Elektrotehnički fakultet
Univerziteta u Sarajevu

Z A D A C I
Z A
PRVI PARCIJALNI ISPIT IZ PREDMETA
INŽENJERSKA MATEMATIKA 1
Akademska **2007 - 2008. godina**
Sarajevo, 05. 11. 2007.

IME I PREZIME STUDENTA : ....
BROJ INDEKSA : ....
JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : ....
NASTAVNA GRUPA (BROJ) : ....

UPUTSTVO:

1. *Za svaki od prva četiri zadatka ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje se boduje sa po* 2,5 *boda, a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po* 0 *bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđena četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.*

2. *Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi* 10 *bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je* 0,5 *bodova).*

3. *Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.*

Rezultati prvog parcijalnog ispita iz IM1:

Zad. 1. ....
Zad. 2. ....
Zad. 3. ....
Zad. 4. ....
Zad. 5. ....

Ukupan broj ostvarenih bodova:

Vlastoručni potpis studenta:

____

Predmetni nastavnik:

____

Vanr. Prof. Dr. Huse Fatkić

Z A D A C I - Var. A :
za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2007.

Zad. 1. Riješite i diskutujte za sve pozitivne vrijednosti realnog parametra λ sljedeći sistem nejednačina:

$$\lambda(x-1) > x-2\,,\ 3\lambda x+5 < 3(\lambda+1)\,.$$

I. Ako je $0<\lambda<1$, onda je $\frac{3\lambda-2}{3\lambda}<x<\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$; ako je $\lambda>1$, onda je $x>\frac{5}{3}\lambda$.

II. Ako je $0<\lambda<1$, onda je $\frac{5}{3}<x<\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$; ako je $\lambda\ge 1$, onda je $x<\frac{5}{3}$.

III. Ako je $0<\lambda\le 1$, onda je $x<\frac{3\lambda-2}{3\lambda}$; ako je $\lambda>1$, onda je $\frac{\lambda-2}{\lambda-1}<x<\frac{3\lambda-2}{3\lambda}$.

IV. Ako je $0<\lambda\le 1$, onda je $x<\frac{5}{3}$; ako je $\lambda>1$, onda je $x>\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$; .

(**Napomena.** Za $0<\lambda<1$ je $\frac{3\lambda-2}{3\lambda}<\frac{5}{3}<\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$, a za $\lambda>1$ je $\frac{\lambda-2}{\lambda-1}<\frac{3\lambda-2}{3\lambda}<\frac{5}{3}$.)

Zad. 2. U izrazu

$$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{22}\cdot(1-i)^{17}}{(-1-i)^{3}},$$

gdje je i imaginarna jedinica, izvršite sve naznačene operacije u skupu **C** kompleksnih brojeva.

I. $2^{29}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. **II. $2^{29}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.** III. $2^{29}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$. IV. $2^{29}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

Zad. 3. Nađite graničnu vrijednost niza ($\sqrt{n+3}$ - $\sqrt{n-1}$). .

...

I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji . **II. 0.** III. $\sqrt{3}$. IV. $+\infty$.

Zad. 4. Odredite (prirodni) domen D i osnovni period T realne funkcije f jedne realne promjenljive zadane formulom $f(x):=\frac{1}{\ln|\sin x|}$.

...

I. $D=\left\{x \mid x\neq k\pi,\ x\neq \pm\frac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathbf{Z}\right\}, T=2\pi$. III. $D=\left\{x \mid x\neq k\pi,\ x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathbf{Z}\right\}, T=\pi$.

