Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Z A D A C I - Grupe A i B
(POSTAVKE, UPUTE I REZULTATI ZADATAKA - ODGOVORI)
SA SEPTEMBARSKOG ROKA (PARCIJALNIH I INTEGRALNOG ISPITA) IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1 (IM1)

Akademska **2013 - 2014. godina**
Sarajevo, 04. 09. 2014.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. Za svaki od prva četiri zadatka (za oba dijela - parc. ispita iz IM1) ponuđenasu četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje boduje se sa po 2,5 boda/poena (prema naznačenom bodovanju uz zadatak), a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po 0 bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.

2. Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi 10 bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je 0,5 bodova).

3. Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.

Rezultati popravnog (I / II parc. ili integralnog) ispita iz IM1:

Zad. 1.	....	....	Zad. 6.	....	....
Zad. 2.	....	....	Zad. 7.	....	....
Zad. 3.	....	......	Zad. 8.	.....	....
Zad. 4.	....	....	Zad. 9.	....	....
Zad. 5.		......	Zad. 10.		....

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:

Predmetni nastavnik:

V. Prof. dr. sc. Huse Fatkić

Z A D A C I - Grupa A:

za popravni prvog parcijalnog / (prvog dijela integralnog) ispita u septembarskom ispitnom roku iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 04. 09. 2014.

Zad. 1. Skicirajte grafik realne funkcije f jedne realne varijable zadane formulom $f(x)=x\sqrt{x}+x^{-4}$, a zatim nađite član u razvoju izraza $(f(x))^n$ (po *Newtonovoj binomnoj formuli*) koji ne sadrži x ako vrijedi da je koeficijent trećeg člana u tom razvoju za 44 veći od koeficijenta drugog člana. (1,5 + 1 [b.])

[I. $n = 11$; 3. član. II. $n = 9$; 1. i 5. član . **III.** $n = 11$; 4. član. IV. $n = 8$; 3. i 8. član.]

(**Uputa.** Vidi **Primjer 1.3.10.** na str. 39 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zad. 2. Nađite sljedeću graničnu vrijednost (niza kompleksnih brojeva):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right], \quad (i \text{ - imaginarna jedinica}).$$

Pri tome definirajte sve pojmove o nizovima, limesima i kompleksnim brojevima koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka. (1 + 1,5 [b.])

[I. Ne postoji. **II.** $\frac{1}{2}i$. III. $-\frac{1}{2}i$. IV. ∞.]

(**Uputa.** Zadatak 2.10.2. na str. 93 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zad. 3. Realne funkcije f, g jedne realne varijable x zadane su formulama

$$f(x)=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-t^2}}, \quad g(x)=\sqrt{x-t}+\sqrt{x+t}\,.$$

Odredite njihove (prirodne) domene u zavisnosti od realnog parametra t i ispitajte jednakost zadanih funkcija f, g, a zatim za $t = 2$ dokažite da ima smisla pa izračunajte $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$. (1 + 0,5 + 0,5 + 0,5[b.])

[I. 0. II. 3. III. 2. **IV.** 1.]

Zad. 4. Dokažite da red $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergira i izračunajte njegovu sumu ako je

$$a_n=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) \quad (\forall\, n \in \mathbf{N}).$$ (1 + 1,5 [b.])

[I. $\frac{1}{2}+\ln 2$. II. $1+2\ln 2$. **III.** $\frac{1}{2}+2\ln 2$. IV. $1+\ln 2$.]

(**Uputa.** Zadatak 2.6.3. c) (Red $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$) na str. 76 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

Zad. 5. a) Pojednostavite izraz $\sqrt{z}-(z^3)^{\frac{1}{6}}$ ako je z :

1) kompleksan broj; 2) pozitivan realan broj; 3) $z=(-10)^{2005}\cdot(-10)^{2012}$.

