Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Z A D A C I - Grupe A i B
(POSTAVKE I REZULTATI ZADATAKA - ODGOVORI)
SA POPRAVNOG (PARCIJALNIH I INTEGRALNOG) ISPITA IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1 (IM1)

Akademska **2013 - 2014. godina**
Sarajevo, 05. 02. 2014.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. Za svaki od prva četiri zadatka (za oba dijela - parc. ispita iz IM1) su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje boduje se sa po 2,5 boda/poena (prema naznačenom bodovanju uz zadatak) , a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po 0 bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.

2. Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi 10 bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je 0,5 bodova).

3. Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.

Rezultati popravnog (I / II parc. ili integralnog) ispita iz IM1:

Zad. 1.	....	....	Zad. 6.	....	....
Zad. 2.	....	....	Zad. 7.	....	....
Zad. 3.	....	......	Zad. 8.	.....	....
Zad. 4.	....	....	Zad. 9.	....	....
Zad. 5.		......	Zad. 10.		....

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:
____

Predmetni nastavnik:
____
V. Prof. dr. sc. Huse Fatkić

Z A D A C I - Grupa A:

za popravni prvog parcijalnog / (prvog dijela integralnog) ispita iz predmeta
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 05. 02. 2014.

Zad. 1. Skicirajte grafik realne funkcije f jedne realne varijable zadane formulom $f(x)=x^{7/4}+x^{-1/8}$, a zatim nađite sve racionalne članove u razvoju $(f(x))^n$ po *Newtonovoj binomnoj formuli* ako vrijedi da je koeficijent trećeg člana u razvoju za 20 veći od koeficijenta drugog člana. (1 +1,5 [b.])

[**I.** $n=8$, 1. član. II. $n=9$, 1. i 5. član . III. $n=9$, 5. i 9. član. IV. $n=8$, 1. i 8. član.]

Zad. 2. Naći sljedeću graničnu vrijednost (niza kompleksnih brojeva):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right].$$

Pri tome definirati sve pojmove o nizovima, limesima i kompleksnim brojevima koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka. (1 + 1,5 [b.])

[I. Ne postoji. **II.** $\frac{1}{2}i$. III. $-\frac{1}{2}i$. IV. ∞.]

(**Uputa.** Zadatak 2.10.2. na str. 93 u univerzitet. udžbeniku [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zad. 3. Realne funkcije f, g jedne realne varijable x zadane su formulama

$$f(x)=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-t^2}},\quad g(x)=\sqrt{x-t}+\sqrt{x+t}.$$

Odredite njihove (prirodne) domene u zavisnosti od realnog parametra t i ispitajte jednakost zadanih funkcija f, g, a zatim za $t=2$ ustanovite da ima smisla pa izračunajte $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$. (2,5 [b.])

[I. 0. II. 3. III. 2. **IV.** 1.]

Zad. 4. Izračunajte vrijednost beskonačnog proizvoda $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$, gdje je

$$a_1=1,\, a_{n+1}=(n+1)(1+a_n),\forall(n\in\mathbf{N}).$$ (2,5 [b.])

[I. 1 + e . **II.** e . III. ln (1+ e). IV. e - 1.]

Zad. 5. Odredite prirodni domen, Dom (g_a), za svaku od funkcija g_a iz familije

$$(g_a : a\in\{-2,-1\}\cup(0,+\infty)),\; g_a(x)=\log_a\left(x+\sqrt{1-9x^2}\right),$$

realnih funkcija jedne realne promjenljive, a zatim za funkciju $f(x):=g_2(x)$ odredite eventualne presjeke njenog grafika sa osama Ox i Oy, skup $\{x\in \mathrm{Dom}(f) : f(x)\ge 0\}$, eventualne horizontalne i vertikalne asimptote njenog grafika, granične vrijednosti $\lim\limits_{x\to 0\pm}\frac{f(x)}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}}$ i sliku (rang) Im (f), a zatim (bez primjene diferencijalnog računa) skicirajte grafike (njegove moguće dijelove) funkcija $f, |f|$.

