Predavanje 4

zabilješke

NIZOVI I REDOVI

- Definicija: Konačni niz elemenata (nepraznog) skupa X je svako preslikavanje (funkcija) $x: M \to X$, gdje je M neki konačan podskup skupa $\mathbb{N}$.
- Definicija: Beskonačni niz ili, kraće, niz u (nepraznom) skupu X je svako preslikavanje $x: \mathbb{N} \to X$, skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u skup X. Vrijednost $x(n) \in X$ preslikavanja x u tački $n \in \mathbb{N}$ zove se n-ti član toga niza i obično se označava sa x_n, pa se govori o (beskonačnom) nizu $(x_n, n \in \mathbb{N})$. Ako je specificirana zavisnost x_n od n, onda se x_n naziva opšti član niza.
- Harmonijski niz je niz kod kojeg je svaki član (osim prvog) harmonijska sredina njemu susjedna dva člana $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots)$
- Za (x_n) kažemo da je stacionarni niz ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n = C$ (C-contanta) za svaki $n \geq n_0$.
- Za (x_n) kažemo da je aritmetički niz akko vrijedi $x_{n+1} - x_n = d, \forall (n \in \mathbb{N})$, gdje je d fiksan broj.
- Geometrijski niz je niz brojeva kod kojeg je svaki član osim prvog jednak proizvodu prethodnog člana i stalnog broja $q \neq 0$.

Pojam i osnovna svojstva granične vrijednosti niza

- Definicija Za niz (a_n) u $\mathbb{R}$ kažemo da je konvergentan (u $\mathbb{R}$) ako postoji realni broj $a (\in \mathbb{R})$ takav da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za sve prirodne brojeve n veće od n_0 vrijedi
$$|a_n - a| < \varepsilon$$
U tom slučaju a zovemo granična vrijednost (limes) niza (a_n) i pišemo
$$\lim (a_n) = a \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$
Također, tada kažemo da a_n konvergira (ili teži) ka a kad n teži u beskonačnost $(a_n \to a (n \to \infty))$. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan, ili da divergira.
- Kada konvergentnom nizu (a_n) pridružujemo graničnu vrijednost a, govorimo da vršimo granični prelaz.
- Definicija Kažemo da niz (a_n) u $\mathbb{R}$ ima graničnu vrijednost $+\infty$ i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ako za svaki broj $M \in \overline{\mathbb{R}}$ postoji prirodan broj n_0, takav da je $a_n > M$ za svaki prirodan broj n veći od n_0
- U slučaju $\lim a_n = -\infty$ kažemo da je niz (a_n) određeno divergentan ili da divergira ka beskonačnosti.
- Pod okolinom tačke (odnosno broja) $x_0 \in \mathbb{R}$ podrazumijevamo bilo koji podskup skupa $\mathbb{R}$ koji sadrži otvoreni interval skupa $\mathbb{R}$ kojem ta tačka pripada. Specijalno, svaki otvoreni interval u $\mathbb{R}$ koji sadrži tačku $x_0 \in \mathbb{R}$ zovemo okolina (u $\mathbb{R}$) tačke x_0 i označavamo sa $U(x_0)$ ili $O(x_0)$. Pri tome, za svaki $\varepsilon > 0$ okolinu tačke x_0 datu sa $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0 \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$ zovemo ε-okolina tačke x_0.
- Definicija: Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$ i neka je $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Kažemo da je a granična vrijednost ili limes niza (a_n) i pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ako za svaku okolinu U tačke a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n > n_0$ povlači $a_n \in U$. U slučaju kada je $a \in \mathbb{R}$ (tj. kada je a konačan broj), za niz (a_n) kažemo kažemo da je konvergentan, a u slučaju kada je $a = -\infty$ ili $+\infty$ ili da granična vrijednost ne postoji, kažemo da niz (a_n) divergira (u slučaju kada je limes niza (a_n) beskonačan kažemo da taj niz divergira u užem smislu, a u slučaju kada limes od (a_n) ne postoji, kažemo da niz (a_n) divergira u širem smislu ili da oscilira).

- Definicija: Za niz (a_n) u $\mathbb{R}$ kažemo da je nula-niz ili beskonačno mala veličina (ili infinitezimala) u odnosu na n kad $n \to +\infty$ ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Za niz (a_n) kažemo da je ograničen odozgo [ograničen odozdo] ako je skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen odozgo (odozdo). Za niz koji je ograničen i odozdo i odozgo kažemo da je ograničen.

