

Z A D A C I (Postavke, upute i rezultati - odgovori), Grupe A i B
S A
POPRAVNOG (PARCIJALNOG /INTEGRALNOG) ISPITA IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1 (IM1)
Akademska 2011 - 2012. godina
Sarajevo, 27. 01. 2012.

IME I PREZIME STUDENTA :
BROJ INDEKSA :
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ :
NASTAVNA GRUPA (BROJ) :

UPUTSTVO:

1. Za svaki od prva četiri zadatka (Prvog/Drugog dijela) su napisana četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je navedeno odgovarajuće obrazloženje boduje se prema naznačenom bodovanju uz taj zadatak, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po 0 bodova.

2. Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi 10 bodova (prema naznačenom bodovanju uz pojedine dijelove tog zadatka). Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je 0,5 bodova).

3. Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobivenih za ovaj ispit. Također nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.

Rezultati popravnog ispita iz IM1:

Prvi dio (I):

Zad. 1.
Zad. 2.
Zad. 3.
Zad. 4.
Zad. 5.

Drugi dio (II):

Zad. 1.
Zad. 2.
Zad. 3.
Zad. 4.
Zad. 5.

Ukupan broj ostvarenih bodova (I):

Ukupan broj ostvarenih bodova (II):

Vlastoručni potpis studenta:

Predmetni nastavnik:

V. Prof. Dr. Sci. Huse Fatkić

Z A D A C I (Postavke, upute i rezultati - odgovori) - Var. A :
sa popravnog prvog parcijalnog (prvog dijela integr. ispita) iz IM1, 27. 01. 2012.

Zad. 1. Naći sve racionalne sabirke u razvoju izraza $(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x})^{10}$ po *Newtonovoj binomnoj formuli*.

[I. Osmi član razvoja zadanog izraza je racionalan. II. Sedmi član razvoja zadanog izraza je racionalan.

III. Šesti član razvoja zadanog izraza je racionalan. IV. Deveti član razvoja zadanog izraza je racionalan.]

Zad. 2. Odrediti (prirodni) domen, ispitati periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odrediti osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g jedne realne promjenljive zanih formulama

$$f(x) = 3 \cos(4x + 6) + \cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{\ln \sin^2 x}, \quad g(x) = 10x + (2 \operatorname{tg} |x|)^{1+2p},$$

gdje je p ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*.

[I. $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = \pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, g$ nije periodična. ($p \in \mathbf{N}_0$)

II. $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = \pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(g) = 2\pi.$

III. $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = 2\pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(g) = \pi.$

IV. $D(f) = \left\{ x \mid x \neq k\pi, x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = 2\pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, g$ nije periodična.]

Zad. 3. Za niz (a_n) , $a_n := \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}} + \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-n-2}}$, gdje je $n \in (\mathbf{N} \setminus \{1\})$, nađite $L_1 = \lim$

a_n i $L_2 = \lim (a_n)^n$.

[I. $L_1 = 1, L_2 = e^2$. II. $L_1 = 2, L_2 = e^2$. III. $L_1 = 1, L_2 = e$. IV. $L_1 = 2, L_2 = e$.

Zad. 4. Ispitati konvergenciju redova $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2})$.

[Prvi red konvergira, a drugi divergira. II. Konvergiraju. II. Divergiraju. IV. Prvi red divergira, a drugi konvergira.]

Zad. 5. a) Predstavite u trigonometrijskom i u eksponencijalnom obliku kompleksni broj z : $z = \frac{1-3i}{1-i} - \frac{b+i}{2+i}$,

gdje je i imaginarna jedinica, a b ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*.

b) Predstavite u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}, \quad z_2 = -\sqrt{3}+i, \quad z_3 = -1-i.$$

c) U sljedećem izrazu (primjenom b) izvršite sve naznačene operacije u skupu kompleksnih brojeva:

$$\frac{(-1-i)^3}{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{15}} \cdot (-\sqrt{3}+i)^{22},$$

gdje je i imaginarna jedinica.

d) Definirati sve pojmove o kompleksnim brojevima koji se koriste u postavkama i/ili u postupcima rješavanja u a) i c), a zatim ispitati koje (i pod kojim uslovima za m, n, a, p) od sljedećih jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p}.$$

