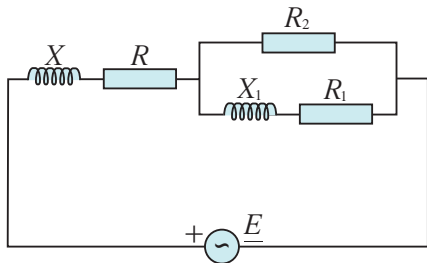


## TUTORIJAL 2

## ZADATAK 1



Za električni krug sa slike poznato je:  $R = 3 (\Omega)$ ,  $R_1 = 20 (\Omega)$ ,  $X = 9 (\Omega)$ ,  $X_1 = 10 (\Omega)$ . Odrediti otpor  $R_2$  tako da ukupna struja u krugu fazno zaostaje u odnosu na napon napajanja za  $\pi/4$  radijana.

Ulazna (ukupna) impedansa električnog kola u kompleksnom obliku je:

$$\underline{Z} = R + jX + \frac{(R_1 + jX_1)R_2}{R_1 + R_2 + jX_1} = R + jX + \frac{(R_1 + jX_1)R_2 \cdot (R_1 + R_2 - jX_1)}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2}$$

Nakon razdvajanja realnog i imaginarnog dijela dobija se:

$$\underline{Z} = R + \frac{R_1 R_2 \cdot (R_1 + R_2) + R_2 X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} + j \left[ X + \frac{R_2^2 X_1}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} \right] = R_e + jX_e$$

Fazor struje na ulazu u kolo je:

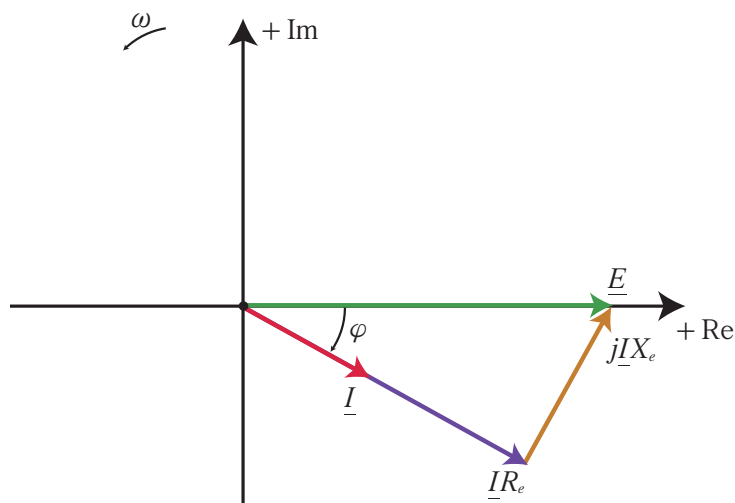
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}}$$

Ako se pretpostavi da je:  $\underline{E} = E e^{j0^\circ}$ , tada je fazor struje određen kao:

$$\underline{I} = \frac{E e^{j0^\circ}}{\sqrt{R_e^2 + X_e^2} e^{j\varphi}} = \frac{E}{\sqrt{R_e^2 + X_e^2}} e^{-j\varphi} = I e^{-j\varphi}$$

gdje je:  $\varphi = \arctg \frac{X_e}{R_e}$

Fazorski dijagram za analizirani problem je:



Ukupna struja će fazno zaostajati za naponom napajanja za ugao  $\varphi = 45^\circ$ , ako je realni dio ulazne impedanse  $\mathcal{Z}$  jednak imaginarnom dijelu ukupne impedanse  $\mathcal{Z}$ :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_e}{R_e} = \operatorname{tg}45^\circ = 1 \rightarrow R_e = X_e$$

$$R + \frac{R_1 R_2 \cdot (R_1 + R_2) + R_2 X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} = X + \frac{R_2^2 X_1}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2}$$

Nakon sređivanja posljednjeg izraza dobija se kvadratna jednačina:

$$R_2^2(R + R_1 - X - X_1) + R_2(R_1^2 + X_1^2 + 2RR_1 - 2R_1X) + (R_1^2 + X_1^2)(R - X) = 0$$

Nakon uvrštavanja numeričkih vrijednosti dobija se:

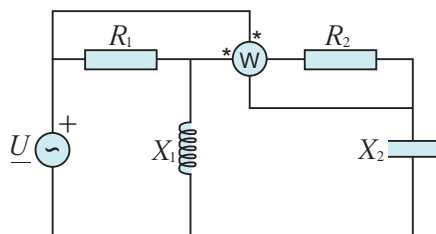
$$R_2^2 + 65R_2 - 750 = 0$$

Rješenja kvadratne jednačine su:  $R_2 = 10 (\Omega)$  i  $R_2 = -75 (\Omega)$

Kako aktivni otpor ne može biti negativan, konačno rješenje je:  $R_2 = 10 (\Omega)$

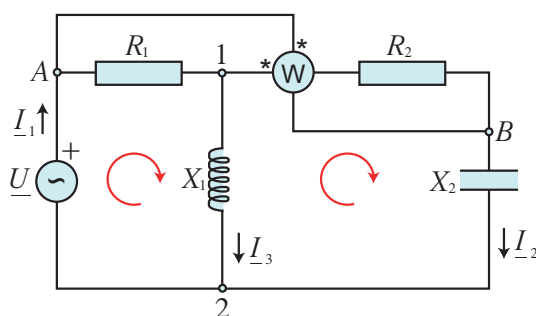
## TUTORIJAL 2

## ZADATAK 2



Za električni krug prikazan na slici poznato je:  $R_1 = 10 (\Omega)$ ,  $R_2 = 20 (\Omega)$ ,  $X_1 = 40 (\Omega)$ ,  $X_2 = 20 (\Omega)$ ,  $U = 120 (V)$ . Odrediti pokazivanje idealnog vatmetra  $P_w$ .

Zadatak će se riješiti direktnom primjenom Kirchhoff-ovih zakona. Odabrane konture i pretpostavljeni smjerovi struja u granama dati su na idućoj slici.



Kako je vatmetar idealan, on ne utječe na električne veličine u kolu, odnosno analiza kola se može provesti bez ovog elementa. Otpornost naponske grane idealnog vatmetra je beskonačna, odnosno kroz ovu granu ne protiče struja, dok je otpornost strujne grane idealnog vatmetra jednaka nuli, tako da protjecanje struje kroz ovu granu ne izaziva pad napona.

Fazor napona izvora  $\underline{U}$  će biti odabran kao referentni napon:  $\underline{U} = Ue^{j0^\circ}$

Za odabrane konture, prema KZN je:

$$\underline{U} = \underline{I}_1 R_1 + j\underline{I}_3 X_1$$

$$0 = \underline{I}_2 (R_2 - jX_2) - j\underline{I}_3 X_1$$

Za čvor 1 po KZS je:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$$

Uvrštavajući izraz za fazor struje  $\underline{I}_3$  u relacije napisane prema KZN, dobija se:

$$\underline{U} = \underline{I}_1 (R_1 + jX_1) - j\underline{I}_2 X_1$$

$$0 = -j\underline{I}_1 X_1 + \underline{I}_2 (R_2 - jX_2 + jX_1) \rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \frac{R_2 - jX_2 + jX_1}{jX_1}$$

Konačno se dobija:

$$\underline{U} = \underline{I}_2 \frac{(R_2 - jX_2 + jX_1)(R_1 + jX_1)}{jX_1} - j\underline{I}_2 X_1 \rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\frac{(R_2 - jX_2 + jX_1)(R_1 + jX_1)}{jX_1} - jX_1} = 2,4 + j2,4 = 3,39e^{j45^\circ} (A)$$

## TUTORIJAL 2

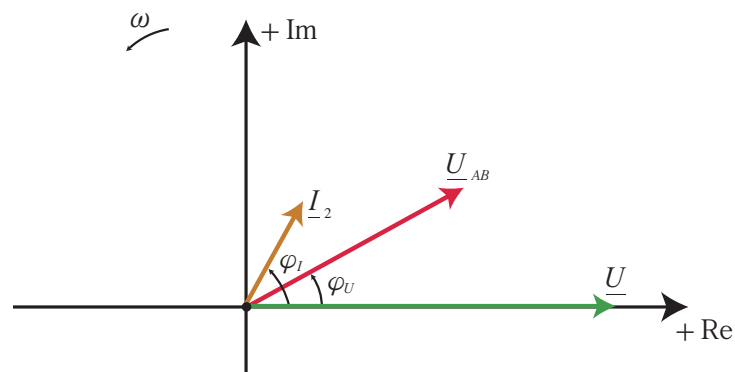
Struja  $\underline{I}_2$  teče kroz strujnu granu vatmetra.