Podnizovi. Tačke gomilanja

- Definicija: Neka je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$, niz prirodnih brojeva takav da je $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, i neka je $a : \mathbb{N} \to A$ niz elemenata proizvoljnog skupa $A (\neq \emptyset)$. Tada za niz $a \circ n : \mathbb{N} \to A$ sa članovima a_{n_k} $(k \in \mathbb{N})$ kažemo da je podniz niza (a_n).
- Definicija: Za tačku $a \in \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je tačka gomilanja (ili tačka nagomilavanja) skupa A $(\subseteq \mathbb{R})$ ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedna tačka skupa A različita od same tačke a.
- Bolzano-Weierstrassova teorema za skupove: Svaki beskonačni ograničeni skup u $\mathbb{R}$ ima bar jednu tačku gomilanja u $\mathbb{R}$. Svaki beskonačni skup u $\mathbb{R}$ ima bar jednu tačku gomilanja u $\overline{\mathbb{R}}$
- Definicija: Za tačku $a \in \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je tačka gomilanja (ili tačka nagomilavanja) niza a_n u $\mathbb{R}$ ako postoji podniz (a_{n_k}) tog niza koji teži ka a kad $k \to \infty$.
- Bolzano-Weierstrassova teorema za nizove:
(i) Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku gomilanja u $\mathbb{R}$.
(ii) Svaki niz realnih brojeva ima bar jednu tačku gomilanja u $\overline{\mathbb{R}}$
- Definicija: Najveća (najmanja) tačka gomilanja niza (a_n) realnih brojeva zove se gornji limes ili limes superior (donji limes ili limes inferior) niza (a_n) i označava sa $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ ili $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$ ($\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ ili $\lim_{n\to\infty} \inf a_n$).

Cauchyjev princip konvergencije. Monotoni nizovi. Broj e

- Definicija: Za niz (a_n) u $\mathbb{R}$ kažemo da je Cauchyjev ili fundamentalan ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_m - a_n| < \varepsilon$ čim su indeksi m i n veći od n_0
- (i) Svaki konvergentan niz je Cauchyjev
(ii) Svaki Cauchyjev niz je ograničen
(iii) Ako Cauchyjev niz ima konvergentan podniz, on je i sam konvergentan
- Definicija: Za niz (a_n) u $\mathbb{R}$ kažemo da je neopadajući ako je $a_n \leq a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, a da je rastući (strogo rastući) ako je $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Analogno se definira nerastući i opadajući (strogo opadajući) niz. Jednim imenom nizove navedena četiri tipa zovemo monotoni nizovi.
- Teorema:
(i) Neka je (a_n) neopadajući niz u $\mathbb{R}$. Tada (a_n) konvergira u $\mathbb{R}$ akko je ograničen odozgo.
(ii) Svaki neopadajući niz u $\mathbb{R}$ ima graničnu vrijednost u $\overline{\mathbb{R}}$.
Analogne izjave vrijede i za nerastuće nizove.

Pojam i neka svojstva beskonačnog reda.

- Neka je zadano beskonačno mnogo (niz) realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ i pomoću njih napisan simbolički izraz u obliku zbira:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Taj simbol naziva se beskonačnim (realnim) redom s opštim članom a_n, ili beskonačnim redom kome su brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ članovi ili kraće (realnim) redom (ili redom u $\mathbb{R}$).
Ako označimo prvi član sa s_1, zbir prvog i drugog sa s_2, tj. ako stavimo

$s_1 := a_1$; $s_2 := a_1 + a_2$; $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$; Tako dolazimo do niza (s_n) parcijalnih zbirova ili parcijalnih suma (odsječaka) zadanog reda.

- Simbol beskonačnog reda $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ je druga oznaka za beskonačni niz parcijalnih suma (s_n).
- Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Tada je za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirana suma:
$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$
prvih k članova niza (a_n) tako da za svaki $k \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})$ vrijedi $s_k = s_{k-1} + a_k$.
- Definicija: Neka je dat niz (a_n) u $\mathbb{R}$ (ili, opštije, u normiranom vektorskom prostoru X) i neka je $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Beskonačni red ili, kraće red u $\mathbb{R}$ (ili, opštije, u proizvoljnom normiranom vektorskom prostoru X) je uređen par $((a_n), (s_k))$ koji se sastoji od dva niza $(a_n), (s_k)$ ($a_n, s_k \in \mathbb{R}$ odnosno, $a_n, s_k \in X$); a_n su članovi reda, a s_k ($k \in \mathbb{N}$) k-te parcijalne sume reda. Niz (s_k) nazivamo nizom parcijalnih suma datog reda.
- Dva reda su jednaka akko imaju jednake članove sa istim indeksom.
- Definicija: Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$ (ili, opštije, iz normiranog vektorskog prostora X). Kažemo da je niz (a_n) sumabilan u $\mathbb{R}$ (odnosno, u X) ili da je red $\sum a_n$ konvergentan (u $\mathbb{R}$, odnosno, u X) ako je niz parcijalnih suma (s_k) reda $\sum a_n$ konvergentan (u $\mathbb{R}$, odnosno, u X). Limes $s := \lim_{k \to \infty} s_k$ naziva se suma reda $\sum a_n$ i označava sa $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ako red $\sum a_n$ nije konvergentan, kaže se da je divergentan.