[Rješenje: **1) Neke od jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva, samo ako se relacija jednakosti izraza (budući da $\sqrt[n]{a}$, za *a*≠0, ima *n* različitih vrijednosti u skupu C kompleksnih brojeva) razumije tako da je svaka vrijednost s jedne strane jednaka jednoj vrijednosti s druge strane i obratno, tj. da se *skupovi vrijednosti* s jedne i druge strane jednakosti podudaraju. U tom smislu u skupu C imamo da je**

$\sqrt{z}$ - $(z^3)^{\frac{1}{6}}$ **= 0 za z = 0, a za svaki** $z \in \mathrm{C}\setminus\{0\}$ **zadani izraz** $\sqrt{z}$ - $(z^3)^{\frac{1}{6}}$ **se ne može pojednostaviti (u skupu C kompleksnih brojeva), pa ni za zadani imaginarni broj** z.

2) U skupu **R** realnih brojeva za svaki $z \geq 0$ imamo da je $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{z} - z^{\frac{1}{2}} = 0$.

3) U skupu **R** realnih brojeva za $z = (-10)^{2005} \cdot (-10)^{2012}$, budući da je tada $z < 0$, izraz $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}}$ nije definiran, a u skupu **C** kompleksnih brojeva, prema 1), taj izraz se ne može pojednostaviti. **]**

(Vidi rješenje Zad. 1.4.7. a) na str. 50 i 51 u knjizi [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

b) Izračunajte realni i imaginarni dio i modul kompleksnog broja z zadanog u obliku $z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} i\right)$, gdje je i imaginarna jedinica. (**Rezultat:** $z = i \cdot \operatorname{th}\frac{\pi}{2}$.)

c) Koristeći *Newtonovu binomnu formulu* i *Moivreovu formulu* izrazite $\sin^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova. **[Rezultat.** $\sin^5 x = \frac{1}{16}(10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x)$.**]**

d) Ispitajte koje od sljedećih *jednakosti* (i pod kojim uslovima) važe *za korijene* u skupu kompleksnih brojeva: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$.(Uputa: Vidi **Primjedba 1.4.1.** na str. 49 u knjizi [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Pri tome definirajte sve pojmove o kompleksnim brojevima koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka (pod a), b) i d)). (2 + 2 + 2+ 2 + 2 [b.])

....

Z A D A C I - Grupa B:

za popravni prvog parcijalnog / (prvog dijela integralnog) ispita u septembarskom ispitnom roku iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 04. 09. 2014.

Zad. 1. Skicirajte grafik realne funkcije f jedne realne promjenljive zadane formulom $f(x) = x^{1/2} + x^{-5}$, a zatim nađite član u razvoju izraza $(x f(x))^n$ (po *Newtonovoj binomnoj formuli*) koji ne sadrži x ako vrijedi da je koeficijent trećeg člana u tom razvoju za 44 veći od koeficijenta drugog člana. (1 + 1,5 [b.])

[I. n = 11; 3. član. II. n = 9; 1. i 5. član . III. n = 8; 3. i 8. član. **IV.** n = 11; 4. član.]

(**Uputa.** Vidi **Primjer 1.3.10.** na str. 39 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zad. 2. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, dokažite da je $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|$, gdje je (z_n) niz kompleksnih brojeva. Da li je i obrnuto tačno? Nađite $\lim_{n\to\infty} |z_n|$ ako je $z_n := \frac{n-1}{n+1} e^{ni}$, ($i$ – imaginarna jedinica). (0,5+ 0,5 + 1,5 [b.])

[**I.** 1. II. $\frac{1}{2} i$. III. $-\frac{1}{2} i$. IV. Ne postoji.]

(**Uputa.** Zadatak 2.10.1. na str. 93 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zad. 3. Realne funkcije f, g jedne realne varijable x zadane su formulama

$$f(x) = \frac{x - t}{x + t + 2\sqrt{tx}}, \quad g(x) = \frac{x + t - 2\sqrt{tx}}{x - t}.$$

Odredite njihove (prirodne) domene u zavisnosti od realnog parametra t i ispitajte jednakost zadanih funkcija f, g, a zatim za $t = 1$ ustanovite da ima smisla pa izračunajte $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$. (1 + 0,5 + 0,5 + 0,5[b.])

[I. 0. **II.** 1. III. 2. IV. 3.]

