Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Z A D A C I (FORMULACIJE I RJEŠENJA/REZULTATI)
Z A
PRVI PARCIJALNI ISPIT IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1
Akademska **2008 - 2009. godina**
Sarajevo, 05. 11. 2008.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. *Za svaki od prva četiri zadatka ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje se boduje sa po* 2,5 *boda, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po* 0 *bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.*

2. *Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi* 10 *bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je* 0,5 *bodova).*

3. *Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.*

Rezultati prvog parcijalnog ispita iz IM1:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ....

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:

Predmetni nastavnik:

Vanr. Prof. Dr. Sci. Huse Fatkić

Z A D A C I - Var. A :

za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2008.

Zad. 1. . Odredite inverznu funkciju funkcije $f\colon \mathbf{R} \to (-1,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, gdje je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva.

I. $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1+|x|}{x}$. II. $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.

III. $\mathbf{f^{-1} : (-1, 1) \to R}$, $\mathbf{f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}}$. IV. $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-|x|}{x}$.

Zad. 2. Odredite (prirodni) domen, ispitajte periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odredite osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g jedne realne promjenljive zadanih formulama

$$f(x) = \frac{1}{\ln|\sin x|} + 10\cos(3x+10) + (\cos^4 x + \sin^4 x)^{-3}, \quad g(x) = \cos|x| \ .$$

I. $D(f) = \left\{ x \mid x \neq k\pi,\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T(f) = 2\pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, $T(g) = \pi$.

II. $D(f) = \left\{ x \mid x \neq k\pi,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T(f) = 2\pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, $T(g) = 2\pi$.

III. $D(f) = \left\{ x \mid x \neq k\pi,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T(f) = \pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, g nije periodična.

IV. $D(f) = \left\{ x \mid x \neq k\pi,\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T(f) = \pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, g nije periodična.

Zad. 3. Ispitajte monotonost i konvergenciju niza (a_n), a zatim nađite (ili ustanovite da ne postoji) $\lim a_n$ ako je $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{6n}$ $(\forall\, n \in \mathbf{N})$.

....

I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji . **II.** ln 6 . III. 0. IV. $+\infty$.

Zad. 4. Dokažite da redovi $\sum_{n\geq 1} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n$ i $\sum_{k\geq 1} c_k$ konvergiraju i izračunajte njihove sume ako je

$$a_n = \frac{n}{2^{n-1}} \ (\forall\, n \in \mathbf{N}),\quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n},\quad c_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k},$$

te ustanovite da redovi $\sum_{n\geq 1} b_n$ i $\sum_{k\geq 1} c_k$ sadrže iste sabirke.

....

I. Sume zadanih redova su 4, ln 2, $\frac{1}{2}$ ln 2, respektivno. II. Sume zadanih redova su 4, ln 2, ln 2, respektivno. III. Sume zadanih redova su 2, ln 2, $\frac{1}{2}$ ln 2, respektivno. IV. Sume zadanih redova su 2, ln 2, ln 2, respektivno.

Rješenje Zad. 4: Zadani red $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergira prema *Cauchyjevom kriterijumau korijena* (konvergencija ovog reda lako se ustanovljava i, npr., prema *D'Alembertovom kriteriju*), jer je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Za parcijalnu sumu A_n zadanog reda $\sum_{n\geq 1} a_n$ imamo da je (v., npr. Zad. 20.62. b), str. 164. i str. 332, u knjizi [**R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar**, *Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima, uputama i rezultatima*, **Svjetlost , Sarajevo, 1987]**

$$A_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{n}{2^{n-1}},$$

pa , kako je lim A_n = 4, zaključujemo da je suma zadanog reda $\sum_{n\geq 1} a_n$ jednaka broju 4.

