Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Z A D A C I (POSTAVKE, REZULTATI I/ILI RJEŠENJA (ODGOVORI) / UPUTE)
S A

PRVOG PARCIJALNOG ISPITA IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1

Akademska **2011 - 2012. godina**
Sarajevo, 05. 11. 2011.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. Za svaki od prva četiri zadatka (na prvom parc. ispitu iz IM1) ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje boduje se sa po 2,5 boda/poena, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po 0 bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.

2. Trebalo je detaljno riješiti peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi 10 bodova (svaki od dijelova pod a), b), c) i d) bodovan je sa po 2,5 boda). Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je 0,5 bodova).

3. Nije bilo dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije bilo dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu morao je svaki kandidat samostalno uraditi. Za svakog od kandidata koji je prekršio bilo šta od ovdje navedenog, bit će to sankcionisano i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.

4. Na ovom ispitnom roku bila su postavljena i *Pitanja iz teorijskih osnova za prvi parcijalni ispit iz* **IM1 u okviru petog zadatka, što je bodovano sa 2,5 boda.**

Rezultati prvog parcijalnog ispita iz IM1:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ......

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:
____

Predmetni nastavnik:
____
V. Prof. Dr. Sci. Huse Fatkić

Z A D A C I - Var. A :
za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2011.

Zad. 1. Naći sve racionalne sabirke u razvoju izraza $\left(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x}\right)^{10}$ po *Newtonovoj binomnoj formuli*. **(2,5 b.)**

[I. Deseti član razvoja zadanog izraza je racionalan. II. Osmi član razvoja zadanog izraza je racionalan.

III. Šesti član razvoja zadanog izraza je racionalan. **IV.** Sedmi član razvoja zadanog izraza je racionalan.]

Zad. 2. Naći (ili ustanoviti da ne postoji) $\lim a_n$ ako je

$$a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{6n} \quad (\forall\, n \in \mathbf{N}). \qquad \textbf{(2,5 b.)}$$

[I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji . II. $+\infty$. III. $\ln 10$. **IV.** $\ln 6$.]

Zad. 3. Ispitati konvergenciju redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2})$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2})$. **(1, 5 b. + 1 b.)**

[Prvi red konvergira, a drugi divergira . **II.** Konvergiraju . II. Divergiraju. IV. Prvi red divergira, a drugi konvergira.]

Zad. 4. Zadana je (u skupu **R** realnih brojeva) nejednačina $\log_2 (x^2 - 3x + 4) < 1$.
1) Riješiti zadanu nejednačinu. 2) Je li rečenica „Rješenje zadane nejednačine je skup $(1, 2)$." istinit logički sud? Obrazložiti odgovor. **(2 b. + 0,5 b.)**

[I. $\forall\, x \in (0, 2)$. II. $\forall\, x \in (0, 1)$. III. $\forall\, x \in (2, 4)$. **IV.** $\forall\, x \in (1, 2)$. Rečenica „Rješenje zadane nejednačine je skup $(1, 2)$." jeste logički sud ali nije istinit, jer je rješenje zadane nejednačine bilo koji realan broj koji pripada intervalu $(1, 2)$ a ne taj interval.]

Zad. 5. a) Predstavite u trigonometrijskom i u eksponencijalnom obliku kompleksni broj z zadan jednakošću $z = \frac{1-3i}{1-i} - \frac{b+i}{2+i}$, gdje je i imaginarna jedinica, a b ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*. **(2 b. + 0,5 b.)**

[Rješenje: Sabiranjem dvaju razlomaka u izrazu za zadani broj z dobije se

$$z = \frac{(1-3i)\cdot(2+i)-(b+i)\cdot(1-i)}{(1-i)\cdot(2+i)},$$

odnosno nakon obavljanja operacija množenja i sabiranja, $z = \dfrac{(4-b)+i(b-6)}{(3-i)}$.

Sada množimo i brojnik i nazivnik sa konjugovano kompleksnom vrijednošću nazivnika, te se lako dobije da je $z = \dfrac{(4-b)+i(b-6)}{(3-i)} \cdot \dfrac{3+i}{3+i} = \dfrac{18-4b}{10} + i \cdot \dfrac{2b-14}{10}$. Dakle, broj z je predstavljen u obliku

$z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)$, gdje je $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{18-4b}{10}$, a $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{2b-14}{10}$.

