

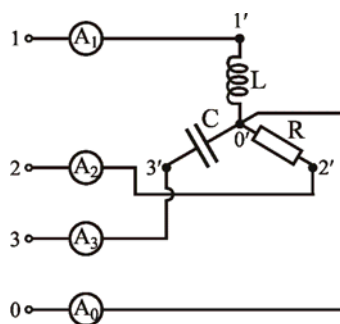
Zadaci uz predavanja iz EK1

25.03.2013. god

Zadatak 1.

Trofazno trošilo spojeno je u zvijezdu i priključeno na trofaznu simetričnu mrežu napona direktnog redosljeda faza. Pokazivanja sva tri idealna ampermetra priključena u linijskim vodičima međusobno su jednaka i iznose $I_A = 2$ A.

Odrediti pokazivanje idealnog ampermetra I_0 priključenog u nultom vodiču ako se impedansa ovog vodiča može zanemariti.



Slika 1 Shema električnog kruga

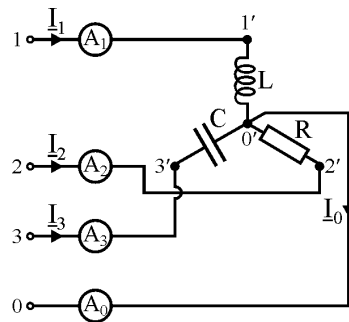
Rješenje

Pretpostavit će se smjerovi struja kao na slici 2.

Bitno:

Trofazno trošilo je simetrično ako su impedanse u sve tri faze međusobno potpuno jednake, tj. ako su istog karaktera i imaju isti modul.

Impedanse u fazama trošila prikazanog na slici 1. nisu istog karaktera, što znači da je ovo trošilo nesimetrično.



Slika 2. Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja

Trošilo je spojeno u zvijezdu i ima nul-vodič. S obzirom da se impedansa nul-vodiča može zanemariti i da su ampermetri idealni (njihova unutrašnja otpornost jednaka je nuli $R_A = 0$), protjecanje struje \underline{I}_0 neće izazvati padove napona, pa se tačke 0 i 0' nalaze na istom potencijalu. Može se također zaključiti da se i tačke 1 i 1' nalaze na međusobno istom potencijalu, a isto vrijedi i za tačke 2 i 2', odnosno 3 i 3'.

Mreža na koju je priključeno trošilo je simetrična, što znači da sva tri linijska napona imaju istu efektivnu vrijednost. Isto tako i sva tri fazna napona imaju međusobno iste efektivne vrijednosti:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{20} = \underline{U}_{30} = \underline{U}_F.$$

Kod spoja trošila u zvijezdu s nul-vodičem pogodno je definirati naponski sistem izvora napajanja preko faznih napona. S obzirom na zadati direktni redoslijed faza, vrijede slijedeće relacije:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_F \cdot e^{j0^\circ} = \underline{U}_F;$$

$$\underline{U}_{20} = \underline{U}_F \cdot e^{-j120^\circ};$$

$$\underline{U}_{30} = \underline{U}_F \cdot e^{+j120^\circ} = \underline{U}_F \cdot e^{-j240^\circ}.$$

Vrijede relacije:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'}; \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'}; \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'}.$$

Ampermetri mjere efektivne vrijednosti faznih (linijskih) struja:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_A.$$

Fazori ovih struja se mogu izračunati po izrazima:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{j\mathbf{X}_L} = -j \frac{\underline{U}_F}{\mathbf{X}_L} = -j\underline{I}_1 = -j\underline{I}_A = -j2 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\mathbf{R}} = \frac{\underline{U}_F}{\mathbf{R}} \cdot e^{-j120^\circ} = \underline{I}_2 \cdot e^{-j120^\circ} = \underline{I}_A \cdot e^{-j120^\circ} = 2 \cdot e^{-j120^\circ} = (-1 - j\sqrt{3}) \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{-j\mathbf{X}_C} = \frac{\underline{U}_F}{\mathbf{X}_C} \cdot e^{j90^\circ} e^{j120^\circ} = \underline{I}_3 \cdot e^{j210^\circ} = \underline{I}_A \cdot e^{j210^\circ} = 2 \cdot e^{j210^\circ} = (-\sqrt{3} - j) \text{ A}$$

