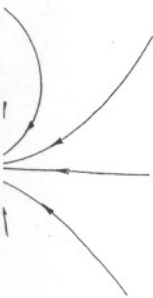
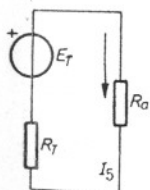
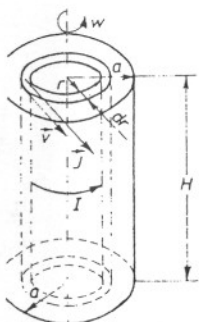
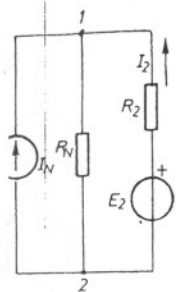
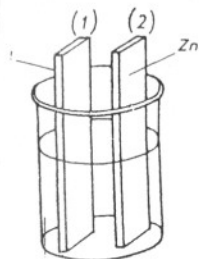


HILDEGARD BOŽILOVIĆ
ŽIVOJIN SPASOJEVIĆ
GRADIMIR BOŽILOVIĆ

ZBIRKA ZADATAKA IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE

ELEKTROSTATIKA
STALNE JEDNOSMERNE STRUJE



DR Hildegard Božilović
MR Živojin Spasojević
MR Gradimir Božilović

ZBIRKA ZADATAKA IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE

Elektrostatika, stalne jednosmerne struje

Izdavač
IP "Naučna Knjiga"
Beograd, Uzun-Mirkova 5

Recenzenti
Prof. dr *Jovan Surutka*
Prof. dr *Branko Popović*

Za izdavača
Dr *Blažo Perović*

Urednik
Marta Markov

Tehnički urednik
Miloje Drinjaković

Korice
Miloje Drinjaković

Tiraž: 1.000 primeraka

ISBN 86-23-42110-8

Štampa
"GRAFOMED" - Bor

SADRŽAJ

	Strana
1. ELEKTROSTATIKA	1-1
1.1. Kulonov zakon	1-1
1.2. Vektor jačine električnog polja	1-12
1.3. Rad sila električnog polja. Električni potencijal i napon	1-22
1.4. Fluks vektora jačine električnog polja. Gausov zakon	1-45
1.5. Provodnici u elektrostatičkom polju	1-53
1.6. Elektrostatička polja, potencijali i naponi pojedinih sistema i njihove kapacitivnosti	1-67
1.7. Dielektrični materijali u električnom polju	1-105
1.8. Energija i sile u elektrostatičkom polju	1-132
2. STALNE JEDNOSMERNE ELEKTRIČNE STRUJE	
2.1. Vektor gustine električne struje i intenzitet električne struje. Omv zakon u lokalnom obliku	2-1
2.2. Električna otpornost i električna provodnost Džulov zakon	2-24
2.3. Prosto električno kolo. Omv zakon	2-44
2.4. Kirhofovi zakoni	2-79
2.5. Metoda konturnih struja	2-106
2.6. Metoda napona između čvorova	2-128
2.7. Transfiguracije kola	2-146
2.8. Teorema superpozicije i teorema uzajamnosti	2-176
2.9. Tevenenova teorema i Nortonova teorema	2-187
2.10. Električna kola sa kondenzatorima	2-207

Zahvaljujemo se profesoru dr Jovanu Surutki, predmetnom nastavniku Osnova elektrotehnike na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, na pomoći i sugestijama s ciljem poboljšanja Zbirke.

Iako je materija obuhvaćena Zbirkom već najvećim delom postala klasična, autori su svesni toga da Zbirka ima izvesnih nedostataka i nepotpunosti, pa će sa zahvalnošću primiti i pažljivo proučiti sve primedbe i sugestije kako u vezi sa koncepcijom, tako i u vezi sa pojedinostima iz Zbirke.

Autori

Beograd, 19. novembar 1982.

1. ELEKTROSTATIKA

1.1. KULONOV ZAKON

1.1 Dva mala tela, naelektrisanja $Q_1 = 4 \cdot 10^{-11} \text{C}$ i $Q_2 = -6 \cdot 10^{-11} \text{C}$.

se nalaze u vakuumu na međusobnom rastojanju $r = 0,2 \text{ m}$. Odrediti vektor Kulonove sile kojom telo naelektrisanja Q_1 deluje na telo naelektrisanja Q_2 .

Rešenje:

Vektor Kulonove sile je određen Kulonovim zakonom:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{012} = F_{12} \cdot \vec{r}_{012},$$

gde je $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, a \vec{r}_{012} jedinični vektor međusobnog rastojanja naelektrisanih tela. Vektor \vec{r}_{012} je orijentisan prema telu na koje tražena

sila deluje, kao na sl. 1.1. U izrazu za Kulonovu silu, F_{12} je algebarski intenzitet sile* prema orijentaciji jediničnog vektora. Unošenjem zadatih vrednosti se dobija:

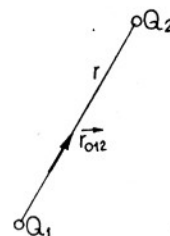
$$\vec{F}_{12} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-11} \text{C})(-6 \cdot 10^{-11} \text{C})}{(0,2 \text{ m})^2} \vec{r}_{012},$$

odnosno:

$$\vec{F}_{12} = -54 \cdot 10^{-11} \text{ N} \vec{r}_{012}.$$

Iz algebarskog intenziteta sile $F_{12} = -54 \cdot 10^{-11} \text{ N}$, zaključuje se da je

* Pod algebarskim intenzitetom sile podrazumeva se intenzitet sile sa



Sl. 1.1.

intenzitet sile:

$$|\vec{F}_{12}| = 54 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

i da je vektor sile suprotnog smera od jediničnog vektora, tj da je sila između naelektrisanih tela privlačna.

1.2 Izračunati elektrostatičku (Kulonovu) silu između dva elektrona, koji miruju i nalaze se na međusobnom rastojanju $r = 10^{-10} \text{ m}$, a zatim je uporediti sa gravitacionom silom između njih.

Naelektrisanje i masa elektrona u mirovanju su $Q_e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ i $m_e = 9,1083 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, a gravitaciona konstanta je $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Rešenje:

Kulonova sila između elektrona je odbojna, intenziteta:

$$F_e = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{(10^{-10})^2} \text{ N},$$

odnosno:

$$F_e = 23 \cdot 10^{-9} \text{ N}.$$

Gravitaciona sila između elektrona je privlačna, intenziteta:

$$F_g = \gamma \frac{m_e m_e}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{9,1083 \cdot 10^{-31} \cdot 9,1083 \cdot 10^{-31}}{(10^{-10})^2} \text{ N},$$

odnosno:

$$F_g = 5,53 \cdot 10^{-51} \text{ N}.$$

Odnos intenziteta ovih sila je:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{23 \cdot 10^{-9} \text{ N}}{5,53 \cdot 10^{-51} \text{ N}} = 4,159 \cdot 10^{42}.$$

Iz ovoga se zaključuje da je jačina gravitacione sile između elektrona za-

nemarljivo mala prema jačini Kulonove sile između njih.

1.3. Tri mala tela, naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 10^{-10} \text{ C}$ i $Q_3 = -10^{-10} \text{ C}$,

nalaze se u vazduhu u temenima jednakokraničnog trougla stranice dužine

$a = 1 \text{ cm}$. Odrediti vektor Kulonove sile na telo naelektrisanja Q_3

Rešenje:

Sile kojima tela naelektrisanja Q_1 i Q_2 deluju na telo naelektrisanja Q_3 su:

$$\vec{F}_{13} = k \frac{Q_1 Q_3}{a^2} \vec{r}_{013} = -9 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \vec{r}_{013} \quad \text{i}$$

$$\vec{F}_{23} = k \frac{Q_2 Q_3}{a^2} \vec{r}_{023} = -9 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \vec{r}_{023}$$

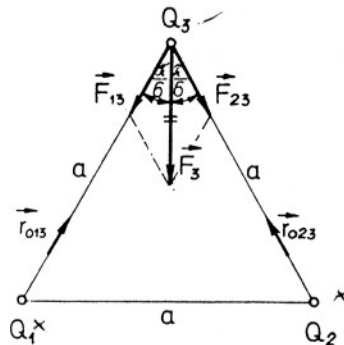
Jedinični vektori i vektori sile, određeni

gornjim izrazima, su predstavljeni na

sl. 1-3.

Rezultantna sila na telo naelektrisa-

nja Q_3 je: $\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$.



Sl. 1.3

Na osnovu prethodnog izraza i sl. 1.3. intenzitet rezultantne sile je:

$$F_3 = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 + 2F_{13} \cdot F_{23} \cdot \cos(\vec{F}_{13}, \vec{F}_{23})}$$

Unošenjem brojnih vrednosti dobija se:

$$F_3 = \sqrt{(9 \cdot 10^{-7})^2 + (9 \cdot 10^{-7})^2 + 2 \cdot 9 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-7} \cos \frac{\pi}{3}} \text{ N},$$

odnosno:

$$F_3 = 15,57 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

Vektor rezultantne sile je predstavljen na sl. 1.3. i sa vektorima

\vec{F}_{13} i \vec{F}_{23} zaklapa uglove od $\frac{\pi}{6}$.

1.4 Kuglica nepoznatog naelektrisanja Q_1 se nalazi, u vazduhu, na rastojanju $r = 0.1$ m od druge kuglice naelektrisanja $Q_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ C. Kulonova sila izmedju njih je privlačna, intenziteta $F_{12} = 9 \cdot 10^{-8}$ N. Odrediti nepoznato naelektrisanje Q_1

Rezultat:

$$Q_1 = -4\pi\epsilon_0 \frac{r^2 F_{12}}{Q_2} = -5 \cdot 10^{-10} \text{ C.}$$

1.5. Jezgro atoma deuterijuma (${}_1^2\text{H}$) deluje na elektron Kulonovom silom intenziteta $F = 8,1 \cdot 10^{-8}$ N. Odrediti rastojanje elektrona od jezgra.

Rezultat:

Pod pretpostavkom da su jezgro atoma deuterijuma i elektron kuglice naelektrisanja Q_e i $-Q_e$, rastojanje izmedju njih je:

$$r = \frac{Q_e}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi\epsilon_0 F}} = 0,533 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

1.6. U tri temena tetraedra ivice dužine $a = 3$ cm postavljena su mala tela jednakih naelektrisanja $Q = 2 \cdot 10^{-10}$ C. Odrediti elektrostaticku silu na telo probnog naelektrisanja $Q_p = 3 \cdot 10^{-12}$ C koje je postavljeno u četvrto teme tetraedra. Sva naelektrisana tela se nalaze u vazduhu.

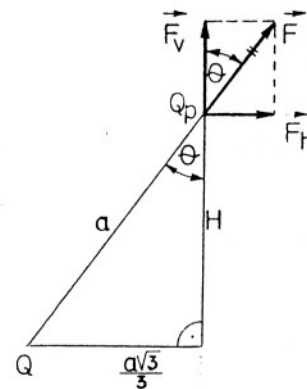
Rešenje:

Intenziteti elektrostatickih sila kojima tri naelektrisana tela deluju na telo probnog naelektrisanja Q_p su jednaki i iznose:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q Q_p}{a^2} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ N.}$$

Na slici 1.6. predstavljena je sila kojom jedno naelektrisano telo

deluje na telo probnog naelektrisanja, pri čemu sila leži u ravni određenoj visinom tetraedra i odgovarajućim temenom. Horizontalna i vertikalna kom-



Sl. 1.6.

ponenta sile \vec{F} su:

$$F_h = F \cdot \sin\theta \quad \text{i}$$

$$F_v = F \cdot \cos\theta$$

Horizontalne komponente leže u jednoj ravni i zaklapaju medju sobom uglove od $2\pi/3$, te je njihov vektorski zbir jednak nuli. Rezultantna sila na telo probnog naelektrisanja jedna-

ka je vektorskom zbiru vertikalnih komponenta pojedinih sila. S obzirom na to da su vertikalne komponente istog smera i intenziteta, to je intenzitet rezultantne sile:

$$F_R = 3 F_v = 3 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q_p}{a^2} \cos\theta$$

Prema sl. 1.6. je:

$$\cos\theta = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

pa je:

$$F_R = 1,47 \cdot 10^{-8} \text{ N.}$$

1.7. U temenima pravougaonika dužine stranica a i $b = 3$ cm, u vazduhu, nalaze se četiri kuglice jednakih naelektrisanja $Q = 10^{-12}$ C. Kolika treba da bude dužina stranice a i naelektrisanje Q_1 kuglice postavljene u centar pravougaonika, tako da, pod dejstvom Kulonovih sila, sve kuglice budu u ravnoteži?

