y\in\mathbb{R})\ |x-y|=|y-x|$;
3) $\forall(x\in\mathbb{R})\ -|x|\le x\le |x|$;
4) $\forall(x\in\mathbb{R})\ |x|\ge 0$, $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$;
5) $\forall(x,y\in\mathbb{R})\ \big||x|-|y|\big| \le |x+y| \le |x|+|y|$;
6) $\forall(x,y\in\mathbb{R})\ |xy| = |x|\cdot|y|$;
7) $\forall(x,y)\in\mathbb{R})\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(y\neq 0)$

- Peanove aksiome za skup $\mathbb{N}$ i definirano preslikavanje π:
(N1) Definirano je preslikavanje $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (tj. postoji funkcija π sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$).
(N2) Postoji bar jedan element u $\mathbb{N}$ (označavamo ga sa 1).
(N3) $\forall(n\in\mathbb{N})\ \pi(n)\neq 1$.
(N4) Ako je $\pi(m)=\pi(n)$ za neke $m,n\in\mathbb{N}$, onda je $m=n$, tj. π je bijekcija
(N5) (Aksiom indukcije). Ako je S podskup od $\mathbb{N}$, koji ima ova dva svojstva:
$1\in S$; $\forall(n\in\mathbb{N})\ n\in S \Rightarrow \pi(n)\in S$, onda je $S=\mathbb{N}$.

- Iz aksioma indukcije proizilazi princip (potpune) matematičke indukcije:
Ako neki iskaz $I(n)$ ima ove dvije osobine:
(i) $I(n)$ je tačan iskaz za $n=1$;
(ii) Implikacija $I(n) \Rightarrow I(n+1)$ vrijedi za svaki prirodni broj n,
onda je iskaz $I(n)$ tačan za sve prirodne brojeve n.
- (Teorema o supremumu): Svaki neprazan, odozgo ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva ima supremum u $\mathbb{R}$.
- (Arhimedov aksiom). Neka su dati brojevi $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$. Tada postoji broj $n\in\mathbb{N}$ takav da je $na>b$.
- (Cantorov aksiom). Neka je za svaki $n\in\mathbb{N}$ dat segment $[a_n,b_n]\ (\subseteq\mathbb{R})$ i neka $m\ge n$ povlači $[a_m,b_m]\subseteq[a_n,b_n]$, tj. $a_n\le a_m\le b_m\le b_n$. Tada je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\neq\emptyset$, odnosno preciznije, vrijedi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n;b_n]=[a,b]$, gdje je $a:=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$, $b:=\inf\{b_n|n\in\mathbb{N}\}$.
Za $a=1$ dobijemo važnu relaciju $\forall(b\in\mathbb{R})\exists!(n\in\mathbb{Z})\ n-1\le b<n$. Takav broj $n-1$ zove se cijeli dio broja b i označava se sa $\lfloor b\rfloor$.
- Posljedice Arhimedovog aksioma:
(i) Za svaki pozitivan broj ε postoji prirodan broj n, takav da je $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$
(ii) Ako je x nenegativan realan broj i za svaki $n\in\mathbb{N}$ važi $x<\frac{1}{n}$, onda je $x=0$.
- Za sve $a,b\in\mathbb{R}$ za koje je $a<b$, postoji racionalan broj x, takav da je $a<x<b$