Pri tome definirati sve pojmove o funkcijama i limesima koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka. (7+ 3 [b.])

....

IME I PREZIME STUDENTA : ....

Z A D A C I - Grupa B:
za popravni prvog parcijalnog / (prvog dijela integralnog) ispita iz predmeta
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 05. 02. 2014.

Zad. 1. Skicirajte grafik realne funkcije f jedne realne varijable zadane formulom $f(x) = x^{7/4} + x^{-1/2}$, a zatim nađite sve racionalne članove u razvoju $(f(x))^n$ po *Newtonovoj binomnoj formuli* ako vrijedi da je koeficijent trećeg člana u razvoju za 27 veći od koeficijenta drugog člana. (1 + 1,5 [b.])

[I. n = 9, 1. i 5. član . II. n = 8, 1. i 5. član. **III.** n = 9, 4. i 8. član. IV. n = 8,. 1. i 8. član.]

.

Zad. 2. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, dokazati da je $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |a|$, gdje je (z_n) niz kompleksnih brojeva. Da li je i obrnuto tačno? Naći $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n|$ ako je $z_n := \dfrac{n-1}{n+1} e^{ni}$. (0,5+ 0,5 + 1,5 [b.])

[I. Ne postoji. II. $\frac{1}{2}i$. III. $-\frac{1}{2}i$. **IV.** 1.]

(**Uputa.** Zadatak 2.10.1. na str. 93 u univerzitet. udžbeniku [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zad. 3. Realne funkcije *f*, *g* jedne realne varijable *x* zadane su formulama

$$f(x) = \frac{x-t}{x+t+2\sqrt{tx}}, \quad g(x) = \frac{x+t-2\sqrt{tx}}{x-t}.$$

Oredite njihove (prirodne) domene u zavisnosti od realnog parametra t i ispitajte jednakost zadanih funkcija *f*, *g* , a zatim za t =1 ustanovite da ima smisla pa izračunajte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. (2,5 [b.])

[I. 0. **II.** 1. III. 2. IV. 3.]

Zad. 4. Nađite (ili ustanovite da ne postoji) $\lim \dfrac{a_n}{n!}$ ako je $a_1 = 1$, $a_{k+1} = (k+1)(1+a_k)$, $\forall(k \in \mathbf{N})$.

[I. 1 + e . **II.** e . III. ln (1+ e). IV. e - 1.] (2,5 [b.])

Zad. 5. . Odredite prirodni domen, Dom (g_a), za svaku od funkcija g_a iz familije

$$(g_a : a \in \{-2, -1\} \cup (0, +\infty)), \; g_a(x) = \log_a (x + \sqrt{1-9x^2}),$$

realnih funkcija jedne realne promjenljive, a zatim za funkciju $f(x) := g_{\frac{1}{2}}(x)$ odredite eventualne presjeke njenog grafika sa osama *Ox* i *Oy*, skup $\{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \geq 0\}$, eventualne horizontalne i vertikalne asimptote njenog grafika, granične vrijednosti $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{f(x)}{|x| - 1 + \sqrt{1-9x^2}}$ i sliku (rang) Im (*f*), a zatim (bez primjene diferencijalnog računa) skicirajte grafike (njegove moguće dijelove) funkcija f, $|f|$.

Pri tome definirati sve pojmove o funkcijama i limesima koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka. (7+ 3 [b.])

....

IME I PREZIME STUDENTA : ....

Z A D A C I - Grupa A:
za popravni drugog parcijalnog / (drugog dijela integralnog) ispita iz predmeta
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 05. 02. 2014.

Zadatak 1. Definirajte pojmove izvoda i logaritamskog izvoda realne funkcije jedne realne promjenljive, a zatim objasnite postupak određivanja izvoda takve funkcije primjenom njenog logaritamskog izvoda, pa primjenom tog postupka nađite izvod $f'(x)$ ako je $f(x) = \dfrac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{(x^2+2x-3)^2}$. (1 b. + 0,5 b. + 1 b.)