1.4 Kuglica nepoznatog naelektrisanja Q_1 se nalazi, u vazduhu, na rastojanju $r = 0.1$ m od druge kuglice naelektrisanja $Q_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ C. Kulonova sila izmedju njih je privlačna, intenziteta $F_{12} = 9 \cdot 10^{-8}$ N. Odrediti nepoznato naelektrisanje Q_1 .

Rezultat:

$$Q_1 = -4\pi\epsilon_0 \frac{r^2 F_{12}}{Q_2} = -5 \cdot 10^{-10} \text{ C.}$$

1.5. Jezgro atoma deuterijuma (${}_1\text{H}^2$) deluje na elektron Kulonovom silom intenziteta $F = 8,1 \cdot 10^{-8}$ N. Odrediti rastojanje elektrona od jezgra.

Rezultat:

Pod pretpostavkom da su jezgro atoma deuterijuma i elektron kuglice naelektrisanja Q_e i $-Q_e$, rastojanje izmedju njih je:

$$r = \frac{Q_e}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi\epsilon_0 F}} = 0,533 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

1.6. U tri temena tetraedra ivice dužine $a = 3$ cm postavljena su mala tela jednakih naelektrisanja $Q = 2 \cdot 10^{-10}$ C. Odrediti elektrostaticku silu na telo probnog naelektrisanja $Q_p = 3 \cdot 10^{-12}$ C koje je postavljeno u četvrto teme tetraedra. Sva naelektrisana tela se nalaze u vazduhu.

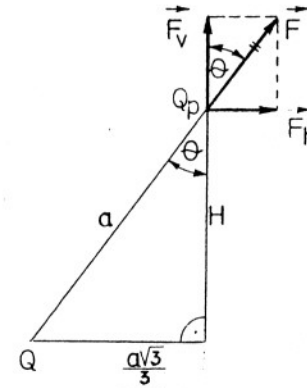
Rešenje:

Intenziteti elektrostatickih sila kojima tri naelektrisana tela deluju na telo probnog naelektrisanja Q_p su jednaki i iznose:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q Q_p}{a^2} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ N.}$$

Na slici 1.6. predstavljena je sila kojom jedno naelektrisano telo

deluje na telo probnog naelektrisanja, pri čemu sila leži u ravni određenoj visinom tetraedra i odgovarajućim temenom. Horizontalna i vertikalna kom-



Sl. 1.6.

ponenta sile \vec{F} su:

$$F_h = F \cdot \sin\theta \quad \text{i}$$

$$F_v = F \cdot \cos\theta$$

Horizontalne komponente leže u jednoj ravni i zaklapaju medju sobom uglove od $2\pi/3$, te je njihov vektorski zbir jednak nuli. Rezultantna sila na telo probnog naelektrisanja jedna-

ka je vektorskom zbiru vertikalnih komponenta pojedinih sila. S obzirom na to da su vertikalne komponente istog smera i intenziteta, to je intenzitet rezultantne sile:

$$F_R = 3 F_v = 3 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q_p}{a^2} \cos\theta$$

Prema sl. 1.6. je:

$$\cos\theta = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

pa je:

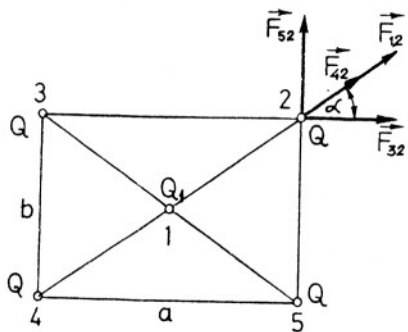
$$F_R = 1,47 \cdot 10^{-8} \text{ N.}$$

1.7. U temenima pravougaonika dužine stranica a i $b = 3$ cm, u vazduhu, nalaze se četiri kuglice jednakih naelektrisanja $Q = 10^{-12}$ C. Kolika treba da bude dužina stranice a i naelektrisanje Q_1 kuglice postavljene u centar pravougaonika, tako da, pod dejstvom Kulonovih sila, sve kuglice budu u ravnoteži?

Rešenje:

Sve kuglice su u ravnoteži (u mirovanju) kada je rezultantna Kulonova sila na svaku kuglicu jednaka nuli. Zbog međusobnog položaja i jednakih naelektrisanja kuglica u temenima pravougaonika, telo naelektrisanja Q_1 je u ravnoteži bez obzira na dužinu stranice a i naelektrisanje Q_1 .

Iz uslova ravnoteže kuglice u temenu pravougaonika označenom sa 2



Sl. 1.7.

na sl. 1.7, je:

$$F_{12} \cos \alpha + F_{32} + F_{42} \cos \alpha = 0$$

i

$$F_{12} \sin \alpha + F_{42} \sin \alpha + F_{52} = 0,$$

pri čemu je:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2},$$

$$F_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q}{a^2},$$

$$F_{42} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q}{d^2}, \quad F_{52} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q}{b^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{d}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{d} \quad \text{i} \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Na osnovu prethodnih jednačina se dobija:

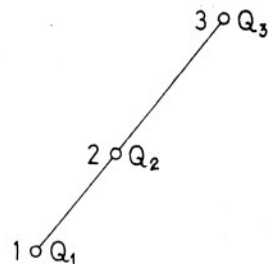
$$4 Q_1 \frac{a}{d^3} + \frac{Q}{a^2} + Q \frac{a}{d^3} = 0 \quad \text{i}$$

$$4 Q_1 \frac{b}{d^3} + \frac{Q \cdot b}{d^3} + \frac{Q}{b^2} = 0.$$

Rešenja ovih jednačina su:

$$a = b = 3 \text{ cm} \quad \text{i} \quad Q_1 = -\frac{Q}{4} (1 + 2\sqrt{2}) = -0,955 \cdot 10^{-12} \text{ C}.$$

1.8) Tri mala tela, naelektrisanja $Q_1 = 4 \cdot 10^{-11} \text{ C}$, nepoznatog naelektrisanja Q_2 i $Q_3 = 10^{-11} \text{ C}$, zauzimaju, u vazduhu, položaj kao što je prikazano na sl. 1.8. Rastojanje između tačaka označenih sa 1 i 3 je $r_{13} = 5 \text{ cm}$.



Sl. 1.8.

Određiti položaj i naelektrisanje Q_2 tako da se sva tela pod dejstvom Kulonovih sila nalaze u mirovanju.

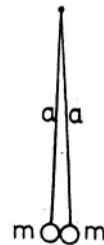
Rezultat: Odstojanje drugog tela od trećeg je:

$$r_{23} = \frac{r_{13}}{1 + \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}}} = 1,67 \text{ cm},$$

a njegovo naelektrisanje je:

$$Q_2 = -\frac{Q_1}{\left(1 + \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}}\right)^2} = -4,4 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

1.9) Dve kuglice jednakih dimenzija, svaka mase $m = 1 \text{ g}$, vise u vazduhu o koncima dužine $a = 10 \text{ cm}$, kao na sl. 1.9a. Kada se kuglice naelektrišu ukupnim naelektrisanjem $2Q$, one se odbiju tako da svaki konac obrazuje sa vertikalom ugao od $\frac{\pi}{36}$. Odrediti naelektrisanje kuglice.



Sl. 1.9a.

Na slici 1.9b. prikazan je ravnotežni položaj naelektrisanih kuglica.

Pošto su kuglice jednakih oblika i dimenzija, to su njihova naelektrisanja jednaka Q . Kulonova sila između njih je pravca i smera kao na

Rešenje:

sl. 1.9b ; a intenziteta:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q}{r^2}$$

Rezultantna sila na kuglicu je:

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_e$$

gde je $G = m \cdot g = 9,81 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

Sa sl. 1.9b. je:

$$F_e = G \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{36} \text{ pa je:}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = G \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{36}$$

Iz ove jednačine je:

$$Q = \pm \sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 \cdot G \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{36}} = \pm 53,85 \cdot 10^{-10} \text{ C.}$$

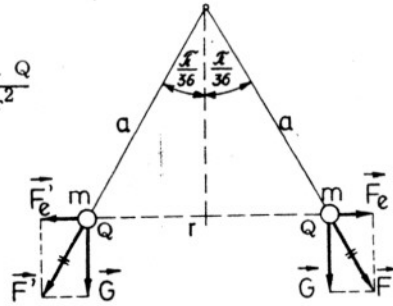
1.10. Kuglica mase $m = 1 \text{ g}$ obešena je o tanak nerastegljiv konac dužine $l = 0,1 \text{ m}$, a zatim dodirnutu kuglicom naelektrisanja $Q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Posle dodira obešena kuglica je zauzela položaj tako da konac zaklapa sa vertikalom ugao $\alpha = \frac{\pi}{18}$, a prineta kuglica je zadržana u početnom položaju obešene kuglice.

Odrediti naelektrisanja kuglica posle dodira.

Rešenje:

Ravnotežni položaj kuglica posle dodira prikazan je na

sl. 1.10. Na istoj slici predstavljene su sile koje deluju na obešenu kuglicu, pri čemu je Kulonova sila razložena na dve komponente, u pravcu konca \vec{F}' i u pravcu sile teže \vec{F}'' .



Sl. 1.9b.

U ravnoteži je:

$$F'' = F \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha} = G = mg,$$

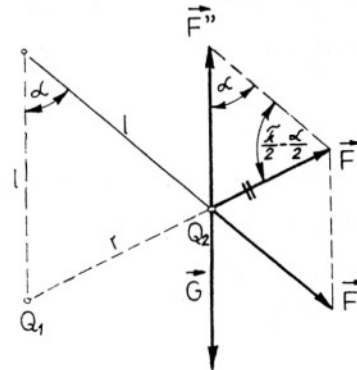
odnosno:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = mg,$$

pri čemu Q_1 i Q_2 označavaju naelektrisanja kuglica posle dodira.

Pošto je

$$Q_1 + Q_2 = Q, \text{ to se može}$$



Sl. 1.10.

pisati:

$$Q_1^2 - Q Q_1 + 32\pi m g \epsilon_0 l^2 \sin^3 \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Oдавde su:

$$Q'_1 = 1,65 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$Q''_1 = 0,35 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

i

$$Q'_2 = 0,35 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$Q''_2 = 1,65 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Prema tome, moguća rešenja su:

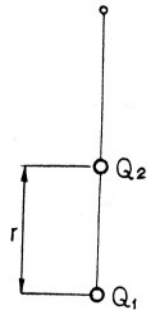
$$1^\circ Q'_1 = 1,65 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad \text{i} \quad 2^\circ Q''_1 = 0,35 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$Q'_2 = 0,35 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$Q''_2 = 1,65 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

1.11. Na vrlo dugačkom neprovodnom koncu zanemarljive mase, obešene su, u vazduhu, (sl. 1.11a) daleko od drugih tela, dve kuglice jednakih masa.

Naelektrisanja kuglica su $Q_1 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ i $Q_2 = -4 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.



Sl. 1.11a.

Odrediti masu kuglice i rastojanje izmedju njih tako da sile u koncu izmedju i iznad kuglica iznose $F_1 = 33 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ i $F_2 = 74 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

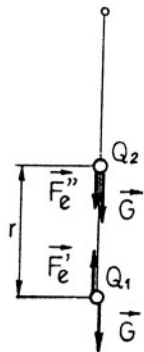
Rešenje:

Na sl. 1.11b. predstavljene su sile koje deluju na kuglice, pri čemu je:

$$F'_e = F''_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 |Q_2|}{r^2} \quad \text{i} \quad G = mg.$$

Sila u koncu izmedju kuglica je:

$$F_1 = G - F'_e = mg - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 |Q_2|}{r^2}$$



Sl. 1.11b.

