Predavanje 5

zabilješke

Redovi s proizvoljnim članovima (članovima proizvoljnog znaka)

- Ako imamo red $\sum a_n$ sa konačno mnogo negativnih članova, onda takav red zovemo pozitivni red, jer odbacivanjem negativnih članova dobijemo pozitivni red u užem smislu, i u tom slučaju na red $\sum a_n$ možemo primijeniti neki od kriterija za konvergenciju pozitivnih redova. Ako imamo red sa konačno mnogo pozitivnih članova, onda i tu te pozitivne članove odbacimo, pomnožimo sa (-1), što također ne utiče na konvergenciju reda.
- Abelova sumaciona formula (pravilo):
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za sve proizvoljne nizove $(a_k), (b_k)$ u $\mathbb{R}$ vrijedi:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i, \text{ gdje je } B_i = b_1 + b_2 + \dots + b_i, \ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Osnovni kriterijumi konvergencije redova s članovima proizvoljnog znaka

- Dedekindova teorema: Neka je zadan red $\sum a_n b_n$ i neka su zadovoljeni uslovi: 1) $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$; 2) red $\sum |a_n - a_{n+1}|$ je konvergentan; 3) niz (B_n) parcijalnih suma reda $\sum b_n$ je ograničen. Tada je red $\sum a_n b_n$ konvergentan.
- Dirichletov kriterij: Neka je zadan red $\sum a_n b_n$ (u $\mathbb{R}$) i neka su zadovoljeni uslovi: (i) niz (a_n) monotono teži ka nuli; (ii) niz (S_n) parcijalnih suma reda $\sum b_n$ je ograničen. - Tada je red $\sum a_n b_n$ konvergentan (u $\mathbb{R}$).
- Abelov kriterij za konvergenciju redova u $\mathbb{R}$: Neka je zadan red $\sum a_n b_n$ i neka su zadovoljeni sljedeći uslovi: ⓐ niz (a_n) je monoton i ograničen; ⓑ red $\sum b_n$ je konvergentan. - Tada je red $\sum a_n b_n$ konvergentan.

Apsolutna konvergencija redova

- Ako red $\sum |a_n|$ konvergira, onda se kaže da red $\sum a_n$ apsolutno konvergira. Za red $\sum a_n$ kaže se da uslovno konvergira ili da je semikonvergentan ako konvergira, ali pri tom ne konvergira apsolutno.
- Ako je red apsolutno konvergentan, onda je i on konvergentan.
- Red $\sum (-1)^{n+1} c_n \ (= c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n+1} c_n + \dots)$, gdje su realni brojevi $c_n, n \in \mathbb{N}$ svi istog znaka (odnosno, red $\sum a_n$ sa osobinom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{2n-1} \geq 0$, $a_{2n} \leq 0$, naziva se alternativnim redom.
- Leibnizov kriterijum: Ako je $|c_{n+1}| \leq |c_n|, \forall (n \in \mathbb{N})$, i $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$, onda alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ konvergira. Osim toga, stavi li se $S_m = \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n+1} c_n$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$, onda je $S_{2k} \leq S \leq S_{2l-1}$ $(k, l \in \mathbb{N})$. (Vrijednost sume S alternativnog reda nalazi se u intervalu između vrijednosti dvije susjedne parcijalne sume, tj. $S_m < S < S_{m+1}$ ili $S_{m+1} < S < S_m$.) Ostatak ovog reda ima sumu r_p po apsolutnoj vrijednosti manju od prvog izostavljenog člana, tj. $|r_p| = \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n\right| < c_{p+1}$, te $\operatorname{sgn} r_p = (-1)^p$.

Svojstva realnih redova (Asocijacija i komutacija)

- Konvergentan red ima svojstvo asocijativnosti.
- Dirichletova teorema o komutativnosti apsolutno konvergentnih redova: Apsolutno konvergentan red ima svojstvo komutativnosti, tj. ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan, i ako je $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ proizvoljna bijekcija, onda je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)}$.
- Reimann-Dinijev stav: Ako red $\sum a_n$ uslovno konvergira, onda se za svaki dati $A \in \mathbb{R}$ može premještanjem članova datog reda dobiti red čiji zbir iznosi A, tj. postoji jedna bijekcija $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s(n)} = A$.

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

Množenje redova

- Cauchy: Ako redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ apsolutno konvergiraju, onda red formiran od elemenata matrice

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_ib_1 & \cdots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots & a_ib_2 & \cdots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_ib_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_1b_j & a_2b_j & a_3b_j & \cdots & a_ib_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

uzetih u proizvoljnom poretku, također apsolutno konvergira. Pri tom je suma dobijenog reda jednaka proizvodu suma redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$

- Abelova teorema: Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ dva konvergentna reda u $\mathbb{R}$ sa sumama A, odnosno B i neka je $\sum c_n$, ($c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}$) njihov proizvod. Ako red $\sum c_n$ konvergira i ima sumu C, onda je $C = A \cdot B$. (Košijevo množenje).

