UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

.

Majda Đukić - Hadžović

RJEŠENJE DOMAĆE ZADAĆE 3

IZ

INŽENJERSKE MATEMATIKE 1

Sarajevo, 04. 01. 2010.

Zad. 1. Zadana je familija $(f_{a,b} : 0 < a < b;\ a,b \in \mathbf{R})$ realnih funkcija jedne realne varijable, gdje je

$$f_{a,b}(x) = \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{\sin ax + \sin bx}.$$

a) Nađite prirodni domen $D(f_{a,b})$ i ispitajte ponašanje na rubu od $D(f_{a,b})$ svake od funkcija *iz* zadane familije $(f_{a,b} : 0 < a < b;\ a,b \in \mathbf{R})$.

b) Bez upotrebe *L' Hospitalovog* pravila izračunajte graničnu vrijednost svake od funkcija *iz* zadane familije u svakoj od tačaka gomilanja njenog prirodnog domena koja mu ne pripada.

c) Ispitajte neprekidnost i klasificirajte eventualne tačke prekida i singulariteta funkcije $f_{1,k}$ iz zadane familije ako je k zbir svih cifara vašeg jedinstvenog matičnog broja (JMBG).

Rješenje:

a) Data funkcija nije definisana za:

$$\sin ax + \sin bx = 0$$

$$2\sin\frac{a+b}{2}x \cdot \cos\frac{a-b}{2}x = 0$$

$$\sin\frac{a+b}{2}x = 0$$

$$\frac{a+b}{2}x = k\pi,\ k \in Z$$

$$x = \frac{2k\pi}{a+b},\ k \in Z$$

$$\cos\frac{a-b}{2}x = 0$$

$$\frac{a-b}{2}x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ l \in Z$$

$$x = \frac{(2l+1)\pi}{a-b},\ l \in Z$$

Dakle, prirodni domen date funkcije je:

$$D(f_{a,b}) = \left\{x \in R | x \neq \frac{2k\pi}{a+b} \wedge x \neq \frac{(2l+1)\pi}{a-b}; k,l \in Z; a,b \in \mathbf{R};\ 0 < a < b\right\}$$

S obzirom da se prirodni domen svake od funkcija iz zadane familije $(f_{a,b}: 0 < a < b; a,b\ \in \mathbf{R})$ sastoji od beskonačno mnogo intervala čije su granice oblika $\frac{2k\pi}{a+b}$ i $\frac{(2l+1)\pi}{a-b}$, $k,l \in Z$, koje su ujedno i tačke gomilanja domena koje mu ne pripadaju, odredit ćemo granične vrijednosti u tim tačkama (posebno ćemo razmotriti slučaj kada je $k = 0$).

Prije toga, odredit ćemo ponašanje funkcija iz pomenute familije kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$:

1° $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{sinax+sinbx}$ ne postoji (jer nazivnik poprima različite vrijednosti, uključujući i 0, ako se x uvećava preko raznih vrijednosti).

2°

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1-e^{(a+b)x}}{e^{ax}}}{2\frac{a+b}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{a+b}{2}x}{\frac{a+b}{2}x}\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{1-e^{(a+b)x}}{(a+b)x} = -\lim_{x\to 0-} \frac{e^{(a+b)x}-1}{(a+b)x} = \left| \begin{array}{l} (a+b)x = t \\ x \to 0- \Rightarrow t \to 0- \end{array} \right| =$$

$$= -\lim_{t\to 0-}\left(\frac{e^t-1}{t}\right) = -1$$

Analogno je i $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} = -1$. Dakle, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} = -1$.

3°

$$\lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} = \lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}} \frac{\frac{1-e^{(a+b)x}}{e^{ax}}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= \frac{1-e^{2k\pi}}{e^{\frac{2k\pi a}{a+b}}}\cdot\frac{1}{2\sin 2k\pi\cdot\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi} = \begin{cases} +\infty & za \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi > 0 \wedge k<0\right) \vee \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi < 0 \wedge k>0\right) \\ -\infty & za \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi > 0 \wedge k>0\right) \vee \left(\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi < 0 \wedge k<0\right) \end{cases}$$

$$\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2m\pi < \frac{a-b}{a+b}k\pi < \frac{\pi}{2}+2m\pi, \quad m\in Z$$

$$\frac{(4m-1)(a+b)}{2(a-b)} < k < \frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)}.$$

Da bi k bilo veće od 0, potrebno je da bude $m \le \frac{1}{4}$, tj. $m \le 0$. S druge strane, da bi bilo k manje od 0, potrebno je da bude $m \ge -\frac{1}{4}$, tj. $m \ge 0$.