Budući da opšti član reda $\sum_{n\geq 1} b_n$ ima oblik $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, a niz $\left(\frac{1}{n}\right)$ monotono teži nuli, to prema *Leibnizovom kriteriju* red $\sum_{n\geq 1} b_n$ konvergira. Nađimo S_{2n}. Imamo da je

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \gamma + \ln 2n + \varepsilon_{2n} - \left(\gamma + \ln n + \varepsilon_n\right) = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n,$$

gdje je γ *Eulerova konstanta*, a $\varepsilon_n \to 0$ i $\varepsilon_{2n} \to 0$ kad $n \to \infty$.

Kako je (zbog ustanovljene konvergencije reda $\sum_{n\geq 1} b_n$) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$, gdje je (S_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\geq 1} b_n$, dobijemo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

Red $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right)$ sadrži iste sabirke kao i red $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, jer se svaki prirodan broj može napisati u jednom od oblika 2 k - 1 (neparan), 2 (2 k - 1) (paran ali nije djeljiv sa 4) ili 4 k (paran i djeljiv sa 4). Neka je s suma reda $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right)$. Tada je (budući da je $\lim c_k = \lim\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right) = 0$, to ako članove reda $\sum_{k\geq 1} c_k$ grupišemo bez promjene poretka, pri čemu svaka grupa sadrži najviše M $(< +\infty)$ članova, onda iz konvergencije reda dobijenog grupisanjem slijedi konvergencija reda $\sum_{k\geq 1} c_k$ i sume ovih redova su jednake)

$$s = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Zad. 5. **a)** Pojednostavite sljedeći izraz

$$\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}}$$

ako je z : 1) kompleksan broj; 2) pozitivan realan broj; 3) $z = (-10)^{2008}$.

b) Izračunajte realni i imaginarni dio i modul kompleksnog broja z zadanog u obliku

$$z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} i\right),$$

gdje je i imaginarna jedinica.

c) U izrazu

$$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{22} \cdot (1-i)^{17}}{(-1-i)^3},$$

gdje je i imaginarna jedinica, izvršite sve naznačene operacije u skupu **C** kompleksnih brojeva.

d) Koristeći *Moivreovu formulu* i *Newtonovu binomnu formulu*, izrazite $\cos 5x$ pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$ i obrnuto, izrazite $\cos^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova.

Rješenje: **a)** 1) Neke od jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva, samo ako se relacija jednakosti izraza (budući da $\sqrt[n]{a}$, za $a \neq 0$, ima n različitih vrijednosti u skupu **C** kompleksnih brojeva) razumije tako da je svaka vrijednost s jedne strane jednaka jednoj vrijednosti s druge strane i obratno, tj. da se *skupovi vrijednosti* s jedne i druge strane jednakosti podudaraju. U tom smislu u skupu **C** imamo da je

$\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}} = 0$ za $z = 0$, a za svaki $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ zadani izraz $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}}$ se ne može pojednostaviti (u skupu **C** kompleksnih brojeva).

2) U skupu **R** realnih brojeva za svaki $z > 0$ imamo da je $\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{z} - z^{\frac{1}{2}} = 0.$

3) U skupu **R** realnih brojeva za $z = (-10)^{2008}$, budući da je tada $z = 10^{2008} > 0$, vrijedi, prema 2), da je

$$\sqrt{z} - (z^3)^{\frac{1}{6}} = 0\,.$$

b) Iz $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ slijedi da je

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

pa je

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} i) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{i(e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})} = -i\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} = i\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} = i\,\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

Otuda je $\quad \operatorname{Re}(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\,i)) = 0, \quad \operatorname{Im}(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\,i)) = \operatorname{th}\frac{\pi}{2}, \quad |\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\,i)| = \operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$

c) Izvršenjem svih naznačenih operacija u skupu **C** kompleksnih brojeva u izrazu $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{22}\cdot\left(1-i\right)^{17}}{\left(-1-i\right)^{3}}$,

dobijemo da je

$$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{22}\cdot\left(1-i\right)^{17}}{\left(-1-i\right)^{3}} = \ldots = 2^{29}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

