Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Z A D A C I

(POSTAVKE I REZULTATI- ODGOVORI)

Z A

PRVI PARCIJALNI ISPIT IZ PREDMETA

INŽENJERSKA MATEMATIKA 1

Akademska **2013/2014. godina**

Sarajevo, 04. 12. 2013.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. Za svaki od prva četiri zadatka (za parc. ispit iz IM1) su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je napisano odgovarajuće obrazloženje se boduje sa po 2,5 boda/poena (prema naznačenom bodovanju uz zadatak), a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po 0 bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije napisano zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.

2. **Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi 10 bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je 0,5 bodova).**

3. Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.

Rezultati prvog parcijalnog ispita iz IM1:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ....

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:

____

Predmetni nastavnik:

____

V. Prof. dr. sc. Huse Fatkić

Z A D A C I - Var. A :

za prvi parcijaln ispit iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 04. 12. 2013.

Zad. 1. Nađite sve racionalne članove u razvoju $\left(\sqrt[4]{x^7}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ po *Newtonovoj binomnoj formuli* ako vrijedi da je koeficijent trećeg člana u razvoju za 27 veći od koeficijenta drugog člana. **(2,5 [b.])**

[I. $n=9$, 1. i 5. član . II. $n=8$, 1. i 5. član. **III.** $n=9$, 4. i 8. član. IV. $n=8$,. 1. i 8. član.]
(**Zad.2, Test 1, Gr. A, 12.11.2013.**)

Zad. 2. Realne funkcije *f, g* jedne realne varijable *x* zadane su formulama

$$f(x)=\frac{x-t}{x+t+2\sqrt{tx}},\quad g(x)=\frac{x+t-2\sqrt{tx}}{x-t}.$$

Odredite njihove (prirodne) domene u zavisnosti od realnog parametra *t* i (racionalisanjem izraza) ispitajte jednakostzadanih funkcija *f, g* , a zatim za *t* =1 ustanovite da ima smisla pa izračunajte $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$. **(2,5 [b.])**

[I. 0. **II.** 1. III. 2. IV. 3.]

Zad. 3. Ispitajte monotono st i konvergenciju niza (a_n), a zatim nađite (ili ustanovite da ne postoji) $\lim a_n$ ako je

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{6n}\quad (\forall\, n\in\mathbf{N}).$$ **(2,5 [b.])**

[I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji . II. $+\infty$. III. 0. **IV.** ln 6.

Zad. 4. Dokažite da redovi $\sum_{n\ge 1} a_n$, $\sum_{n\ge 1} b_n$ konvergiraju i izračunajte njihove sume ako je

$$a_n=\frac{1-2\sin^2\frac{n\pi}{3}}{2^n},\quad b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad (\forall\, n\in\mathbf{N}).$$ **(2,5 [b.])**

[I. $-\frac{2}{7}$, ln 2. II. $\frac{1}{7}$, ln 2. III. $-\frac{2}{7}$, $-\frac{1}{2}$. IV. $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{2}\ln 2$.]
(Vidi rješenje Zad. 2.9.4. a) i **b) na str. 87 i 88 u [Fatkić, Univ. udžb.])**

Zad. 5. Kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 zadani su u obliku:

$$z_1=-\sqrt{3}+i\ ,\ z_2=-4-i9,\ z_3=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}i\right),$$ gdje je *i* imaginarna jedinica.

a) Predstavite zadane kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 u *Gaussovoj ravni* i napišite ih u trigonometrijskom obliku, a zatim izračunajte količnike $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3}$. **(0,5 + 0,5 +1,5 + 0,2+ 0,3[b.])**

[Rezultat:

$$z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ z_2=\sqrt{97}\operatorname{cis}\left(\operatorname{arctg}\frac{9}{4}-\pi\right), z_3=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}i\right)=i\operatorname{th}\frac{\pi}{2}=\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4\sqrt{3}-9}{97}-\frac{(9\sqrt{3}+4)}{97}i\,,\quad \frac{z_2}{z_3}\left(=\frac{-4-9i}{i\,\mathrm{th}\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{9}{\mathrm{th}\frac{\pi}{2}}+\frac{4}{\mathrm{th}\frac{\pi}{2}}i\,.]$$

(Mod. **Zad.1, Test 2, Gr. C, 26.11.2013**.)

b) Pojednostavite (što je više moguće u odgovarajućem skupu) izraz $\sqrt{z}\ -\ (z^3)^{\frac{1}{6}}$ ako je z :