Sljedeći uslov je da je:

$\cos\frac{a-b}{a+b}k\pi < 0 \Leftrightarrow \frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)} < k < \frac{(4m+3)(a+b)}{2(a-b)}$, $m \in Z$. Da bi k bilo veće od 0, potrebno je da bude $m \le -\frac{1}{4}$, tj. $m \le -1$. S druge strane, da bi bilo k manje od 0, potrebno je da bude $m \ge -\frac{3}{4}$, tj. $m \ge 0$. Konačno, imamo da je:

$$\lim_{x\to\frac{2k\pi}{a+b}} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= \begin{cases} +\infty \; za \left(\frac{(4m-1)(a+b)}{2(a-b)} < k < \frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)},\; m \ge 0\right) \vee \left(\frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)} < k < \frac{(4m+3)(a+b)}{2(a-b)},\; m \le -1\right) \\ -\infty \; za \left(\frac{(4m-1)(a+b)}{2(a-b)} < k < \frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)},\; m \le 0\right) \vee \left(\frac{(4m+1)(a+b)}{2(a-b)} < k < \frac{(4m+3)(a+b)}{2(a-b)},\; m \ge 0\right) \end{cases}$$

4°

$$\lim_{x\to\frac{(2l+1)\pi}{a-b}} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} = \lim_{x\to\frac{(2l+1)\pi}{a+b}} \frac{\frac{1-e^{(a+b)x}}{e^{ax}}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x} =$$

$$= \frac{1-e^{\frac{a+b}{a-b}(2l+1)\pi}}{e^{\frac{(2l+1)\pi a}{a-b}}} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}\cdot\cos\frac{(2l+1)\pi}{2}} =$$

$$= \begin{cases} +\infty \quad za \left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2} > 0 \wedge l < -\frac{1}{2}\right) \vee \left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2} < 0 \wedge l > -\frac{1}{2}\right) \\ -\infty \quad za \left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2} > 0 \wedge l > -\frac{1}{2}\right) \vee \left(\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2} < 0 \wedge l < -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow 2n\pi < \frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2} < \pi + 2n\pi, \quad n \in Z$. Odavde se dobija da je:

$$\frac{4n(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}.$$

Da bi l bilo veće od $-\frac{1}{2}$, potrebno je da bude $n \leq 0$, a da bi l bilo manje od $-\frac{1}{2}$ potrebno je da bude $n \geq -\frac{1}{2}$, odnosno $n \geq 0$, jer $n \in Z$.

S druge strane imamo da je:

$\sin\frac{a+b}{a-b}\frac{(2l+1)\pi}{2}<0 \Leftrightarrow \frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{4(n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}$, $n \in Z$. Da bi l bilo veće od $-\frac{1}{2}$, potrebno je da bude $n \leq -\frac{1}{2}$, odnosno $n \leq 0$, a da bi l bilo manje od $-\frac{1}{2}$ potrebno je da bude $n \geq -1$. Konačno, možemo pisati da je:

$$\lim_{x\to\frac{(2l+1)\pi}{a-b}} \frac{e^{-ax}-e^{bx}}{2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x}=$$

$$=\begin{cases} +\infty & za \left(\frac{4n(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)},\ n \geq 0\right)\vee \\ & \left(\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{4(n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)},\ n \leq 0\right) \\ -\infty & za \left(\frac{4n(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)},\ n \leq 0\right)\vee \\ & \left(\frac{2(2n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)}<l<\frac{4(n+1)(a-b)-(a+b)}{2(a+b)},\ n \geq -1\right) \end{cases}$$

c) S obzirom da je $\lim_{x\to 0-} f_{1,k}(x) = \lim_{x\to 0+} f_{1,k}(x) = -1$, tj. postoji limes u tački $x=0$ i to konačan, ali $f(0)$ nema smisla, pa zaključujemo da se u toj tački radi o singularitetu prve vrste i to otklonjivom (prividnom). Da bismo uklonili takav singularitet, dovoljno je dodefinisati funkcije $f_{1,k}(x)$ uzimajući da je $f_{1,k}(0) = -1$.