d) Prema *Moivreovoj formuli* je $\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5$, a dalje, prema *Newtonovoj binomnoj formuli* imamo (v., npr., **Zad. 11.28, str. 78.** i **223,** u knjizi [**R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar**, *Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima, uputama i rezultatima*, **Svjetlost , Sarajevo, 1987]**)

$$\cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x + 5\cos^4 x\cdot(i\sin x) - \binom{5}{2}\cos^3 x\sin^2 x - \binom{5}{3}\cos^2 x\,(i\sin^3 x)$$
$$+ \binom{5}{4}\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x,$$

odakle slijedi da je

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + \cos x\sin^4 x.$$

Obrnuto, polazeći od identiteta

$$[(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)]^5 = 2^5\cos^5 x,$$

i razvijajući lijevu stranu ovog identiteta po *Newtonovoj binomnoj formuli* , uz primjenu *Moivreove formule* na pojedine članove tako dobijenog razvoja, dobijemo da je

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x).$$

.... @ ....

Napomena 1:

Zadaci 1- 4. su bodovani na način da svaki od tih zadataka sa samo ispravno zaokruženim odgovorom i kompletnim ispravnim postupkom /(sa gotovo kompletnim ispravnim postupkom sa greškama u samo jednom dijelu izrade, te ukoliko postoji naznaka djelimično pravilnog postupka izrade nekog drugog zadatka) nosi 2,5 boda.

Z A D A C I - Var. B :

za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2008.

Zad. 1. Odredite inverznu funkciju funkcije $f: (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$, gdje je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva.

I. $f^{-1}: \mathbf{R} \to (-1, 1)$, , $f^{-1}(x) = \dfrac{1-|x|}{x+1}$. II. $f^{-1}: \mathbf{R} \to (-1, 1)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

III. $f^{-1}: \mathbf{R} \to (-1, 1)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, IV. $f^{-1}: \mathbf{R} \to (-1, 1)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-|x|}{1+|x|}$.

Zad. 2. Odredite (prirodni) domen, ispitajte periodičnost i (u slučaju periodične funkcije) odredite osnovni period (ukoliko postoji) svake od realnih funkcija f, g jedne realne promjenljive zadanih formulama

$$f(x) = 2\cos(3x+6) + (\sin 2x)^{-1} + (\cos^4 x + \sin^4 x)^{-1}, \quad g(x) = \sin|x| .$$

I. $D(f) = \{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $T(f) = 2\pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, $T(g) = \pi$.

II. $D(f) = \left\{x \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2} \;; k \in \mathbf{Z}\right\}$, $T(f) = 2\pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, $T(g) = 2\pi$.

III. $D(f) = \{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $T(f) = \pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, g nije periodična.

IV. $D(f) = \left\{x \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2} \;; k \in \mathbf{Z}\right\}$, $T(f) = 2\pi$; $D(g) = \mathbf{R}$, g nije periodična.

Zad. 3. Ispitajte ograničenost i konvergenciju niza (a_n), a zatim nađite (ili ustanovite da ne postoji) $\lim a_n$ ako je $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{10n}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$.

....

I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji . II. 0. **III.** ln 10. IV. $+\infty$.

Zad. 4. Dokažite da redovi $\sum_{n\geq 1} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n$ i $\sum_{k\geq 1} c_k$ konvergiraju ako je

$$a_n = \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^{n+1}}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad c_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}, \; (\forall\, n, k \in \mathbf{N}),$$

te izračunajte sumu reda $\sum_{n\geq 1} a_n$ i dokažite činjenicu: iako redovi $\sum_{n\geq 1} b_n$ i $\sum_{k\geq 1} c_k$ sadrže iste sabirke, njihove sume su različite.

....

I. Suma zadanog reda $\sum_{n\geq 1} a_n$ je $-\frac{1}{7}$. II. Suma zadanog reda $\sum_{n\geq 1} a_n$ je $\frac{1}{7}$.