Za čvor $0'$ vrijedi relacija po I Kirchhoffovom zakonu:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (-2,732 - j4,732) \text{ A}.$$

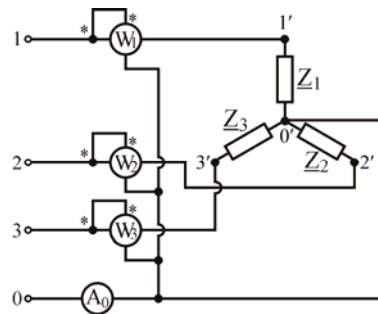
Ampermetar A_0 mjeri efektivnu vrijednost struje \underline{I}_0 :

$$I_0 = \sqrt{[\text{Re}\{\underline{I}_0\}]^2 + [\text{Im}\{\underline{I}_0\}]^2} = 5,464 \text{ A}.$$

Zadatak 2.

Za trofaznu električnu mrežu s naponima direktnog redoslijeda prikazanu na slici 3. poznato je: $U_L = 173 \text{ V}$; $\underline{Z}_1 = (3 + j4) \Omega$; $\underline{Z}_2 = (6 + j8) \Omega$; $\underline{Z}_3 = (12 + j16) \Omega$.

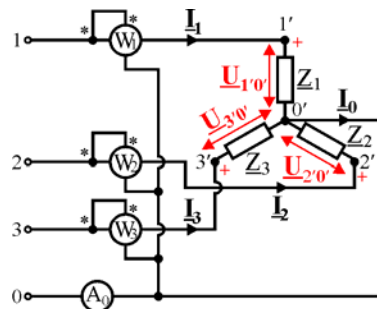
Odrediti pokazivanje svih mjernih instrumenata. Pretpostaviti da su mjerni instrumenti idealni i da je impedansa nultog vodiča zanemarivo mala.



Slika 3. Shema električnog kruga

Rješenje:

Usvojit će se oznake, smjerovi i polariteti struja i napona kao na slici 4.



Slika 4. Shema električnog kruga s pretpostavljenim smjerovima struja i polaritetima napona

U ovom zadatku razmatra se slučaj nesimetričnog (neuravnoteženog) trofaznog potrošača u spoju zvijezda s nultim vodičem (vodič koji spaja tačke 0 i 0') zanemarive impedanse. U ovom slučaju fazni naponi na izvoru i potrošaču su međusobno jednaki. Isto vrijedi i za linijske napone. Dakle, može se pisati:

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_{1'0'}, \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2'0'}, \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3'0'};$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1'2'}, \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'3'}, \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{3'1'}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, efektivna vrijednost linijskog (međufaznog) napona je:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U = 173 \text{ V}.$$

Efektivne vrijednosti faznih napona (naponi između faza i nultog vodiča) računaju se po relaciji:

$$U_{10} = U_{1'0'} = U_{20} = U_{2'0'} = U_{30} = U_{3'0'} = \frac{U}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V}.$$