Sila u koncu iznad kuglica je:

$$F_2 = G + G = 2mg.$$

Iz ovih jednačina, masa kuglica i rastojanje izmedju njih su:

$$m = \frac{F_2}{2g} = 3.76 \cdot 10^{-3} \text{ kg i}$$

$$r = \sqrt{\frac{Q_1 |Q_2|}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{F_2}{2} - F_1\right)}} = 0.52 \text{ m.}$$

1.12. Smatrajući da je u atomu vodonika putanja elektrona kružna. poluprečnika $r = 5.28 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, odrediti:

1° brzinu elektrona,

2° ugaonu brzinu elektrona

3° broj obrtaja elektrona u sekundi.

Rešenje:

Pretpostavljajući da su pri kretanju elektrona jedino Kulonova i centrifugalna sila u ravnoteži ima se:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_e^2}{r^2}$$

Na osnovu ove jednačine su:

1° Brzina elektrona

$$v = |Q_e| \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e r}} = 2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s.}$$

2° Ugaona brzina elektrona

$$\omega = \frac{v}{r} = 4.17 \cdot 10^{16} \text{ rad/s.}$$

3° Broj obrtaja elektrona u sekundi

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = 6.54 \cdot 10^{15} \text{ obr./s}$$

1.2. VEKTOR JAČINE ELEKTRIČNOG POLJA

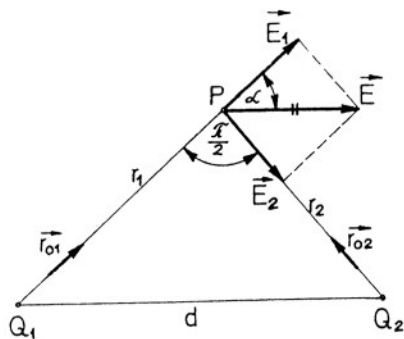
1.13. Dva mala tela, naelektrisanja $Q_1 = 6 \cdot 10^{-11} \text{C}$ i $Q_2 = -3 \cdot 10^{-11} \text{C}$, nalaze se u vazduhu na medjusobnom odstojanju $d=5 \text{cm}$. Odrediti vektor jačine električnog polja u tački koja se nalazi na rastojanju $r_1 = 4 \text{cm}$, i $r_2 = 3 \text{cm}$, od tela naelektrisanja Q_1 i Q_2 , respektivno.

Rešenje:

Vektor jačine elektrostatičkog polja u vazduhu na rastojanju r od usamljenog malog tela naelektrisanja Q se određuje prema:

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0 = E \cdot \vec{r}_0$$

gde je \vec{r}_0 jedinični vektor orijentisan, prema dogovoru, uvek od naelektrisanog tela ka posmatranoj tački u polju. U prethodnom izrazu E predstavlja algebarski intenzitet jačine električnog polja prema jediničnom vektoru \vec{r}_0 .



Sl. 1.13.

Posmatrajući posebno tela naelektrisanja Q_1 i Q_2 i odgovarajuća elektrostatička polja u tački P , vektori jačine ovih polja su:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{r}_{01} = 3,375 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}} \vec{r}_{01}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{r}_{02} = -3 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}} \vec{r}_{02}$$

Vektor jačine rezultantnog električnog polja je:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Prema rastojanjima d , r_1 i r_2 se zaključuje da je trougao čije su to stranice pravougli, sa pravim uglom kod tačke P . Zbog toga je intenzitet rezultantnog električnog polja u tački P :

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos(\vec{E}_1, \vec{E}_2)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 4,52 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

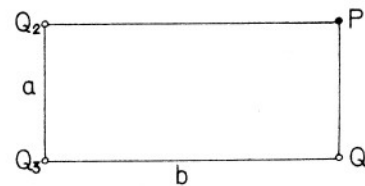
Ugao α (sl. 1.13.) koji obrazuju vektori \vec{E} i \vec{E}_1 je oštar i može se odrediti iz:

$$\cos \alpha = \frac{E^2 + E_1^2 - E_2^2}{2 E E_1} = \frac{E_1}{E} = 0,747$$

tj.:

$$\alpha = 41^{\circ}40'$$

1.14. U tri temena pravougaonika, čije su stranice dužina $a=10 \text{cm}$, i $b = a\sqrt{2}=14,1 \text{cm}$, postavljena su, u vazduhu, tri mala tela, naelektrisanja



Sl. 1.14. a.

$Q_1 = -10^{-10} \text{C}$, $Q_2 = 2 \cdot 10^{-10} \text{C}$ i $Q_3 = 3 \cdot 10^{-10} \text{C}$, kao što je prikazano na sl. 1.14 a. Odrediti vektor jačine električnog polja u četvrtom temenu pravougaonika (tačka P).

Rešenje:

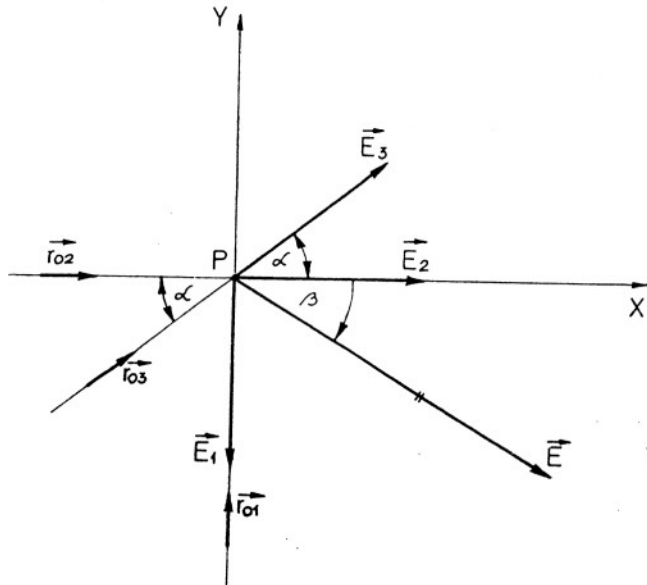
Posmatrajući posebno sva tri naelektrisana tela, za vektore jačine električnih polja u tački P se ima:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{a^2} \vec{r}_{o1} = -90 \frac{V}{m} \vec{r}_{o1}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{b^2} \vec{r}_{o2} = 90 \frac{V}{m} \vec{r}_{o2} \quad \text{i}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{a^2+b^2} \vec{r}_{o3} = 90 \frac{V}{m} \vec{r}_{o3}$$

Postavljajući koordinatni sistem xPy kao na sl. 1. 14. b, za projekcije vektora jačine resultantnog polja na ose koordinatnog sistema se dobija:



Sl. 1. 14. b.

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = 0 + E_2 + E_3 \cos \alpha = 163,5 \frac{V}{m} \quad \text{i}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = -E_1 + 0 + E_3 \sin \alpha = -38,1 \frac{V}{m}$$

Znači, vektor jačine resultantnog polja u tački P je:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = (163,5 \vec{i} - 38,1 \vec{j}) \frac{V}{m}$$

Jačina polja je:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 168 \frac{V}{m},$$

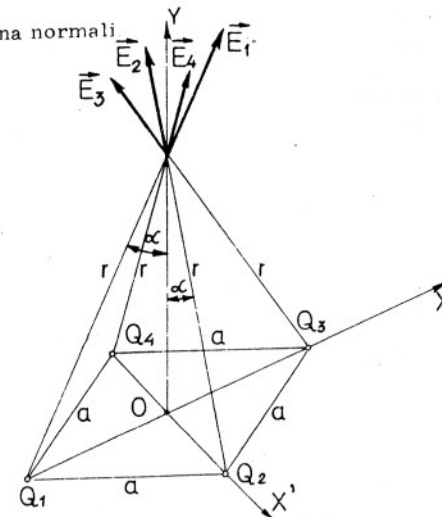
a ugao koji vektor E zaklapa sa x osom je:

$$\beta = \arctg \frac{E_y}{E_x} = -13^{\circ}8'$$

1.15 U temenima kvadrata stranice a nalaze se, u vazduhu, četiri mala tela, naelektrisanja Q_1 , Q_2 , Q_3 i Q_4 . Odrediti ova naelektrisanja tako da u svim tačkama normale koja prolazi kroz centar kvadrata električno polje bude jednako nuli

Rešenje:

Na slici 1. 15. su predstavljena naelektrisana tela i proizvoljno izabrana tačka na normali



Sl. 1. 15.

Projekcije vektora jačine električnih polja \vec{E}_1 i \vec{E}_3 na ose koordinatnog sistema (sl. 1. 15) su:

$$E_{1x} = E_1 \sin \alpha, \quad E_{1y} = E_1 \cos \alpha$$

$$E_{3x} = -E_3 \sin \alpha \quad \text{i} \quad E_{3y} = E_3 \cos \alpha,$$

gde su:

$$E_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \quad \text{i} \quad E_3 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_3}{r^2}.$$

Projekcije vektora jačine električnih polja \vec{E}_2 i \vec{E}_4 u koordinatnom sistemu $x' O y'$ (sl. 1. 15) su:

$$E_{2x'} = -E_2 \sin \alpha, \quad E_{2y'} = E_2 \cos \alpha$$

$$E_{4x'} = E_4 \sin \alpha \quad \text{i} \quad E_{4y'} = E_4 \cos \alpha$$

gde su:

$$E_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_2}{r^2} \quad \text{i} \quad E_4 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_4}{r^2}.$$

Pošto su ose Ox i Ox' ortogonalne, da bi električno polje u tački F bilo jednako nuli mora biti:

$$E_{1x} + E_{3x} = 0,$$

$$E_{2x'} + E_{4x'} = 0 \quad \text{i}$$

$$E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} + E_{4y} = 0.$$

Smenom odgovarajućih izraza za projekcije vektora polja, se dobija:

$$Q_1 - Q_3 = 0,$$

$$-Q_2 + Q_4 = 0 \quad \text{i}$$

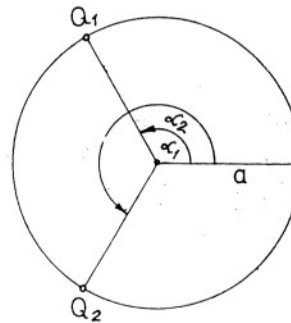
$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0.$$

Za proizvoljno izabrano jedno naelektrisanje ostala naelektrisanja se mogu odrediti iz prethodnih jednačina. Na primer, za izabrano Q_1 ostala naelektrisanja su:

$$Q_2 = -Q_1, \quad Q_3 = Q_1 \quad \text{i} \quad Q_4 = -Q_1.$$

Za mala tela raspoređena kao na sl. 1. 15, a čija naelektrisanja zadovoljavaju prethodne uslove, kaže se da obrazuju kvadrupol.

1. 16 Dva mala tela, nepoznatog naelektrisanja Q_1 i $Q_2 = 2 \cdot 10^{-11} \text{C}$, postavljena su na kružnoj liniji poluprečnika a , u vazduhu, tako da je njihov položaj određen uglovima $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$ i $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$ kao na sl. 1. 16 a.



Sl. 1. 16. a.

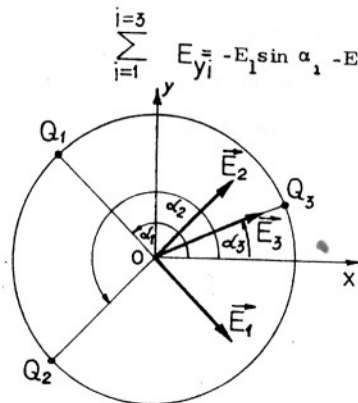
Odrediti naelektrisanje Q_1 i položaj trećeg tela naelektrisanja $Q_3 = -4 \cdot 10^{-11} \text{C}$ na kružnoj liniji tako da električno polje u centru kruga bude jednako nuli.