Beskonačni proizvodi

- Neka je $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ niz realnih brojeva. Formalni izraz $\prod_{n=1}^{\infty} = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots$ zove se beskonačni proizvod sa opštim članom p_n. Proizvod $P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ prvih n članova tog proizvoda je n-ti parcijalni izvod.
- Ako postoji konačan i različit od nule, limes $P := \lim_{n\to\infty} P_n$ kaže se da beskonačni proizvod $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergira; broj P je vrijednost tog proizvoda; pri tom se piše $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$.
- Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\prod_{n=m}^{\infty} p_n \neq 0$ onda se također kaže da proizvod $\prod p_n$ konvergira i to prema $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{m-1} \prod_{n=m}^{\infty} p_n$. Ako $\lim_{n\to\infty} P_n$ ne postoji ili je jednak 0 ili ∞, kažemo da proizvod $\prod p_n$ divergira.
- Izostavljanje konačno mnogo članova beskonačnog proizvoda ne utiče na njegovu konvergenciju.
- Potreban uslov da proizvod $\prod p_n$ konvergira je da njegov opšti član p_n teži jedinici kad $n \to \infty$. (Zato se faktori beskonačnog proizvoda $\prod p_n$ najčešće pišu u obliku $1+p_n$.)

- Teorema: Beskonačni proizvod $\prod p_n$ sa pozitivnim članovima konvergira akko konvergira red $\sum_{n=1} \ln p_n$. Ako taj red ima zbir s, onda proizvod $\prod p_n$ ima vrijednost e^s
- Neka su realni brojevi a_n, počev od nekog n, svi istog znaka (tj. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : ((\forall n \geq n_0)\, a_n \geq 0) \vee ((\forall n \geq n_0)\, a_n \leq 0)$). Tada proizvod $\prod_{n=1} p_n = \prod_{n=1} (1+a_n)$ konvergira akko red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako proizvod $\prod p_n = \prod (1+a_n)$ apsolutno konvergira, onda on konvergira.

Redovi kompleksnih brojeva

- Definicija: Za skup $A \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je ograničen (omeđen) ako je on sadržan u nekom krugu u $\mathbb{C}$, tj. ako postoje $z_0 \in \mathbb{C}$ i $r \in \mathbb{R}^+$ takvi da je $A \subseteq K(z_0, r)$.
- Definicija: Za skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je otvoren, ako oko svake tačke iz Ω može da se opiše otvoren krug koji je sadržan u Ω, dok za skup $F \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je zatvoren, ako je njegov komplement $F^c := \mathbb{C} \setminus F$ otvoren skup.

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

- Definicija: Okolina tačke $z_0 \in \mathbb{C}$ u prostoru $\mathbb{C}$ je svaki skup $U \subseteq \mathbb{C}$ sa svojstvom da postoji $r \in \mathbb{R}^+$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq U$
- Definicija: Za svaki niz (z_n) kompleksnih brojeva kažemo da je konvergentan u $\mathbb{C}$ ako postoji kompleksni broj $z_0 (\in \mathbb{C})$ takav da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da $\forall (n \in \mathbb{N})\ n > n_0 \Rightarrow |z - z_0| < \varepsilon$. Tada broj z_0 nazivamo granična vrijednost ili limes niza i pišemo $\lim (z_n) = z_0$ (ili $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$)
Također tada još kažemo da niz (z_n) konvergira ka z_0 ili da teži ka z_0 kad $n \to \infty$ i pišemo $z_n \to z_0 \ (n \to \infty)$. Za niz u $\mathbb{C}$ koji nije konvergentan u $\mathbb{C}$ kažemo da je divergentan ili da divergira.
- Teorema: Niz (z_n) kompleksnih brojeva konvergira kompleksnom broju z_0 akko niz (x_n), $(x_n = \mathrm{Re}\, z_n)$, konvergira ka $x_0 (= \mathrm{Re}\, z_0)$ i niz (y_n), $(y_n = \mathrm{Im}\, z_n)$, konvergira ka $y_0 (= \mathrm{Im}\, z_0)$.