Prema uvjetu datom u zadatku, fazni naponi izvora u mreži su direktnog redoslijeda. U ovom slučaju vrijede sljedeće relacije:

$$\underline{U}_{10} = U_{10} \cdot e^{j0^\circ} = U_{10} = 100 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{-j120^\circ} = 100 \cdot e^{-j120^\circ} = (-50 - j50\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{30} = U_{30} \cdot e^{-j240^\circ} = 100 \cdot e^{-j240^\circ} = (-50 + j50\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Struje u fazama potrošača mogu se odrediti po relacijama:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{\underline{Z}_1} = \frac{U_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{100}{3 + j4} = 12 - j16 = 20 \cdot e^{-j53,13^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{Z}_2} = \frac{U_{20}}{\underline{Z}_2} = \frac{100 \cdot e^{-j120^\circ}}{6 + j8} = -9,93 - j1,2 = 10 \cdot e^{-j173,13^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{Z}_3} = \frac{U_{30}}{\underline{Z}_3} = \frac{100 \cdot e^{-j240^\circ}}{12 + j16} = 1,96 + j4,6 = 5 \cdot e^{-j293,13^\circ} \text{ A}.$$

Fazor struje nultog vodiča \underline{I}_0 računa se po relaciji koja se dobiva primjenom I Kirchhoffovog zakona na čvor 0':

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (4,03 - j12,6) \text{ A}.$$

Ampermetar A_0 mjeri efektivnu vrijednost struje I_0 :

$$I_{A0} = I_0 = \sqrt{[R_e\{\underline{I}_0\}]^2 + [I_m\{\underline{I}_0\}]^2} = \sqrt{4,03^2 + 12,6^2} = 13,23 \text{ A}.$$

Bitno:

Aktivna snaga koju mjeri vatmetar \mathbf{W}_1 može se odrediti po izrazu:

$$P_{W1} = U_{1'0'} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 = U_{10} \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1.$$

U posljednjoj relaciji s φ_1 je označen ugao između fazora napona \underline{U}_{10} i struje \underline{I}_1 . Napon je dat relacijom $\underline{U}_{10} = 100 \cdot e^{j0^\circ}$ V, a struja: $\underline{I}_1 = 20 \cdot e^{-j53,13^\circ}$ A. Iz ove dvije relacije može se zaključiti da struja \underline{I}_1 zaostaje za naponom \underline{U}_{10} za ugao $\varphi_1 = 53,13^\circ$, pa vrijedi:

$$P_{W1} = 100 \cdot 20 \cdot \cos 53,13^\circ = 1200 \text{ W}.$$

Aktivna snaga koju mjeri vatmetar \mathbf{W}_2 može se odrediti po izrazu:

$$P_{W2} = U_{2'0'} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = U_{20} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2.$$

U relaciji za snagu P_{W2} s φ_2 je označen ugao između fazora napona \underline{U}_{20} i struje \underline{I}_2 . Napon je dat relacijom $\underline{U}_{20} = 100 \cdot e^{-j120^\circ}$ V, a struja: $\underline{I}_2 = 10 \cdot e^{-j173,13^\circ}$ A. Iz ove dvije relacije može se zaključiti da struja \underline{I}_2 zaostaje za naponom \underline{U}_{20} za ugao $\varphi_2 = 53,13^\circ$, pa vrijedi:

$$P_{W2} = 100 \cdot 10 \cdot \cos 53,13^\circ = 600 \text{ W}.$$

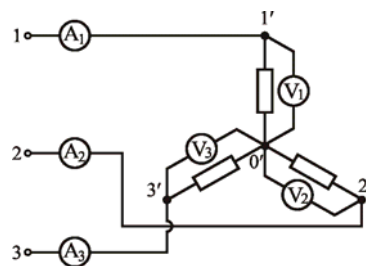
Analognim postupkom dobiva se aktivna snaga koju mjeri vatmetar \mathbf{W}_3 :

$$P_{W3} = U_{3'0'} \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 = U_{30} \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 = 100 \cdot 5 \cdot \cos 53,13^\circ = 300 \text{ W}.$$

Zadatak sa tutorijala 4

Tri skupine od po deset žarulja međusobno su spojene u zvijezdu i priključene na trofaznu simetričnu mrežu napona direktnog redoslijeda faza. Linijski napon mreže je $U_L = 173$ V, a snaga jedne žarulje je 100 W.

