# Predavanje 3 zabilješke

## KOMPLEKSNI BROJEVI

Definicija: Neka su u skupu $R\times R$ uređenih parova realnih brojeva dvije operacije koje ćemo označiti sa + odnosno · i zvati sabiranje odnosno množenje, definirane formulama:

$$(\forall a,b,c,d\in\mathbb{R})\ (a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d) \quad (*)$$
$$(\forall a,b,c,d\in\mathbb{R})\ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc) \quad (**)$$

Skup $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}$ u kome su definirane operacije + i · kao u (*) i (**) zove se skup kompleksnih brojeva i, najčešće označava sa $\mathbb{C}$, a njegovi elementi zovu se kompleksni brojevi.

- Na osnovu (*) i (**) i aksioma za sabiranje i množenje u skupu $\mathbb{R}$, lako se provjeri da je $(\mathbb{C},+,\cdot)$ polje. Pri tome je kompleksni broj $(0,0)$ neutralni element za sabiranje, $-(x,y)=(-x,-y)$, $(1,0)$ jedinični element, dok je $(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ za $(x,y)\neq(0,0)$

- Kompleksne brojeve kod kojih je prva komponenta jednaka 0, tj. elemente $(0,y)\in\mathbb{C}$ $(y\neq 0)$ zovemo čisto imaginarnim brojevima. Specijalno, element $(0,1)\in\mathbb{C}$ zovemo, po tradiciji, imaginarna jedinica i označavamo sa $i$ (ili $j$), tj. po definiciji je $(0,1)=i$
- Kompleksne brojeve u algebarskom obliku prikazujemo kao linearnu kombinaciju realne jedinice "1" i imaginarne jedinice "i", odnosno $z=x+yi$.
- Kod kompleksnog broja $z=(x,y)=x+iy$ broj $x$ zove se realni dio, a $y$ imaginarni dio (komponenta) kompleksnog broja $z$ $(x=\mathrm{Re}(z);\ y=\mathrm{Im}(z))$
- $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0) \Rightarrow i^2=-1$
- $i^{4k}=1$; $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, za sve $k\in\mathbb{N}$

Definicija: Neka je $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ kompleksan broj. Tada za broj $\bar{z}=x-iy$ kažemo da je konjugovan (konjugiran) ili spregnut kompleksan broj broju $z$.

Definicija: Realan nenegativan broj $\sqrt{x^2+y^2}$ zove se apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$, tj. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

### KOMPLEKSNI BROJEVI U TRIGONOMETRIJSKOM I U EKSPONENCIJALNOM OBLIKU

- Položaj tačke $M(x,y)$ koja predstavlja kompleksni broj $z=x+iy$, $(z\neq 0)$, određen je također i tzv. polarnim koordinatama $r$ i $\varphi$, gdje je $r=|\vec{OM}|=|z|$, dužina ili radijus vektora $\vec{OM}$, a $\varphi$ je orijentisani ugao $(x,\vec{OM})$ koji čini vektor $\vec{OM}$ sa osom $Ox$, tj. $\varphi=\measuredangle(Ox,\vec{z})$.

Iz $\cos\varphi=\frac{x}{r}$, $\sin\varphi=\frac{y}{r} \Rightarrow z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{y}{x}$ (*)

Izraz (*) zovemo trigonometrijskim oblikom broja $z$.

- Ako formalno stavimo $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, tj. specijalno $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, onda se izraz (*) može pisati kao

$$z=re^{i\varphi} \quad (**)$$

Izraz (**) zove se eksponencijalni oblik kompleksnog broja.