Metod indukcije

- Princip definicije indukcijom: Neka je za svaki $n\in\mathbb{N}$ dato preslikavanje $\varphi_n: X^n \to X$ i neka je $x_0 \in X$. Tada postoji jedno i samo jedno preslikavanje $f: \mathbb{N}\to X$ takvo da je $f(1)=x_0$, $\forall(n\in\mathbb{N})\ f(n+1)=\varphi_n(f(1), f(2), \dots f(n))$. (*)
Analogno, ako je dat $m\in\mathbb{N}, m>1$, i preslikavanje $\varphi_n: X^n\to X$ za svaki $n\in\{1,2,\dots,m-1\}$, onda dobijemo jedinstveno preslikavanje $f:\{1,2,\dots,m\}\to X$ takvo da vrijedi (*) za svaki $n\in\{1,2,\dots,m-1\}$.
- U primjenama, kada želimo dokazati da neka tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n\in\mathbb{N}$, obično napravimo slijedeća tri koraka:
1) baza indukcije ($n=1$, ili, općenitije, $n=n_0\in\mathbb{N}$): Provjerimo/pokažemo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za $n=1$ (odnosno, za $n=n_0$),
2) induktivna pretpostavka ($n=k\geq 1$, odnosno $n=k\geq n_0$): Pretpostavimo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za prirodan broj k,
3) korak indukcije ($n=k+1$): Koristeći induktivnu pretpostavku pokažemo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi i za prirodan broj $k+1$.
Tada prema principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n\in\mathbb{N}$ (odnosno, za svaki $n\in\mathbb{N}, n\geq n_0$).

- Za $\sum_{i=1}^{n} x_i$ i $\prod_{i=1}^{n} x_i$ vrijede poopšteni zakoni asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti, te da vrijede svojstva:
1) $0\leq x_i$ $(i=1,\dots,n) \Rightarrow 0\leq$;
2) $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow (\exists i\in\{1,\dots,n\})\ x_i=0$;
3) $0\leq x_i \leq y_i$ $(i=1,\dots,n) \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i$;
4) $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (poopštenje nejednakosti trougla);
5) $\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n}|x_i|$.

Kompozicijom sabiranja i stepenovanja dobijemo polinome (polinomske funkcije)

$$x\to P(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad (*)$$

gdje je $a_n,\dots,a_0\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$. Brojevi $a_n,\dots,a_0$ zovu se koeficijenti polinoma i oni potpuno određuju polinom, a dokazuje se i obratno, da polinom potpuno određuje svoje koeficijente.
Ako je $a_n\neq 0$, kažemo da je polinom (*) stepena (stupnja) n.
- Polinomi su, sa računske tačke gledišta, najjednostavnije funkcije, jer se njihova vrijednost u svakoj tački $x\in\mathbb{R}$ može izračunati samo primjenom osnovnih operacija.
- Lahko se dokaže da se kompozicijom polinoma dobiju ponovo polinomi. To specijalno vrijedi za kompoziciju polinoma $x\to 1+x$ i n-tog stepena $x\to x^n$, pa je $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.
- Koeficijenti ovog polinoma se često pojavljuju i zovu se binomni koeficijenti. Ti koeficijenti se obično označavaju sa $\binom{n}{i}$, $(n,i\in\mathbb{N}_0, i\leq n)$.
- Binomni koeficijenti se definiraju formulom: $\binom{n}{i} := \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

- Osnovna svojstva binomnih koeficijenata:
i) $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$;
ii) $\binom{n}{i} + \binom{n}{n-i} = \binom{n+1}{i}$;
iii) $\binom{n}{i} = \binom{n+1}{i+1}\dfrac{i+1}{n+1}$ → Pascalova jednakost
- za svaki $n\in\mathbb{N}_0$ vrijedi
(i) $2n!! = n!\,2^n$; ii) $(2n+1)!! = \dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot 2^n}$, odakle za $n\in\mathbb{N}$ slijede jednakosti

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n),\quad (2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1).$$

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

Teorema Za svaki prirodni broj n i za sve $x, y \in \mathbb{R}$ važi relacija

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{i}x^{n-i}y^i + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n,$$

koja se zove binomna formula ili Newtonova (binomna) formula (ili binomni razvoj).

Tutorijal 2

FM 2.1° Odrediti najveći zajednički djelilac brojeva 1981 i 378.