II. $D=\left\{x \mid x\neq k\pi,\ x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathbf{Z}\right\}, T=2\pi$. **IV. $D=\left\{x \mid x\neq k\pi,\ x\neq \pm\frac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathbf{Z}\right\}, T=\pi$.**

Zad. 5. a) Pokažite da red $\sum_{n\ge 0} a_n$ konvergira te izračunajte njegovu sumu ako je $a_n=3\left(\frac{4^n}{5^{n+1}}\right)$ ($\forall n\in\mathbf{N}_0$).

b) Koliko članova reda $\sum_{n\ge 1} b_n$ treba sabrati da bi se njegova suma izračunala sa tačnošću do 10^{-6}, pri čemu je $b_n=\frac{(-1)^n}{2n-1}$, ($\forall n\in\mathbf{N}$)? **c)** Pokažite da red $\sum c_n$, gdje je $c_n=a_n+b_n+\frac{3^n+4^n}{5^n}$ (za a_n iz a) i b_n iz b)), konvergira, a zatim nađite sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+\frac{3^n+4^n}{5^n}\right)$.

------------------- @-----------------------

Z A D A C I - Var. B :
za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2007.

Zad. 1. Nađite sve racionalne sabirke u razvoju izraza $\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$ po *Newtonovoj binomnoj formuli.*

....

I. Osmi član razvoja zadanog izraza je racionalan. **II. Sedmi član razvoja zadanog izraza je racionalan.**
III. Šesti član razvoja zadanog izraza je racionalan. IV. Deveti član razvoja zadanog izraza je racionalan.

Zad. 2. Zadana je jednačina

$$\left|z^2\right|-z^2+3i\bar{z}=6i \qquad \text{(E)}$$

u skupu **C** kompleksnih brojeva, gdje je i imaginarna jedinica. Tada:

I. Jednačina (E) ima samo jedno rješenje.
II. Jednačina (E) ima tačno dva rješenja.
III. Jednačina (E) nema realnih rješenja.
IV. Svako od rješenja jednačine (E) ima imaginarni dio različit od nule.

Zad. 3. Nađite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right).$

....

I. $-\frac{2}{3}$. II. $-\infty$. **III.** $\frac{2}{3}$. IV. Ne postoji tražena granična vrijednost.

Zad. 4. Odredite $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

....

I. 1. II. e. III. e^2. IV. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}$.

Zad. 5. Ako je realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana formulom $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1-9x^2}\right)$, odredite njen prirodni domen Dom (f), eventualne presjeke njenog grafika sa osama Ox i Oy, skup $\{x\in \text{Dom}(f) : f(x)\geq 0\}$, eventualne horizontalne i vertikalne asimptote njenog grafika i granične vrijednosti $\lim\limits_{x\to 0\pm}\frac{f(x)}{|x|-1+\sqrt{1-9x^2}}$, a zatim skicirajte grafike (moguće dijelove) funkcija f i $|f|$ (bez primjene diferencijalnog računa).

Rješenje:

................@......................

Z A D A C I - Var. C :
za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2007.

Zad. 1. Odredite skup $\mathcal{R}$ svih rješenja nejednačine: $5|x| - |x^2| - 6 > 0$.

....

I. $\mathcal{R} = (-\infty, -3) \cap (3, +\infty)$.   III. $\mathcal{R} = (-\infty, -2) \cap (2, +\infty)$.

II. $\mathcal{R} = (-3, 3)$.   **IV.** $\mathcal{R} = (-3, -2) \cap (2, 3)$ **.**

Zad. 2. Nađite graničnu vrijednost niza $\left((n+1)^{\frac{2}{3}} - (n-1)^{\frac{2}{3}}\right)$.

....

I. Granična vrijednost zadanog niza ne postoji .   II. $+\infty$.   III. $\sqrt{3}$.   **IV. 0.**

Zad. 3. Ispitajte konvergenciju redova : **a)** $\sum \left(\frac{1+\cos n}{4+\cos n}\right)^{2n - \ln n}$; **b)** $\sum \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{n}$.

....

I. Oba zadana reda divergiraju.   II. Oba zadana reda konvergiraju.
III. Red u a) konvergira, a red u b) divergira.   IV. Red u **a)** divergira, a red u **b)** konvergira.