III. Suma zadanog reda $\sum_{n\geq 1} a_n$ je $-\frac{1}{2}$. IV. Suma zadanog reda $\sum_{n\geq 1} a_n$ je $\frac{1}{2}$.

Rješenje (*detaljno*) Zad. 4: Dokažimo neposredno konvergenciju zadanog reda $\sum_{n\geq 1} a_n$, tj. reda $\sum \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^{n+1}}$ i nađimo mu sumu (v. **Zadatak 2.9.4.b)** u materijalima za Predavanja iz *Inženjerske matematike* 1 **u akademskoj 2008/2009. godini** (http://c2.etf.unsa.ba/). :

Kako je

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = 1 - 2\sin^2\frac{n\pi}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n \neq 3k, \quad k \in \mathbf{N}, \\ 1, & n = 3k, \end{cases}$$

i kako redovi $\sum\frac{1}{2^{3n}}$, $\sum\frac{1}{2^n}$ konvergiraju, to na osnovu svojstva operacija sa konvergentnim redovima (tj., ako redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju u **R**, onda vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad (a_n, b_n \in \mathbf{R}),$$

gdje su λ, μ proizvoljni realni brojevi), imamo da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}\right)+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}\right)+\frac{1}{2^9}-\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right) = -\frac{1}{7}.$$

Red $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ očito konvergira prema *Leibnizovom kriteriju*, pa kako red $\sum\frac{1}{n}$ divergira, to red $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergira uslovno (v. **Primjer 2.7.2. 1°.** u materijalima za Predavanja iz *Inženjerske matematike* 1 **u akademskoj 2008/2009. godini** (http://c2.etf.unsa.ba/). Neka je S njegova suma :

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \; .$$

Lako se vidi da je $S \neq 0$ (npr., prema suma *Leibnizovom kriteriju*, prema kome se S nalazi u intervalu između vrijednosti dvije susjedne parcijalne sume, tj. $S_n < S < S_{n+1}$ ili $S_{n+1} < S < S_n$); zapravo, dobro je poznato (a što se lako i ustanovi /V. Rješenje Zad. 4. u Var. A /) da je $S = \ln 2$.

Red $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right)$ sadrži iste sabirke kao i red $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, jer se svaki prirodan broj može napisati u jednom od oblika 2 k - 1 (neparan), 2 (2 k - 1) (paran ali nije djeljiv sa 4) ili 4 k (paran i djeljiv sa 4). Neka je s suma reda $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right)$. Tada je (budući da je

$\lim c_k = \lim\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\right) = 0$, to ako članove reda $\sum_{k\geq 1} c_k$ grupišemo bez promjene poretka, pri čemu svaka grupa sadrži najviše M $(< +\infty)$ članova, onda iz konvergencije reda dobijenog grupisanjem slijedi konvergencija reda $\sum_{k\geq 1} c_k$ i sume ovih redova su jednake)

$$
\begin{aligned}
s &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \\
&= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \ldots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\, s.
\end{aligned}
$$

Time je dokazano da iako redovi $\sum_{n\geq 1} b_n$ i $\sum_{k\geq 1} c_k$ sadrže iste sabirke, njihove sume su različite. (Napomenimo da kod apsolutno konvergentnih redova ovako nešto nije moguće, jer njihova suma ostaje ista pri proizvoljnoj permutaciji sabiraka.)

Zad. 5. a) Pojednostavite sljedeći izraz $\ln e^z$ ako je z :
1) kompleksan broj; 2) realan broj (npr. 2008); 3) z= 10 i , gdje je i imaginarna jedinica.

b) Izračunajte realni i imaginarni dio i modul kompleksnog broja z zadanog u obliku

$$z = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\, i\right),$$

gdje je i imaginarna jedinica.

c) Nađite realni i imaginarni dio proizvoda i količnika korijena jednačine $z^2 - (2+i)z + 7i = 1$, gdje je i imaginarna jedinica.

d) Koristeći *Moivreovu formulu* i *Newtonovu binomnu formulu*, izrazite $\sin 5x$ pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$ i obrnuto, izrazite $\sin^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova.