Da bi se z predstavio u trigonometrijskom obliku ili u eksponencijalnom obliku, potrebno je izračunati njegov modul $|z|$ i glavnu vrijednost argumenta $\arg(z)$. Za modul kompleksnog broja z se dobije:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \frac{2}{10}\sqrt{5b^2 - 50b + 130}\,.$$

Glavna vrijednost argumenta kompleksnog broja je:

$$\arg(z)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2b-14}{18-4b}\right), \text{za } b<\dfrac{9}{2}, \\ \pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2b-14}{18-4b}\right), \text{za } b>7, \\ -\pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2b-14}{18-4b}\right), \text{za } \dfrac{9}{2}<b<7, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{za } b=\dfrac{9}{2}, \\ \pi, \text{za } b=7 \end{cases}$$

Za ovako izračunate arg (z) i $|z|$, pri čemu u rješenju svakog od kandidata umjesto b treba uvrstiti ukupan broj bodova koji je taj kandidat ostvario na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu,* kompleksni broj z se može napisati u trigonometrijskom obliku $z=|z|\cdot\left(\cos\left(\arg(z)\right)+i\cdot\sin\left(\arg(z)\right)\right)$ i u eksponencijalnom obliku $z=|z|\cdot e^{i\cdot\arg(z)}$.]

b) Predstaviti u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

$$z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}, \quad z_2=-\sqrt{3}+i, \quad z_3=-1-i.$$ **(1 b. + 0,5 b. + 1 b.)**

[Rješenje: 1) (Zadatak 1.4.3. u Predavanjima 3 iz IM1). *Prvi način*: $|z|=\dfrac{|1+\sqrt{3}i|}{|1-\sqrt{3}i|}=\dfrac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+3}}=1;$

$$\arg(z)=\arg(1+\sqrt{3}i)-\arg(1-\sqrt{3}i)=arctg\sqrt{3}-arctg\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Drugi način: Iz
$$z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{\left(1-\sqrt{3}i\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)}=\frac{1+2\sqrt{3}i-3}{1+3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

slijedi
$$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1, \qquad \arg(z)=\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

Za ovako izračunate $|z_1|$ i arg (z_1), kompleksni broj z_1 se može napisati u trigonometrijskom obliku
$$z_1=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

2) Iz $z_2=-\sqrt{3}+i$ slijedi da je $r=|z_2|=\sqrt{(\operatorname{Re}(z_2))^2+(\operatorname{Im}(z_2))^2}=3\sqrt{1+1}=2.$ Kako tačka kojoj odgovara kompleksni broj $z_2=-\sqrt{3}+i$ pripada drugom kvadrantu i kako je $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, to je $\arg z_2=-\dfrac{\pi}{6}+\pi=\dfrac{5\pi}{6}$, odakle je $z_2=2\,(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6})$.

3) Za kompleksni broj $z=-1-i$ imamo:
$$r=|z|=\sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2+(\operatorname{Im}(z))^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Kako tačka $z=-1-i$ pripada trećem kvadrantu i kako je $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}=\dfrac{-1}{-1}=1$, to imamo:
$$\arg z=-\pi+\operatorname{arc\,tg}1=-\frac{3\pi}{4};$$
$$Argz=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \ .$$

Za broj φ možemo uzeti bilo koji od brojeva $-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$). Tako, npr. uzimajući $k = 0$, odnosno $k = 1$, dobijemo

$$z_3 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).]$$

c) Primjenom dobijenih rezultata u b), u sljedećem izrazu izvršiti sve naznačene operacije u skupu kompleksnih brojeva:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{15}\cdot(-\sqrt{3}+i)^{22}}{(-1-i)^3},$$

gdje je i imaginarna jedinica. **(2,5 b.)**

[Rješenje: Primjenom dobijenih rezultata u b), tj. trigonometrijskih oblika (odakle se neposredno dobiju i odgovarajući eksponencijalni oblici tih brojeva, *koji se mogu koristiti umjesto trigonometrijskih oblika*!) zadanih kompleksnih brojeva, imamo :