Rešenje:

Za usvojeni koordinatni sistem i pretpostavljeni položaj tela naelektrisanja Q_3 , prikazanih sl. 1. 16b, da bi električno polje u centru kruga bilo jednako nuli

mora biti:

$$\sum_{i=1}^{j=3} E_{xi} = -E_1 \cos \alpha_1 - E_2 \cos \alpha_2 + E_3 \cos \alpha_3 = 0 \quad \text{i}$$



Sl 1.16 b

$$\sum_{i=1}^3 E_{yi} = -E_1 \sin \alpha_1 - E_2 \sin \alpha_2 + E_3 \sin \alpha_3 = 0,$$

gde su:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{a^2},$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{a^2} \quad i$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_3|}{a^2}$$

$$\text{Za } \alpha_1 = \frac{3\pi}{4} \quad i \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{4},$$

iz prethodnih jednačina

se dobija:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} Q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} Q_2 + |Q_3| \cos \alpha_3 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

i

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} Q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} Q_2 + |Q_3| \sin \alpha_3 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Sabiranjem poslednjih jednačina ima se:

$$\sqrt{2} Q_2 + |Q_3| (\sin \alpha_3 + \cos \alpha_3) = 0,$$

odnosno:

$$-\frac{\sqrt{2} Q_2}{|Q_3|} = \sqrt{2} \sin \left(\alpha_3 + \frac{\pi}{4} \right).$$

Oдавde je:

$$\alpha_3 = \frac{11}{12} \pi,$$

i

$$\alpha_3 = \frac{19}{12} \pi$$

Iz jednačina (1) i (2) za naelektrisanje Q_1 se dobija:

$$Q_1 = \pm \sqrt{3} Q_2, \quad i \text{ to:}$$

$$\text{Za } \alpha_3 = \frac{11}{12} \pi \text{ je } Q_1' = \sqrt{3} Q_2 = 3,46 \cdot 10^{-11} \text{ C} \quad i$$

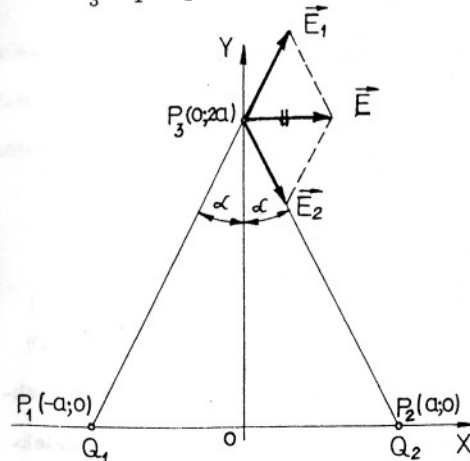
$$\text{za } \alpha_3 = \frac{19}{12} \pi \text{ je } Q_1'' = -\sqrt{3} Q_2 = -3,46 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

1.17. Položaj dva mala tela nepoznatih naelektrisanja Q_1 i Q_2 ,

u vazduhu, određen je tačkama $P_1(-a; 0)$ i $P_2(a; 0)$, respektivno. Vektor jačine električnog polja u tački $P_3(0; 2a)$ je $\vec{E} = E_x \vec{i}$, pri čemu je E_x pozitivno. Odrediti naelektrisanja Q_1 i Q_2 .

Rešenje: Posmatrajući posebno telo naelektrisanja Q_1 i telo naelektrisanja Q_2 ,

zaključuje se da vektori jačina odgovarajućih električnih polja u tački P_3 , E_1 i E_2 , leže na pravama određenim tačkama P_1 i P_3 , odnosno



Sl. 1.17.

P_2 i P_3 . Vektor jačine električnog polja u tački P_3 je:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \dots \dots \dots (1)$$

Prema orijentaciji zadatog vektora \vec{E} i prethodnog razmatranja se zaključuje da su vektori \vec{E}_1 i \vec{E}_2 usmereni kao na sl. 1.17.

Iz ovoga sledi da je $Q_1 > 0$ i

$Q_2 < 0$.

Na osnovu (1) ima se:

$$E_x \vec{i} = (E_{1x} + E_{2x}) \vec{i} + (E_{1y} + E_{2y}) \vec{j},$$

$$\text{odnosno } E_{1x} + E_{2x} = E_x \quad i$$

$$E_{1y} + E_{2y} = 0.$$

Kako je prema sl. 1.17 :

$$E_{1y} = E_1 \cos \alpha \text{ i } E_{2y} = - E_2 \cos \alpha ,$$

gde su :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{5a^2} \text{ i } E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_2|}{5a^2} ,$$

to se iz predhodnih jednačina dobija $Q_1 = |Q_2|$.

Pošto je već zaključeno da je $Q_1 > 0$ i $Q_2 < 0$, to je :

$$Q_1 = - Q_2 .$$

Sada je :

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{5a^2} \sin \alpha + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_2|}{5a^2} \sin \alpha$$

tj.:

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{5a^2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} , \text{ jer je } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} .$$

Za Q_1 se dobija :

$$Q_1 = 10 \sqrt{5} \cdot \pi\epsilon_0 a^2 E_x .$$

1.18. Položaj dva mala tela, naelektrisanja $Q_1 = -3 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ i $Q_2 = -7 \cdot 10^{-11} \text{ C}$, koja se nalaze u vazduhu, odredjen je tačkama $P_1 (-1 \text{ cm}; 0)$ i $P_2 (3 \text{ cm}; 0)$. Kada se tela dodirnu, a zatim vrata u prvobitne položaje, vektor jačine električnog polja u tački $P (0; 1 \text{ cm})$ je $\vec{E} = E_y \vec{j}$. Odrediti naelektrisanja tela Q_1 i Q_2 posle dodira.

Rezultat: Naelektrisanja tela posle dodira su:

$$Q_1' = -2,1 \cdot 10^{-11} \text{ C} \text{ i } Q_2' = -7,9 \cdot 10^{-11} \text{ C} .$$

1.19 U homogenom električnom polju jačine E lebdi pozitivno naelektrisana kapljica ulja mase m . Odrediti naelektrisanje kapljice i smer vektora jačine električnog polja.

Rezultat:

Naelektrisanje kapljice je:

$$Q = \frac{g \cdot m}{E} , \text{ a smer vektora jačine električnog polja je suprotan smeru sila teže.}$$

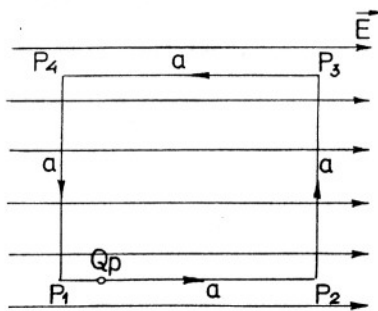
1.20. Malo telo težine G i naelektrisanja Q ($Q > 0$) obešeno je o tanak, nerastegljiv i neprovodan konac. Kada se telo unese u homogeno elektrostatičko polje usmereno vertikalno naviše, sila zatezanja konca je F . Odrediti jačinu elektrostatičkog polja u koje je uneto malo telo.

Rezultat:

$$\text{Jačina elektrostatičkog polja je } E = \frac{G \cdot F}{Q} .$$

1. 3. RAD SILA ELEKTRIČNOG POLJA. ELEKTRIČNI POTENCIJAL I NAPON

1. 21) U homogenom električnom polju, čije su linije polja prikazane na sl. 1. 21a, izvršeno je, pod dejstvom mehaničke sile i sile polja, pomeranje tela probnog naelektrisanja Q_p po kvadratnoj putanji $P_1 P_2 P_3 P_4 P_1$ u označenom smeru (sl. 1. 21a.) Odrediti:



Sl. 1. 21. a.

1° Rad sila električnog polja na pojedinim pravolinijskim delovima putanje.

2° Ukupan rad sila električnog polja pri pomeranju duž putanje

$P_1 P_2 P_3 P_4 P_1$.

Rešenje je:

Kada se malo naelektrisa-
no telo pravolinijski pome-

ra u homogenom električnom polju, rad sila električnog polja se određuje iz:

$$A = Q E l \cos (\vec{E}, \vec{l}).$$

Prethodni izraz se može predstaviti i u vektorskom obliku, kao:

$$A = Q \vec{E} \cdot \vec{l}$$

1° Radovi sila električnog polja na pojedinim pravolinijskim delovima putanje su:

$$\text{od } P_1 \text{ do } P_2: A_1 = Q_p E \overline{P_1 P_2} \cos (\vec{E}, \overline{P_1 P_2}) = Q_p E a \cos 0 = Q_p E \cdot a.$$

$$\text{od } P_2 \text{ do } P_3: A_2 = Q_p E \overline{P_2 P_3} \cos (\vec{E}, \overline{P_2 P_3}) = Q_p E a \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\text{od } P_3 \text{ do } P_4: A_3 = Q_p E \overline{P_3 P_4} \cos (\vec{E}, \overline{P_3 P_4}) = Q_p E a \cos \pi = -Q_p E a,$$

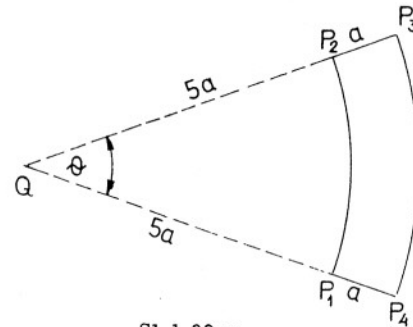
$$\text{od } P_4 \text{ do } P_1: A_4 = Q_p E \overline{P_4 P_1} \cos (\vec{E}, \overline{P_4 P_1}) = Q_p E a \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

2° Ukupni rad sila električnog polja pri pomeranju duž putanje

$P_1 P_2 P_3 P_4 P_1$ je:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = Q_p E \cdot a + 0 + (-Q_p E a) + 0 = 0.$$

1. 22) Odrediti rad sila polja malog tela naelektrisanja $Q = 10^{-10} \text{ C}$ pri pomeranju probnog naelektrisanja $Q_p = 10^{-14} \text{ C}$, u vazduhu, iz tačke P_1 u tačku P_3 , koristeći delove putanje $P_1 P_2 P_3 P_4 P_1$, za koju je $a = 1 \text{ m}$. (sl. 1. 22a)



Sl. 1. 22. a.

Rešenje je:

Kako električno polje nije homogeno, a ni putanja između tačaka P_1 i P_3 pravolinijska, to se rad sila električnog polja izračunava prema:

$$A = Q_p \int \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

Ovde je $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0$, a $d\vec{l}$ vektor elementarnog pomeraja probnog naelektrisanja Q_p , orijentisan prema smeru pomeranja

Pri pomeranju probnog naelektrisanja duž putanje $P_1 P_2 P_3$ (sl. 1. 22b)

rad sila električnog polja je:

$$A = Q_p \int_{P_1 P_2 P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \text{ odnosno}$$

1.23. Na odstojanju $r_1=1$ cm od neokretnog malog tela neoznatog

naelektrisanja Q nalazi se, u vazduhu, telo probnog naelektrisanja $Q_p=10^{-12}$ C. Kada se probno naelektrisanje pomeri duž linije sile polja na rastojanje $r_2=1$ m od neokretnog malog tela, rad sila elektrostatičkog polja je $A=178,2 \cdot 10^{-11}$ J. Odrediti nepoznato naelektrisanje Q .

Rezultat:

Izraz za rad sila elektrostatičkog polja pri pomeranju

probno naelektrisanja je:

$$A = \frac{Q Q_p}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Iz prethodnog izraza je:

$$Q = \frac{4 \pi \epsilon_0 r_1 r_2 A}{Q_p (r_2 - r_1)} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

1.24. Malo telo naelektrisanja $Q = 10^{-10}$ C nalazi se u vazduhu.

Odrediti potencijal tačaka udaljenih $r_1=2$ m od tela, uzimajući za tačku referentnog potencijala:

1^o tačku u beskonačnosti, i

2^o tačku na rastojanju $r_0 = 0,5$ m od naelektrisanog tela.

Rešenje:

Izraz za potencijal tačke P u polju, prema referentnoj

tački R , je:

$$V_P = \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

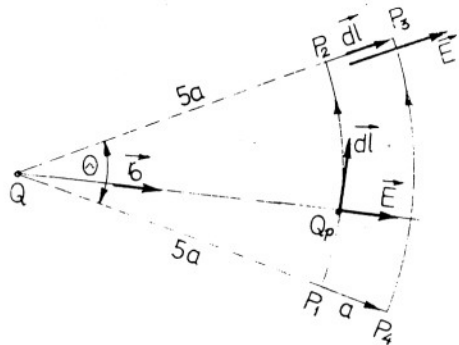
U ovom slučaju elektrostatičko polje je radijalno, intenziteta:

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$A = Q_p \left[\int_{P_1 P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_2 P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right] = Q_p \left[\int_{P_1 P_2} Edl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{P_2 P_3} Edl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) \right]$$

$$A = Q_p \left[\int_{P_1 P_2} Edl \cos \frac{\pi}{2} + \int_{P_2 P_3} Edl \cos(0) \right] = Q_p \int_{P_2 P_3} Edl, \text{ tj:}$$

$$A = Q_p \int_{r_1=5a}^{r_2=6a} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q_p Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1=5a}^{r_2=6a} = \frac{Q_p Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{5a} - \frac{1}{6a} \right) = 3 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$



Sl. 1.22. b.