IME I PREZIME STUDENTA :

Rješenje Zad. 5: a) Množenjem brojnika i nazivnika s konjugovano kompleksnom vrijednošću nazivnika, dobijemo da je $z = \frac{(4-b)+i(b-6)}{(3-i)} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{9-2b}{5} + i \cdot \frac{b-7}{5}$, tj. dobijemo da je zadani broj z predstavljen u obliku $z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)$, gdje je $\operatorname{Re}(z) = \frac{9-2b}{5}$, a $\operatorname{Im}(z) = \frac{b-7}{5}$, pa su trigonometrički i eksponencijalni oblik zadani sa $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$, $z = |z|e^{i \cdot \arg(z)}$, gdje je

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \frac{1}{5} \sqrt{5b^2 - 50b + 130},$$

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b-7}{9-2b}\right), & \text{za } b < \frac{9}{2}, \\ \pi + \arctg\left(\frac{b-7}{9-2b}\right), & \text{za } b > 7, \\ -\pi + \arctg\left(\frac{b-7}{9-2b}\right), & \text{za } \frac{9}{2} < b < 7, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{za } b = \frac{9}{2}, \\ \pi, & \text{za } b = 7. \end{cases}$$

b) - d) Uputa. Vidjeti [Zadaci (postavke i rezultati (ili rješenja odgovori, upute)) sa Prvog parcijalnog ispita održanog 05.11.2011. godine] (<http://c2.etf.unsa.ba/course/view.php?id=3>).

Z A D A C I (Postavke, upute i rezultati - odgovori) - Var. B :
za popravni prvog parcijalnog (prvog dijela integr. ispita) iz IM1, 27. 01. 2012.

Zad.1. U razvoju stepena $(x\sqrt{x} + x^{-4})^n$ po *Newtonovoj binomnoj formuli* koeficijent trećeg člana je za 44 veći od koeficijenta drugog člana. Naći član T_{k+1} toga razvoja koji ne sadrži x .

$$[\text{I. } T_4 = \binom{11}{3}, \quad \text{II. } T_5 = \binom{11}{4}, \quad \text{III. } T_6 = \binom{33}{3}, \quad \text{IV. } T_3 = \binom{3}{2}.]$$

Zad. 2. U skupu \mathbf{C} kompleksnih brojeva zadana je jednačina $4 \cdot (z - |z|^2) + \bar{z} = 1$. (F)

Ispitati koji je od sljedećih logičkih iskaza tačan:

- 1) Jednačina (F) ima beskonačno mnogo rješenja.
- 2) Jednačina (F) ima tačno dva rješenja.
- 3) Rješenja jednačine (F) imaju imaginarne dijelove različite od nule.
- 4) Rješenja jednačine (F) imaju negativne realne dijelove.

[I. 1). II. 2). III. 3). IV. 4).]

Zad. 3. Neka je (a_n) niz u \mathbf{R} , koji divergira ka $-\infty$, a (b_n) niz u \mathbf{R} čiji je opšti član $b_n := \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \cos(n^2)$.

Tada:

[I. Niz (b_n) konvergira ka broju 1. II. Niz (b_n) oscilira. III. Niz (b_n) je infinitezimala. IV. Niz (b_n) je neograničen.]

Zad. 4. Odrediti (prirodni) domen, ispitati periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odrediti osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f , g jedne realne promjenljive zadanih formulama

$$f(x) = 3 \cos(4x + 6) + \cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{\ln \sin^2 x}, \quad g(x) = 10x + (\operatorname{tg} |x|)^{1+2p},$$

gdje je p ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*.

[I. $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = \pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}$, g nije periodična. ($p \in \mathbf{N}_0$)

II. $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = \pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(g) = 2\pi$.

III. $D(f) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = 2\pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(g) = \pi$.

IV. $D(f) = \left\{ x \mid x \neq k\pi, x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}, T(f) = 2\pi; D(g) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}$, g nije periodična.]