Napon između tačaka  $A$  i  $B$ , odnosno napon naponske grane vatmetra je:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_2 R_2 = \underline{I}_2 \frac{(R_2 - jX_2 + jX_1)R_1}{jX_1} + \underline{I}_2 R_2 = 72 + j48 = 86,53e^{j33,7^\circ} \text{ (V)}$$

Fazni stavovi napona  $\underline{U}_{AB}$  i struje  $\underline{I}_2$  su:  $\varphi_U = 33,7^\circ$ ,  $\varphi_I = 45^\circ$

Odgovarajući fazorski dijagram dat je na slici:



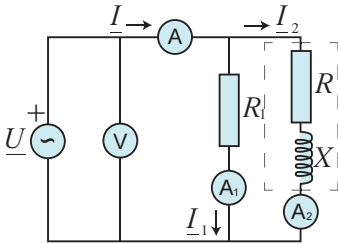
Ugao između napona  $\underline{U}_{AB}$  i struje  $\underline{I}_2$  je  $\varphi = \varphi_U - \varphi_I = -11,3^\circ$ , odnosno fazor napona  $\underline{U}_{AB}$  zaostaje u odnosu na fazor struje  $\underline{I}_2$  za ugao  $\varphi$ .

Vatmetar mjeri aktivnu snagu koja se računa na osnovu ugla  $\varphi$ , te efektivne vrijednosti napona naponske grane i efektivne vrijednosti struje strujne grane:

$$P = U_{AB} I_2 \cos \varphi = 287,62 \text{ (W)}$$

## ZADATAK 3

Instrumenti uključeni u mrežu pokazuju da je:  $U = 200 \text{ (V)}$ ,  $I = 37,9 \text{ (A)}$ ,  
 $I_1 = I_2 = 20 \text{ (A)}$ . Izračunajte snagu trošila i otpore trošila  $R$  i  $X$ .



Analiza kola provest će se pod pretpostavkom da su svi mjerni instrumenti u kolu idealni.

Otpornost otpornika  $R_1$  i modul impedanse trošila  $|\underline{Z}_T|$  mogu se dobiti iz relacija za efektivnu vrijednost napona izvora:

$$U = I_1 R_1 \rightarrow R_1 = \frac{U}{I_1} = 10 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$U = I_2 |\underline{Z}_T| \rightarrow |\underline{Z}_T| = \frac{U}{I_2} = 10 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Fazor napona izvora  $\underline{U}$  će biti odabran kao referentni napon:  $\underline{U} = U e^{j0^\circ}$

Fazori struja u kolu su:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R_1} = \frac{U e^{j0^\circ}}{R_1} = I_1 e^{j0^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_T} = \frac{U e^{j0^\circ}}{|\underline{Z}_T| e^{j\varphi_T}} = I_2 e^{-j\varphi_T}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j0^\circ}}{|\underline{Z}| e^{j\varphi}} = I e^{-j\varphi}$$

Snaga trošila je:  $P = UI_2 \cos \varphi_T$

Koristeći KZS dobija se:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \rightarrow I(\cos \varphi - j \sin \varphi) = I_1 + I_2(\cos \varphi_T - j \sin \varphi_T)$$

Razdvajanjem imaginarnih i realnih članova gornje relacije dobija se:

$$I \cos \varphi = I_1 + I_2 \cos \varphi_T$$

$$I \sin \varphi = I_2 \sin \varphi_T$$

Kako su efektivne vrijednosti struja  $I_1$  i  $I_2$  jednake ima se:

$$I \cos \varphi = I_2(1 + \cos \varphi_T)$$

$$I \sin \varphi = I_2 \sin \varphi_T$$

## TUTORIJAL 2

Iz zadnje dvije relacije dobija se:

$$\frac{I}{I_2} \cos \varphi - 1 = \cos \varphi_T = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_T} = \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_2} \sin \varphi\right)^2}$$