Za putanju $P_1 P_2 P_3$, rad sila elektrostatičkog polja je:

$$A' = Q_p \left[\int_{P_1 P_2} Edl \cos 0 + \int_{P_2 P_3} Edl \cos \frac{\pi}{2} \right]$$

odnosno:

$$r_2=6a$$

$$A' = Q_p \int_{r_1=5a}^{r_2=6a} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = 3 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

Na osnovu dobijenih rezultata ($A' = A$) se zaključuje da rad sila elektrostatičkog polja ne zavisi od obli-

ka putanje između tačaka P_1 i P_3 . Takođe se može zaključiti da je:

$$Q_p \int_{P_1 P_2 P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} - Q_p \int_{P_1 P_4 P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

odnosno:

$$\int_{P_1 P_2 P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_3 P_4 P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ tj:}$$

$$\oint_{P_1 P_2 P_3 P_4 P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

što važi za sva elektrostatička polja.

te je najpovoljnije izabrati putanju duž linije sile polja u cilju izračunavanja potencijala.

$$1^{\circ} \quad V_P = \int_P^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_P}^{\infty} E \, dr \cos(\vec{E}, d\vec{r}) = \int_{r_P}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \, dr (+1)$$

odnosno:

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_P}$$

Za $r_P = r_1 = 2 \text{ m}$, se dobija:

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} = 0,45 \text{ V.}$$

$$2^{\circ} \quad V_P = \int_P^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^P \vec{E} \cdot (-d\vec{r}) = - \int_{r_0}^{r_P} E \, dr \cos(\vec{E}, d\vec{r}) = - \int_{r_0}^{r_P} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} (+1) \text{ odnosno.}$$

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Za $r_P = 2 \text{ m}$ i $r_0 = 0,5 \text{ m}$, je:

$$V_P = -1,35 \text{ V}$$

Iz ovoga se vidi da potencijal tačke u polju zavisi od izbora tačke referentnog potencijala.

1 25. Dokazati da se potencijali tačke sračunati prema različitim tačkama referentnog potencijala međusobno razlikuju za aditivne konstante.

Rešenje:

Potencijali tačke P za referentne tačke R_1 i R_2 (sl. 1. 25)

su:

$$V_P = \int_P^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

i

$$V_P' = \int_P^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Prema slici 1. 25. je:

$$V_P' = \int_P^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_P + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Sl. 1. 25.

Ako su tačke R_1 i R_2 nepokretne, tada je:

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \text{Const.}$$

Zbog toga je:

$$V_P' = V_P + \text{Const.}$$

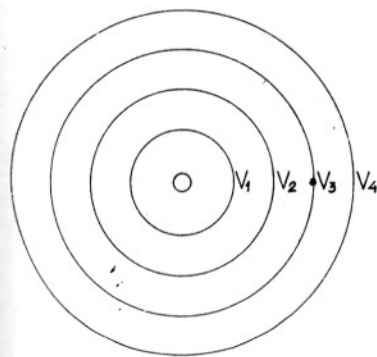
1 26 Na slici 1. 26. je prikazano nekoliko ekvipotencijalnih linija polja malog naelektrisanog tela za tačku referentnog potencijala u beskonačnosti.

Određiti potencijale ovih linija uzimajući da se tačka referentnog potencijala nalazi na liniji čiji je prvobitni potencijal V_3 .

Rezultat: Novi potencijali su:

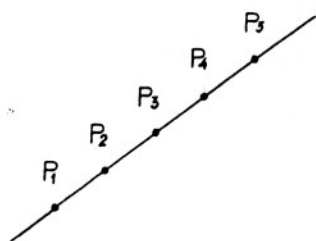
$$V_1' = V_1 - V_3; \quad V_2' = V_2 - V_3;$$

$$V_3' = 0 \text{ i } V_4' = V_4 - V_3$$



Sl. 1. 26.

1.27. Tačke P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5 se nalaze na jednoj liniji homogenog elektrostatičkog polja (slika 1.27) na jednakim međusobnim rastojanjima.



Sl. 1.27.

Razlika potencijala tačaka P_2 i P_4 je:

$$V_2 - V_4 = 40 \text{ V.}$$

Odrediti potencijale tačaka P_2 i P_4 uzimajući za referentne:

1^o tačku P_1 ,

2^o tačku P_3 , i

3^o tačku P_5 .

Rešenje:

Vektor elektrostatičkog polja je usmeren od tačke većeg potencijala ka tački manjeg potencijala na liniji polja, pa je u ovom slučaju usmeren od tačke P_2 ka tački P_4 . Kako je elektrostatičko polje homogeno, to se njegov intenzitet može izračunati iz:

$$E = \left| -\frac{\Delta V}{P_2 P_4} \right| = \frac{V_2 - V_4}{P_2 P_4}$$

Za homogeno polje i pravolinijsku putanju je:

$$V_P = \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^R E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = E \cdot PR \cos(\vec{E}, \vec{PR})$$

Primenom predhodnog izraza je:

1^o

$$V_2' = -E \cdot \overline{P_2 P_1} = -\frac{V_2 - V_4}{P_2 P_4} \cdot \overline{P_2 P_1} = -20 \text{ V, i}$$

$$V_4' = -E \cdot \overline{P_4 P_1} = -\frac{V_2 - V_4}{P_2 P_4} \cdot \overline{P_4 P_1} = -60 \text{ V.}$$

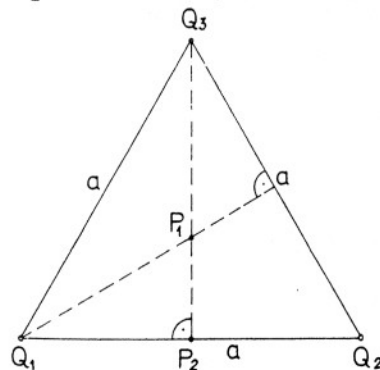
$$2^{\circ} \quad V_2'' = E \cdot \overline{P_2 P_3} = \frac{V_2 - V_4}{P_2 P_4} \cdot \overline{P_2 P_3} = 20 \text{ V}$$

$$V_4'' = -E \cdot \overline{P_4 P_3} = -\frac{V_2 - V_4}{P_2 P_4} \cdot \overline{P_4 P_3} = -20 \text{ V}$$

$$3^{\circ} \quad V_2''' = E \cdot \overline{P_2 P_5} = \frac{V_2 - V_4}{P_2 P_4} \cdot \overline{P_2 P_5} = 60 \text{ V}$$

$$V_4''' = E \cdot \overline{P_4 P_5} = \frac{V_2 - V_4}{P_2 P_4} \cdot \overline{P_4 P_5} = 20 \text{ V.}$$

1.28. Tri mala tela u vazduhu, nepoznatog naelektrisanja Q_1 i poznatih $Q_2 = 2 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ i $Q_3 = -4 \cdot 10^{-11} \text{ C}$, se nalaze u temenima jednakostraničnog



Sl. 1.28.

trougla dužine stranice $a = 10 \text{ cm}$. Odrediti naelektrisanje Q_1 tako da razlika potencijala tačaka P_1 i P_2 (slika 1.28) bude

$$V_1 - V_2 = -1,8 \text{ V.}$$

Rešenje:

Potencijali tačaka P_1 i P_2 su:

$$V_1 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 a} (Q_1 + Q_2 + Q_3) \text{ i}$$

$$V_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 a} (Q_1 + Q_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} Q_3)$$

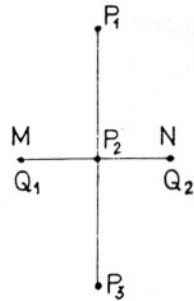
Razlika potencijala je:

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \left[(\sqrt{3} - 2)(Q_1 + Q_2) + \frac{\sqrt{3}}{3} Q_3 \right],$$

pa je, iz prethodnog:

$$Q_1 = -3,11 \cdot 10^{-11} \text{ C.}$$

1. 29. Dva mala tela, u vazduhu, naelektrisanja $Q_1 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ i $Q_2 = -6 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, su prikazana slikom 1. 29, pri čemu je $\overline{MN} = \overline{MP_1} = \overline{MP_3} = \overline{NP_1} =$



Sl. 1. 29.

$= a = 3 \text{ cm}$. Odrediti rad sila elektrostatičkog polja pri pomeranju malog tela naelektrisanja $Q = 10^{-10} \text{ C}$ duž putanja:

- 1° od tačke P_1 do tačke P_2
- 2° od tačke P_2 do tačke P_3
- 3° od tačke P_1 do tačke P_3 .

Rešenje:

Rad sila elektrostatičkog polja pri pomeranju tela naelektrisanja Q duž putanje od tačke C do tačke D je:

$$A = Q \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q \int_C^R \vec{E} \cdot d\vec{l} + Q \int_R^D \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

gde je R proizvoljna tačka na putanji od tačke C do tačke D . Uzimajući tačku R za tačku referentnog potencijala, može se pisati:

$$A = Q \int_C^R \vec{E} \cdot d\vec{l} - Q \int_D^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q(V_C - V_D).$$

Na osnovu ovoga je:

$$1^\circ A_1 = Q(V_{P_1} - V_{P_2}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} (Q_1 + Q_2) = 9 \cdot 10^{-9} \text{ J}.$$

$$2^\circ A_2 = Q(V_{P_2} - V_{P_3}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} (Q_1 + Q_2) = -9 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

$$3^\circ A_3 = Q(V_{P_1} - V_{P_3}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} (Q_1 + Q_2 - Q_1 - Q_2) = 0$$

Čitaocu se preporučuje da ove radove odredi koristeći osnovni

izraz za rad sila elektrostatičkog polja:

$$A = \int_C^D \vec{F}_e \cdot d\vec{l}, \quad \text{gde je } \vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}.$$

1. 30. Na rastojanju $r_1 = 0,5 \text{ m}$ od malog tela naelektrisanja Q , potencijal tačaka je $V_1 = 3 \text{ kV}$. Odrediti potencijal i jačinu elektrostatičkog polja u tačkama na rastojanju $r_2 = 2r_1$, $r_3 = 3r_1$ i $r_4 = 4r_1$ od malog naelektrisanog tela. Grafički predstaviti ove veličine. Sredina je vazduh, a tačka referentnog potencijala u beskonačnosti.

Rešenje:

Iz izraza za potencijal:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} \quad \text{je:}$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r_1 V_1, \quad \text{pa su izrazi za potencijal i jačinu}$$

elektrostatičkog polja u tački na rastojanju r od naelektrisanog tela:

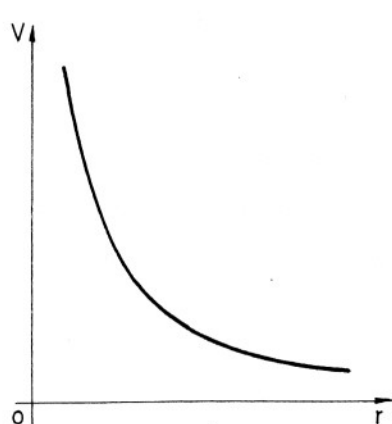
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{V_1 r_1}{r}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{V_1 r_1}{r^2}$$

Rezultati su predstavljeni u sledećoj tabeli:

r [m]	V [kV]	E [$\frac{\text{kV}}{\text{m}}$]
0,5	3	6
1	1,5	1,5
1,5	1	0,67
2	0,75	0,375

Na slici 1. 30a i 1. 30b su predstavljeni grafici potencijala i jačine elektrostatičkog polja.



Sl. 1. 30. a.



Sl. 1. 30. b.