Definicija: Neka je $M(x,y)$ tačka koja predstavlja kompleksni broj $z=x+iy$, $(z\neq 0)$. Svaki mjerni broj $\varphi$ orijentisanog ugla $(x,\vec{OM})$ koji čini radijus-vektor $\vec{OM}$ sa osom $Ox$, tj. svaki realan broj $\varphi$ određen pomoću $\cos\varphi=\frac{x}{r}$ i $\sin\varphi=\frac{y}{r}$, zove se argument (ili arkus ili amplituda) broja $z$, i označava se sa $\mathrm{Arg}\,z$ (ili $\mathrm{Arc}\,z$, $\mathrm{Amp}\,z$)

Argument $\varphi$ broja $z$ koji zadovoljava uslov $-\pi<\varphi\leq\pi$ zove se glavna vrijednost argumenta broja $z$ i označava se sa $\arg z$ (ili $\mathrm{arc}\,z$, $\mathrm{amp}\,z$)

Uglu $(x,\vec{OM})$ pripada tačno jedan mjerni broj $\varphi_0$ koji se nalazi u razmaku $(-\pi,\pi]$, dok se svi ostali mjerni brojevi $\varphi$ ugla $(x,\vec{OM})$ dobiju po formuli

$$\varphi=\varphi_0+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}). \qquad \mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$$

- Kada se uzima varijanta $(-\pi < \arg z \leq \pi)$, glavna vrijednost argumenta broja $z = x + iy$ data je sa

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & , (x > 0) \\ \pi + \operatorname{arctg} y/x & , (x < 0 \land y > 0) \\ -\pi + \operatorname{arctg} y/x & , (x < 0 \land y < 0) \\ \pi/2 & , (x = 0 \land y > 0) \\ -\pi/2 & , (x = 0 \land y < 0) \\ \pi & , (x < 0 \land y = 0) \end{cases}$$

# Tutorijal 3

Predavanje 3, zad. 1.4.10

a) Pojednostaviti izraz $\sqrt{z}-(z^3)^{\frac{1}{6}}$ ako je $z$:

1) kompleksan broj; 2) pozitivan realan broj; 3) $z=(-10)^{2008}$.

b) Pojednostaviti izraz $\ln e^z$ ako je $z$:

1) kompleksan broj; 2) realan broj (npr. 2008); 3) $z=10i$, gdje je $i$ imaginarna jedinica.

c) Izračunati realni i imaginarni dio i modul kompleksnog broja zadanog u obliku $z=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}i)$, gdje je $i$ imaginarna jedinica.

d) Koristeći Moivreovu formulu i Newtonovu binomnu formulu, izraziti $\sin 5x$ pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$

a) 1) $\sqrt{z}-(z^3)^{\frac{1}{6}}$, ako ostavimo ovaj oblik, imat ćemo 6 rješenja zbog $\sqrt[6]{z^3}$, ali ako to napišemo u drugom obliku =>

$$\sqrt{z}-(z^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{z}-z^{\frac{3}{6}}=\underline{\sqrt{z}-z^{\frac{1}{2}}}$$

2) Ako je $z$ realan broj => $\sqrt{z}-z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{z}-\sqrt{z}=0$

3) $z=(-10)^{2008}$ (zbog parnog stepena) $=10^{2008}$, a i to je pozitivan realan broj, pa vrijedi isto kao i pod 2).

b) $\ln e^z$

Ako uzmemo da je $z=\rho e^{i\varphi}$ $/\circ \ln$ =>

$$\ln z=\ln\rho e^{i\varphi}=\ln\rho+\ln e^{i\varphi}=\ln\rho+i(\varphi+2k\pi)\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\ln z=\ln|z|+i\operatorname{Arg}(z)$$

Konkretno u našem slučaju:

$\ln e^z=\ln e^{\rho i\varphi}$ - za kompleksan broj ne možemo pojednostaviti jer dobijemo $\ln(e^{i\varphi})^{\rho}$

2) $\ln e^{2008}=2008\cdot\cancel{\ln e}^{1}=2008$

3) $\ln e^{10i}=(10+2k\pi)i+\ln e=(10+2k\pi)i$

c) $z = tg\left(\frac{\pi}{2} i\right)$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}{\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}$$

$$z = tg\left(\frac{\pi}{2} i\right) = -i\,\frac{e^{\frac{\pi}{2} i \cdot i} - e^{-i \cdot i\frac{\pi}{2}}}{e^{i \cdot i\frac{\pi}{2}} + e^{-i \cdot i\frac{\pi}{2}}} = -i\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}} = i\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} = i\,th\frac{\pi}{2}$$