[I. $-3f(x)\cdot\left[\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]$. II. $f(x)\cdot\left[\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]$.

III. $f(x)\cdot\left[-3-\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}\right]$. IV. $-3-\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{4(x+1)}{x^2+2x-3}$.]

Zadatak 2. Izračunati integral $\int 2xe^x \sin x\,\mathrm{d}x$. (2,5 [b.])

[**I.** $e^x[x(\sin x - \cos x) + \cos x] + C$. II. $e^x[x(\sin x - \cos x) - \cos x] + C$.

III. $e^x[x(\sin x + \cos x) - \cos x] + C$. IV. $e^x[x(\sin x + \cos x) + \cos x] + C$.]

Zadatak 3. a) Definirajte pojmove upisanog i opisanog mnogougla u ravni lik ograničen krivom, te pojam površine/mjere ravnog lika, a zatim izvedite formulu za površinu lika (figure) u ravni *Oxy*, ograničene dijelovima *x*-ose, pravih $x = a$ i $x = b$ i krivom zadanom jednačinom $y = f(x)$, ($x \in [a,b]$), gdje je f neprekidna nenegativna realna funkcija jedne realne varijable. (**Uputa.** Str. 289 -291 u [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

b) *Cikloida* je zadana (parametarski) jednačinama $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in \mathbf{R}$ ($a > 0$). Skicirajte ravni lik ograničen *x*-osom i jednim svodom zadane cikloide (za $0 \le t \le 2\pi$), a zatim, primjenom dobijene formule u a), izračunajte njegovu površinu . (1+ 0,5+1 [b.])

[I. πa^2. II. $2\pi a^2$. **III.** $3\pi a^2$. IV. $4\pi a^2$.]

(**Uputa.** Primjer 9.1.1. na str. 291 u [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zadatak 4. Razlaganjem podintegralne funkcije u stepeni red po x izračunati integral $I := \int_0^1 \dfrac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

[**I.** $I = -\dfrac{\pi^2}{6}$. II. $I = \dfrac{\pi^2}{6}$. III. $I = -\infty$. IV. $I = +\infty$.] (2,5 [b.])

Zadatak 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x) := \dfrac{x^4}{x^3-1}$.

a) Ispitati tok i nacrtati grafik zadane funkcije f (pri tome odrediti prirodni domen Dom (f), ispitati ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f) i odrediti njene eventualne asimptote, odrediti nule i ispitati znak funkcije f, odrediti intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika, ispitati konveksnost i konkavnost i odrediti eventualne prevojne tačke zadane funkcije f), a zatim odrediti rang $R(f)$ i ustanoviti da li postoji (jednoznačna) inverzna funkcija zadane funkcije f. (**Uputa:** Zadatak 381. na str. 409 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]).

Pri tome precizno definirati sve pojmove o realnim funkcijama jedne realne promjenljive koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka.

b) Odrediti prirodni domen funkcije $g(x) := 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^4 + f(x)}{(x+3)\,f(x)}}$, gdje je f funkcija zadana u a), a zatim odrediti i klasificirati eventualne tačke prekida i singulariteta funkcije g, te primjenom diferencijalnog računa ispitati tok i nacrtati njen (funkcije g) grafik. (**Uputa:** Kako je $g(x):=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$, za $x \neq 0$ i $x \neq 1$, to se zadana funkcija g svodi na restrikciju funkcije f u Zadatku 383. na str. 410 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]).

.... (4+ 2+ 1+ 3 [b.])

IME I PREZIME STUDENTA : ....

Z A D A C I - Grupa B:
za popravni drugog parcijalnog / (drugog dijela integralnog) ispita iz predmeta
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1, ETFS, 05. 02. 2014.

Zadatak 1. Definirajte pojmove beskonačnog izvoda i logaritamskog izvoda realne funkcije jedne realne varijable, a zatim objasnite postupak određivanja izvoda takve funkcije primjenom njenog logaritamskog izvoda, pa primjenom tog postupka nađite izvod $f'(x)$ ako je $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$. (1 b.+ 0,5 b. + 1 b.)