Izvršimo sukcesivna dijeljenja, tj. primjenimo tzv. Euklidov algoritam za nalaženje najvećeg zajedničkog djelioca dijelih brojeva (a također i dva polinoma istog argumenta.)

$$\begin{array}{l} 1981 : 378 = 5 \\ \underline{-1890} \\ \quad 91 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 1981 = 378 \cdot 5 + 91$$

$$\begin{array}{l} 378 : 91 = 4 \\ \underline{-364} \\ \quad 14 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 378 = 91 \cdot 4 + 14$$

$$\begin{array}{l} 91 : 14 = 6 \\ \underline{-84} \\ \quad 7 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 91 = 14 \cdot 6 + 7$$

$$\begin{array}{l} 14 : 7 = 2 \\ \underline{-14} \\ \quad / \! / \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 14 = 7 \cdot 2 + 0$$

Posljednji ostatak različit od nule je 7, a to je upravo najveći zajednički djelilac brojeva 1981 i 378, tj. $\boxed{NDZ(1981, 378) = 7}$

FM 47.4° Riješiti jednačinu:

$$|x^2 + x - 2| + |x^2 - x - 2| = 2$$

Prvo tražimo rješenja jednačina

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, \; x_2 = -2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = -1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x-1$	−	−	−	+	+
$x+2$	−	+	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
$(x-1)(x+2)$	+	−	−	+	+
$(x+1)(x-2)$	+	+	−	−	+
	I	II	III	IV	V

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

I $(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)=2$

$x^2\cancel{-x}\cancel{+2x}-2+x^2\cancel{+x}\cancel{-2x}-2=2$

$2x^2=6$

$x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \notin (-\infty,2)$

II $-(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)=2$

$\cancel{-x^2}\cancel{+x}\cancel{-2x}\cancel{+2}\cancel{+x^2}+x-2x\cancel{-2}=2$

$-2x=2 \Rightarrow x=-1 \notin [-2,-1)$

III $-(x-1)(x+2)-(x+1)(x-2)=2$

$-x^2\cancel{+x}\cancel{-2x}+2-x^2\cancel{-x}\cancel{+2x}+2=2$

$-2x^2=-2 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \boxed{x_1=-1} \in [-1,1)$

$x_2=1 \notin [-1,1)$

IV $(x-1)(x+2)-(x+1)(x-2)=2$

$\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{2x}\cancel{-2}\cancel{-x^2}-\cancel{x}+2x\cancel{+2}=2$

$2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1} \in [1,2)$

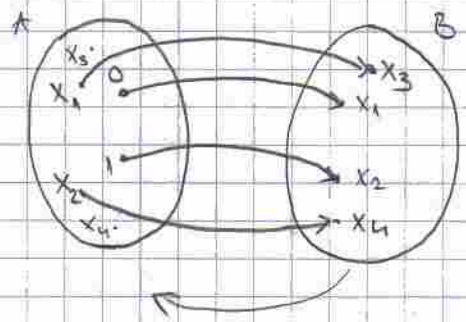
V kao i u prvom rješenja su $x=\pm\sqrt{3} \notin [2,+\infty)$

Pa je data jednačina zadovoljena sa $\boxed{x=\pm 1}$

Uščumlić, 206 Naći bijektivno preslikavanje segmenta $[0,1]$ na interval $(0,1)$.

$f: [0,1] \to (0,1)$

Za preslikavanje (funkciju) $f: X \to Y$ kažemo da je surjekcija ako je $f(X)=Y$, injekcija ako je $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$, bijekcija, ako je f i injekcija i surjekcija.



$x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{3}, x_3=\frac{1}{4}, \dots, x_n=\frac{1}{n+1}, n\to\infty$

prebacujemo x_3 i x_4 u A da bi pravila surjekcije bilo zadovoljeno, pa njih preslikavamo u dva druga elementa, i tako u nedogled, a $\infty+2$ je opet ∞

Uščumlić 622. Naći oblast određenu nejednačinom:

$\left|\frac{x-y}{x+2y}\right| \geq 1$

$\left|\frac{x-y}{x+2y}\right| \geq 1 \iff \frac{|x-y|}{|x+2y|} \geq 1$

I $y \leq x,\ y > \frac{-x}{2},\ y \leq 0$

II $y \leq x,\ y < \frac{-x}{2},\ y \geq -2x$

III $y \geq x,\ y > \frac{-x}{2},\ y \leq -2x$

I oblast

i brojnik i nazivnik pozitivan

$x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x$

$x + 2y > 0 \Rightarrow y > \frac{-x}{2}$

$\frac{x-y}{x+2y} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x - y - x - 2y}{x+2y} \geq 0$

