

**ZADACI - Grupe A i B**  
SA

**DRUGOG PARCIJALNOG ISPITA IZ PREDMETA**

**INŽENJERSKA MATEMATIKA 1**

Akademska 2008 - 2009. godina

Sarajevo, 09. 01. 2009.

IME I PREZIME STUDENTA : .....

BROJ INDEKSA : .....

JEDINSTVENI MATIČNI BROJ : .....

NASTAVNA GRUPA (BROJ) : .....

**UPUTSTVO:**

**1.** Za svaki od prvih četiri zadatka ponuđena su četiri odgovora od kojih je samo jedan tačan. Riješite ove zadatke, a zatim za svaki od zadataka koji ste riješili zaokružite redni broj pod kojim je naveden tačan odgovor za taj zadatak, pa taj broj upišite na odgovarajuće mjesto u dole navedenoj tabeli. Zaokruživanje više od jednog odgovora vrednuje se kao i netačan odgovor. Svaki tačan odgovor za koji je dato odgovarajuće obrazloženje s boduje sa po 2,5 boda/poena (prema naznačenom bodovanju uz zadatak), a svaki netačan odgovor se vrednuje sa po 0 bodova. Ukoliko se ne zaokruži niti jedan od ponuđenih četiri odgovora, kao i u slučaju kada za zaokruženi tačan odgovor nije dato zadovoljavajuće obrazloženje, za taj zadatak student ostvaruje 0 bodova.

**2.** Riješite detaljno peti zadatak, koji je s otvorenim odgovorom. Tačno urađen taj zadatak donosi 10 bodova. Boduju se i tačno urađeni dijelovi tog zadatka (pri tom bodovanju najmanja jedinica mjere je 0,5 bodova).

**3.** Nije dozvoljeno korištenje bilježaka, knjiga, kalkulatora, mobilnih telefona i bilo kakvih elektronskih uređaja, niti drugih pomagala, kao ni drugih papira osim uvezanih papira dobijenih za ovaj ispit. Takođe nije dozvoljen nikakav razgovor sa kolegama/studentima i dežurnim na ovom ispitu, tj. svaku izradu bilo kojeg od zadataka na ovom parcijalnom ispitu mora svaki kandidat samostalno uraditi. Svaki od kandidata koji prekrši bilo šta od ovdje navedenog, bit će isključen sa ovog ispita i ovaj njegov parcijalni ispit vrednovan sa 0 bodova.

**Rezultati drugog parcijalnog ispita iz IM1:**

Zad. 1. ....

Zad. 2. ....

Zad. 3. ....

Zad. 4. ....

Zad. 5. ....

---

**Ukupan broj ostvarenih bodova:**

**Vlastoručni potpis studenta:**

---

**Predmetni nastavnik:**

---

**Vanr. Prof. Dr. sci. Huse Fatkić**

**ZADACI - Grupa A:**  
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 09. 01. 2009.

**Zad. 1.** Naći sve pravolinijske asimptote krive linije zadane jednačinom:

**a)**  $y = x + \sqrt{x^2 - 2x}$ ; **b)**  $y = 1 - x + |x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x+3}}$ . **(1 p; 1,5 p)**

**a) I.**  $y = 2x, (x \rightarrow -\infty); y = 2x - 1, (x \rightarrow +\infty)$ . **III.**  $y = 1, (x \rightarrow -\infty); y = 2x - 1, (x \rightarrow +\infty)$ .  
**II.**  $y = 2x, (x \rightarrow \pm\infty)$ . **IV.**  $y = 2x - 1 (x \rightarrow -\infty); y = 2x + 1, (x \rightarrow +\infty)$ .

**b) I.**  $x = -3_{\pm}; y = \frac{5}{2} - 2x, (x \rightarrow \pm\infty)$ . **II.**  $x = -3; y = -\frac{1}{2}, (x \rightarrow \pm\infty)$ .