1) zadani imaginarni broj z_1 ; **2)** realan broj (npr. 2013); **3)** broj $(-2008)^{2013}$. **(1 + 0,5 + 1[b.])**

[Rješenje: 1) Neke od jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva, samo ako se relacija jednakosti izraza (budući da $\sqrt[n]{a}$, za $a\neq 0$, ima n različitih vrijednosti u skupu **C** kompleksnih brojeva) razumije tako da je svaka vrijednost s jedne strane jednaka jednoj vrijednosti s druge strane i obratno, tj. da se *skupovi vrijednosti* s jedne i druge strane jednakosti podudaraju. U tom smislu u skupu **C** imamo da je

$\sqrt{z}\ -\ (z^3)^{\frac{1}{6}}=0$ za $z=0$, a za svaki $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ zadani izraz $\sqrt{z}\ -\ (z^3)^{\frac{1}{6}}$ se ne može pojednostaviti (u skupu **C** kompleksnih brojeva), pa ni za zadani imaginarni broj z_1 .

2) U skupu **R** realnih brojeva za svaki $z\ \geq\ 0$ imamo da je $\sqrt{z}\ -\ (z^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{z}\ -\ z^{\frac{1}{2}}=0$, pa i za $z=2013$.

3) U skupu **R** realnih brojeva za $z=(-2008)^{2013}$, budući da je tada $z=(-2008)^{2013}<\ 0$, izraz $\sqrt{z}\ -\ (z^3)^{\frac{1}{6}}$ nije definiran, a u skupu **C** kompleksnih brojeva, prema 1), taj izraz se ne može pojednostaviti. **]**

(Vidi rješenje Zad. 1.4.7. a) na str. 50 i 51 u [Fatkić, Univ. udžb.])

c) Koristeći *Moivreovu formulu* i *Newtonovu binomnu formulu*, izrazite sin (5*x*) pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$ i obrnuto, izrazite $(\sin(x))^5$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova. **(0,5 + 1,5[b.])**

$\sin(5x)\ =\ 5\cos^4 x\sin x\ -10\cos^2 x\sin^3 x\ +\ \sin^5 x,\ \ \sin^5 x\ =\ \frac{1}{16}(10\sin x\ -\ 5\sin 3x\ +\ \sin 5x)$.**]**

d) Definirajte sve pojmove o kompleksnim brojevima koji se koriste u postavkama i/ili u postupcima rješavanja u a) - c), a zatim izvedite *Moivreovu formulu*. **(1 + 1,5 [b.])**

(Vidi na str. 42 i 44- 48 u [Fatkić, Univ. udžb.])

............................@............................

Z A D A C I - Var. B :

za prvi parcijaln ispit iz predmeta INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 04.12. 2013.

Zad. 1. Nađite sve racionalne članove u razvoju $\left(\sqrt[4]{x^7}+\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^n$ po *Newtonovoj binomnoj formuli* ako vrijedi da je koeficijent trećeg člana u razvoju za 20 veći od koeficijenta drugog člana. **(2,5 [b.])**

[**I.** $n = 8$, 1. član. II. $n = 9$, 1. i 5. član . III. $n = 9$, 5. i 9. član. IV. $n = 8$, 1. i 8. član.]
(**Zad.2, Test 1, Gr. B, 12.11.2013.**)

Zad. 2. Realne funkcije *f, g* jedne realne varijable *x* zadane su formulama

$$f(x)=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-t^2}}\,,\quad g(x)=\sqrt{x-t}+\sqrt{x+t}\,.$$

Odredite njihove (prirodne) domene u zavisnosti od realnog parametra t i (korjenovanjem izraza $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-t^2}}$) ispitajte jednakost zadanih funkcija *f, g* , a zatim za $t = 2$ ustanovite da ima smisla pa izračunajte $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$. **(2,5 [b.])**

[I. 0. II. 3. III. 2. **IV.** 1.]

Zad. 3. Ispitajte ograničenost i konvergenciju niza (a_n), a zatim nađite (ili ustanovite da ne postoji)

$\lim a_n$ ako je $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{10n}$ $(\forall n\in\mathbf{N})$. **(2,5 [b.])**

[I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji . II. 0. **III.** ln 10. IV. $+\infty$.]