$Re\{z\} = 0$

$Im\{z\} = th\frac{\pi}{2}$

$|z| = th\frac{\pi}{2}$

d) $(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \binom{5}{0}\cos^5 x + \binom{5}{1}\cos^4 x\, i\sin x + \binom{5}{2}\cos^3 x (i\sin x)^2 + \binom{5}{3}\cos^2 x (i\sin x)^3 + \binom{5}{4}\cos x (i\sin x)^4 + \binom{5}{5}(i\sin x)^5 =$$

$$= \cos^5 x + 5\cos^4 x\, i\sin x + 10\cos^3 x(-\sin^2 x) + 10\cos^2 x\,(-i\sin^3 x) + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x = \cos 5x + i\sin 5x$$

$$\boxed{\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x}$$

Uščumlić 1, 715.(7°) Napisati u eksponencijalnom obliku broj $-1+i$

$z = -1 + i \quad , z = \rho e^{i\varphi} \qquad \text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \text{arctg}\,\frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \underline{z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4} i}}$

Uščumlić 1, 720.(5°) Gdje leže tačke u kompleksnoj ravni za koje je ispunjen uslov: $|z| + Re\{z\} \le 2$

$|z| + Re\{z\} \le 2$

$z = x + iy$

$|x + iy| + x \le 2$

$\sqrt{x^2 + y^2} + x \le 2$

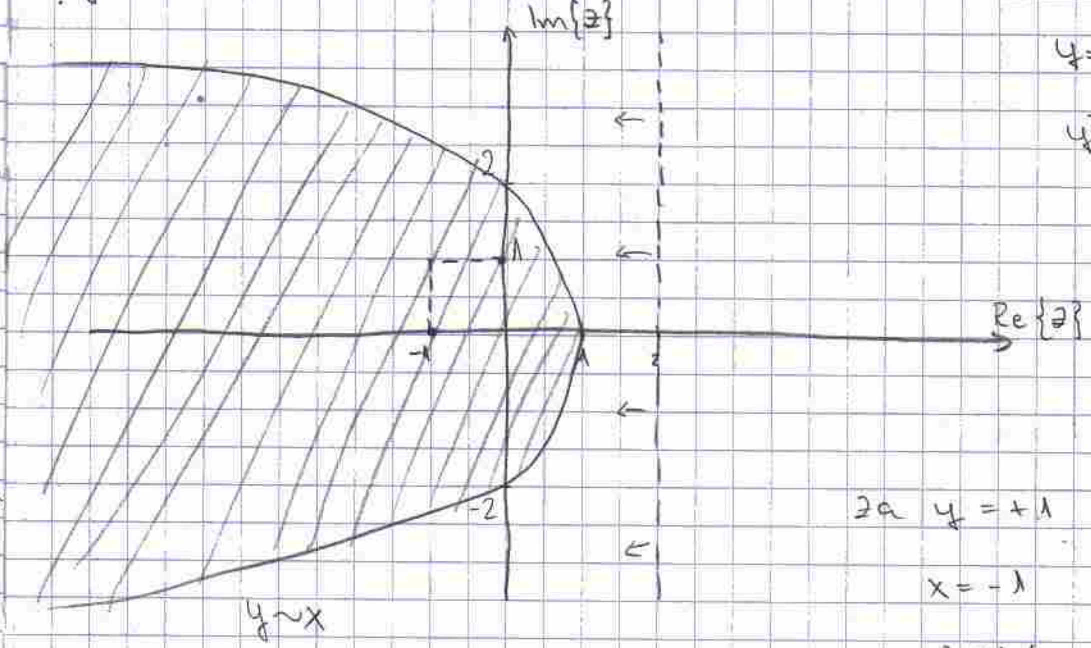
$0 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2 - x \;/^2$ (zbog korijena mora biti $\ge 0$)