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

Tutorijal 5

P5.2.9.3. Ispitajte konvergenciju reda: a) $\sum \frac{1}{(10+(-1)^n)^n}$; b) $\sum \left(\frac{1+\cos n}{4+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$;
c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots$

a) $\sum \frac{1}{(10+(-1)^n)^n} < \sum \frac{1}{9^n}$

Kad imamo nešto na n, koristimo Košijev kriterij

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{9^n}} = \frac{1}{9} < 1$ T $\to$ K

b) $\sum a_n < \sum \left(\frac{2}{5}\right)^{2n-\ln n}$

Košijev kriterij

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2n-\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{25}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-\lim \frac{\ln n}{n}\to 0} = \frac{4}{25} < 1$ K

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots = \underset{K}{\sum \frac{1}{2^n}} + \underset{K}{\sum \frac{1}{3^n}}$

Ako imamo sumu dva konvergentna reda, ne znači da njihova suma konvergira. Koristit ćemo D'Alamberov kriterij

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ K $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}}$ $\left(\text{za } a_n = \frac{1}{3^n} + a_{n+1} = \frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty > 1$ D

P5.2.9.5. Odredite $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}}_{a_n} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}}_{b_n}$.

D'Alamberov kriterij:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ K

Leibnizov kriterij (za b_n)

$\sum c_n$, mora vrijediti $|c_{n+1}| \le |c_n|$ i $\lim c_n = 0$, tada red konvergira

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n!} \text{ T} \\ \lim \frac{1}{n!} = 0 \text{ T} \end{array}\right\} \Rightarrow$ K

Pošto a_n i b_n konvergiraju onda i njihov proizvod konvergira.

P5, 2.10.5. Dokažite da red $\sum_{n=2} \frac{e^{n\theta i}}{\ln n}$ ne konvergira apsolutno i ako konvergira obično za svaki $\theta \in \mathbb{R}$ $(\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$, gdje je i imaginarna jedinica.

$$\sum \frac{|e^{n\theta i}|}{|\ln n|} = \sum \frac{1}{\ln n} > \sum \frac{1}{n}$$ a ovaj divergira $\Rightarrow$

pa i ovaj divergira.

Potrebno je provjeriti uslovnu konvergenciju:

$$a_n = \frac{1}{\ln n} \downarrow 0$$

$$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln n} \quad T$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \quad T$$

$\Rightarrow K$

Za b_n

$$\sum |b_n| = \sum_{n=1}^{k} |e^{n\theta i}| = |\cancel{e^{\theta i}}|^{1} \frac{|1-e^{k\theta i}|}{|1-e^{\theta i}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\cos\theta k)^2 + \sin^2\theta k}}{\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}$$ $< k < \infty \rightarrow$ i ovo je neki konačan broj

$$\boxed{\left|\sum e^{n\theta i}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

Uščumlić 2, 387. Pokazati da proizvod $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x} / \left(1+\frac{x}{n}\right)$ konvergira apsolutno za svako x različito od nule i svih negativnih cijelih brojeva.

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{1}{x}\prod a_n \qquad \theta\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$a_n = \frac{1^x + \binom{x}{1}\frac{1}{n} + \binom{x}{2}\frac{1}{n^2} + \underbrace{\binom{x}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^x}}_{\theta\left(\frac{1}{n^3}\right)}}{1+\frac{x}{n}}$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{n} + \frac{x \cdot x - 1}{2n^2} + \cancel{\theta\left(\frac{1}{n^3}\right)}}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + \frac{\frac{x(x-1)}{2n^2} + \theta\left(\frac{1}{n^3}\right)}{1 + \frac{x}{n}} = a_n \Rightarrow$$

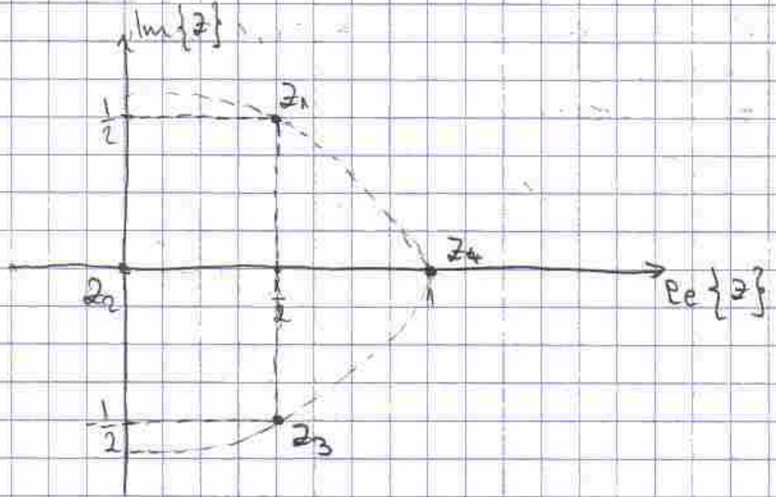
za $n \to \infty$ $\frac{x}{n} \to 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{x}\prod a_n \sim \frac{1}{x}\prod\left(1 + \frac{x(x-1)}{2n^2}\right)$$