- Odrediti pokazivanja idealnih mjernih instrumenata ako su žarulje u fazi 1 pregorile (dakle, nastao je prekid faze 1).
- Odrediti pokazivanja idealnih mjernih instrumenata ako su žarulje u fazi 1 prespojene kratkospojnikom (dakle, nastao je kratki spoj faze 1).



Slika 5. Shema električnog kruga

Rješenje:

Prvo će se analizirati slučaj kad nema pregaranja. Žarulja predstavlja aktivno trošilo, odnosno može se predstaviti kao radna otpornost. Ovo trošilo iz mreže na koju je priključeno preuzima

samo aktivnu snagu, odnosno radi s faktorom snage $\cos\varphi = 1$. U svakoj fazi postoji $N = 10$ paralelno spojenih žarulja, a svaka od njih ima snagu $P_Z = 100$ W, što znači da je trošilo simetrično. Snage trošila u sve tri faze međusobno su jednake:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P = N \cdot P_Z = 1000 \text{ W} .$$

Mreža na koju je spojeno trošilo je simetrična, pa vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L .$$

Fazni naponi na trošilu su:

$$U_{1'0'} = U_{2'0'} = U_{3'0'} = U_F = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = 100 \text{ V} .$$

Fazne (linijske) struje trošila su:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_F = \frac{P}{U_F} = 10 \text{ A} .$$

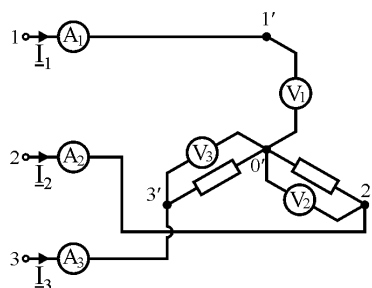
Otpornosti faza trošila su:

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{U_F}{I_F} = 10 \Omega .$$

a.

Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazi 1 prikazana je na slici 6. Analizirani slučaj predstavlja nesimetrično trofazno trošilo u spoju zvijezda bez nul-vodiča.

Voltmetri su idealni ($R_V \rightarrow \infty$) tako da kroz njih ne teče struja. Ampermetri su također idealni ($R_A = 0$), što znači da nema padova napona na njima.



Slika 6. Shema električnog kruga nakon pregaranja žarulja u fazi 1

S obzirom da je faza 1 u prekidu, vrijedi:

$$I_1 = 0 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_{A1} = 0 \text{ A} .$$

Nepostojanje nul-vodiča za posljedicu ima promjenu napona na trošilu koji više nisu jednaki naponima na izvoru. Međutim, naponi izvora se ne mijenjaju ako je do poremećaja došlo na trošilu. Dakle, za napone mreže i dalje vrijedi:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_L .$$

Kod spoja trošila u zvijezdu bez nul-vodiča naponski sistem izvora napajanja direktnog redosljeda faza definira se preko linijskih napona:

$$\underline{U}_{12} = U_L \cdot e^{j0^\circ} = 173 \text{ V};$$

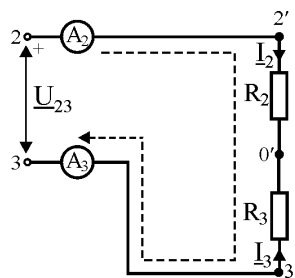
$$\underline{U}_{23} = U_L \cdot e^{-j120^\circ} = 173 \cdot e^{-j120^\circ} = (-86,5 - j86,5\sqrt{3}) \text{ V};$$

$$\underline{U}_{31} = U_L \cdot e^{j120^\circ} = 173 \cdot e^{j120^\circ} = (-86,5 + j86,5\sqrt{3}) \text{ V}.$$

Za čvor $0'$ vrijedi:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 = -\underline{I}_3.$$

Za određivanje struja \underline{I}_2 i \underline{I}_3 može se analizirati krug prikazati u jednostavnijem obliku:



Slika 7. Shema električnog kruga za određivanje struja u fazama 2 i 3

Za konturu naznačenu na slici 7. vrijedi:

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{2'0'} - \underline{U}_{3'0'}.$$

Fazni naponi na trošilu su:

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{R}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{R}$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{R}_3 = -\underline{I}_2 \cdot \underline{R},$$

pa se konačno dobiva:

$$\underline{U}_{23} = 2 \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{R};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{2 \cdot \underline{R}} = 8,65 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_{A2} = 8,65 \text{ A};$$

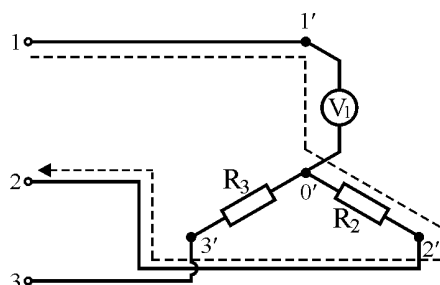
$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_2 = 8,65 \cdot e^{j60^\circ} \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_{A3} = 8,65 \text{ A}.$$

Za fazne napone $\underline{U}_{2'0'}$ i $\underline{U}_{3'0'}$ se dobiva:

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{I}_2 \cdot \underline{R} = 86,5 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{V2} = 86,5 \text{ V};$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{I}_3 \cdot \underline{R} = 86,5 \cdot e^{j60^\circ} \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{V3} = 86,5 \text{ V}.$$

Voltmetar V_1 mjeri pad napona između tačaka $1'$ i $0'$. Za određivanje ovog napona koristi se shema prikazana na slici 8.



Slika 8. Shema električnog kruga za određivanje napona $U_{1'0'}$

Za konturu označenu na slici može se napisati slijedeća jednačba primjenom II Kirchhoffovog zakona:

$$\underline{U}_{12} - \underline{U}_{1'0'} + \underline{U}_{2'0'} = 0,$$

odakle se dobiva:

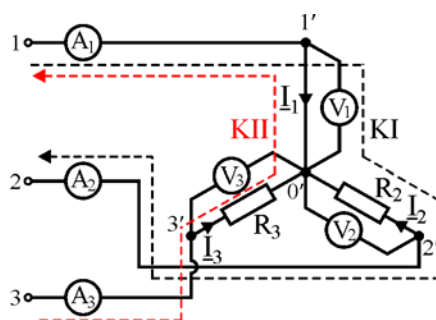
$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{12} + \underline{U}_{2'0'} = (129,75 - j74,91) \text{ V}.$$

Pokazivanje voltmetra V_1 je:

$$U_{V1} = U_{1'0'} = \sqrt{129,75^2 + 74,91^2} = 149,8 \text{ V}.$$

b.

Shema električnog kruga nakon kratkog spoja žarulja u fazi 1 prikazana je na slici 9. Naponi mreže definiraju se na isti način kao u dijelu zadatka a.



Slika 9. Shema električnog kruga nakon kratkog spoja u fazi 1

Tačke $1'$ i $0'$ su krakospojene, odnosno nalaze se na istom potencijalu (razlika potencijala ovih tačaka jednaka je nuli). Zato vrijedi:

$$\underline{U}_{1'0'} = 0 \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{V1} = 0 \text{ V}.$$

Za konturu KI naznačenu na slici 9. vrijedi:

$$\underline{U}_{12} - \underline{U}_{1'0'} + \underline{U}_{2'0'} = 0,$$

odnosno:

$$\underline{U}_{2'0'} = -\underline{U}_{12} = -173 = 173 \cdot e^{j180^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{V2} = \underline{U}_{2'0'} = 173 \text{ V}.$$

Za konturu KII naznačenu na slici 9. vrijedi:

$$\underline{U}_{31} - \underline{U}_{3'0'} + \underline{U}_{1'0'} = 0,$$

odnosno:

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{31} = 173 \cdot e^{j120^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{U}_{3'0'} = 173 \text{ V}.$$

Struje faza koje nisu u kratkom spoju su:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{R}} = -17,3 \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_{A2} = 17,3 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{R}} = 17,3 \cdot e^{j120^\circ} \text{ A} \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_{A3} = 17,3 \text{ A}.$$

Za čvor 0' vrijedi:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = -\underline{I}_2 - \underline{I}_3 = (26 - j15) \text{ A}.$$

Pokazivanje ampermetra \underline{A}_1 je:

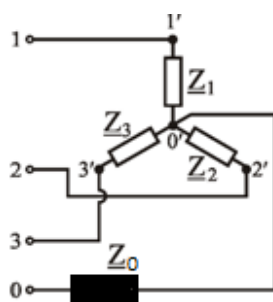
$$\underline{I}_{A1} = \underline{I}_1 = \sqrt{26^2 + 15^2} = 30 \text{ A}.$$

Zadatak 4.

Na trofazni simetrični generator prostoperiodičnih napona direktnog redoslijeda, u kojem je $\underline{U}_{10} = j110 \text{ V}$, priključeno je trošilo slijedećih karakteristika:

$$\underline{Z}_1 = 10 \Omega; \underline{Z}_2 = j10 \Omega; \underline{Z}_3 = -j10 \Omega.$$

Ovo trošilo formira spoj u zvijezdu. Iznos impedanse nul-vodiča koji spaja zvjezdište trošila sa zvjezdištem generatora je 10Ω . Opisana shema spoja prikazana je na slici 10. Odrediti struju kroz nul vodič.



Slika 10. Shema električnog kruga

Bitno:

Neuravnotežen potrošač i nul vodič sa pripadajućom impedansom imaju za posledicu da naponi na potrošačima neće biti jednaki odgovarajućim naponima na generatorima trofaznog sistema, odnosno uspostaviti će se napon između zvjezdišta 0' - 0. Napon između zvjezdišta se računa po formuli:

$$\underline{U}_{0'-0} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} \quad (*)$$

Naponi na fazama generatora se računaju prema sljedećem obrascu:

$$\underline{U}_{10} = j110 = 110 \cdot e^{j90^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{20} = U_{20} \cdot e^{j(90^\circ - 120^\circ)} = U_{20} \cdot e^{-j30^\circ} = 110 \cdot e^{-j30^\circ} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{30} = U_{30} \cdot e^{j(90^\circ - 240^\circ)} = U_{30} \cdot e^{-j150^\circ} = 110 \cdot e^{-j150^\circ} \text{ V}$$

Pri čemu je:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = 0,1[\text{S}];$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = -j0,1[\text{S}];$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = j0,1[\text{S}]$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{\underline{Z}_0} = 0,1[\text{S}]$$

Uvrštavajući odgovarajuće vrijednosti dobija se vrijednost napona $\underline{U}_{0'-0}$:

$$\underline{U}_{0'-0} = -j40,2[\text{V}]$$

Struja u nul vodiču iznosi:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_{0'-0}}{\underline{Z}_0} = -j4,02[\text{A}]$$

Za vježbu:

U zadatku 4. naći:

- sve napone na potrošačima;
- sve struje na potrošačima;
- ukoliko ne bi postojao nul vodič, koliki bi tada iznosio napon između zvjezdišta $\underline{U}_{0'-0}$?

Pomoć:

- Napone na potrošačima tražimo na način:

$$\underline{U}_{1'0'} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{0'0};$$

$$\underline{U}_{2'0'} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{0'0};$$

$$\underline{U}_{3'0'} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0};$$

- Struje na potrošačima tražimo na način:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1'0'}}{\underline{Z}_1};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2'0'}}{\underline{Z}_2};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3'0'}}{\underline{Z}_3};$$

- U jednačini (*) uvrstiti $\underline{Y}_0 = 0[\text{S}]!$