2. a) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

Neka je definisano neko preslikavanje f koje preslikava elemente skupa A u skup B.

$f: A\to B$

* def. Dva skupa X, Y su jednaka akko su sastavljena od istih elemenata

$$X=Y \Leftrightarrow (\forall x\in X \Leftrightarrow x\in Y)$$, što vrijedi za A i B skupove.

* def. o jednakosti skupova:

$$A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B \quad \wedge \quad A\supseteq B)$$

U narednim koracima ćemo dokazati da skup koji je sastavljen od elemenata nastalih prilikom preslikavanja $f(A\cap B)$ nije jednak skupu elemenata koji su nastali prilikom preslikavanja $f(A)\cap f(B)$.
Na osnovu već navedene definicije o jednakosti skupova, ova 2 skupa nisu jednaka ako im elementi nisu jednaki, odnosno za elemente ovih skupova ne vrijedi jednakost: $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.
Ako je A neprazan skup elemenata

$A=\{1,2\}$,

i ako je B neprazan skup elemenata

$B=\{2,4,6,8\}$,

a neka je $f(x)$ funkcija za koju vrijedi:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & , x=2 \\ 1 & , x\in\{4,6\} \\ 4 & , x=8 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$f(A)=\{1,2\}$

$f(B)=\{2,1,1,4\}$

$f(A\cap B)=\{2\}=Q$

$f(A)\cap f(B)=\{1,2\}=P$

Iz ovih relacija se može zaključiti da je $Q\subseteq P$, i da Q i P nisu jednaki, pa se može reći da je $Q\subset P$ (pravi podskup)
(Pravi podskup ako je $Q\subseteq P \wedge Q\neq P$)
Vidimo da jednakost ne vrijedi što je i trebalo dokazati

$f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cap D)$

$x \in [f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)] \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow [\exists y \in C \,; x = f^{-1}(x)] \wedge [\exists y \in D \,; x = f^{-1}(x)]$

$\Rightarrow [\exists y \in C \wedge \exists y \in D : x = f^{-1}(x)]$

$[\exists y \in (C \cap D) : x = f^{-1}(x)]$

$y \in f^{-1}(C \cap D) \Rightarrow f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cap D)$

c) Dokaz:

- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$y \in (A \cap B) \Rightarrow (\exists x \in A \cap B)(y = f(x)) \Rightarrow$

$(\exists x)(x \in A,\ x \in B)(y = f(x)) \Rightarrow$

$(\exists x \in A)(y = f(x))$ i $(\exists x \in B)(y = f(x)) \Rightarrow$

$y \in f(A)$ i $y \in f(B) \Rightarrow$

$y \in f(A) \cap f(B)$

- $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

Ako je $y \in f(A) \setminus f(B)$ tada $y \in f(A)$ i $y \notin f(B)$.
Sada po definiciji slike skupa zaključujemo da postoji $x \in A$ takav da je $y = f(x)$. Ako je $x \in B$ tada $f(x) \in f(B)$ tj. $y \in f(B)$. Suprotno po kontrapoziciji zaključujemo da je $y \notin f(B)$ povlači $x \notin B$. Dakle imamo $y = f(x)$ gdje je $x \in A$ i $x \notin B$.
To znači $y \in f(x)$ za neki $x \in A \setminus B$. tj. $y \in (A \setminus B)$.

- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$x \in f^{-1}(C \cap D) \Leftrightarrow [\exists y \in (C \cap D) : x = f^{-1}(y)]$

$\Leftrightarrow [\exists y \in C : x = f^{-1}(x)] \wedge [\exists y \in D : x = f^{-1}(x)]$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cap x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow x \in (f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D))$

$\Rightarrow f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Da bi izraz na lijevoj strani bio jednak izrazu na desnoj strani potrebno je dokazati jednakost u oba smjera. Dokazali smo da je izraz na lijevoj strani jednak izrazu na desnoj strani, potrebno je dokazati da je izraz na desnoj strani jednak izrazu na lijevoj strani.

$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

Dokazujemo da elementi skupa R nastalih preslikavanjem $f(A \setminus B)$ ne sadrže elemente skupa T nastalih preslikavanjem $f(A) \setminus f(B)$.

Ako je A neprazan skup elemenata.

$A = \{0, 1, 3, 5\}$

$B = \{3, 5, 8, 11\}$

Pa je $f(A \setminus B) = R = \{0, 1\}$

Neka je definisano: $f(x) = \begin{cases} 1 ; & x = 0 \\ 3 ; & x \in \{1, 3, 5, 8, 11\} \end{cases}$

$f(A) = \{1, 3, 3, 3\}$

$f(B) = \{3\}$

$f(A) \setminus f(B) = \{1\} = T$

Ovdje se može zaključiti da je $R \supseteq T$ odnosno $T \subseteq R$, kako su elementi nisu jednaki, tako da jednakost ne vrijedi.