Zad. 4. Dokažite da red $\sum_{n\geq 1} b_n$ konvergira i izračunajte njegovu sumu ako je

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) \quad (\forall\, n \in \mathbf{N}).$$ (1 + 1,5 [b.])

[I. $\frac{1}{2} + \ln 2$. **II.** $\frac{1}{2} + 2\ln 2$. III. $1 + 2\ln 2$. IV. $1 + \ln 2$.]

(**Uputa.** Zadatak 2.6.3. c) (Red $\sum_{n\geq 1} b_n$) na str. 76 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

Zad. 5. a) Pojednostavite izraz $\ln e^z$ ako je z :

1) kompleksan broj; 2) realan broj (npr. $z = -2012$); 3) $z = 10\,i$, gdje je i imaginarna jedinica.

[**Rješenje:** **a)** 1) U skupu **C** kompleksnih brojeva imamo da ako je $z = r\,e^{i\varphi}$, onda je i $z = r \cdot e^{i\,(\varphi + 2k\pi)}$ za svaki $k\in\mathbf{Z}$, pa se definira višeznačna funkcija $\ln z := \ln r + i\,(\varphi + 2k\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$, tj. $\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, za svaki $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, njena glavna vrijednost (glavna vrijednost logaritma) se definira formulom

$$\operatorname{Ln} z := \ln r + i\,\varphi,\ z = r\,e^{i\varphi}, \quad \text{tj. } \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z,\quad \varphi = \arg z \in (-\pi, \pi],$$

gdje je $\ln r$ logaritam u realnom domenu ($r > 0$). Otuda, ako je z kompleksan broj, imamo da je

$\ln e^z = -\sqrt{3} + i\,(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi)$, ($m\in\mathbf{Z}$). U tom smislu zaključujemo da se zadani izraz $\ln e^z$, u opštem slučaju, u skupu **C** kompleksnih brojeva ne može pojednostaviti.

2) U skupu **R** realnih brojeva (tj. za logaritam u realnom domenu) imamo da je $\ln e^z = z$ za svaki $z\in\mathbf{R}$, pa i za, npr. $z = -2012$, imamo da je $\ln e^{-2012} = -2012$.

3) U skupu **C** kompleksnih brojeva, prema 1) za $z = 10i$, gdje je i imaginarna jedinica, imamo da je

$\arg(e^{10\,i}) = 10 - 4\pi$, pa je stoga $\operatorname{Arg}(e^{10\,i}) = = 10 - 4\pi + 2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$), odakle je

$$\ln e^{10\,i} = i\,(10 + 2m\pi),\ (m \in \mathbf{Z}).]$$

(Vidi rješenje Zad. 1.4.7. b) na str. 50 i 51 u knjizi [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

b) Napišite u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku kompleksni broj z koji je zadan u obliku $z = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}i\right)$, gdje je i imaginarna jedinica. (**Rezultat:** $z = -i\cdot\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}$.)

c) Koristeći *Moivreovu formulu* i *Newtonovu binomnu formulu*, izrazite $\cos^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova. [**Rezultat:** $\cos^5 x = \frac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x)$.]

d) Ispitajte koje od sljedećih *jednakosti* (i pod kojim uslovima) važe *za korijene* u skupu kompleksnih brojeva: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[s]{a^p\cdot b^q}$, gdje je s najmanji zajednički sadržalac brojeva m, n. (Uputa: Vidi **Primjedba 1.4.1.** na str. 49 u knjizi [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Pri tome definirajte sve pojmove o kompleksnim brojevima koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka (pod a), b) i d)). (2 + 2 + 2+ 2 + 2 [b.])

…………….

Z A D A C I - Grupa A:

za popravni drugog parcijalnog / (drugog dijela integralnog) ispita u septembarskom ispitnom roku iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 04. 09. 2014.

1. Definirajte pojmove izvoda i logaritamskog izvoda realne funkcije jedne realne promjenljive, a zatim objasnite postupak određivanja izvoda takve funkcije primjenom njenog logaritamskog izvoda, pa primjenom tog postupka nađite izvod $f'(x)$ ako je $f(x) = \dfrac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{(x^2+2x-3)^2}$. (1 + 0,5 + 1 [b.])