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{15}\cdot(-\sqrt{3}+i)^{22}}{(-1-i)^3} = \frac{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{15}\cdot\left(2\,(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})\right)^{22}}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^3}$$

$$= \frac{(\cos(10\pi)+i\sin(10\pi))\cdot 2^{22}\,(\cos\frac{55\pi}{3}+i\sin\frac{55\pi}{3})}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4}\right)}$$

$$= 2^{20}\sqrt{2}\left(\cos\left(10\pi+\frac{55\pi}{3}-\frac{15\pi}{4}\right)+i\sin\left(10\pi+\frac{55\pi}{3}-\frac{15\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{20}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{295}{12}\right)+i\sin\left(\frac{295}{12}\right)\right)$$

$$= 2^{20}\sqrt{2}\left(\cos\left(12\cdot 2\pi+\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(12\cdot 2\pi+\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$= 2^{20}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\left(=2^{20}\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}\right).]$$

d) Definirati sve pojmove o kompleksnim brojevima koji se koriste u postavkama i/ili u postupcima rješavanja u a) i c) , a zatim ispitati koje (i pod kojim uslovima za m, n, a, p) od sljedećih jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}.$$ **(1,5 b. + 1 b.)**

[*Odgovor*: **1)** Dovoljno je definirati pojam kompleksnog broja,odnosno polja kompleksnih brojeva, te pojmove modula i argumenta kompleksnog broja i imaginarne jedinice.

Definicija 1. Neka su u skupu $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ uređenih parova realnih brojeva dvije operacije, koje ćemo označiti sa $+$ odnosno $\cdot$ i zvati **sabiranje** odnosno **množenje**, definirane formulama:

$$(\forall a, b, c, d \in\mathbf{R})\quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{1}$$
$$(\forall a, b, c, d \in\mathbf{R})\quad (a, b)\cdot(c, d) = (a c - b d, a d + b c). \tag{2}$$

Skup $\mathbf{R}\times\mathbf{R} = \{(x, y) : x,y \in \mathbf{R}\}$ u kome su definirane operacije $+$ i $\cdot$ kao u (1) i (2.) zove se **skup kompleksnih brojeva** i, najčešće, označava sa **C**, a njegovi elementi zovu se **kompleksni brojevi**. Njih ćemo označavati jednim slovom: z, w; $z_1, z_2, \dots$.

Kompleksne brojeve kod kojih je prva komponenta jednaka 0, tj. elemente $(0, y)\in\mathbf{C}$ ($y\neq 0$) zovemo **čisto imaginarnim brojevima**. Specijalno, element $(0,1)\in\mathbf{C}$ zovemo, po tradiciji, **imaginarna jedinica** i označavamo sa i (ili j), tj. po definiciji je

$$(0, 1) = i.$$

Definicija 2. Realan nenegativan broj $\sqrt{x^2+y^2}$ zove se *apsolutna vrijednost* ili *modul* kompleksnog broja $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$ i označava se sa $|z|$, tj.

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Specijalno, ako je z realan, tj. ako je $y = 0$, onda je $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Definicija 3. Neka je $M(x, y)$ tačka koja predstavlja kompleksni broj $z = x + iy$, $(z \neq 0)$. Svaki mjerni broj φ orijentisanog ugla $(x, \overrightarrow{OM})$ koji čini radijus-vektor $\overrightarrow{OM}$ sa osom Ox, tj. svaki realan broj φ određen pomoću

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

zove se **argument** (ili *arkus* ili *amplituda*) broja z, i označava se sa $\operatorname{Arg} z$ (iki $\operatorname{Arc} z$ ili $\operatorname{Amp} z$). Argument φ broja z koji zadovoljava uslov $-\pi < \varphi \leq \pi$ zove se **glavna vrijednost argumenta** broja z i označava se sa $\arg z$ (ili $\operatorname{arc} z$ ili $\operatorname{amp} z$).