$\frac{-3y}{x+2y} \geq 0 \quad -3y \geq 0$

$\boxed{y \leq 0}$

II oblast

$x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x$

$x + 2y < 0 \Rightarrow y < -\frac{x}{2}$

$\frac{x-y}{-x-2y} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x - y + x + 2y}{-x-2y} \geq 0$

$-\frac{2x-y}{x+2y} \geq 0 \Rightarrow -2x - y \leq 0$

$y \geq -2x$

III oblast

$x - y \leq 0 \Rightarrow y \geq x$

$x + 2y > 0 \Rightarrow y > -\frac{x}{2}$

$\frac{-(x-y)}{x+2y} - 1 \geq 0$

$\frac{-x + y - x - 2y}{x+2y} \geq 0$

$\frac{-2x-y}{x+2y} \geq 0$

$-2x - y \geq 0$

$y \leq -2x$

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

IV oblast

$x - y \le 0 \Rightarrow y \ge x$

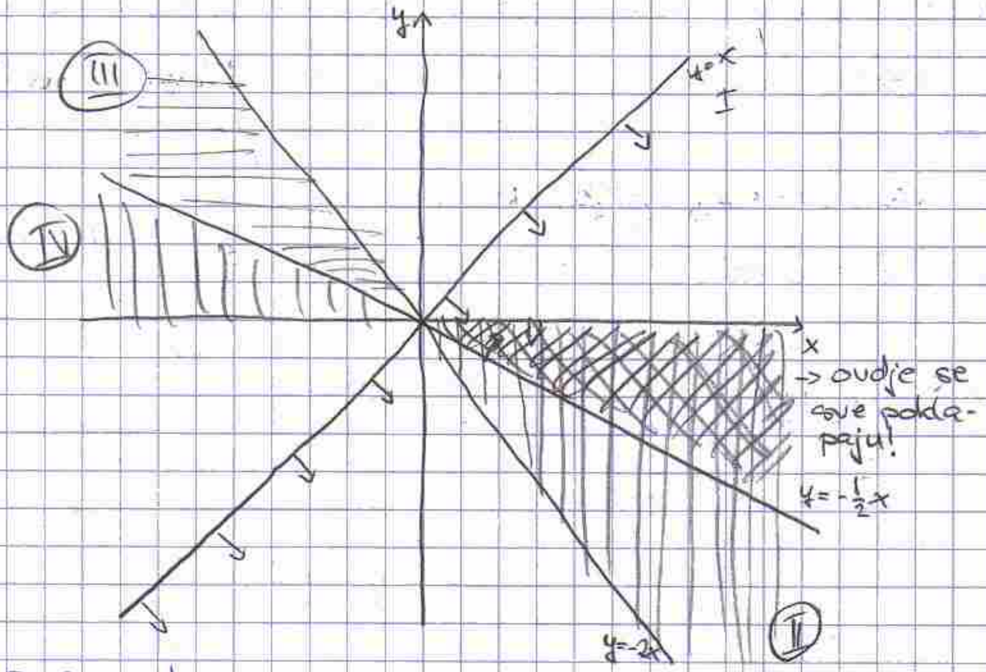
$x + 2y < 0 \Rightarrow y < -\frac{1}{2}x$

$\frac{x-y}{x+2y} - 1 \ge 0$

$\frac{\cancel{x} - y - \cancel{x} - 2y}{x+2y} \ge 0$

$\frac{-3y}{x+2y} \ge 0$

$-3y \le 0 \Rightarrow y \ge 0$



ŽFS 5.24 Posmatrajmo u $\mathbb{R}$ formule:

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

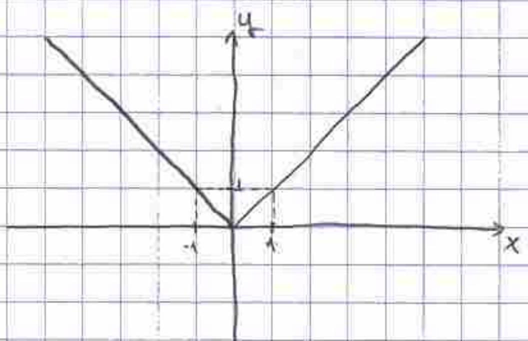
c) $f(x) = |x^2 - 4|$

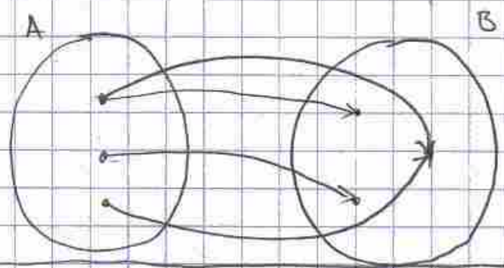
Odrediti domen $D(f)$, skup vrijednost $Im(f)$, ispitati bijektivnost, parnost uz grafičku predstavu i izraziti kompoziciju $f \circ f$

a) $f(x) = |x|$

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_0^+$





Ako svi elementi iz A imaju sliku u B, onda je funkcija surjektivna. Da bi funkcija bila injektivna, isključivo 1 element iz A mora imati sliku u B. Da bi bila bijektivna, mora biti i surjektivna i injektivna.

Ova funkcija je surjektivna, ali nije injektivna, pa nije ni bijektivna.

Funkcija je parna, ako je simetrična u odnosu na y-osu, a neparna ako je simetrična u odnosu na koordinatni početak.

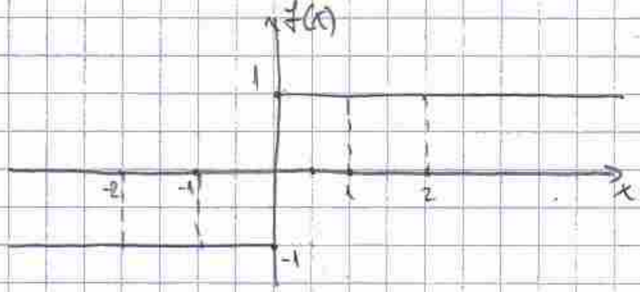
Ova funkcija je parna.

$f \circ f = f(f(x)) = f(|x|) = ||x|| = |x| = f$

b) $f = \frac{|x|}{x}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$Im(f) = \{-1, 1\}$

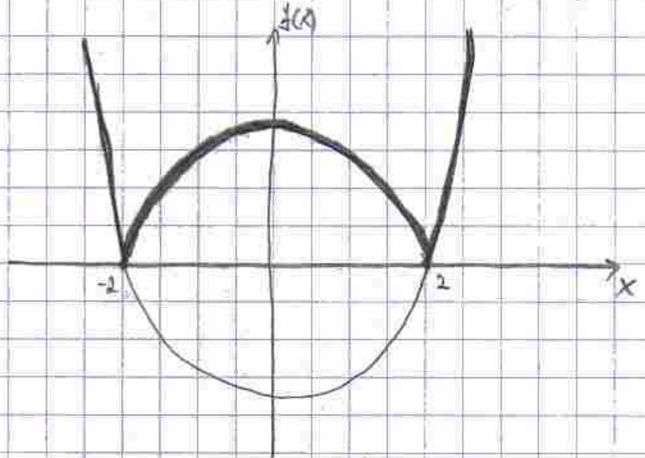


- Funkcija nije bijektivna, zato što dvije i više vrijednosti $f(x)$ imaju sliku u x (nije injektivna).
- Funkcija je neparna, jer je simetrična u odnosu na koordinatni početak
- $f \circ f = f(f(x)) = f\left(\frac{|x|}{x}\right) = \frac{\cancel{\left|\frac{|x|}{x}\right|}^{1}}{\frac{|x|}{x}} = \frac{1}{\frac{|x|}{x}} = \frac{1}{f}$

c) $f(x) = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)|$

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_0^+$



- Za više vrijednosti x-a, y je isto, pa funkcija nije injektivna dakle, nije ni bijektivna.
- Parna je.

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

$f \circ f = f(f(x)) = f(|x^2-4|) = |(|x^2-4|)^2 - 4| = |x^4 - 8x^2 + 16 - 4| = |x^4 - 8x^2 + 12|$