Ako imamo red oblika $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, on je konvergentan ako je konvergentan $\sum a_n \Rightarrow$

$$\sum \frac{x(x-1)}{2n^2} \sim \sum \frac{1}{n^2} \; K \Rightarrow \text{proizvod konvergira!}$$

Uščumlić 2, 3088. 1° Nacrtati u kompleksnoj ravni nekoliko članova niza $z_n = \frac{1+i^n}{2}$; 2° Koje su mu tačke nagomilavanja? 3° Da li je niz ograničen? 4° Koje su tačke nagomilavanja niza $|z_n|$? 5° Naći $\overline{\lim_{n\to\infty}} |z_n|$ i $\underline{\lim_{n\to\infty}} |z_n|$.



za $n=1 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

za $n=2 \Rightarrow z_2 = \frac{1-1}{2} = 0$

za $n=3 \Rightarrow z_3 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

za $n=4 \Rightarrow z_4 = \frac{1+1}{2} = 1$

Ograničen je, jer se sve tačke nalaze unutar kružnice radijusa 1.

$|z_n| : 0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \left(|z_1| = |z_3| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} |z_n| &= 1 \\ \underline{\lim_{n\to\infty}} |z_n| &= 0 \end{aligned}\right\}$$ zato što se tačke $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ periodično ponavljaju.

Uščumlić 2, 3321. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)+i}{n(n+1)}$ konvergira i naći mu zbir.

Kod kompleksnog broja treba da pokažemo da konvergiraju njegov realni i imaginarni dio.

$$\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$$

1° $|c_{n+1}| \leq |c_n|$

$$\frac{2(n+1)+1}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \leq \frac{2n+1}{n\cancel{(n+1)}} \Rightarrow \cancel{2n^2}+\cancel{3n} \leq \cancel{2n^2}+\cancel{n}+\cancel{4n}^{2n}+2$$

$$0 \leq 2(n+1) \quad (T)$$

2° $\lim c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} = 0 \Rightarrow$ Realni dio konvergira!

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2+n} \sim \sum \frac{1}{n^{2}} \rightarrow (\alpha > 1) - (K) \Rightarrow$$

Imaginarni dio konvergira!

ekvikonvergentan red.

Ovaj red konvergira; Suma:

$$\frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \quad (*)$$

$$\sum \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} + i\sum \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n 2n}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} + i\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots+(-1)^k\frac{1}{k+1}\right) + \left[(-1)\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+(-1)^k\frac{1}{(k+1)}\right] +$$

$$+ i\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\dots+\cancel{\frac{1}{k}}-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \cancel{2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^k\frac{1}{k+1}\right)} - 1 + \cancel{\left[\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\dots+(-1)^{k+1}\frac{2}{k+1}\right]} + i\left(1-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= -1 + i\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = S_k \text{ (parcijalna suma)}$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} S_k = -1+i}$$

by Ahmed Suljic doccentowski@hotmail.com

Ušćumlić 2, 3335. Da li konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ni}}{n}$? Da li konvergira apsolutno?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|e^{ni}|}{|n|} = \sum \frac{1}{n}$$

$$e^{ni} = \cos n + i \sin n \Rightarrow |e^{ni}| = \sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n} = 1$$

Košijev integralni test

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\quad \begin{array}{l} \text{ako je } \alpha > 1 \text{ red konvergira} \\ \text{ako je } \alpha \leq 1 \text{ red divergira} \end{array}$$

$\sum \frac{1}{n}$ ne konvergira apsolutno!

Ako apsolutno konvergira onda i obično konvergira, a ako obično konvergira, a apsolutno ne, onda on konvergira uslovno

$\sum a_n b_n$ konvergira ako:

a) $\{a_n\} \searrow 0$

b) $S_n, (b_n)$ parcijalna suma je ograničena

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = e^{ni}$$

a) $a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ (T)

ili $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ (T)

b) $\sum_{n=1}^{m} e^{ni}$

$$\sum_{n=1}^{m} a^n = a\frac{1-a^m}{1-a}$$

$$\sum_{n=1}^{m} |e^{ni}| = |e^i| \frac{|1-e^{ni}|}{|1-e^i|} = 1 \frac{|1-\cos n - i\sin n|}{|1-\cos n - i\sin n|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\cos n)^2 + (\sin n)^2}}{\underbrace{\sqrt{(1-\cos n)^2 + (\sin n)^2}}_{k}} < k < \infty$$

Ovim smo dokazali da ovaj red uslovno konvergira!