$\Rightarrow 2 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 2$

$\cancel{x^2} + y^2 \le 2 - x^2 = 4 - 4x \cancel{+x^2}$

$y^2 \leq 4(1-x)$

$y^2 = 4(1-x)$




$y=0 \Rightarrow 0=4(1-x) \Rightarrow x=1$

$y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

za $y=+1$

$x=-1$

$y^2 \leq 4(1-x)$

$1^2 \leq 4+4$

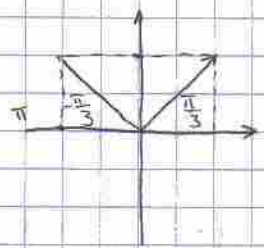
$1 \leq 8$ T

Uščumlić 1., 814.(3°) Izračunati korijen: $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$

$\sqrt[4]{\underbrace{-8+8i\sqrt{3}}_{z}}$ , $z=\rho \cdot e^{i\varphi}$

$\rho=\sqrt{(-8)^2+(\sqrt{3}\cdot 8)^2}=\sqrt{64+3\cdot 64}=\sqrt{4\cdot 64}=2\cdot 8=16$

$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{-1\cdot 8}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=60^\circ=\frac{\pi}{3}$




$z=16\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=2\cdot e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}}$ $\quad k\in\{0,1,2,3\}$

zbog 4. korijena, moramo imati 4 rješenja

$=2e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}}=\boxed{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)\right] k\in\{0,1,2,3\}}$

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

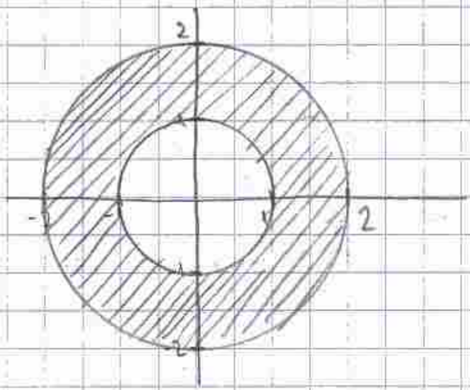
ŽFS 11.12.(c)) Naći $T(x,y)$ za koje je

a) $1 \le |z| \le 2$

b) $|z-1| \le 1$

c) $|z-2| + |z+2| = 5$

a)




b) $|z-1| \le 1$

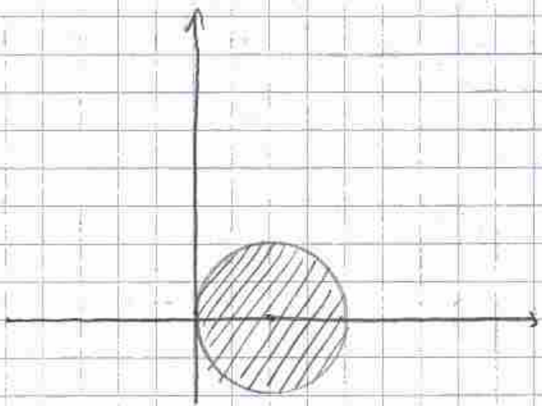
$z = x + iy$

$|x+iy-1| \le 1$

$0 \le \sqrt{(x-1)^2+y^2} \le 1 \quad /^2$

$(x-1)^2 + y^2 \le 1$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$



c) $|z-2| + |z+2| = 5$

$|x+iy-2| + |x+iy+2| = 5$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 5$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 5 - \sqrt{(x+2)^2+y^2} \quad /^2$

$\cancel{x^2} - 4x \cancel{+4} \cancel{+y^2} = 25 - 10\sqrt{(x+2)^2+y^2} \cancel{+x^2} + 4x \cancel{+4} \cancel{+y^2}$

