2.1.2 Ako je $a<0$, ispitujemo ovaj slučaj:

$$ax+2>0$$

$$a=-p, \quad (p\in\mathbb{R}^+)$$

$$-p\cdot x+2>0$$

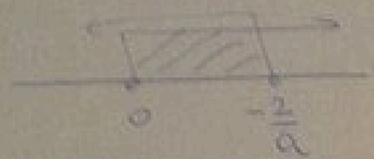
$$-p\cdot x>-2 \quad /\cdot(-1)$$

$$p\cdot x<2$$

$x<\frac{2}{p}$, što znači da je $x<-\frac{2}{a}$

s tim da je $-\frac{2}{a}$ neki pozitivan broj!

A pošto je $x>0$ i $x<-\frac{2}{a}$ imamo presjek ove 2 pretpostavke:



$$x\in\left(0,-\frac{2}{a}\right)$$

Tražimo rješenja ali u ovom intervalu.

$$\frac{x+4}{ax+2}-\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{x(x+4)-(ax+2)}{x(ax+2)}>0$$

$$\frac{x^2+4x-ax-2}{x(ax+2)}>0$$

$$\frac{x^2+x(4-a)-2}{x(ax+2)}>0$$

$$x_{12}=\frac{-(4-a)\pm\sqrt{(4-a)^2+8}}{2}=\frac{(a-4)\pm\sqrt{16-8a+a^2+8}}{2}$$

$$x_{12}=\frac{(a-4)\pm\sqrt{a^2-8a+24}}{2}$$

$$x_1=\frac{(a-4)-\sqrt{a^2-8a+24}}{2} \qquad x_2=\frac{(a-4)+\sqrt{a^2-8a+24}}{2}$$

Diskriminanta rješenja x_1 i x_2 je uvijek veća od 0, tj uvijek je pozitivna jer je njena diskriminanta manja od 0. $D=64-96<0$ što znači da za bilo koje a iz Dp-a, tj $\forall a<0$, imati ćemo realna rješenja za x_1 i x_2.

Također možemo zaključiti da je x_1 negativan broj tj $x_1<0$, tako da trebamo vidjeti da li x_2 pripada intervalu $\left(0,-\frac{2}{a}\right)$ jer je $x_2>0$.

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$$

$$\alpha=0,\ \beta=-\frac{2}{a};\ f(x)=x^2+x(4-a)-2$$

$$f(0)=-2$$

$$f\left(-\frac{2}{a}\right)=\left(-\frac{2}{a}\right)^2+(4-a)\left(-\frac{2}{a}\right)-2$$

$$f\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{4}{a^2}-\frac{8}{a}+\cancel{2}-\cancel{2}$$

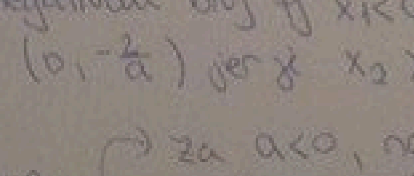
$$f\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}=\frac{1-2a}{a^2}$$

$$f(0)\,f\left(-\frac{2}{a}\right)<0$$

$$-2\cdot\left(\frac{1-2a}{a^2}\right)<0 \quad /\cdot(-1)$$

$$2\left(\frac{1-2a}{a^2}\right)>0$$

za $a<0$, nazivnik je pozitivan broj, također i brojnik tako da pretpostavka vrijedi što znači da se x_2 nalazi u intervalu $\left(0,-\frac{2}{a}\right)$.



Pa je konačno rješenje ovog slučaja:

$$x\in\left(\frac{(a-4)+\sqrt{a^2-8a+24}}{2},-\frac{2}{a}\right)$$

4. $\left|\frac{x+4}{ax+2}\right| > \frac{1}{x}$ Definiciono područje ove nejednačine je:

$x \neq 0 \quad \wedge \quad ax+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{2}{a}$

Sada ispitujemo 2 slučaja.

Prvi slučaj za $x<0$, gdje postoje 2 podslučaja u zavisnosti od parametra a:

1° $x<0$

1.1. Ako je $a=0$, onda nejednačina ima sljedeći oblik:

$\left|\frac{x+4}{2}\right| > \frac{1}{x}$, što uvijek vrijedi za $x<0$, pa je rješenje ovog slučaja $x \in (-\infty, 0)$.

1.2. Ako je $a \neq 0$, posmatramo nejednačinu:

$\left|\frac{x+4}{ax+2}\right| > \frac{1}{x}$ Pošto je $x<0$, znači da je desna strana negativna, a lijeva će biti pozitivna zbog apsolutne vrijednosti tako da i za $a \neq 0$ vrijedi da $x \in (-\infty, 0)$, međutim ako je $a>0$, onda se mora isključiti vrijednost za $x = \frac{-2}{a}$, jer nazivnik $ax+2$ neće biti definisan.