**III.**  $x = -3, (x \rightarrow -3_-); y = \frac{5}{2} - 2x, (x \rightarrow -\infty); y = -\frac{1}{2}, (x \rightarrow +\infty)$ .

**IV.**  $x = -3, (x \rightarrow -3_{\pm}); y = \frac{5}{2} - 2x, (x \rightarrow -\infty); y = -\frac{1}{2}, (x \rightarrow +\infty)$ .

**Zad. 2.** Izračunajte integrale  $I := \int \frac{dx}{3x + \sqrt{5+8x-4x^2}}$ ,  $J := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x \cos x} dx$ . **(1,5 p; 1 p)**

**I.**  $I = \frac{5}{39} \ln|5t+2| + \frac{1}{13} \ln|t+2| - \frac{3}{13} \ln|t^2+4| + \frac{4}{13} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{3} + C, J = \frac{2}{3}$ .

**II.**  $I = \frac{5}{39} \ln|5t-2| + \frac{1}{3} \ln|t+2| - \frac{3}{13} \ln|t^2+4| + \frac{4}{13} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2} + C, J = \frac{4}{3}$ .

**III.**  $I = \frac{5}{39} \ln|5t-2| + \frac{1}{13} \ln|t+2| - \frac{3}{13} \ln|t^2+4| + \frac{4}{13} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2} + C, J = \frac{2}{3}\pi$ .

**IV.**  $I = \frac{5}{39} \ln|5t-2| + \frac{1}{3} \ln|t+2| - \frac{3}{13} \ln|t^2+4| + \frac{4}{13} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t}{5} + C, J = \frac{4}{3}\pi$ .

Pri tome je  $t = \frac{2\sqrt{5+8x-4x^2}}{5-2x}$ , a  $C$  proizvoljna realna konstanta.

**Zad. 3.** Ako je  $g(x) := \frac{1}{1+2^x}$ , izračunajte:

**a)** derivaciju (izvod) prvog reda funkcije  $f(x) := g(x) + \int_{-x}^x \frac{t^2+1}{t-1} dt$  u tački  $x = \frac{1}{2}$ ; **(0,5 p + 1 p)**

**b)** integral  $I := \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}(g(x)) dx$ . **(1 p)**

**I.**  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2, I = -\frac{1}{3}$ .

**II.**  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{25} \ln 2 - \frac{10}{3}, I = \frac{2}{3}$ .

**III.**  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{16}{25} \ln 2, I = \frac{2}{3}$ .

**IV.**  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{3}, I = -\frac{1}{3}$ .

**Zad. 4.** Kriva  $C$  zadana je jednačinom  $xy^2 = 8 - 4x$ . Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom oko  $x$ -ose lika (u  $xy$ -ravni) ograničenog zadanom krivom  $C$  i pravom koja prolazi kroz prevojne tačke te krive. **(2,5 p)**

I.  $V = \frac{8\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    II.  $V = 8\pi \left( \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right)$ .    III.  $V = 8\pi \left( \ln \frac{2}{3} - 1 \right)$ .    IV.  $V = 8\pi \left( \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$ .

**Zad. 5.** Realna funkcija  $f$  jedne realne promjenljive zadana je formulom

$$f(x) := \sqrt[3]{\frac{x^4 - 2x^2}{x+1}}$$

- a) Odredite prirodni domen  $\text{Dom}(f)$ , a zatim ispitajte ponašanje funkcije  $f$  na rubovima područja  $\text{Dom}(f)$  i odredite njene eventualne asimptote. **(2 p)**
- b) Odredite eventualne presjeke grafika  $G(f)$  sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije  $f$ . **(1 p)**
- c) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju  $f$  i za funkciju  $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ , pri čemu je  $g(x) := \arctg \frac{x^2 + \lfloor n/2 \rfloor}{x^2 - \lfloor n/2 \rfloor}$ , gdje je  $n$  ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prvom parcijalnom ispitu iz IM1 održanom 5. 11. 2008. **(0,5 p + 1,5 p)**
- d) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije  $f$ , kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika. **(2 p)**
- e) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije  $f$ . **(0,5 p)**
- f) Nacrtajte grafik zadane funkcije  $f$  i odredite njenu sliku (rang)  $\text{Im}(f)$ . **(2 p + 0,5 p)**

.....@.....