$-25 - 8x = -10\sqrt{(x+2)^2+y^2} \quad /^2$

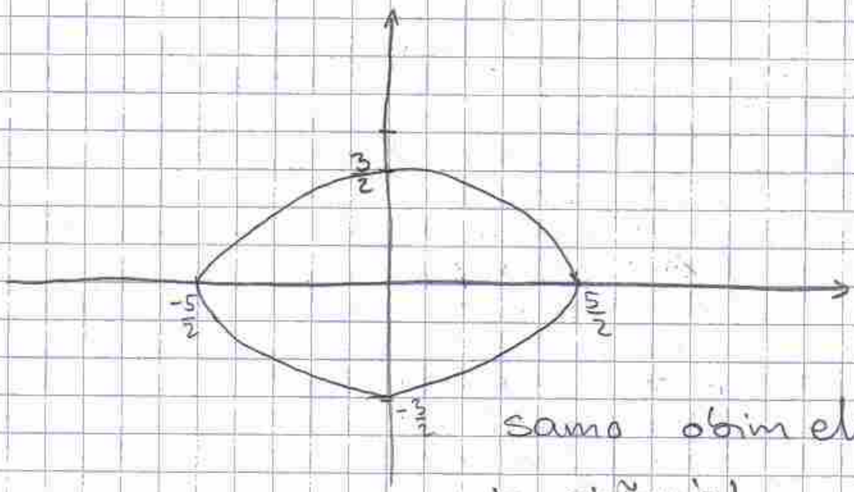
$$625 + \cancel{400x} + 64x^2 = 100\left(x^2 \cancel{+4x} + 4 + y^2\right)$$

$$36x^2 + 100y^2 = 225 \quad /225$$

$$\frac{x^2}{\frac{225}{36}} + \frac{y^2}{\frac{225}{100}} = 1$$

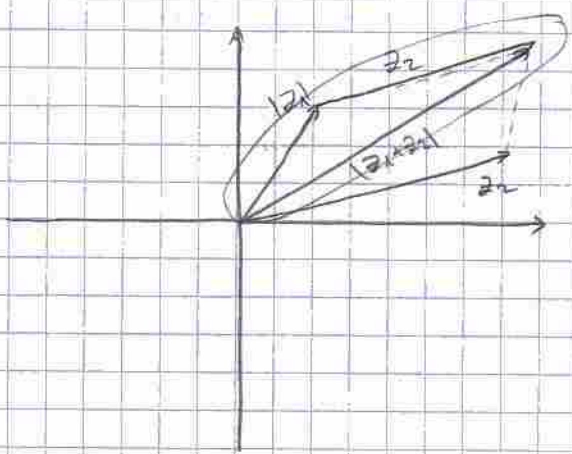
$$\frac{x^2}{\left(\frac{15}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{10}\right)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$




samo obim elipse je rješenje!

ZFS. 11.14. Dokazati grafički i računom da za kompleksne brojeve $z_1$ i $z_2$ važi formula: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$




pravilo trougla $|z_1| + |z_2| > |z_1| + |z_2|$, tj.

$a + b > c$

Znak jednakosti vrijedi kad $z_1$ i $z_2$ imaju isti pravac.

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$|x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2| \leq |x_1 + iy_1| + |x_2 + iy_2|$$

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2} \quad )^2$$

$$\cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{y_2^2} + \cancel{2}x_1x_2 + \cancel{2}y_1y_2 \leq \cancel{x_1^2} + \cancel{y_2^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1x_2)^2 + (y_1x_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (y_1y_2)^2}$$

$$\cancel{(x_1x_2)^2} + \cancel{(y_1y_2)^2} + 2x_1x_2y_1y_2 \leq \cancel{(x_1x_2)^2} + (y_1x_2)^2 + (x_1y_2)^2 + \cancel{(y_1y_2)^2}$$

$$(x_2y_1 - x_1y_2)^2 \geq 0 \quad T$$

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com