Uglu $(x, \overrightarrow{OM})$ pripada tačno jedan mjerni broj φ_0 koji se nalazi u razmaku $(-\pi, \pi]$, dok se svi ostali mjerni brojevi φ ugla $(x, \overrightarrow{OM})$ dobiju po formuli

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \quad (k\in\mathbf{Z}).$$

Dakle, broj $\varphi = \operatorname{Arg} z$ je određen samo za $z \neq 0 = 0 + i\,0$ i to samo do aditivne konstante $2k\pi$, dok je $\arg z$ potpuno određen brojem z $(z\neq 0)$ i važi

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad (k\in\mathbf{Z}),$$

tj. simbol $\operatorname{Arg} z$ ima beskonačno mnogo vrijednosti.

Za glavnu vrijednost argumenta $\arg z$ može se uzeti, umjesto uslova $-\pi < \arg z \leq \pi$, uslov $0 \leq \arg z < 2\pi$, budući da u tom razmaku svakom uglu $(x, \overrightarrow{OM})$ odgovara tačno jedna određena vrijednost.

U slučaju $z = 0$, imamo da je $r = |z| = 0$, a ugao $(x, \overrightarrow{OM})$ ne postoji. Međutim, kako se može napisati $z = 0\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je φ potpuno prizvoljno, to se i za broj 0 može napisati trigonometrijski oblik $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Argument broja 0 je *neodređen*.

2) Nadalje, treba zaključiti da neke od jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva, samo ako se relacija jednakosti izraza (budući da $\sqrt[n]{a}$, za $a\neq 0$, ima n vrijednosti u **C**) razumije tako da je svaka vrijednost s jedne strane jednaka jednoj vrijednosti s druge strane i obratno, tj. da se *skupovi vrijednosti* s jedne i druge strane jednakosti podudaraju. U tom smislu, između ostalih važnih jednakosti, zaključiti da važe i prve dvije zadane jednakosti:

1) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, samo ako su n i m relativno prosti (u ovom slučaju se ta dvostruka jednakost tako definira);

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, (važi uvijek, po samoj definiciji),

dok druge dvije od zadanih jednakosti $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(n\in\mathbf{N}\setminus\{1\})$ i $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ $(p, n\in\mathbf{N},\ p\neq 1)$ ne važe (jer kod prve jednakosti lijeva strana ima n vrijednosti, a desna strana jednu; dok kod druge jednakosti lijeva strana ima n, a desna pn vrijednosti). **]**

IME I PREZIME STUDENTA : ....

Z A D A C I - Var. B :
za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2011.

Zad.1. U razvoju stepena $(x\sqrt{x}+x^{-4})^n$ po *Newtonovoj binomnoj formuli* koeficijent trećeg člana je za 44 veći od koeficijenta drugog člana. Naći član T_{k+1} toga razvoja koji ne sadrži x

[I. $T_6=\binom{33}{3}$. II. $T_5=\binom{11}{4}$. **III.** $T_4=\binom{11}{3}$. IV. $T_3=\binom{3}{2}$.] **(2,5 b.)**

Zad. 2. Izračunati sve vrijednosti u skupu **C** kompleksnih brojeva korijena

$$\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}},$$

gdje je i imaginarna jedinica.

[I. $\pm 2(\sqrt{3}+i)$, $\pm 2(-1+i\sqrt{3})$. II. $\pm 2(\sqrt{3}+i)$, $\pm(-1+i\sqrt{3})$.
III. $\pm(\sqrt{3}+i)$, $\pm 2(-1+i\sqrt{3})$. **IV.** $\pm(\sqrt{3}+i)$, $\pm(-1+i\sqrt{3})$.] **(2,5 b.)**

Zad. 3. Naći (ili ustanoviti da ne postoji) $\lim a_n$ ako je

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{10n} \quad (\forall n\in\mathbf{N}).$$

[I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji . II. 0. III. $+\infty$. **IV.** ln 10.] **(2,5 b.)**

Zad. 4. Odrediti (prirodni) domen, ispitati periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odrediti osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g jedne realne promjenljive zadanih formulama

$$f(x)=3\cos(4x+6)+\cos^4 x+\sin^4 x+\frac{1}{\ln\sin^2 x}, \quad g(x)=(\mathrm{tg}|x|)^{1+2p},$$

gdje je p ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*. **(1 b. + 1,5 b.)**

[**I.** $D(f)=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\cdot\frac{\pi}{2};k\in\mathbf{Z}\right\}$, $T(f)=\pi$; $D(g)=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, g nije periodična.