U tačkama gomilanja za domen familije funkcija $f_{1,k}(x)$, tj. za $x=\frac{2m\pi}{a+b}$, $m \neq 0$ i $m \in Z$ i za $x=\frac{(2l+1)\pi}{a-b}$, $l \in Z$ imamo singularitete drugog reda, jer limesi uzimaju ∞ vrijednosti. Ako su lijevi i desni limesi u tim tačkama jednaki, tada je riječ o singularitetima tipa pola, a ukoliko su lijevi i desni limesi u tim tačkama različiti, tada kažemo da je riječ o esencijalnim singularitetima.

Uvrstiti individualnu vrijednost za k (k je zbir svih cifara vašeg jedinstvenog matičnog broja (JMBG).)!

Zad. 2. **a)** Za realnu funkciju f jedne realne promjenljive zadanu formulom

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

nađite $f'_{-}(0)$, $f'_{+}(0)$, $\lim_{x\to -0} f'(x)$ i $\lim_{x\to +0} f'(x)$. Da li postoji $f'(0)$? Opišite geometrijsku interpretaciju dobijenih rezultata.

b) Skicirajte grafik funkcije $y = y(x)$ zadane u parametarskom obliku :

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

a zatim nađite $y'_x = \dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}$ (u svakoj od tačaka prirodnog domena zadane funkcije $y = y(x)$).

Rješenje:

a) Vrijedi da je:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} = -\infty$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} = -\infty$$

tj. $f'(0) = -\infty$.

Da bismo odredili $\lim_{x\to -0} f'(x)$ i $\lim_{x\to +0} f'(x)$, moramo prije toga odrediti $f'(x)$ za $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left[\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$$

Sada je:

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$$

tj. postoji $\lim_{x\to 0} f'(x)$ i iznosi $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$.

Kako funkcija nema konačan izvod u tački $x = 0$, zaključujemo da ona nije diferencijabilna u toj tački. Iz činjenice da je $\lim_{x\to 0} f'(x) \neq f'(0)$ zaključujemo da je funkcija $f'(x)$ prekidna u tački $x = 0$. Ukoliko neprekidna funkcija u nekoj tački ima beskonačan izvod, onda ta funkcija u toj tački ima tangentu okomitu na apscisnu osu. Međutim, kako je:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ i } f(0) = 0,$$

zaključujemo da je zadana funkcija prekidna u tački $x = 0$.

b) Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ su definisane za $\forall t \in R$.
S obzirom da je :

$$x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ x \in [0,\pi]$$

Analogno je:

$$y = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow siny = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

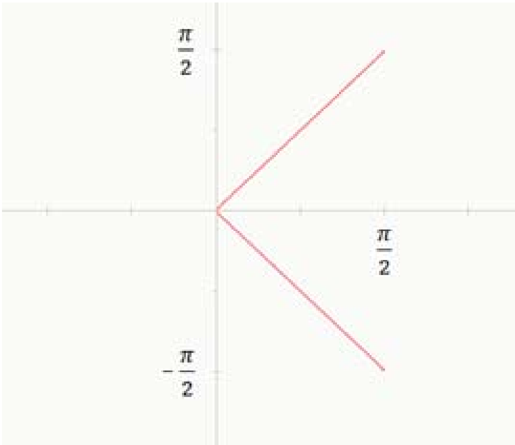
Vrijedi da je:

$$cos^2x + sin^2x = 1$$
$$cos^2y + sin^2y = 1$$

Iz tih jednačina se lako dobije da je $sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2} = sin^2y$ i da je $cos^2x = \frac{1}{1+t^2} = cos^2y$, odnosno da je:

za $t < 0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow x = -y$

za $t \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow x = y$. Zaključujemo da zadane parametarske jednačine definiraju dvoznačnu funkciju $y = \pm x$ $(0 \leq x < \frac{\pi}{2})$ i njen grafik je prikazan na sljedećoj slici:



Sada je:

$$x'_t = \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'_t = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'_t = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}\right) =$$

$$= \frac{t}{|t|} \cdot \frac{1}{1+t^2} \quad , \ t \neq 0$$

Analogno je:

$$y'_t = \left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)'_t = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)'_t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}}\right) = \frac{1}{1+t^2}$$

Na osnovu priloženog, zaključujemo da funkcija $y = y(x)$ u svim tačkama $(x(t), y(t)), t \neq 0$ ima izvod koji iznosi:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & za\ t > 0 \\ -1 & za\ t < 0 \end{cases}$$

Za $t = 0$, tj. u tački $x = 0$ će biti:

$\lim_{t \to 0+} y'_x = 1$ i $\lim_{t \to 0-} y'_x = -1$.

Drugim riječima, funkcija $y = y(x)$ zadana parametarskim jednačinama nema izvod u tački $x = 0$.