Kvadriranjem gornja relacija postaje:

$$\left(\frac{I}{I_2}\right)^2 \cos^2 \varphi - 2\frac{I}{I_2} \cos \varphi + 1 = 1 - \left(\frac{I}{I_2} \sin \varphi\right)^2 \rightarrow \frac{I}{I_2}(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 2 \cos \varphi \rightarrow \frac{I}{I_2} = 2 \cos \varphi$$

Faktor snage analiziranog kola je:

$$\cos \varphi = \frac{I}{2I_2} = 0,9475$$

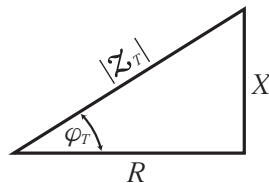
Faktor snage trošila je:

$$I \cos \varphi = I_2(1 + \cos \varphi_T) \rightarrow \cos \varphi_T = \frac{I \cos \varphi - I_2}{I_2} = 0,795$$

Snaga trošila je:

$$P = UI_2 \cos \varphi_T = 3181,8 \text{ (W)}$$

Otpori trošila mogu se dobiti iz trougla otpora:

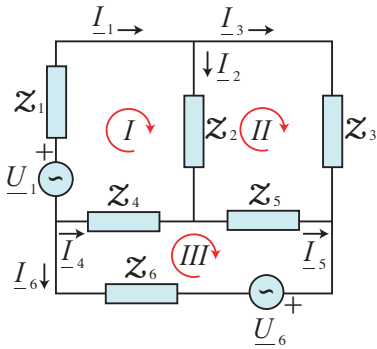


$$R = |Z_T| \cos \varphi_T = 7,95 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$X = |Z_T| \sin \varphi_T = 6,06 \text{ (}\Omega\text{)}$$

## TUTORIJAL 2

## ZADATAK 4



Primjenom teoreme konturnih struja odrediti struje i aktivnu snagu u kolu sa slike. Dato je:  $\underline{U}_1 = 1(V)$ ,  $\underline{U}_6 = j(V)$ ,  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_4 = \underline{Z}_6 = 1(\Omega)$ ,  $\underline{Z}_2 = -j(\Omega)$ ,  $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_5 = j(\Omega)$ .

Relacije napisane prema teoremi konturnih struja za tri naznačene konture su:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_I(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) - \underline{I}_{II}\underline{Z}_2 - \underline{I}_{III}\underline{Z}_4$$

$$0 = -\underline{I}_I\underline{Z}_2 + \underline{I}_{II}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) - \underline{I}_{III}\underline{Z}_5$$

$$-\underline{U}_6 = -\underline{I}_I\underline{Z}_4 - \underline{I}_{II}\underline{Z}_5 + \underline{I}_{III}(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)$$

Glavna determinanta sistema je:

$$D = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 & -\underline{Z}_2 & -\underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_5 \\ -\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-j & j & -1 \\ j & j & -j \\ -1 & -j & 2+j \end{vmatrix} = 2 + j4$$

Determinante sistema su:

$$D_I = \begin{vmatrix} \underline{U}_1 & -\underline{Z}_2 & -\underline{Z}_4 \\ 0 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_5 \\ -\underline{U}_6 & -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & j & -1 \\ 0 & j & -j \\ -j & -j & 2+j \end{vmatrix} = 1 + j$$

$$D_{II} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 & \underline{U}_1 & -\underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & 0 & -\underline{Z}_5 \\ -\underline{Z}_4 & -\underline{U}_6 & \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-j & 1 & -1 \\ j & 0 & -j \\ -1 & -j & 2+j \end{vmatrix} = 2 - j2$$

$$D_{III} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 & -\underline{Z}_2 & \underline{U}_1 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & 0 \\ -\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_5 & -\underline{U}_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-j & j & 1 \\ j & j & 0 \\ -1 & -j & -j \end{vmatrix} = 3 - j$$