II. $D(f)=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\cdot\frac{\pi}{2};k\in\mathbf{Z}\right\}$, $T(f)=\pi$; $D(g)=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $T(g)=2\pi$.

III. $D(f)=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbf{Z}\right\}$, $T(f)=2\pi$; $D(g)=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq(2k+1)\frac{\pi}{4};\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $T(g)=\pi$.

IV. $D(f)=\left\{x\mid x\neq k\pi,\ x\neq\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbf{Z}\right\}$, $T(f)=2\pi$; $D(g)=\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, g nije periodična.]

Zad. 5. a) Dokazati da za svaki prirodni broj k vrijedi $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{k}{3k+1}$. **(2,5 b.)**

[*Uputa*: Zadatak 5. u Domaćoj zadaći 1 u akademskoj 2011/2012. godini. /Primijeniti metod matematičke indukcije ili metod rastavljanja na parcijalne razlomke!/]

b) Primjenom rezultata u a) dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ konvergira i naći mu sumu. **(2 b. + 0,5 b.)**

[*Rješenje:* Na osnovu rezultata u a) i $\lim\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\lim\frac{k}{3k+1}=\frac{1}{3}$, zaključujemo da niz parcijalnih suma zadanog reda konvergira ka 1/3, pa prema definiciji pojmova konvergencije i sume reda slijedi da zadani red konvergira i suma mu je 1/3.]

c) Ispitati konvergenciju redova $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2})$, $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2})$. **(1,5 b. + 1b.)**

[*Rješenje*: Imamo da je

$$\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[3]{n^2+1}+\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[3]{n^2+1}+\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^2} \sim \frac{1}{3n^{\frac{4}{3}}},$$

kad $n\to+\infty$, pa zadani red $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2})$ konvergira (na osnovu poredbenog kriterija konvergencije za pozitivne redove) jer je ekvikonvergentan s hiperharmonijskim redom $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$, gdje je $\alpha=\frac{4}{3}$, koji je konvergentan budući da je $\alpha>1$. Nadalje, iz asimptotske relacije arc tg $\alpha_n\sim\alpha_n$ ako $\alpha_n\to 0$ ($n\to+\infty$), slijedi i da red $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2})$ konvergira. (Umjesto činjenice arc tg $\alpha_n\sim\alpha_n$ ako $\alpha_n\to 0$ ($n\to+\infty$) i primjene drugog poredbenog kriterija konvergencije za pozitivne redove , može se koristiti i nejednakost arc tg $\alpha_n\leq\alpha_n$ (za sve nenegativne realne brojeve α_n), pa zaključak izvesti na osnovu prvog poredbenog kriterija konvergencije za pozitivne redove.)]

d) Definirati sve pojmove o (beskonačnim) redovima koji se koriste u postavkama i/ili u postupcima rješavanja u b) i c), a zatim formulisati *D'Alembertov kriterijum*, *Cauchyjev kriterijum korijena* i kriterijum konvergencije koji se bude koristio u c). **(1 b. +1,5 b.)**

[*Odgovor*: Dovoljno je da se definiraju pojmovi beskonačnog reda realnih brojeva, konvergencije reda i pozitivnog reda, te formulišu **Stav 2.6.2, Stav 2.6.3. i Teorema 2.6.1.** ili (zavisno od toga koja je od tih teorema primijenjena u ispitivanju konvergencije drugog reda u c)) **Teorema 2.6.2.** **Predavanjima 4 iz Inženjerske matematike 1, tj. dovoljno je napisati sljedeće:**

Definicija 1. Neka je dat niz (a_n) u **R** i neka je $s_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$ za svaki $k\in\mathbf{N}$. **Beskonačni red** ili, kraće, **red** u **R** je uređen par $((a_n),(s_k))$ koji se sastoji od dva niza (a_n) , (s_k) ($a_n, s_k\in\mathbf{R}$, odnosno, $a_n, s_k\in X$); a_n su **članovi reda**, a s_k ($k\in\mathbf{N}$) k – te **parcijalne sume reda**. Niz (s_k) nazivamo **nizom parcijalnih suma** datog reda. Sam red se kraće označava

$$\sum_{n\geq 1}a_n \quad \text{ili} \quad \sum_{n}a_n \quad \text{ili} \quad \sum a_n\,.$$

Za a_n se kaže da je n-ti član reda $\sum a_n$, a ako je specificirana zavisnost a_n od n, onda se a_n naziva *opšti član* reda $\sum a_n$.