1. 31. Ekvipotencijalna površina čiji je potencijal $V_1 = 20\text{V}$, prema referentnoj tački u beskonačnosti, u polju malog tela naelektrisanja Q , u vazduhu, je sfera poluprečnika $r_1 = 1\text{ m}$. Odrediti poluprečnike ekvipotencijalnih površina čija je razlika potencijala $\Delta V = 10\text{V}$, polazeći od zadate ekvipotencijalne površine.

Rešenje:

Prema uslovima zadatka je:

$$V_{k+1} - V_k = \Delta V, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

odnosno:

$$V_{k+1} = V_k + \Delta V,$$

tj.:

$$V_{k+1} = V_1 + k \Delta V.$$

Kako je:

$$V_{k+1} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r_{k+1}} = \frac{V_1 r_1}{r_{k+1}} \quad \text{to je:}$$

$$\frac{V_1 r_1}{r_{k+1}} = V_1 + k \Delta V$$

a odavde je:

$$r_{k+1} = \frac{r_1}{1 + k \frac{\Delta V}{V_1}}$$

za $k = 1$ i $k = 2$ je:

$$r_2 = 0,67 \text{ m.}$$

$$r_3 = 0,5 \text{ m.}$$

1. 32. Malo telo naelektrisanja $Q = 5 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ se nalazi u vazduhu.

Odrediti poluprečnike ekvipotencijalnih površina čiji su potencijali $V_5 = 45\text{V}$, $V_4 = 36\text{V}$, $V_3 = 27\text{V}$, $V_2 = 18\text{V}$, $V_1 = 9\text{V}$ i $V_0 = 0$, prema referentnoj tački u beskonačnosti.

Rezultat: Poluprečnici ekvipotencijalnih površina su:

$$r_5 = 0,1 \text{ m}, \quad r_2 = 0,25 \text{ m},$$

$$r_4 = 0,125 \text{ m}, \quad r_1 = 0,5 \text{ m},$$

$$r_3 = 0,167 \text{ m}, \quad r_0 \rightarrow \infty$$

1. 33. Položaj malih tela u vazduhu, naelektrisanja $Q_1 = -2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ i $Q_2 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, je određen tačkama $P_1 (-0,5\text{m}; 0)$ i $P_2 (0,5\text{m}; 0)$, respektivno.

Odrediti:

1° Potencijal tačke $P_3 (0,1\text{m}; 1\text{m})$ za referentnu tačku u beskonačnosti.

2° Jednačinu ekvipotencijalne površine nultog potencijala.

Rešenje:

1° Izraz za potencijal tačke P je:

$$V_{P_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right), \text{ gde je:}$$

$$R_1 = \sqrt{(x_{P_3} - x_{P_1})^2 + (y_{P_3} - y_{P_1})^2} = 1,16 \text{ m}$$

i

$$R_2 = \sqrt{(x_{P_3} - x_{P_2})^2 + (y_{P_3} - y_{P_2})^2} = 1,08 \text{ m.}$$

Prema tome je:

$$V_{P_3} = 114 \text{ mV.}$$

2° Izraz za potencijal proizvoljne tačke P je:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right), \text{ gde su } r_1 \text{ i } r_2 \text{ rastojanja tačke}$$

P od naelektrisanih tela.

Jednačina površine nultog potencijala se dobija iz:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = 0,$$

pošto je:

$$Q_1 = -Q_2 = Q.$$

Jednačina ove površine je:

$$r_1 = r_2,$$

što predstavlja jednačinu ravni u bipolarnom sistemu sa polovima u tačkama

P_1 i P_2 . Ova ravan je normalna na duž koja spaja polove P_1 i P_2 .

Analitički izraz za ovu ekvipotencijalnu površinu u Dekartovim pravouglim koordinatama je:

$$\sqrt{(x_P - x_{P_1})^2 + y_P^2} = \sqrt{(x_P - x_{P_2})^2 + y_P^2}, \text{ odnosno:}$$

$$x_P^2 - 2x_P x_{P_1} + x_{P_1}^2 + y_P^2 = x_P^2 - 2x_P x_{P_2} + x_{P_2}^2 + y_P^2, \text{ a odavde je:}$$

$$x = 0.$$

1.34. Tačke $P_1(0;0;0)$ i $P_2(8 \text{ cm};0;0)$ određuju položaj malih tela naelektrisanja $Q_1 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ i $Q_2 = -10^{-10} \text{ C}$ u vazduhu. Odrediti

1° Analitički izraz za ekvipotencijalnu površinu nultog potencijala.

2° Analitički izraz ekvipotencijalne linije nultog potencijala u ravni xOy .

Tačku referentnog potencijala uzeti u beskonačnosti.

Rešenje:

Izraz za potencijal tačke $P(x, y, z)$ u polju je:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right),$$

pri čemu je:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{i} \quad r_2 = \sqrt{(x-8)^2 + y^2 + z^2}.$$

1° Jednačina tražene ekvipotencijalne površine dobija se iz:

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = 0, \text{ odnosno:}$$

$$r_1 = \frac{-Q_1}{Q_2} r_2.$$

Prema prethodnom je:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{-Q_1}{Q_2} \right)^2 \left[(x-8)^2 + y^2 + z^2 \right].$$

Unoseći poznate veličine u ovaj izraz dobija se:

$$(x-9 \text{ cm})^2 + y^2 + z^2 = (3 \text{ cm})^2.$$

Dobijeni izraz predstavlja sferu, čiji je centar u tački $S(9\text{cm}; 0; 0)$ i poluprečnik $R = 3\text{ cm}$.

2^o Jednačina ekvipotencijalne linije u ravni xOy je:

$(x-9\text{ cm})^2 + y^2 + z^2 = (3\text{ cm})^2$; $z=0$, što predstavlja krug središta u tački $S(9\text{cm}; 0; 0)$ i poluprečnika $R=3\text{ cm}$.

1.35. Tačke P_1 , P_2 i P_3 se nalaze u vazduhu na jednoj liniji polja malog naelektrisanog tela. Rastojanja tačaka P_1 i P_3 od malog tela su $r_1=1\text{ m}$ i $r_3=1,001\text{ m}$, a njihovi potencijali su $V_1=0,09009\text{ V}$ i $V_3=0,09000\text{ V}$. Odrediti jačinu elektrostatičkog polja u tački P_2 koja se nalazi na sredini rastojanja tačaka P_1 i P_3 .

Rešenje:

Kako su tačke P_1 i P_3 vrlo bliske, a nalaze se na relativno velikom odstojanju od malog naelektrisanog tela, to se može smatrati da se one nalaze u homogenom elektrostatičkom polju. S obzirom na ovo, približna vrednost jačine elektrostatičkog polja u tački P_2 se može odrediti iz izraza:

$$E \approx \left| - \frac{\Delta V}{\Delta r} \right|$$

U posmatranom slučaju je:

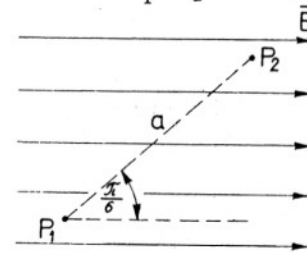
$$E_2 \approx \left| - \frac{V_3 - V_1}{r_3 - r_1} \right| = \frac{0,00009}{0,001} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 0,09 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Tačna vrednost jačine elektrostatičkog polja u tački P_2 je:

$$E_2' = \frac{r_1 V_1}{r_2^2} = \frac{0,09009}{(1,0005)^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 0,089999 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Iz ovoga se vidi da se u ovom slučaju približna i tačna vrednost jačine električnog polja vrlo malo razlikuju.

1.36. U homogenom elektrostatičkom polju jačine $E=130 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, nalaze se tačke P_1 i P_2 na međusobnom rastojanju $\overline{P_1 P_2} = a = 0,6\text{ m}$, kao što



Sl. 1.36. a

je predstavljeno na slici 1.36a.

Odrediti napon $U_{P_1 P_2}$.

Rešenje:

Napon između tačaka P_1 i P_2 u elektrostatičkom polju je:

$$U_{P_1 P_2} = V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

pri čemu se integracija vrši po bilo kojoj putanji između tačaka P_1 i P_2 .

1^o Za pravolinijsku putanju između tačaka P_1 i P_2 je:

$$U_{P_1 P_2} = \int_0^a E \, dl \cos \frac{\pi}{6} = E a \cos \frac{\pi}{6} = 67,47\text{ V}$$

2^o Za putanju $P_1 P_3 P_2$ (sl. 1.36b) je:

$$U_{P_1 P_2} = \int_0^{\frac{a \cos \frac{\pi}{6}}{6}} E \, dl \cos 0 + \int_0^{\frac{a \sin \frac{\pi}{6}}{6}} E \, dl \cos \frac{\pi}{2} =$$

$$= E a \cos \frac{\pi}{6} = 67,47\text{ V}$$

Sl. 1.36. b

Iz ovoga se vidi da napon ne zavisi od putanje između tačaka P_1 i P_2 .

(1.37) U zadatku 1.22. opisano je malo telo naelektrisanja Q i tačke P_1 i P_3 u njegovom polju.

Odrediti napon između ovih tačaka.

Rešenje:

Napon između tačaka P_1 i P_3 je:

$$U_{P_1 P_3} = V_{P_1} - V_{P_3} = \int_{P_1}^{P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Kako napon ne zavisi od putanje izmedju tačaka P_1 i P_3 , to je, prema zadatku 1.22.:

$$U_{P_1 P_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{30\text{mm}} = 30 \text{ mV}$$

Napon izmedju tačaka P_3 i P_1 je:

$$U_{P_3 P_1} = V_{P_3} - V_{P_1} = -(V_{P_1} - V_{P_3}) = -U_{P_1 P_3} = -30 \text{ mV}.$$

Napon izmedju tačaka P_1 i P_3 se može odrediti i preko rada sila električnog polja pri pomeranju probnog naelektrisanja Q_p od tačke P_1 do P_3 .

Kako je pri pomeranju probnog naelektrisanja od tačke P_1 do P_3 :

$$A = Q_p \int_{P_1}^{P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_p U_{P_1 P_3}, \text{ to je } U_{P_1 P_3} = \frac{A_{\text{od } P_1 \text{ do } P_3}}{Q_p}$$

Prema zadatku 1.22. probno naelektrisanje je $Q_p = 10^{-14} \text{ C}$, pa je:

$$U_{P_1 P_3} = \frac{3 \cdot 10^{-16}}{10^{-14}} \text{ mV} = 30 \text{ mV}.$$

1.38.* Polarni koordinatni sistem je odabran tako da je položaj

naelektrisanja električnog dipola $Q_+ = 10^{-10} \text{ C}$ i $Q_- = -10^{-10} \text{ C}$, određen sa $(1,5 \text{ mm}; 0)$ i $(1,5 \text{ mm}; \pi)$, respektivno. Odrediti potencijal i jačinu elektrostatičkog polja u tačkama:

$$P_1(0, 3\text{m}; 0), P_2(0, 3\text{m}; \frac{\pi}{6}), P_3(0, 3\text{m}; \frac{\pi}{4}), P_4(0, 3\text{m}; \frac{\pi}{3}), \text{ i } P_5(0, 3\text{m}; \frac{\pi}{2}).$$

Dipol se nalazi u vazduhu i može se smatrati usamljenim.

Rešenje:

Potencijal tačke P u polju električnog dipola, za koju je

$r \gg d$, a za referentnu tačku u beskonačnosti, je:

$$V_P = \frac{Q_+}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+} + \frac{Q_-}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-}$$

odnosno:

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d \cos\theta}{r^2},$$

gde je: $Q = Q_+ = -Q_-$.

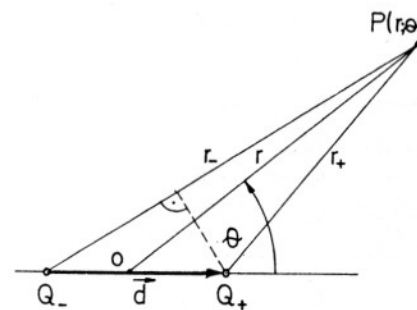
Uvodjenjem električnog momenta dipola:

$$\vec{p} = Q \vec{d}$$

izraz za potencijal tačke P postaje:

$$V_P = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Prema prethodnom izrazu potencijali zadatih tačaka su prikazani sledećom tabelom:



Sl. 1.38.