Pozitivni redovi

- Za red $\sum a_n$ kažemo da je **pozitivan** ili da je red s pozitivnim članovima (ili red sa nenegativnim članovima) ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, ili (opštije) ako postoji prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \geq 0$ za svaki $n \geq n_0$.
- Teorema: Pretpostavimo da postoji prirodni broj n_0 takav da za članove redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ važe nejednakosti $a_n \leq b_n$ za sve $n \geq n_0$. Tada iz konvergencije reda $\sum b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ slijedi divergencija reda $\sum b_n$.
- Teorema: Neka postoji $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 \leq K \leq \infty$, gdje su a_n i b_n članovi redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$. Ako je $K < \infty$, onda iz konvergencije reda $\sum b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum a_n$. Ako je $K > 0$, iz divergencije reda $\sum b_n$ slijedi divergencija reda $\sum a_n$
- Teorema: Neka za članove redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$ važe nejednakosti: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ za $n \geq n_0$

Tada iz konvergencije reda $\sum b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ slijedi divergencija reda $\sum b_n$

Kriterijumi konvergencije pozitivnih redova

Dalamberov kriterijum:

1° (Jača forma kriterija) Ako za red $\sum a_n$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, tako da je
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \text{za } n \geq n_0,$$
onda on konvergira. Ako pak postoji $n_0' \in \mathbb{N}$, tako da je
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{za } n \geq n_0',$$
onda red $\sum a_n$ divergira.

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

2° (Slabija /granična forma kriterija)
Neka za članove reda $\sum a_n$ postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} := \ell$. Tada za $\ell < 1$ red $\sum a_n$ konvergira, a za $\ell > 1$ on divergira. (Za $\ell = 1$ ovaj kriterijum je neodlučiv.)

3° (Najjača forma kriterija)
Ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, onda red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, red $\sum a_n$ divergira.

- Košijev /korijeni/ kriterijum:

1° Ako za red $\sum a_n$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, tako da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ za $n \geq n_0$, onda on konvergira. Ako postoji $n_0' \in \mathbb{N}$ tako da je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za $n \geq n_0'$, onda red $\sum a_n$ divergira.

2° Neka postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} := \ell$. Tada za $\ell < 1$ red $\sum a_n$ konvergira, a za $\ell > 1$ on divergira.

3° Ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} := \ell$ onda za $\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergira, a za $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

Tutorijal 4

FM, 176.b) Dokazati da je granična vrijednost niza

$\left\{\frac{2n-3}{n+1}\right\}$ jednaka 2;

Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj, tada imamo:

$$\left|\frac{2n-3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n-3-2n-2}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\left|-\frac{5}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon$$

$$5 < \varepsilon(n+1) \Rightarrow 5 < \varepsilon n + \varepsilon$$

$$\frac{5-\varepsilon}{\varepsilon} < n$$

$$\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n$$

$\boxed{n > \frac{5}{\varepsilon} - 1}$ tj. za $\forall \varepsilon > 0$ postoji prirodni broj $N(\varepsilon) \geq \frac{5}{\varepsilon} - 1$,

npr. za $\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow n > 499$

FM, 183. Koristeći tzv. Stolz-ovu teoremu: „ako $b_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, počev od nekog n $b_{n+1} > b_n$ tada je $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ ako postoji limes na desnoj strani, konačan ili beskonačan ($\lim a_n$ može biti konačan, ∞ ili neodređen)" naći:

$$\lim \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \quad (k > -1)$$

1° $b_n \to \infty$, $n \to \infty$

$b_n = n^{k+1}$

$n \to \infty \Rightarrow b_n \to \infty$

$b_{n+1} > b_n$

$(n+1)^{k+1} > n^{k+1}$ T

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

$$\lim \frac{1^k+\dots+n^k}{n^{k+1}} = \lim \frac{\cancel{1^k}+\dots+\cancel{(n-1)^k}+n^k-(\cancel{1^k}+\cancel{2^k}+\dots+(n-1)^k)}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}} =$$

$$= \lim \frac{n^k}{\cancel{n^{k+1}} - \left[\cancel{\binom{k+1}{0} n^{k+1}} + \binom{k+1}{1} n^k (-1)^1 + \binom{k+1}{2} n^{k-1} (-1)^2 + \dots + (-1)^{k+1}\right]} =$$

$$= \lim \frac{n^k}{(k+1)n^k - \binom{k+1}{2} n^{k-1}(-1)^2 - \dots - (-1)^{k+1}} \begin{matrix} :n^k \\ :n^k \end{matrix} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k+1-\binom{k+1}{2} n^{-1}(-1)^2 - \binom{k+1}{3} n^{-2} - \dots - n^{-k}(-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