$x \in (-\infty, 0) \setminus \{-\frac{2}{a}\}, a>0.$

Sada ispitujemo drugi slučaj za $x>0$.

2° $x>0$

Posmatrajmo sada nejednačinu na sljedeći način:

$$\left|\frac{x+4}{ax+2}\right| = \begin{cases} \frac{x+4}{ax+2}, & ax+2>0 \\ -\left(\frac{x+4}{ax+2}\right), & ax+2<0 \end{cases}$$

Sada ćemo ispitivati ova dva slučaja u zavisnosti od parametra a.

2.1. $\frac{x+4}{ax+2} > \frac{1}{x}$, $ax+2>0$

2.1.1. Ako je $a=0$, biti će $0 \cdot x+2>0$

$2>0$, što vrijedi, pa rješavajući nejednačinu dobijemo:

$$\frac{x+4}{2} > \frac{1}{x}$$

$$\frac{x+4}{2} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x(x+4)-2}{2x} > 0$$

$$\frac{x^2+4x-2}{2x} > 0$$

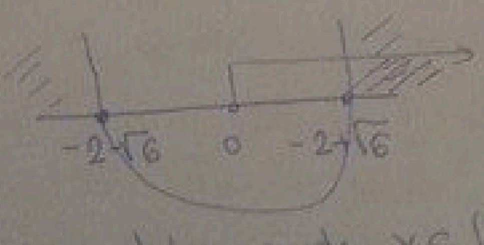
, pošto je iz uslova zadatka $x>0$, znači da je nazivnik pozitivan; da bi ovo vrijedilo, i brojnik nam mora biti pozitivan.

$$x^2+4x-2>0$$

$$x_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$x_1 = -2-\sqrt{6}$

$x_2 = -2+\sqrt{6}$



Za dobivene x_1 i x_2 dobije se da $x \in (-\infty, -2-\sqrt{6}) \cup (-2+\sqrt{6}, +\infty)$, kada uzmemo presjek tog rješenja i uslova zadatka da je $x>0$ dobije se konačno rješenje za ovaj slučaj:

$x \in (-2+\sqrt{6}, +\infty)$

Tražimo koje je rješenje od $f(x) = x^2 + x(4+a) + 2 > 0$ u intervalu

$\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$, $f(\alpha)\, f(\beta) > 0$

$\alpha\left(-\frac{2}{a}\right) = \left(-\frac{2}{a}\right)^2 + (4+a)\left(-\frac{2}{a}\right) + 2 = \frac{+4}{a^2} - \frac{8}{a} \cancel{-2+2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{1-a}{a^2}$

$\beta(x)$: potrebno nam samo znanje da li je pozitivno ili negativno ~~[illegible]~~ radi lakše odluke:

sgn $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 + x(a+4) - 2 = 1$, što znači da je pozitivno

$\frac{1-a}{a^2} > 0$, za $a<0$, ovo vrijedi što znači da

x_1, x_2 pripadaju intervalu $\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$

Pa je konačno rješenje ovog slučaja:

$x \in \left(-\frac{2}{a}, \frac{-(4+a)-\sqrt{a^2+8a+8}}{2}\right) \cup \left(\frac{-(4+a)+\sqrt{a^2+8a+8}}{2}, +\infty\right)$

KONAČNA RJEŠENJA:

* 1° ∩ 2.1.1
  $x \in (-\infty, 0) \cup (-2+\sqrt{2}, +\infty)$

* 1° ∩ 2.1.2
  $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{(a-4)+\sqrt{a^2-8a+8}}{2}, -\frac{2}{a}\right)$

* 1° ∩ 2.1.3
  $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{(a-4)+\sqrt{a^2-8a+8}}{2}, +\infty\right)$

* 1° ∩ 2.2.3

$x \in (-\infty, 0)$

Tražimo koje je rješenje od $f(x) = x^2 + x(4+a) + 2 > 0$ u intervalu $\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$,

$f(\alpha) f(\beta) > 0$

$$\alpha\left(-\frac{2}{a}\right) = \left(-\frac{2}{a}\right)^2 + (4+a)\left(-\frac{2}{a}\right) + 2 = \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} - 2 + 2 = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{1-2a}{a^2}$$

$\beta(\infty)$: pošto nas samo zanima da li je pozitivno ili negativno radit ćemo ovako:

$$\operatorname{sgn} \lim_{x \to \infty} x^2 + x(a+4) + 2 = 1,$$ što znači da je pozitivno

$\frac{1-2a}{a^2} > 0$, za $a < 0$, ovo vrijedi što znači da x_1 i x_2 pripadaju intervalu $\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$