Tačka	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$V [\text{mV}]$	30	26	21,1	15	0

2° Jačina električnog polja dipola u tačkama dovoljno udaljenim

od njega, da se može smatrati da je $r \gg d$, određuje se koristeći izraz za potencijal:

$$V_P = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Za radijalnu i tangencijalnu komponentu vektora jačine polja se ima:

$$E_r = - \frac{dV}{dr} = - \frac{d}{dr} \left(\frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\theta = - \frac{dV}{r d\theta} = - \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Kako su vektori radijalne i tangencijalne komponente jačine električnog polja međusobno upravni, to je intenzitet vektora jačine polja u tački P :

$$E_P = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2\theta}.$$

Sledeća tabela prikazuje rezultate sračunate prema prethodnim izrazima:

Tačka	$E_r \left[\frac{mV}{m} \right]$	$E_\theta \left[\frac{mV}{m} \right]$	$E_p \left[\frac{mV}{m} \right]$
P_1	200	0	200
P_2	173	50	180
P_3	141	70,5	158
P_4	100	86,5	132,5
P_5	0	100	100

1.39.* Električni dipol, električnog momenta $p=4 \cdot 10^{-12} \text{ Cm}$, treba zameniti malim telom naelektrisanja Q postavljenim u centar dipola tako da vektor elektrostatičkog polja u tački $P(1 \text{ m}; \pi)$ bude isti u oba slučaja.

1° Odrediti naelektrisanje Q .

2° Za nadjeno Q ispitati da li postoji još neka tačka u kojoj je zadovoljen postavljeni uslov.

Rešenje:

1° U tački $P(1 \text{ m}; \pi)$ komponente polja dipola su:

$$E_r = \frac{2p \cos \pi}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$E_\theta = \frac{p \sin \pi}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 0, \text{ gde je } R = 1 \text{ m.}$$

Prema tome, u toj tački je polje dipola radijalno, usmereno ka

dipolu. Polje malog naelektrisanog tela je radijalno i u tački $P(1 \text{ m}; \pi)$ njegova jačina je:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}$$

Iz ovoga se vidi da je moguće zadovoljiti postavljeni uslov u tački P .

Naelektrisanje malog tela se dobija iz:

$$\frac{-2p}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}$$

Odatve je:

$$Q = \frac{-2p}{R} = -8 \cdot 10^{-12} \text{ C.}$$

2° Tačke u kojima je možda zadovoljen postavljeni uslov treba tražiti među onim tačkama za koje je tangencijalna komponenta vektora električnog polja dipola jednaka nuli:

$$E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 0,$$

odnosno:

$$\theta_1 = 0 \quad \text{i} \quad \theta_2 = \pi$$

Prema tome, treba ispitati tačku $P_1(1 \text{ m}; 0)$. U njoj je električno polje dipola:

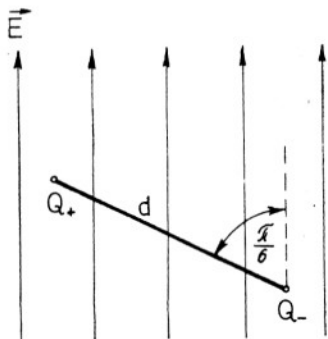
$$E_1 = E_r = \frac{2p \cos 0}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

a polje malog naelektrisanog tela:

$$E_1' = \frac{-2p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

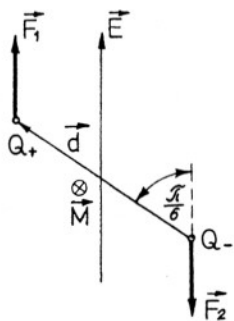
Vektori \vec{E}_1 i \vec{E}_1' su jednakih intenziteta a suprotnih smerova, pa se zaključuje da je za nadjeno Q postavljen uslov zadovoljen samo u tački $P(1 \text{ m}; \pi)$.

1.40. Električni dipol, naelektrisanja $Q_+ = -Q_- = 10^{-9} \text{C}$ na međusobnom rastojanju $d = 5 \text{ mm}$, je unet u homogeno električno polje jačine $E = 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, kao na sl. 1.40a.



1.40. a.

Ove sile su paralelne, jednakih intenziteta, a suprotnih smerova, te obrazuju spreg sile. Sile teže da okrenu dipol do položaja u kome će se



1.40. b.

- 1° Na šta se može svesti uticaj polja na dipol? Odrediti veličinu koja opisuje to dejstvo.
- 2° Odrediti rad sile električnog polja E kada se dipol prepusti silama polja, zanemarujući masu dipola.

Rešenje: 1° Kako se naelektrisanja dipola nalaze u homogenom električnom polju, to na njih deluju sile:
 $\vec{F}_1 = Q_+ \vec{E}$ i $\vec{F}_2 = Q_- \vec{E}$.

vektor \vec{d} (osa dipola) poklopiti sa vektorom \vec{E} . U tom položaju sile polja teže da raskinu dipol.

Spreg sile opisuje se momentom sprega. U posmatranom slučaju, (sl. 1.40b) intenzitet momenta je:

$$M = F d \sin(\vec{d}, \vec{E}).$$

U vektorskom obliku se može pisati:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}, \text{ odnosno:}$$

$$\vec{M} = \vec{d} \times (QE) = (Q\vec{d}) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E},$$

gde je $Q = Q_+ = -Q_-$, a $\vec{p} = Q\vec{d}$ vektor električnog momenta dipola.

Izrazom:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

je definisan mehanički moment električnog dipola.

Intenzitet ovog momenta:

$$M = pE \sin(\vec{p}, \vec{E})$$

nije konstantan u toku okretanja dipola, već zavisi od ugla između vektora \vec{p} i \vec{E} .

U početnom položaju dipola (sl. 1.40b), intenzitet mehaničkog momenta dipola je:

$$M_0 = pE \sin \frac{\pi}{6} = 25 \cdot 10^{-9} \text{ N m.}$$

Pravac i smer vektora \vec{M}_0 određuju se pravilom vektorskog proizvoda (sl. 1.40b).

2° Rad sile polja se može odrediti pomoću:

$$A = \int_0^{\beta} M d\beta$$

pri čemu je:

$$\beta = \angle(\vec{p}, \vec{E}).$$

Prema sl. 1.40b je:

$$A = \int_0^{\pi/6} pE \sin\beta d\beta = pE (-\cos\beta) \Big|_0^{\pi/6} = pE (1 - \cos \frac{\pi}{6})$$

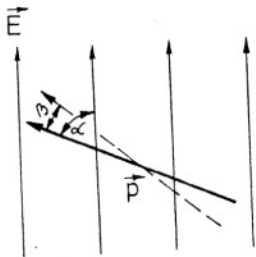
odnosno:

$$A = 6,75 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

1.41. Dipol električnog momenta \vec{p} obešen je o koncu torzione konstante C, a zatim unet u homogeno polje jačine E, tako da linije polja koje su u istoj ravni sa osom dipola zaklapaju sa njom ugao α , kao na sl. 1.41.

Odrediti ugao β za koji se zaokrene osa dipola posle prepuštanja

dipola silama polja.



Sl. 1. 41.

Rešenje:

U novom ravnotežnom položaju dipola (označenom isprekidanom linijom na sl. 1. 41) mehanički moment dipola:

$$M = p E \sin (\alpha - \beta)$$

održava statičku ravnotežu torzionom momentu žice:

$$M_t = C \beta .$$

Prema tome je:

$$p E \sin (\alpha - \beta) = C \beta .$$

Iz ove jednačine treba odrediti ugao β . U posebnom slučaju, kada su okolnosti takve da je kretanje dipola malo, može se pisati:

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{C \beta}{p E}$$

odnosno:

$$1 . \sin \alpha - \beta \cos \alpha = \frac{C \beta}{p E} ,$$

te je :

$$\beta = \frac{\sin \alpha}{\frac{C}{p E} + \cos \alpha} .$$

1. 4. FLUKS VEKTORA JAČINE ELEKTRIČNOG POLJA.

GAUSOV ZAKON

1. 42. U homogenom električnom polju jačine $E=100 \frac{V}{m}$ nalazi se ravna površina oblika kvadrata dužine stranice $a = 10 \text{ cm}$, kao na sl. 1. 42a.

Odrediti fluks vektora jačine polja \vec{E} kroz tu površinu.

Rešenje:

Kada se ravna površina nalazi u homogenom električnom polju fluks vektora \vec{E} kroz tu površinu se definiše izrazom:

$$\Psi_E = E S \cos (\vec{E}, \vec{n}),$$

gde je \vec{n} proizvoljno izabran vektor normale na površinu S .

Prethodni izraz se može napisati u sledećem obliku:

$$\Psi_E = \vec{E} \cdot \vec{S},$$

gde je:

$$\vec{S} = S \cdot \vec{n} .$$

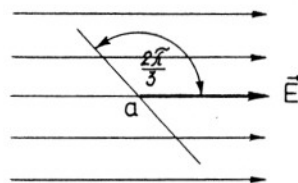
U posmatranom slučaju, za usvojeni vektor normale na površinu S kao na sl. 1. 42b, je:

$$\Psi_E = E \cdot a^2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 0,86 \text{ Vm} .$$

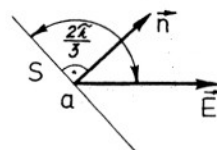
Za suprotnu orijentaciju normale na površinu ($\vec{n}' = -\vec{n}$), fluks vektora

\vec{E} je:

$$\Psi_{E'} = E \cdot S \cos (\vec{E}, \vec{n}') = E \cdot a^2 \cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) = -0,86 \text{ Vm} .$$



Sl. 1. 42. a.



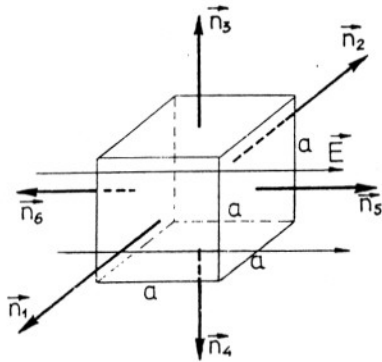
Sl. 1. 42. b.

Iz ovoga se zaključuje da promena orijentacije normale na površinu menja znak fluksa vektora \vec{E} kroz tu površinu.

1.43. U homogenom električnom polju, u vazduhu, nalazi se kocka dužine ivice a , a linije polja su normalne na dve naspramne strane kocke. Odrediti fluks vektora \vec{E} kroz površinu kocke.

Rešenje:

Pošto površina kocke, kroz koju se određuje fluks, nije ravna, to se površina kocke deli na ravne površine, u ovom slučaju to su strane kocke. Kako se strane kocke nalaze u homogenom polju, fluks kroz njih se mo-



Sl. 1.43.

že odrediti iz :

$$\Psi_{\vec{E}} = E \cdot a^2 \cos(\vec{E}, \vec{n})$$

Za zatvorenu površinu orijentacija normala se, po dogovoru, uzima od površine ka periferiji. S obzirom na to, orijentacije normala na pojedine strane kocke su kao na sl. 1.43.

Fluks vektora \vec{E} kroz celu površinu kocke je tada jednak

$$\Psi_{\vec{E}} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 + \Psi_6,$$

gde su :

$$\Psi_1 = E a^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\Psi_2 = E a^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\Psi_3 = E a^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\Psi_4 = E a^2 \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\Psi_5 = E a^2 \cos 0 = E a^2$$

$$\Psi_6 = E a^2 \cos \pi = -E a^2.$$

Sada je :

$$\Psi_{\vec{E}} = E a^2 + (-E a^2) = 0.$$

Do istog rezultata se može doći primenom Gausovog zakona :

$$\Psi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_u S}{\epsilon_0},$$

gde je S površina kocke, $Q_u S$ algebarska suma naelektrisanja tela obuhvaćenih površinom S .