FM, 196. Dokazati: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$

Ako je $a_n < b_n$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Koristit ćemo nejednakost:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$$

Dokazujemo nejednakost indukcijom

1° za $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2 > \sqrt{3}$ (T)

2° $n \to k$

3° $k+1$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}}_{<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}} \quad /^2$$

$$\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2 < \frac{2k+1}{2k+3}$$

$$\frac{4k^2+4k+1}{4k^2+8k+4} < \frac{2k+1}{2k+3} \Rightarrow$$

$$\cancel{8k^3} + \cancel{8k^2} + 2k + \cancel{12k^2} + 12k + 3 < \cancel{8k^3} + \cancel{16k^2} + 8k + \cancel{4k^2} + 8k + 4$$

$$-1 < 2k \Rightarrow \boxed{k > -\frac{1}{2}} \quad (T) \quad \text{Ovo je zadovoljeno jer}$$

k mora biti ≥ 1

Uščumlić 1, 1583. Ako je $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \dots, a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}$, dokazati da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$$a_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{8}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$$

$$a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

1° $n=1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}$

2° $a_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k}$$

$$a_{k+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}} + \sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}} + \cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}} - \sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

Uščumlić 1, 1592 Dat je niz $\{\alpha_n\}$ gdje je $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} + \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n +$ $+(1+\alpha)\sin\frac{n\pi}{2}$. Odrediti α iz uslova da niz konvergira pa naći graničnu vrijednost.

$$a_n = \underbrace{\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}}_{\to \frac{1}{3}} + \underbrace{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n}_{\to e^2} + \underbrace{(1+\alpha)\sin\frac{n\pi}{2}}_{\to 0}$$

$n \to \infty$ $\quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$ $\quad \alpha = -1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}}_{\to e}\right)^{\frac{2n}{n-1}}$$

$$e^{\lim\frac{2n}{n-1}} = e^2 \qquad \boxed{a_n = \frac{1}{3} + e^2}$$

Ušćumlić 1, 1595. Ispitati konvergenciju niza

$$\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right\}. \text{ Naći } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right).$$

$$\left\{\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right\}=a_n$$

$$a_n' < a_n < a_n''$$

$$a_{n+1} > a_n$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\boxed{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}}$$

$$a_{n+1}=a_n\underbrace{-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}}_{>0}=$$

$$=a_n+\frac{n+1-2n+1}{(n+1)(2n+1)}+\frac{1}{2n+2}=a_n+\frac{-n}{(n+1)(2n+1)}+\frac{1}{2n+2}=$$

$$=a_n+\frac{\cancel{-2n^2}\cancel{-2n}+\cancel{2n^2}\cancel{+2n}+\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}(2n+1)(2n+2)}=a_n+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Zaključujemo da je ovaj niz monotono rastući.

Najveći element ovog niza je $\frac{1}{n+1}$. Ako njega saberemo n puta,

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}\cdot n > a_n > \frac{1}{2n}\cdot n$$

$$\frac{n}{n+1} > a_n > \frac{1}{2} \quad / \circ \lim$$

$$\lim\frac{n}{n+1}=1 > \lim a_n > \frac{1}{2}$$

Ovim smo dokazali da je niz konvergentan

Ušćumlić 2, 8. Za sljedeći red naći djelimičnu sumu S_n i limes $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right) \quad (a>0)$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{m}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)=a+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{a}+\dots+\sqrt[n]{a}-\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}-\dots-\sqrt[m+1]{a}=$$

$$=a-\sqrt[m+1]{a}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(a-a^{\frac{1}{m+1}}\right)=a-1$$

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

Uščumlić 2, 91. Koristeći Gaussov test, ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \quad (p>0)$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad a_n > 0$$

θ_n je ograničena funkcija

$\lambda > 1 \;/\; \lambda = 1 \quad \mu > 1$ K

$\lambda < 1 \;/\; \lambda = 1 \quad \mu \le 1$ D

$$\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}\right]^p = \left[\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}\right]^p = \left[\frac{\frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}}}{\frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}(2n+1)}{\cancel{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}(2n+2)}}\right]^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p =$$

$$= 1^p + \binom{p}{1}\frac{1}{2n+1} + \binom{p}{2}\frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^p} \sim 1 + \frac{p}{2n} + \binom{p}{2}\frac{1}{(2n)^2} + \omega(n)$$

$\lambda = 1$

$\mu = \frac{p}{2} > 1 \implies p \geqslant 2$

Red je konvergentan za $p > 2$, a divergentan za $p < 2$.