Zad. 5. a) Dokazati da za svaki prirodni broj k vrijedi $\sum_{n=1}^k \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{k}{3k+1}$.

b) Primjenom rezultata u a) dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ konvergira i naći mu sumu.

c) Ispitati konvergenciju redova $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2})$.

d) Definirati sve pojmove o (beskonačnim) redovima koji se koriste u postavkama i/ili u postupcima rješavanja u b) i c), a zatim formulisati *D'Alembertov kriterijum*, *Cauchyjev kriterijum korijena* i kriterijum konvergencije koji se bude koristio u c).

IME I PREZIME STUDENTA :

Rješenje Zad. 5: *Uputa.* Vidjeti [Zadaci (postavke i rezultati (ili rješenja odgovori, upute)) sa Prvog parcijalnog ispita održanog 05.11.2011. godine] (<http://c2.etf.unsa.ba/course/view.php?id=3>).

Z A D A C I (Postavke, upute i rezultati - odgovori) Grupa A:
sa popravnog drugog parcijalnog (drugog dijela integr.) ispita iz predmeta
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 27.01.2012.

Zad. 1. Primjenom logaritamskog izvoda izračunajte izvod $f'(x)$ ako je: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$; **(2,5 b.)**

[I. $-\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x} \right); f'(-1) = +\infty$. II. $\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x} \right); f'(-1) = +\infty$.
 III. $-\frac{1}{2} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x} \right); f'(-1) = +\infty$. IV. $-\frac{1}{2} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x} \right); f'(-1) = +\infty$.]

Zad. 2. Definirajte pojmove lokalnog minimuma, stacionarne tačke i tangente na grafik realne funkcije jedne realne promjenljive, a zatim objasnite postupak određivanja najmanje vrijednosti takve funkcije, pa primjenom tog postupka odredite najmanju površinu trougla ABC čiji je vrh A tačka $(-1,0)$, vrh B je tačka dodira tangente krive zadane jednačinom $y\sqrt{x} = 1$, a vrh C je tačka presjeka te tangente s osom Ox .

[I. $2\sqrt{3}$. II. $\sqrt{6}$. III. $\sqrt{3}$. IV. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.] **(1 b.+1 b.+1 b.)**

Zad. 3. Definirajte pojmove striktno primitivne funkcije, primitivne funkcije i neodređenog integrala, a zatim

nađite integral $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$. **(0,5 b.+ 0,5 + 0,5 b. + 2 b.)**

[I. $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| - x + C$. II. $2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C$. III. $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C$. IV. $2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| - x + C$.]

Zad. 4. Izračunati određeni integral $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$ koristeći smjenu $t = x + \frac{1}{x}$. **(2 b.)**

[I. 0. II. $\frac{5}{2}e^{\frac{5}{2}}$. III. $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. IV. $\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$.]

Zad. 5. Realne funkcije f_1, f_2, f_3 jedne realne promjenljive zadane su formulama:

$$f_1(x) = \frac{x}{x^3 - 1 - b}, \quad f_2(x) = \sqrt{x^3 + (1+b)x^2}, \quad f_3(x) = \frac{3 - \cos(x) \cdot \operatorname{cosec}(x)}{(1+x^2) \operatorname{ctg}(x)},$$

gdje je b ukupan broj bodova koji ste ostvarili na 1. redovnom parcijalnom ispitu iz IM1 koji ste polagali (prvi put) u toku svog studija na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*.

a) Odredite (prirodne) domene zadanih funkcija f_1, f_2, f_3 , a zatim odredite i klasificirajte eventualne njihove tačke prekida i singulariteta. **(1,5 b. + 0,5 b.)**

b) Izračunajte (izvode) $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x)$ i diskutujte njihovu egzistenciju, a zatim odredite eventualne tačke lokalnog ekstrema zadanih funkcija f_1, f_2 , kao i eventualne prelomne i povratne tačke njihovih grafika.