**Rješenje:**

**ZADACI - Grupa B:**  
za drugi parcijalni ispit iz IM1, 09. 01. 2009.

**Zad. 1.** Naći sve pravolinijske asimptote krive linije zadane jednačinom:

**a)**  $y = x + \sqrt{x^2 + 2x}$ ; **b)**  $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$ . **(1 p; 1,5 p)**

**a) I.**  $y = 2x, (x \rightarrow -\infty); y = 2x + 1, (x \rightarrow +\infty)$ . **II.**  $y = -1, (x \rightarrow -\infty); y = 2x + 1, (x \rightarrow +\infty)$ .

**III.**  $y = 2x, (x \rightarrow \pm\infty)$ . **IV.**  $y = 2x - 1 (x \rightarrow -\infty); y = 2x + 1, (x \rightarrow +\infty)$ .

**b) I.**  $x = -3_{\pm}; y = \frac{5}{2} - 2x, (x \rightarrow \pm\infty)$ . **II.**  $x = -3; y = -\frac{1}{2}, (x \rightarrow \pm\infty)$ .

**III.**  $x = -3, (x \rightarrow -3_-); y = \frac{5}{2} - 2x, (x \rightarrow -\infty); y = -\frac{1}{2}, (x \rightarrow +\infty)$ .

**IV.**  $x = -3, (x \rightarrow -3_{\pm}); y = \frac{5}{2} - 2x (x \rightarrow -\infty); y = -\frac{1}{2}, (x \rightarrow +\infty)$ .

**Zad. 2.** Izračunajte integrale  $I := \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$ ,  $J := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \sqrt{\cos x} dx$ . **(1,5 p; 1 p)**

**I.**  $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x+2)^5}{(x-2)^2} \right| + C, J = \frac{2}{3}$ .

**II.**  $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C, J = \frac{4}{3}$ .

**III.**  $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^3(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C, J = \frac{2}{3}\pi$ .

**IV.**  $I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^5(x-2)^3}{(x+2)^2} \right| + C, J = \frac{4}{3}\pi$ .

Pri tome je  $C$  proizvoljna realna konstanta.

**Zad. 3.** Ako je  $g(x) := \frac{1}{1 + 2^x}$ , izračunajte:

**a)** derivaciju (izvod) prvog reda funkcije  $f(x) := g(x) + \int_{-x}^x \exp(-\frac{1}{t^2}) dt$  u tački  $x = \frac{1}{2}$ ; **(0,5 p + 1 p)**

**b)** integral  $I := \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}(g(x)) dx$ . **(1 p)**

**I.**  $f'(\frac{1}{2}) = 4\sqrt[4]{\frac{2}{e}} - \frac{1}{3}, I = \frac{2}{3}$ . **II.**  $f'(\frac{1}{2}) = (\frac{2}{e})^2 + \frac{16}{25} \ln 2, I = -\frac{1}{3}$ .

**III.**  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{e^4} + \frac{16}{25} \ln 2, I = \frac{2}{3}$ . **IV.**  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{e^4} - \frac{1}{3}, I = -\frac{1}{3}$ .