[I. $f(x)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{12}{1-3x}\right)$. II. $\frac{1}{x+1}-\frac{12}{1-3x}$. **III.** $f(x)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{12}{1-3x}\right)$. IV. $f(x)\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{12}{1-3x}\right)$.]

Zadatak 2. Izračunati neodređeni integral $\int x e^x \cos x \, dx$. (2,5 [b.])

[I. $\frac{e^x}{2}\left[x(\sin x-\cos x)-\sin x\right]+C.$ II. $\frac{e^x}{2}\left[x(\sin x+\cos x)+\sin x\right]+C.$

III. $\frac{e^x}{2}\left[x(\sin x+\cos x)-\sin x\right]+C.$ IV. $\frac{e^x}{2}\left[x(\sin x-\cos x)+\sin x\right]+C.$]

Zadatak 3. Ispitati postojanje primitivne funkcije i integrabilnost funkcije f zadane formulom $f(x)=\frac{\sin \pi x}{x}$, a zatim procijeniti vrijednost integrala $I:=\int_{100}^{200} f(x)\,dx$. (2,5 [b.])

[I. $0<I<\frac{1}{400}$. II. $0<I<\frac{1}{200}$. III. $0<I<\frac{1}{300}$. **IV.** $0<I<\frac{1}{100\pi}$.]

Zadatak 4. a) Definirajte pojam zatvorene proste krive i opšti pojam površine ravnog lika koji predstavlja dio ravni ograničen zatvorenom prostom krivom, a zatim izvedite formulu za površinu lika (figure) u ravni *Oxy*, ograničene dijelovima x-ose, pravih $x=a$ i $x=b$ i krivom zadanom jednačinom $y=f(x)$, $(x\in[a,b])$, gdje je f neprekidna realna funkcija jedne realne varijable i $f(x)\le 0$. (**Uputa.** Str. 291 u [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

b) Skicirajte lik u ravni *Oxy* ograničen krivom zadanom jednačinom $y=3\sin(2x-4)$ i odsječkom $[2-3\pi/2,\ 2]$ ose Ox, a zatim, primjenom dobijene formule u a), izračunajte njegovu površinu .

[**I.** 9 (kv. jed.). II. 3 (kv. jed.). III. 9 (kv. jed.). IV. 10 (kv. jed.).] (1+ 0,5+1 [b.])

(**Uputa.** Primjer 9.1.1. na str. 291 u [Fatkić, H., *Inženjerska matematika* 1].)

Zadatak 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom $f(x):=\frac{x^3}{3-x^2}$.

a) i nacrtati grafik zadane funkcije f (pri tome odrediti prirodni domen Dom (f), ispitati ponašanje funkcije f na rubovima područja Dom (f) i odrediti njene eventualne asimptote, odrediti nule i ispitati znak funkcije f, odrediti intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije f, kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika, ispitati konveksnost i konkavnost i odrediti eventualne prevojne tačke zadane funkcije f), a zatim odrediti rang $R(f)$ i ustanoviti da li postoji (jednoznačna) inverzna funkcija zadane funkcije f. **(Uputa:** Zadatak 380. na str. 405- 408 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]**)**.

Pri tome precizno definirati sve pojmove o realnim funkcijama jedne realne promjenljive koji se pojavljuju u postavci i/ili rješenju ovog zadatka.

b) Odrediti prirodni domen funkcije $g(x):=1-x+\sqrt{\dfrac{(3-x^2)f(x)}{3+x}}$, gdje je f funkcija zadana u a), a zatim odrediti i klasificirati eventualne tačke prekida i singulariteta funkcije g, te primjenom diferencijalnog računa ispitati tok i nacrtati njen (funkcije g) grafik. **(Uputa:** Kako je $g(x):=1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$, za $x\neq\sqrt{3}$, to se zadana funkcija g svodi na restrikciju funkcije f u Zadatku 383. na str. 410 u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.** , *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.]**)**.

.... (4+ 2+ 1+ 3 [b.])

IME I PREZIME STUDENTA : ....