Zad. 3. **a)** Primjenom diferencijalnog računa dokažite sljedeću jednakost:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

b) Skicirajte grafik i odredite (prvi) izvod funkcije f zadane formulom

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}, \quad (x > -2).$$

Rješenje:

a) I. način:

Neka je $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$, a $f_2(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Razvijmo ove dvije funkcije pomoću Taylorovog polinoma. Bit će:

$$f_1(x) = f_1(a) + \underbrace{\frac{f_1'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f_1''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f_1^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{R(x)} \quad (1) \quad , \text{a}$$

$$f_2(x) = f_2(a) + \underbrace{\frac{f_2'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f_2''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f_2^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{S(x)} \quad (2)$$

Vrijedi da je:

$$f_1'(x) = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ i}$$

$$f_2'(x) = \left(arctg\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$$

pa i u ovom slučaju dobijemo da je:

$$f_1^{(n)}(x) = -f_2^{(n)}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f_1^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = -\left[\frac{f_2'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f_2^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right], x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Dakle, vrijedi da je $R(x) = -S(x)$. Ukoliko se saberu jednakosti (1) i (2), dobijemo da je:

$f_1(x)+f_2(x)=f_1(a)+R(x)+f_2(a)+S(x)$
$f_1(x)+f_2(x)=f_1(a)+R(x)+f_2(a)-R(x)$
$f_1(x)+f_2(x)=f_1(a)+f_2(a)$

Ukoliko uvrstimo da je, npr. $a=1 \ \ (a>0)$, dobijemo da je:

$arctgx+arctg\frac{1}{x}=arctg1+arctg1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, odnosno

$arctgx+arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ za $x>0$.

S druge strane, ukoliko uvrstimo da je $a=-1 \ \ (a<0)$, tada je:

$arctgx+arctg\frac{1}{x}=-arctg1-arctg1=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$, odnosno

$arctgx+arctg\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ za $x<0$, što je trebalo i dokazati.

II način:

$f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$,

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{(-1)}{x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0, (\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)).$

Analogno prethodnom slučaju imamo da je:

1° Za $x\in(0,+\infty)$

$$f'(x)=0\Longrightarrow f(x)=C_1$$

Uvrštavamo proizvoljnu vrijednost, npr. $x=1$, pa dobijamo da je:

$arctg1+arctg1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow C_1=\frac{\pi}{2}.$

2° Za $x\in(-\infty,0)$:

$$f'(x)=0\Longrightarrow f(x)=C_2$$

Uvrštavamo, npr. $x=-1$, pa dobijamo da je:

$arctg(-1) + arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow C_2 = -\frac{\pi}{2}$, što je trebalo i dokazati!

b) Razlikujemo tri slučaja:

1° $|x| < 2$, tj. $-2 < x < 2$

U tom slučaju je $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, pa $\left(\frac{x}{2}\right)^n \to 0$ za $n \to \infty$

Tada je:

$$\lim_{n\to\infty} ln(2^n + x^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ln\left[2^n\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right]^{\frac{1}{n}} == \lim_{n\to\infty}(ln2 + ln1) = ln2$$

2° $x = 2$

Tada je:

$$\lim_{n\to\infty} ln(2^n + 2^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ln(2\cdot 2^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ln(2^{n+1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}} ln2 = ln2$$

3° $|x| > 2$, tj. $x \in (2, +\infty)$, s obzirom na uslov zadatka $(x > -2)$.

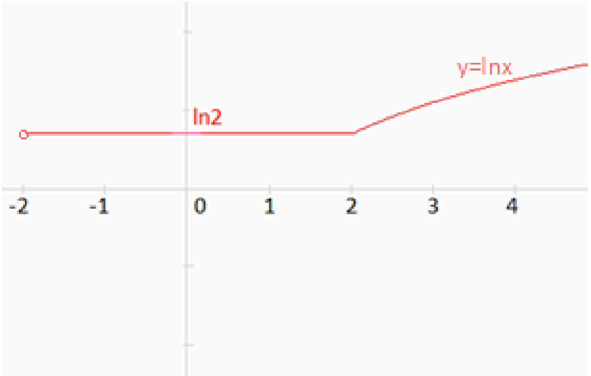
U tom slučaju je: $\left|\frac{2}{x}\right| < 1$, pa $\left(\frac{2}{x}\right)^n \to 0$ za $n \to \infty$