**Zad. 4.** Kriva  $C$  zadana je jednačinom  $xy^2 = 8 - 4x$ . Izračunajte površinu  $P$  lika u ravni  $Oxy$  ograničenog lukom zadane krive  $C$  i tetivom koja spaja prevojne tačke te krive. (2, 5 p)

$$\text{I. } P = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}. \quad \text{II. } P = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right). \quad \text{III. } P = 8\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right). \quad \text{IV. } P = 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

**Zad. 5.** Realna funkcija  $f$  jedne realne promjenljive zadana je formulom

$$f(x) := \sqrt[3]{\frac{x^4 - 2x^2}{x - 2}}.$$

- a) Odredite prirodni domen  $\text{Dom}(f)$ , a zatim ispitajte ponašanje funkcije  $f$  na rubovima područja  $\text{Dom}(f)$  i odredite njene eventualne asimptote. (2 p)
- b) Odredite eventualne presjeke grafika  $G(f)$  sa koordinatnim osama i ispitajte znak zadane funkcije  $f$ . (1 p)
- c) Odredite eventualne tačke prekida i singulariteta i klasificirajte ih za zadanu funkciju  $f$  i za funkciju  $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ , pri čemu je  $g(x) := \arctg \frac{x^2 + \lfloor n/2 \rfloor}{x^2 - \lfloor n/2 \rfloor}$ , gdje je  $n$  ukupan broj bodova koji ste ostvarili na prvom parcijalnom ispitnom iz IM1 održanom 5. 11. 2008. (0, 5 p + 1, 5 p)
- d) Odredite intervale monotonosti i eventualne tačke lokalnog i apsolutnog ekstrema zadane funkcije  $f$ , kao i eventualne prelomne i povratne tačke njenog grafika. (2 p)
- e) Ispitajte konveksnost i konkavnost i odredite eventualne prevojne tačke zadane funkcije  $f$ . (0, 5 p)
- f) Nacrtajte grafik zadane funkcije  $f$  i odredite njenu sliku (rang)  $\text{Im}(f)$ . (2 p + 0, 5 p)

.....@.....

### Napomena:

Upute, rješenja, rezultati i odgovori za ove ispitne zadatke ili za njihove analogone i neznatne modifikacije mogu se vidjeti u preporučenoj literaturi i/ili u materijalima za Predavanja iz *Inženjerske matematike 1 u akademskoj 2008/2009. godini*.

(<http://c2.etf.unsa.ba/>).

Uvezi rješenja Zad. 1. a), a i u vezi uputa za rješenja većine ostalih zadataka, sa ovog ispitnog roka može se vidjeti i u materijalima /pribilježskama sa pripreme nastave iz **IM1** održane 30. 12. 2008.

Pri tome u vezi rezultata odnosno rješenja Zad 1. b), Zad. 2 (za integral  $I$ ) i Zad. 5. sa ovog ispitnog roka možete vidjeti zadatke 383, 452. c) i 394. u zbirci [**Fatkić, H. - Mesihović, B.**, *Zbirka riješenih zadataka iz matematike I*, ETF, Sarajevo, 1973. (Tehnički odsjek Instituta za istoriju, Sarajevo); Corons, Sarajevo, 2002.], u vezi rješenja Zad. 2. (za integral  $J$ ) i Zad. 3. možete vidjeti zadatke 7.2, 12. 15. i 14.8. 2°. u knjizi [**Dragičević, V. - Fatkić, H.**, *Određeni i višestruki integrali*, Svjetlost, Sarajevo, 1979. (ili 1987., II izd.)], a uputu za Zad. 4. možete naći u knjizi [**Fatkić, H. - Dragičević, V.**, *Diferencijalni račun funkcija dviju i više promjenljivih*, Univerzitetska knjiga, IP Svjetlost - Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo, 2006.] (Poglavlje: Dodatak II. ISPITNI ZADACI IZ MATEMATIKE I / IM1: **Zad. 3. /str. 252**, sa ispitnog roka od 2. IX 1989; uputa i rezultat na str. 266/). Uvezi rješenja Zad. 1. a) a i u vezi uputa za rješenja većine ostalih zadataka sa ovog ispitnog roka može se vidjeti i u materijalima /pribilježskama sa pripreme nastave iz IM1 održane 30. 12. 2008.