Pa je konačno rješenje ovog slučaja:

$$x \in \left(-\frac{2}{a}, \frac{-(4+a) - \sqrt{a^2+8a+8}}{2}\right) \cup \left(\frac{-(4+a) + \sqrt{a^2+8a+8}}{2}, +\infty\right)$$

KONAČNO RJEŠENJA:

* $1^\circ \cup 2.1.1.$

$x \in (-\infty, 0) \cup (-2+\sqrt{6}, +\infty)$

* $1^\circ \cup 2.1.2.$

$x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{(a-4) + \sqrt{a^2-8a-24}}{2}, -\frac{2}{a}\right)$

* $1^\circ \cup 2.1.3.$

$x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{(a-4) + \sqrt{a^2-8a-24}}{2}, +\infty\right)$

* $1^\circ \cup 2.2.3.$

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left(-\frac{2}{a}, \frac{-(4+a) - \sqrt{a^2+8a+8}}{2}\right) \cup \left(\frac{-(4+a) + \sqrt{a^2+8a+8}}{2}, +\infty\right)$$

2.2 Sada ćemo ispitati slučaj kada je $-\left(\frac{x+4}{ax+2}\right) > \frac{1}{x}$ tj. $ax+2<0$ u zavisnosti od parametra a.

2.2.1. Kada je $a=0$, uslov $ax+2<0$

$2<0$, ne vrijedi!

2.2.2. Kada je $a>0$, uslov $ax+2<0$ opet ne vrijedi jer je $a>0 \wedge x>0$, pa to nikada nije manje od 0.

2.2.3. Kada je $a<0$, uslov $ax+2<0$ vrijedi za:

$a=-q, \ (q \in R^+)$

$-q \cdot x+2<0$

$-qx<-2 \ /(-1)$

$qx>2$

$x>\frac{2}{q}$; $x>-\frac{2}{a}$, s tim da je $-\frac{2}{a}$ pozitivan broj pa $x \in \left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$ jer je $x>0$, pa u presjeku sa $x>-\frac{2}{a}$ dobijem ovaj interval.

Pa nejednačina ima oblik:

$$\frac{-x-4}{ax+2}-\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{x(-x-4)-(ax+2)}{x(ax+2)}>0$$

$$\frac{-x^2-4x-ax-2}{x(ax+2)}>0 \ /(-1)$$

$$\frac{x^2+x(4+a)+2}{\underbrace{x(ax+2)}_{\text{negativno}}}<0$$

pa $x^2+x(4+a)+2>0$

$$x_{12}=\frac{-(4+a) \pm \sqrt{(4+a)^2-8}}{2}$$

$$x_{12}=\frac{-(4+a) \pm \sqrt{16+8a+a^2-8}}{2}$$

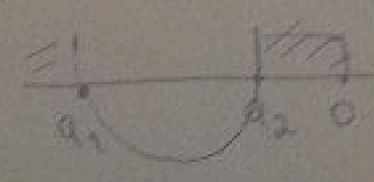
$$x_{12}=\frac{-(4+a) \pm \sqrt{a^2+8a+8}}{2}$$

$a^2+8a+8=0$

$$a_{12}=\frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2}=\frac{-8 \pm \sqrt{32}}{2}=\frac{-8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$a_1=-4-2\sqrt{2} \quad a_2=-4+2\sqrt{2}$

$a<0$



$a \in (-\infty, -4-2\sqrt{2}) \cup (-4+2\sqrt{2}, 0)$

2.1.3. Ako je $a>0$, ispitajmo sada ovaj slučaj:

$ax+2>0$, ovo vrijedi jer je $a>0 \land x>0$, pa je

$x > -\frac{2}{a}$, a $-\frac{2}{a}$ je neki negativan broj tako da trebamo naći rješenje u intervalu:

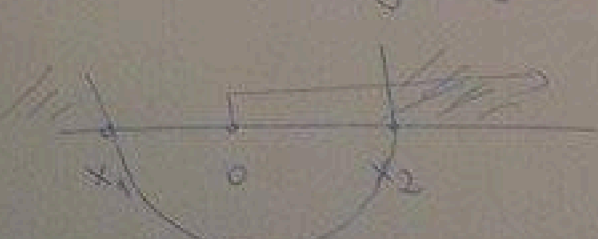
$x \in (0, +\infty)$

$$\frac{x+4}{ax+2} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2 + x(4-a) - 2}{x(ax+2)} > 0$$ (Riješeno pod 2.1.2)

$$x_1 = \frac{(a-4) - \sqrt{a^2-8a+24}}{2} \qquad x_2 = \frac{(a-4) + \sqrt{a^2-8a+24}}{2}$$

Možemo odmah zaključiti da je x_1 negativan broj tj $x_1<0$, a $x_2>0$, pa je konačno rješenje ovog slučaja:



$$x \in \left(\frac{(a-4) + \sqrt{a^2-8a+24}}{2}, +\infty \right)$$