Tada je:

$$\lim_{n\to\infty} ln(2^n + x^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ln\left[x^n\left(1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n\right)\right]^{\frac{1}{n}} == \lim_{n\to\infty}(lnx + ln1) = lnx$$

Dakle, vrijedi da je:

$$f(x) = \begin{cases} ln2, & x \in (-2, 2) \\ lnx, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$



Prema pravilima za diferenciranje imamo da je:

$$f'(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in (-2,2) \\ \dfrac{1}{x}\,, & x \in (2,+\infty) \end{cases}$$

Posebno određujemo izvod u tački 2:

$$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{lnx - ln2}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{ln2 - ln2}{x-2} = 0$$

Dakle, zaključujemo da, iako je funkcija neprekidna u tački $x = 2$, ona nema izvod u toj tački, s obzirom da je $f'_{+}(2) \neq f'_{-}(2)$.

Zad. 4. Primjenom logaritamskog izvoda izračunajte izvod $f'(x)$ (Find $f'(x)$ by *logarithmic differentiation*) ako je:

a) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)(x^2+x+2)}$; **b)** $f(x) = \dfrac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{(x^2+2x-3)^2}$; **c)** $f(x) = (\operatorname{ar\,th} x)^{\operatorname{ar\,cth}\frac{1}{x} + \operatorname{ar\,ch}\frac{1}{x}}$.

Rješenje:

Primjenom logaritamskog izvoda imamo da za $f(x)\neq 0$ vrijedi da je:

$$f'(x) = f(x)\cdot[ln|f(x)|]'$$

a) Funkcija je definisana i pozitivna za $\forall x \in R$, pa imamo da je:

$$f'(x) = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\cdot\left[\ln\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\right)\right]' =$$

$$= \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\cdot\left[\ln\left(x^2+1\right)^{1/2} + \ln\left(x^2+x+2\right)^{1/2}\right]' =$$

$$= \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2}\cdot(2x+1)\right] =$$

$$= \frac{f(x)}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+2}\right)$$

b) Funkcija je definisana za $x \in (-\infty,-3)\cup\left(-3,\frac{1}{2}\right]$ i pozitivna za svako x iz domena funkcije izuzev za $x = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \frac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{\left(x^2+2x-3\right)^2}\cdot\left[\ln e^{-3x} + \ln(1-2x)^{1/2} - \ln\left(x^2+2x-3\right)^2\right]' =$$

$$= f(x)\cdot\left[-3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2x}\cdot(-2) - 2\cdot\frac{1}{x^2+2x-3}\cdot(2x+2)\right] =$$

$$= f(x)\cdot\left(-3 - \frac{1}{1-2x} - \frac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right)$$

što vrijedi za sve vrijednosti x iz domena funkcije izuzev za vrijednost $x = \frac{1}{2}$ (po definiciji izvoda lako se vidi da je $f'\left(\frac{1}{2}\right) = f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \ldots = -\infty$).

c) Ograničavamo se na slučaj kada je baza $arthx$ pozitivna, pa $x \in (0,1)$. Vrijedi:

$$\left(\operatorname{arcth}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{(-1)}{x^2} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{za} \quad \frac{1}{|x|} > 1 \; (\Leftrightarrow 0 < |x| < 1),$$

$$\left(arch\frac{1}{x}\right)' = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\cdot\frac{(-1)}{x^2} = \mp\frac{1}{x\cdot\sqrt{1-x^2}} \quad \text{za} \quad \frac{1}{x} > 1 \; (\Leftrightarrow (0 < x < 1)),$$

$$(\operatorname{arth}x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{za} \quad |x| < 1$$

Dakle, za $0 < x < 1$ imamo da je:

$$f'(x) = f(x)\cdot\left[\left(arcth\frac{1}{x} + arch\frac{1}{x}\right)\cdot\ln(arthx)\right]' =$$

$$= f(x)\cdot\left\{\left[\frac{1}{1-x^2} \mp \frac{1}{x\ \sqrt{1-x^2}}\right]\cdot\ln(arthx) + \left(arcth\frac{1}{x} + arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right\}$$

Nadalje, imamo da je:

$$f'(x) = f(x)\cdot\left\{\frac{x \mp \sqrt{1-x^2}}{x(1-x^2)}\cdot\ln(arthx) + \left(arcth\frac{1}{x} + arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right\} =$$

$$= \frac{f(x)}{(1-x^2)}\left[\frac{x \mp \sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\ln(arthx) + \left(arcth\frac{1}{x} + arch\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{arthx}\right]$$

-- @ --