Zad. 4. Odredite (prirodni) domen D i osnovni period T realne funkcije f jedne realne promjenljive zadane formulom

$$f(x) := \frac{1}{1 - \cos^6 x - \sin^6 x} .$$

....

I. $D = \{x \mid x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $T = 2\pi$.   III. $D = \{x \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $T = \pi$.

II. $D = \left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $T = \frac{\pi}{2}$**.**   IV. $D = \left\{x \mid x \neq \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $T = 2\pi$.

Zad. 5. a) Riješite jednačinu $z^3 + i^3 = 0$ u skupu $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva, gdje je i imaginarna jedinica.

b) Nađite realni i imaginarni dio proizvoda i količnika korijena jednačine $z^2 - (2+i)z + 7i = 1$ u skupu $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva, gdje je i imaginarna jedinica.

c) U sljedećem izrazu izvršite sve naznačene operacije u skupu kompleksnih brojeva:

$$\frac{(cis\,\frac{\pi}{5})^{19} \cdot (3 - \sqrt{3}j)^{p}}{(cis\,\frac{\pi}{6})^{5}} ,$$

gdje je j imaginarna jedinica i : 1) $p = 20$, 2) p je ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prijemnom ispitu za prijem na studij na *Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.*

d) Dva tjemena jednakostraničnog trougla u *Gaussovoj ravni* su u tačkama $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$, gdje je i imaginarna jedinica. Nađite treće tjeme toga trougla.

........................@........................

Z A D A C I - Var. D :
za prvi parcijalni ispit iz IM1, 05. 11. 2007.

Zad. 1. Odredite inverznu funkciju funkcije $f: \mathbf{R} \to (-1,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, gdje je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva.

I. $f^{-1}: (-1,1) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1+|x|}{x}$. III. $f^{-1}: (-1,1) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 \pm x}$.

II. $f^{-1}: (-1,1) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$. IV. $f^{-1}: (-1,1) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-|x|}{x}$.

Zad. 2. Ako za realnu funkciju f jedne realne promjenljive vrijedi da je $f(x) - 2f(1-x) = x$ za svaki $x \in \mathbf{R}$, riješite trigonometrijsku jednačinu

$$f(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2} - 4}{6}.$$

I. $x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $(k \in Z)$. III. $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $(k \in Z)$.

II. $x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $(k \in Z)$. IV. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $(k \in Z)$.

Zad. 3. Predstavite u trigonometrijskom obliku kompleksni broj $z := \sqrt{3} - i$, gdje je i imaginarna jedinica.

I. $z = \sqrt{2}\,[\cos(\dfrac{5\pi}{6}) + i\sin(\dfrac{5\pi}{6})]$. III. $z = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3})$.

II. $z = \sqrt{2}\,[\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{3})]$. **IV.** $z = 2(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6})$.

Zad. 4. Za niz (a_n), $a_n := \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^6-n+2}}$, gdje je $n \in (\mathbf{N} \setminus \{1, 2\})$, nađite $L_1 = \lim a_n$ i $L_2 = \lim(a_n)^n$.

I. $L_1 = 1$, $L_2 = e^{-2}$. II. $L_1 = 2$, $L_2 = e^2$. III. $L_1 = 1$, $L_2 = e$. IV. $L_1 = 2$, $L_2 = e$.

Zad. 5. Realna funkcija f jedne realne promjenljive zadana je formulom :

$$f(x) = \log_2(x^2 - 4x - 1).$$

a) Odredite prirodni domen $\text{Dom}(f)$ i eventualne presjeke njenog grafika sa osama Ox i Oy.

b) Odredite skup $\{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \le 0\}$ i eventualne horizontalne i vertikalne asimptote grafika funkcije f.

c) Skicirajte grafik zadane funkcije f (bez primjene diferencijalnog računa).

d) Odredite sliku (rang) $\text{Im}(f)$ i ispitajte postojanje inverzne funkcije zadane funkcije f.

Rješenje:

......................@........................