Definicija 2. Neka je (a_n) niz u **R**. Kažemo da je niz (a_n) **sumabilan** u **R** ili da je red $\sum a_n$ **konvergentan** u **R** ako je niz parcijalnih suma (s_k) reda $\sum a_n$ konvergentan u **R**. Limes $s:=\lim_{k\to\infty}s_k$ naziva se **suma reda** $\sum a_n$ i označava se sa

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Ako red $\sum a_n$ nije konvergentan, kaže se da je **divergentan**.

Stav 1. (**Dalamberov kriterijum**).

1° (*Jača forma kriterija*). Ako za pozitivni red $\sum a_n$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ i $q \in \mathbf{R}$, tako da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ za $n \geq n_0$, onda on konvergira. Ako pak postoji $n_0' \in \mathbf{N}$, tako da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ za $n \geq n_0'$, onda pozitivni red $\sum a_n$ divergira.

2° (*Slabija / granična forma kriterija*). Neka za članove pozitivnog reda $\sum a_n$ postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} := l$. Tada za $l < 1$ red $\sum a_n$ konvergira, a za $l > 1$ on divergira. (Za $l = 1$ ovaj kriterijum je neodlučiv.)

3° (*Najjača forma kriterija*). Ako je $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, onda pozitivni red $\sum a_n$ konvergira, a ako je

$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pozitivni red $\sum a_n$ divergira.

Stav 2. (**Košijev korijeni kriterijum**).

1° Ako za pozitivni red $\sum a_n$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ i $q \in \mathbf{R}$, tako da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ za $n \geq n_0$, onda on konvergira. Ako postoji $n_0' \in \mathbf{N}$ tako da je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za $n \geq n_0'$, onda pozitivni red $\sum a_n$ divergira .

2° Neka postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} := l$. Tada za $l < 1$ pozitivni red $\sum a_n$ konvergira, a za $l > 1$ on divergira.

3° Ako za pozitivni red $\sum a_n$ vrijedi $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} := l$, onda $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergira, a $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ (*najopštiji oblik Cauchyjevog kriterijuma korijena*).

Teorema 1. Pretpostavimo da postoji prirodni broj n_0, takav da za članove pozitivnih redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$ važe nejednakosti $a_n \leq b_n$ za sve $n \geq n_0$ (ili nejednakosti $a_n \leq k \cdot b_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ i za svaki $k \in \mathbf{R}$). Tada iz konvergencije reda $\sum b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum a_n$ a iz divergencije reda $\sum a_n$ slijedi divergencija reda $\sum b_n$.

(U ovom slučaju kažemo da je red $\sum b_n$ **majoranta** reda $\sum a_n$, a da je red $\sum a_n$ **minoranta** reda $\sum b_n$.)

ili

Teorema 2. Neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 \leq K \leq \infty$, gdje su a_n i b_n članovi pozitivnih redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$. Ako je $K < \infty$, onda iz konvergencije reda $\sum b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum a_n$. Ako je $K > 0$, iz divergencije reda $\sum b_n$ slijedi divergencija reda $\sum a_n$.

(Ako je $a_n = O(b_n)$ i $b_n = O(a_n)$ $(n \to +\infty)$ ili $a_n \sim b_n$ $(n \to +\infty)$ ili ako postoji $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) := K$, $0 < K < +\infty$, onda su redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ ekvikonvergentni.)]

IME I PREZIME STUDENTA : ....

N a p o m e n a : Upute, rješenja, rezultati i odgovori za ove ispitne zadatke ili za njihove analogone i neznatne modifikacije mogu se vidjeti u preporučenoj literaturi i/ili u materijalima za Predavanja iz *Inženjerske matematike* 1 **u akademskoj 2011/2012. godini** (http://c2.etf.unsa.ba/), **te u Pribilješkama sa tutorijala iz IM1.**