(2,5 b. + 1,5 b. + 0,5 b.)

c) Primjenom diferencijalnog računa ispitajte i ostala osnovna svojstva zadane funkcije f_1 , pa na osnovu dobijenih rezultata /uključujući i rezultate u a) i b)/, nacrtajte njen grafik. **(3,5 b.)**

IME I PREZIME STUDENTA :

Rješenje Zad. 5: *Uputa.* Vidjeti [Zadaci (postavke i rezultati - odgovori) sa 2. parcijalnog ispita održanog 8.1.2012. i Rješenje drugog parcijalnog ispita održanog 8.1.2012. godine] (<http://c2.etf.unsa.ba/course/view.php?id=3>).

Z A D A C I (Postavke, upute i rezultati - odgovori) Grupa B:
sa popravnog drugog parcijalnog (drugog dijela integr.) ispita iz predmeta
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 27.01.2012.

Zad. 1. Primjenom *Maclaurin*ovog razvoja izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x \cdot \sin(\sin x))$.

[I. $-\infty$. II. 0. III. 1. IV. $+\infty$.] **(2,5 b.)**

Zad. 2. Definirajte pojam diferencijala realne funkcije jedne realne promjenljive i formulišite *teoremu o potrebnom i dovoljnom uslovu diferencijabilnosti* realne funkcije jedne realne promjenljive, a zatim primjenom diferencijala riješite sljedeći zadatak: Dužina s telegrafskog voda je $s := 2b \left(1 + \frac{2f^2}{3b^2} \right)$, gdje je $2b$ rastojanje između oslonaca voda, a f najveći ugib. Za koliko se povećava ugib f , kada se dužina voda usljed zagrijavanja poveća za ds (gdje je ds diferencijal funkcije s) ? **(0,5 b.+1 b. +1,5 b.)**

[I. $df = \frac{3b ds}{8f} + ds$. II. $df = \frac{3b ds}{8f} + 2 ds$. III. $df = \frac{3b ds}{8f} + 3 ds$. IV. $df = \frac{3b ds}{8f}$.]

Zad. 3. Definirajte sljedeće pojmove: striktno primitivna funkcija, primitivna funkcija i neodređeni integral, a zatim nađite integral $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$. **(0,5 b.+ 0,5 + 0,5 b. + 2 b.)**

[I. $\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$. II. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$. III. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$. IV. $\frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} + C$.]

Zad. 4. Izračunati određeni integral $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$ koristeći smjenu $t = x + \frac{1}{x}$. **(2 b.)**

[I. 0. II. $\frac{5}{2} e^{\frac{5}{2}}$. III. $\frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}$. IV. $\frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}}$.]

Zad. 5. Realne funkcije f_1, f_2, f_3 jedne realne promjenljive zadane su formulama:

$$f_1(x) = \frac{x}{x^3 - 1 - b}, \quad f_2(x) = \sqrt{x^3 - (1+b)x^2}, \quad f_3(x) = \frac{\sin^2(x) + \cos(x)}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \sec(x)},$$

gdje je b ukupan broj bodova koji ste ostvarili na 1. redovnom parcijalnom ispitu iz IM1 koji ste polagali (prvi put) u toku svog studija na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu*.

a) Odredite (prirodne) domene zadanih funkcija f_1, f_2, f_3 , a zatim odredite i klasificirajte eventualne njihove tačke prekida i singulariteta. **(1,5 b. + 0,5 b.)**

b) Izračunajte (izvode) $f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x)$ i diskutujte njihovu egzistenciju, a zatim odredite eventualne tačke lokalnog ekstrema zadanih funkcija f_1, f_2 , kao i eventualne prelomne i povratne tačke njihovih grafika. **(2,5 b. + 1,5 b. + 0,5 b.)**

c) Primjenom diferencijalnog računa ispitajte i ostala osnovna svojstva zadane funkcije f_1 , pa na osnovu dobijenih rezultata /uključujući i rezultate u a) i b)/, nacrtajte njen grafik. **(3,5 b.)**

IME I PREZIME STUDENTA :

Rješenje Zad. 5: *Uputa.* Vidjeti [Zadaci (postavke i rezultati - odgovori) sa 2. parcijalnog ispita održanog 8.1.2012. i Rješenje drugog parcijalnog ispita održanog 8.1.2012. godine] (<http://c2.etf.unsa.ba/course/view.php?id=3>).