Konturne struje su:

$$I_I = \frac{D_I}{D} = 0,3 - j0,1 (A)$$

$$I_{II} = \frac{D_{II}}{D} = -0,2 - j0,6 (A)$$

$$I_{III} = \frac{D_{III}}{D} = 0,1 - j0,7 (A)$$

Struje grana kola su:

$$\underline{I}_1 = I_I = -0,2 - j0,6 (A)$$

$$\underline{I}_2 = I_I - I_{II} = 0,5 + j0,5 (A)$$

$$\underline{I}_3 = I_{II} = -0,2 - j0,6 (A)$$

$$\underline{I}_4 = I_{III} - I_I = -0,2 - j0,6 (A)$$

$$\underline{I}_5 = I_{III} - I_{II} = 0,3 - j0,1 (A)$$

$$\underline{I}_6 = -I_{III} = -0,1 + j0,7 (A)$$

Aktivne snage koje u kolo daju naponski izvori su:

$$P_1 = \operatorname{Re}\{S_1\} = \operatorname{Re}\{\underline{U}_1 \underline{I}_1^*\} = 0,3 (W)$$

$$P_6 = \operatorname{Re}\{S_6\} = \operatorname{Re}\{\underline{U}_6 \underline{I}_6^*\} = 0,7 (W)$$

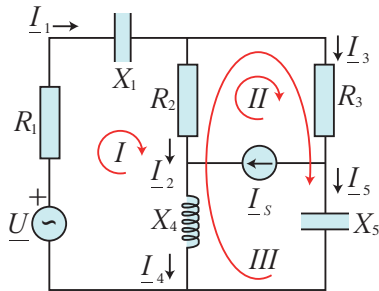
Ukupna aktivna snaga koju angažuje kolo je:

$$P = P_1 + P_6 = 1 (W)$$



## TUTORIJAL 2

## ZADATAK 5



Za električni krug prikazan na slici poznato je:  $R_1 = 2 (\Omega)$ ,  $R_2 = 5 (\Omega)$ ,  $R_3 = 10 (\Omega)$ ,  $X_1 = 8 (\Omega)$ ,  $X_4 = 5 (\Omega)$ ,  $X_5 = 10 (\Omega)$ ,  $\underline{U} = 20 (V)$ ,  $\underline{I}_s = j7 (A)$ .  
 Odredite:  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  direktnom primjenom metode konturnih struja.

Relacije napisane prema teoremi konturnih struja za tri naznačene konture su:

$$\underline{U} = \underline{I}_I (R_1 + R_2 + jX_4 - jX_1) - \underline{I}_{II} R_2 - \underline{I}_{III} (R_2 + jX_4)$$

$$\underline{I}_{II} = \underline{I}_s$$

$$0 = -\underline{I}_I (R_2 + jX_4) - \underline{I}_{II} (R_2 + R_3) - \underline{I}_{III} (R_2 + R_3 + jX_4 - jX_5)$$

Uvrštavanjem poznatih parametara datih u zadatku i uzimajući u obzir da je  $\underline{I}_{II} = \underline{I}_s$  dobija se:

$$35(1 + j) = (6 - j3)\underline{I}_I - (5 + j5)\underline{I}_{III}$$

$$-j105 = -(5 + j5)\underline{I}_I - (15 - j5)\underline{I}_{III}$$

Konturne struje su:

$$\underline{I}_I = 0,41 - j1,65 (A)$$

$$\underline{I}_{II} = j7 (A)$$

$$\underline{I}_{III} = -1,36 + j6,13 (A)$$

Struje grana kola su:

$$\underline{I}_1 = I_I = 0,41 - j1,65 (A)$$

$$\underline{I}_2 = I_I - I_{II} - I_{III} = 1,77 - j14,78 (A)$$

$$\underline{I}_3 = I_{II} + I_{III} = -1,36 + j13,13 (A)$$

$$\underline{I}_4 = I_I - I_{III} = 1,77 - j7,78 (A)$$

$$\underline{I}_5 = I_{III} = -1,36 + j6,13 (A)$$

Efektivne vrijednosti struja su:

$$I_1 = 1,70 (A)$$

$$I_2 = 14,89 (A)$$

$$I_3 = 13,20 (A)$$

$$I_4 = 7,98 (A)$$

$$I_5 = 6,28 (A)$$