[I. $-3f(x)\cdot\left[\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]$. II. $f(x)\cdot\left[\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]$. **III.** $f(x)\cdot\left[-3-\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]$.

IV. $-3-\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}$.] (Treba još po definiciji izvoda izračunati (ili ustanoviti da ne postoji) izvod $f'(x)$ u svim tačkama x njenog prirodnog domena za koje nije definiran gore navedeni izraz za $f'(x)$!)

(**Uputa.** Vidi ***Log. izvod*** i **Zad. 5.3.2.b)** na str. 170 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

2. Za realnu funkciju f jedne realne promjenljive zadanu formulom $f(x) := \dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ ispitajte egzistenciju primitivne funkcije, a zatim izračunajte neodređeni integral $I(x) := \int f(x)dx$. (0, 5+ 2 [b.])

[I. $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn} x + C$. III. $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn} x + C\left(1+\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

II. $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn} x + C$ za $x \neq 0$, $I(0) = \lim\limits_{x\to 0} I(x)$. IV. $I(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C$.]

(**Uputa.** **Zad. 6.4.1.c)** na str. 217 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

3. a) Definirajte pojmove upisanog i opisanog mnogougla u ravni lik ograničen krivom, te pojam površine/mjere ravnog lika, a zatim izvedite formulu za površinu lika (figure) u ravni *Oxy*, ograničene dijelovima x-ose, pravih $x = a$ i $x = b$ i krivom zadanom jednačinom $y = f(x)$, ($x \in [a,b]$), gdje je f neprekidna nenegativna realna funkcija jedne realne varijable. (**Uputa.** Str. 289 - 291 u [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

b) *Cikloida* je zadana (parametarski) jednačinama $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in \mathbf{R}$ ($a > 0$). Skicirajte ravni lik ograničen x-osom i jednim svodom zadane cikloide (za $0 \le t \le 2\pi$), a zatim, primjenom dobijene formule u a), izračunajte njegovu površinu .

[I. πa^2. **II.** $3\pi a^2$. III. $2\pi a^2$. IV. $4\pi a^2$.] (1+ 0,5+1 [b.])

(**Uputa.** Primjer 9.1.1. na str. 291 u [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

4. Dokažite postojanje, a zatim izračunajte nesvojstveni integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[\ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx$. (0,5+2 [b.])

[**I.** $\dfrac{5\pi}{3}$. II. $\dfrac{10\pi}{3}$. III. $\dfrac{2\pi}{3}$. IV. $\dfrac{\pi}{3}$.]

(**Uputa.** **Zad. 8.5.4.** na str. 287 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x) := x + \dfrac{x}{x^3-1}$.

a) Ispitajte tok i nacrtajte grafik zadane funkcije f, a zatim odredite rang $R(f)$ i ustanovite da li postoji (jednoznačna) inverzna funkcija zadane funkcije f. Pri tome precizno definirajte sve pojmove o realnim funkcijama jedne realne promjenljive koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka. (**Uputa:** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$. Zadatak 381. na str. 409 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]).

b) Odredite prirodni domen funkcije $g(x) := 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^4 + f(x)}{(x+3)\, f(x)}}$, gdje je f funkcija zadana u a), a zatim odredite i klasificirajte eventualne tačke prekida i singulariteta funkcije g, te primjenom diferencijalnog računa ispitajte tok i nacrtajte grafik te funkcije. (**Uputa:** Kako je $g(x) := 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$, za $x \neq 0$ i $x \neq 1$, to se zadana funkcija g svodi na restrikciju funkcije f u Zadatku 383. na str. 410 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]).

....

(3 + 2+ 1+ 4 [b.])

Z A D A C I - Grupa B:

za popravni drugog parcijalnog / (drugog dijela integralnog) ispita u septembarskom ispitnom roku iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 04. 09. 2014.

1. Definirajte pojmove beskonačnog izvoda i logaritamskog izvoda realne funkcije jedne realne varijable, a zatim objasnite postupak određivanja izvoda takve funkcije primjenom njenog logaritamskog izvoda, pa primjenom tog postupka nađite izvod $f'(x)$ ako je $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$. (1+ 0,5 + 1 [b.])