Rješenje: a) 1) U skupu **C** kompleksnih brojeva imamo da ako je $z = r\,e^{i\varphi}$, onda je i $z = r\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}$ za svaki $k\in\mathbf{Z}$, pa se definira višeznačna funkcija $\ln z := \ln r + i\,(\varphi + 2k\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$, tj. $\ln z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, za svaki $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, njena glavna vrijednost (glavna vrijednost logaritma) se definira formulom

$$\operatorname{Ln} z := \ln r + i\,\varphi,\quad z = r\,e^{i\varphi},\quad \text{tj. } \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z,\quad \varphi = \arg z \in (-\pi, \pi],$$

gdje je $\ln r$ logaritam u realnom domenu (r > 0). U tom smislu zaključujemo da se zadani izraz $\ln e^z$, u opštem slučaju, u skupu **C** kompleksnih brojeva ne može pojednostaviti.

2) U skupu **R** realnih brojeva (tj. za logaritam u realnom domenu) imamo da je $\ln e^z = z$ za svaki $z\in\mathbf{R}$, pa i za, npr. z = 2008, imamo da je $\ln e^{2008} = 2008$.

3) U skupu **C** kompleksnih brojeva, prema 1) za $z = 10\,i$, gdje je i imaginarna jedinica, imamo da je $\arg(e^{10\,i}) = 10 - 4\pi$, pa je stoga $\operatorname{Arg}(e^{10\,i}) == 10 - 4\pi + 2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$), odakle je

$$\ln\, e^{10\,i} = i\,(10 + 2\,m\pi),\ (m \in \mathbf{Z}).$$

b) Iz $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ slijedi da je

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

pa je

$$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} i) = \frac{i\,(e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})}{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}} = -\,i\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}} = -\,i\,\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}.$$

Otuda je $\operatorname{Re}(\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}\,i)) = 0$, $\operatorname{Im}(\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}\,i)) = -\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}\,i)| = \operatorname{cth}\frac{\pi}{2}$.

c) Korijeni jednačine $z^2 - (2+i)z + 7i = 1$, gdje je i imaginarna jedinica, su $z_1 = 2i - 1$, $z_2 = 3 - i$, pa iz $z_1 \cdot z_2 = 7i - 1$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$ slijedi da je $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = -1$, $\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = 7$, $\operatorname{Re}(\frac{z_1}{z_2}) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im}(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{1}{2}$.

d) Prema *Moivreovoj formuli* je $\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5$, a dalje, prema *Newtonovoj binomnoj formuli* imamo (v., npr., **Zad. 11.28, str. 78.** i **223,** u knjizi [**R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar,** *Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima, uputama i rezultatima*, **Svjetlost , Sarajevo, 1987]**)

$$\cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x + 5\cos^4 x \cdot (i\sin x) - \binom{5}{2}\cos^3 x\sin^2 x - \binom{5}{3}\cos^2 x\,(i\sin^3 x)$$
$$+ \binom{5}{4}\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x,$$

odakle slijedi da je

$$\sin 5x = 5\cos^4 x - 10\cos^2 x\,\sin^3 x + \sin^5 x.$$

Obrnuto, polazeći od identiteta

$$[(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)]^5 = (2\,i)^5\sin^5 x,$$

i razvijajući lijevu stranu ovog identiteta po *Newtonovoj binomnoj formuli* , uz primjenu *Moivreove formule* na pojedine članove tako dobijenog razvoja, dobijemo da je

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x).$$

....@...

Napomena 2: Upute, rješenja, rezultati i odgovori za ove ispitne zadatke ili za njihove analogone i neznatne modifikacije mogu se vidjeti u preporučenoj literaturi i/ili u materijalima za Predavanja iz *Inženjerske matematike* 1 (http://c2.etf.unsa.ba/).