Zad. 4. Dokažite da redovi $\sum_{n\ge1}a_n$, $\sum_{n\ge1}b_n$ konvergiraju i izračunajte sumu reda $\sum_{n\ge1}a_n$ ako je

$$a_n=\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^{n+1}},\quad b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad (\forall n\in\mathbf{N}).$$ **(2,5 [b.])**

[**I.** $-\frac{1}{7}$. II. $\frac{1}{7}$. III. $-\frac{1}{2}$. IV. $\frac{1}{2}$.]
(Vidi rješenje Zad. 2.9.4. a) i b) na str. 87 i 88 u [Fatkić, Univ. udžb.])

Zad. 5. Kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 zadani su u obliku:

$$z_1=-\sqrt{3}-i\,,\ z_2=-3-i8,\ z_3=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}i\right),$$ gdje je i imaginarna jedinica.

a) Predstavite zadane kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 u *Gaussovoj ravni* i napišite ih u eksponencijalnom obliku, a zatim izračunajte količnike $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3}$. **(0,5 + 0,5 +1,5 + 0,2+ 0,3[b.])**

[Rezultat:

$$z_1=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}\,,\ z_2=\sqrt{73}\operatorname{cis}\left(\operatorname{arctg}\frac{8}{3}-\pi\right)=\sqrt{73}e^{i(\operatorname{arctg}\frac{8}{3}-\pi)},z_3=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}i\right)=-i\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}=\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+3\sqrt{3}}{73} + \frac{3-8\sqrt{3}}{73}\,i\,,\quad \frac{z_2}{z_3}\left(= \frac{-3-8i}{-i\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{8}{\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{2}}\,i\,.]$$

(Mod. **Zad.1, Test 2, Gr. D, 26.11.2013**.)

b) Pojednostavite (što je više moguće u odgovarajućem skupu) izraz $\ln e^{z}$ ako je z :

1) zadani kompleksni broj z_1 ; 2) realan broj (npr. 2013); 3) $10\,i$. **(1+ 0,5 +1 [b.])**

[Rješenje: a) 1) U skupu **C** kompleksnih brojeva imamo da ako je $z = r\,e^{i\varphi}$, onda je i $z = r \cdot e^{i\,(\varphi + 2k\pi)}$ za svaki $k\in$**Z**, pa se definira višeznačna funkcija ln z : = ln r + i (φ + 2$k\pi$), $k\in$**Z**, tj. ln z = ln |z| + i Arg z, za svaki $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, njena glavna vrijednost (glavna vrijednost logaritma) se definira formulom

$$\mathrm{Ln}\, z := \ln r + i\,\varphi,\ \ z = r\,e^{i\varphi},\quad \text{tj. } \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i \arg z,\quad \varphi = \arg z \in (-\pi, \pi],$$

gdje je $\ln r$ logaritam u realnom domenu (r > 0). U tom smislu zaključujemo da za z = $z_1 = -\sqrt{3} - i$ imamo da je $\ln e^{z} = -\sqrt{3} + i\,(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi)\,,(m\in\mathbf{Z})$.

2) U skupu **R** realnih brojeva (tj. za logaritam u realnom domenu) imamo da je $\ln e^{z} = z$ za svaki $z\in\mathbf{R}$, pa i za, npr. z = 2013, imamo da je $\ln e^{2013} = 2013$.

3) U skupu **C** kompleksnih brojeva, prema 1) za $z = 10i$, gdje je i imaginarna jedinica, imamo da je $\arg(e^{10\,i}) = 10 - 4\pi$, pa je stoga $\mathrm{Arg}\,(e^{10\,i}) = = 10 - 4\pi + 2k\pi$, ($k\in$**Z**), odakle je

$$\ln e^{10\,i} = i\,(10 + 2\,m\,\pi),\ (m \in \mathbf{Z}).]$$

(Vidi rješenje Zad. 1.4.7. b) na str. 50 i 51 u [Fatkić, Univ. udžb.])

c) Koristeći *Moivreovu formulu* i *Newtonovu binomnu formulu*, izrazite cos (5x) pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$ i obrnuto, izrazite $\cos^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova. **(0,5 +1,5[b.])**

([Rezultat:

$$\cos(5x) = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x,\quad \cos^5 x = \frac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x).])$$

d) Definirajte sve pojmove o kompleksnim brojevima koji se koriste u postavkama i/ili u postupcima rješavanja u a) – c), a zatim precizno opišite kako se dobije relacija ($\forall(x, y) \in$ **C**) $(x, y) = x + i\,y$, tj. kako se iz definicionog oblika kompleksnog broja dobije (izvede) njegov algebarski oblik. **(1 + 1,5 [b.])**

(Vidi na str. 42 i 44- 48 u [Fatkić, Univ. udžb.])

……………………..@…………………………