[I. $f(x)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{12}{1-3x}\right)$. II. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{12}{1-3x}$. **III.** $f(x)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{12}{1-3x}\right)$. IV. $f(x)\cdot\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{12}{1-3x}\right)$.]

(Treba još po definiciji izvoda izračunati (ili ustanoviti da ne postoji) konačan/beskonačan izvod $f'(x)$ u svim tačkama x njenog prirodnog domena za koje nije definiran gore navedeni izraz za $f'(x)$!)

(**Uputa.** Vidi ***Log. izvod*** i **Zad. 5.3.2.a)** na str. 170 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

2. Ispitajte postojanje integrala $I(x) := \displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$, a zatim izračunajte $I(x)$. (0,5+2 [b.])

[I. $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\left\lfloor \dfrac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor + C.$ III. $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\left\lceil \dfrac{x+\pi}{2\pi} \right\rceil + C.$

II. $I(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\left\lfloor \dfrac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor + C, & \mathbf{R} \ni x \neq (2k+1)\pi, \\ \lim_{x\to(2k+1)\pi} I(x) = \dfrac{2k+1}{2\sqrt{5}}\pi, & x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ IV. $I(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$]

(**Uputa.** Riješen u „ **Primjer 6.9.2.**“ na str. 242 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

3. **a)** Definirajte pojam zatvorene proste krive i opšti pojam površine ravnog lika koji predstavlja dio ravni ograničen zatvorenom prostom krivom, a zatim izvedite formulu za površinu lika (figure) u ravni *Oxy*, ograničene dijelovima *x*-ose, pravih $x = a$ i $x = b$ i krivom zadanom jednačinom $y = f(x)$, $(x \in [a,b])$, gdje je f neprekidna realna funkcija jedne realne varijable i $f(x) \le 0$. **b)** Skicirajte lik u ravni *Oxy* ograničen krivom zadanom jednačinom $y = 3\sin(2x-4)$ i odsječkom $[2-3\pi/2,\ 2]$ ose Ox, a zatim, primjenom dobijene formule u a), izračunajte njegovu površinu .

[**I.** 9 (kv. jed.). II. 3 (kv. jed.). III. 9 (kv. jed.). IV. 10 (kv. jed.).] (1+ 0,5+1 [b.])

(**Uputa.** Vidi na str. 289-291 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

4. Ispitajte integrabilnost funkcije f zadane sa $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx(1+n^5x^2)^{-1}$, a zatim izračunajte $\int_0^x f(t)dt$.

[I. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+n^5x^2)$. II. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+n^5x^2)$. **III.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^4}\ln(1+n^5x^2)$. IV. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2}\ln(1+n^5x^2)$.] (0,5+2 [b.])

(**Uputa.** Zadatak 10.3.1. na str. 311 u univerzitetskom udžbeniku [Fatkić, H., *Inž.mat.* 1].)

5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x) := \frac{3x}{3-x^2} - x$.

a) Ispitajte tok i nacrtajte grafik zadane funkcije f, a zatim odredite rang $R(f)$ i ustanovite da li postoji (jednoznačna) inverzna funkcija zadane funkcije f. Pri tome precizno definirajte sve pojmove o realnim funkcijama jedne realne promjenljive koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka. (**Uputa:** $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$. Zadatak 380. na str. 405- 408 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]**)**.

b) Odredite prirodni domen funkcije $g(x) := 1 - x + \sqrt{\frac{(3-x^2)f(x)}{3+x}}$, gdje je f funkcija zadana u a), a zatim odreditie i klasificirajte eventualne tačke prekida i singulariteta funkcije *g*, te primjenom diferencijalnog računa ispitajte tok i nacrtajte grafik te funkcije. (**Uputa:** Kako je $g(x) := 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$, za $x \ne \sqrt{3}$, to se zadana funkcija *g* svodi na restrikciju funkcije f u Zadatku 383. na str. 410 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]**)**.

.... (3 + 2+ 1+ 4 [b.])