Kako u kocki nema naelektrisanih tela, to je $Q_u S = 0$, pa je i :

$$\Psi_{\vec{E}} = 0.$$

1.44. U polju malog tela naelektrisanja $Q = -10 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, u vazduhu, se nalazi kružna kontura poluprečnika $a = 15 \text{ cm}$, čija je svaka tačka podjednako udaljena od malog tela za $b = 30 \text{ cm}$. Odrediti fluks vektora jačine električnog polja malog naelektrisanog tela kroz sledeće površine oslonjene na konturu :

1° Kalotu sfere čiji je centar u naelektrisanom telu.

2° Ravnu površinu.

Rešenje.

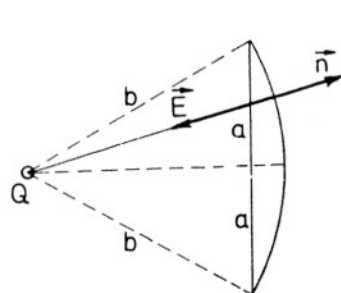
Kada površina nije ravna i polje nije homogeno, fluks vektora \vec{E} se računa prema:

$$\Psi_{\vec{E}} = \int_S E \, dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

1^o Kako je na celoj kaloti polje istog intenziteta:

$$E = |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{b^2} = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

i prema usvojenoj orijentaciji normale \vec{n} (sl. 1. 44) za svaku površinu dS :



Sl. 1. 44.

$$\cos(\vec{E}, \vec{n}) = \cos \pi = -1,$$

to je:

$$\Psi_{\vec{E}} = \int_S E \, dS \cos \pi = -E \cdot S.$$

Površina kalote je:

$$S = 2\pi b (b - \sqrt{b^2 - a^2}) = 0,07536 \text{ m}^2$$

Prema tome je:

$$\Psi_{\vec{E}} = -7,536 \text{ Vm}.$$

2^o Fluks kroz ravnu površinu oslonjenu na konturu se može odrediti na sličan način, a može i korišćenjem Gausovog zakona i rezultata prethodnog dela zadatka.

U cilju primene Gausovog zakona treba formirati zatvorenu površinu, koja se sastoji od kalote i ravne površine oslonjenih na kružnu konturu i orijentisati normale ka periferiji. Tada je:

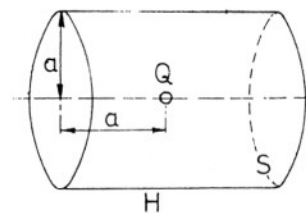
$$\Psi_{\vec{E}} + \Psi'_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_u S}{\epsilon_0} = 0,$$

pošto nema naelektrisanih tela u zatvorenoj površini.

Iz prethodnog izraza, za fluks kroz ravnu površinu oslonjenu na konturu se dobija:

$$\Psi'_{\vec{E}} = -\Psi_{\vec{E}} = 7,536 \text{ Vm}.$$

1. 45) Malo telo naelektrisanja $Q = 10^{-9} \text{ C}$ i površina S oblika omotača pravog valjka, visine $H = 2 \text{ cm}$ i poluprečnika osnove $a = 1 \text{ cm}$, u vazduhu, prikazani su sl. 1. 45a. Odrediti fluks vektora jačine električnog polja naelektrisanja Q kroz površinu S .



Sl. 1. 45. a.

Rešenje:

Neposrednom primenom izraza za fluks vektora \vec{E} može se doći do rezultata uz izvesne matematičke teškoće, zbog oblika površine S i nehomogenog polja u kome se ona nalazi. Primenom Gausovog zakona u ovom slučaju jednostavnije se dolazi do rezultata.

Površinu S treba dopuniti do zatvorene površine. Zbog radijalnog polja malog naelektrisanog tela, najpovoljnije je da dopunske površine budu kalote s fere poluprečnika $R = a\sqrt{2}$, sa centrom u naelektrisanom telu.

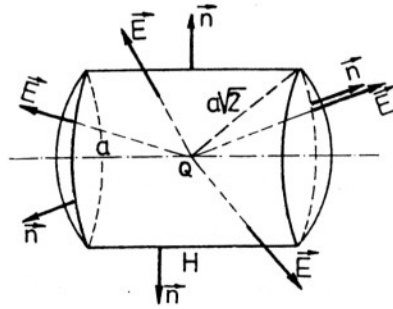
Za orijentacije normale ka periferiji (sl. 1. 45b) je:

$$\Psi'_{\vec{E}} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

gde je S' zatvorena površina. Takođe je:

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{E}} &= \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \Psi_{\vec{E}} + \Psi''_{\vec{E}} + \Psi'''_{\vec{E}} \end{aligned}$$

pri čemu su S_1 i S_2 površine kalota, a Ψ_E'' i Ψ_E''' fluksevi kroz kalote.



Sl. 1. 45. b.

$$\Psi_E = \Psi_E' - \Psi_E'' - \Psi_E''' = \frac{Q}{\epsilon_0} - 2 \frac{Q\sqrt{2}}{4 \epsilon_0} (\sqrt{2} - 1),$$

odnosno:

$$\Psi_E = \frac{Q\sqrt{2}}{2 \epsilon_0} = 79,74 \text{ Vm.}$$

1. 46. U unutrašnjosti prave kupe poluprečnika bazisa $a=5 \text{ cm}$ i visine $H = 6 \text{ cm}$ se nalaze, u vazduhu, tri mala tela naelektrisanja $Q_1=2 \cdot 10^{-11} \text{ C}$, $Q_2=-3 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ i $Q_3 = 3 \cdot 10^{-11} \text{ C}$. Odrediti fluks vektora \vec{E} kroz površinu kupe.

Rešenje:

Primenom Gausovog zakona je:

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_u S}{\epsilon_0} = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{\epsilon_0} = 2,26 \text{ Vm.}$$

1. 47. Veoma dugačka pravolinijska nit u vazduhu ravnomerno je naelektrisana po dužini. Na rastojanju $r_1 = 3,6 \text{ cm}$ od niti električno polje deluje na probno naelektrisanje $Q_p = 10^{-10} \text{ C}$ odbojnom silom jačine $F_1 = 10^{-7} \text{ N}$.

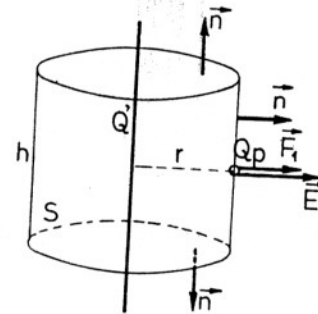
Odrediti podužnu gustinu naelektrisanja niti

Rešenje:

Kako je:

$$\vec{F} = Q_p \vec{E},$$

to su vektori \vec{F} i \vec{E} istog pravca i smera, jer je $Q_p > 0$.



Sl. 1. 47.

Na rastojanju r_1 od niti jačina polja je:

$$E_1 = \frac{F_1}{Q_p} = 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Zbog oblika niti i ravnomerne raspodele naelektrisanja na njoj polje je radialno u svim ravnima normalnim na nit.

Primenom Gausovog zakona na zamišljenu zatvorenu površinu S , oblika valjka koaksijalnog sa niti (sl. 1. 47), ima se:

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_u S}{\epsilon_0},$$

gde je:

$$Q_u S = Q' \cdot h,$$

jer je raspodela naelektrisanja niti ravnomerna.

S druge strane je:

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

gde su S_0 , S_1 i S_2 površine omotača, gornjeg i donjeg bazisa.

Pošto je u svim tačkama oba bazisa valjka $\angle(\vec{E}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$, jer linije polja leže u ravni bazisa, to je fluks vektora \vec{E} kroz bazise jednak nuli.

U svim tačkama omotača valjka jačina polja je ista, vektor polja normalan na površinu omotača i u ovom slučaju je $\angle(\vec{E}_1, \vec{n}) = 0$.

Zbog toga je:

$$\psi_{\vec{E}} = \int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1 \cdot 2\pi r_1 \cdot h.$$

Na osnovu prethodnog je:

$$E_1 \cdot 2\pi r_1 h = \frac{Q' h}{\epsilon_0}$$

a odavde je poduzna gustina naelektrisanja:

$$Q' = 2\pi\epsilon_0 r_1 E_1 = 2 \cdot 10^{-9} \frac{C}{m}$$

1.48. Lopta poluprečnika $a=1$ cm. je ravnomerno naelektrisana po zapremini naelektrisanjem zapreminske gustine $\rho = -10^{-7} \frac{C}{m^3}$. U vazduhu, na rastojanju $d = 1$ m od centra lopte, nalazi se α čestica naelektrisanja $Q_\alpha = 3,2 \cdot 10^{-19} C$. Odrediti elektrostatičku silu na α česticu.

Rešenje:

Sila kojom polje naelektrisane sfere deluje na α česticu je:

$$\vec{F} = Q_\alpha \cdot \vec{E}_1$$

Zbog ravnomerne raspodele naelektrisanja i sferne simetrije, polje sfere je radijalno. Intenzitet polja se može odrediti primenom Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površinu poluprečnika $r_1 = d$, koncentričnu sa naelektrisanom loptom, tj.:

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_u S}{\epsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 4\pi r_1^2 \cos(\vec{r}_0, \vec{n}) = \frac{4\pi a^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

odnosno:

Kako je $\angle(\vec{r}_0, \vec{n}) = 0$, to je algebarski intenzitet vektora jačine električnog polja.

$$E_1 = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r_1^2} = -3,768 \cdot 10^{-3} \frac{V}{m}$$

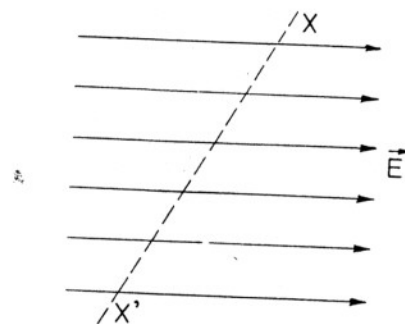
Vektor sile na α česticu je:

$$\vec{F} = Q_\alpha \vec{E}_1 = Q_\alpha E_1 \vec{r}_0 = -12,06 \cdot 10^{-22} N \cdot \vec{r}_0$$

Iz ovoga se zaključuje da naelektrisana lopta privlači α česticu.

1.5. PROVODNICI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

1.49. U homogeno elektrostatičko polje uneta je vrlo tanka nenaelektrisana bakarna ploča tako da je njen položaj prema linijama polja



Sl. 1.49. a.

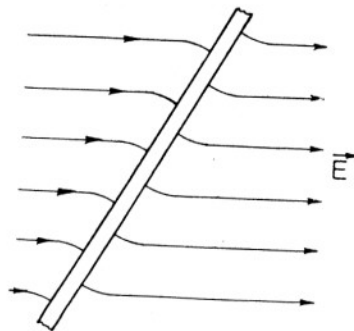
odredjen ravni XX' kao na sl. 1.49a.

Nacrtati približan oblik linija elektrostatičkog polja posle unošenja ploče u polje.

Rešenje:

Vektor jačine elektrostatičkog polja je uvek normalan na površinu provodnika u polju. Zbog

toga će približan oblik linija polja posle unošenja ploče u polje biti kao na sl. 1.49b.

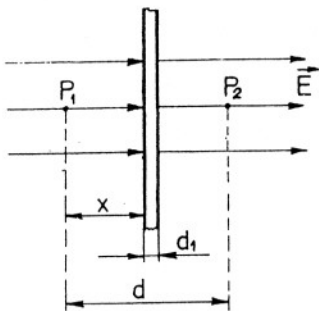


činjenica da u ploči nema elektrostatičkog polja se objašnjava pojavom takvih indukovanih naelektrisanja uz površine ploča, koja svojim poljem poništavaju strano polje u ploči.

1.50. Razlika potencijala tačaka P_1 i P_2 , koje se nalaze na liniji homogenog elektrostatičkog polja na međusobnom rastojanju d , je $V_1 - V_2 = U_{12}$. Odrediti razliku potencijala ovih tačaka kada se između njih upravno na linije polja postavi velika, tanka aluminijumska ploča debljine d_1 .

Rešenje:

Ubacivanjem provodne ploče u polje normalno na linije polja (sl. 1.50) praktično se ne menja polje izvan ploče. U ploči polje je jednako



Sl. 1.50

nuli.

Razlika potencijala tačaka P_1 i P_2

posle unošenja ploče je: P_2

$$V_1' - V_2' = U_{12}' = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

odnosno:

$$U_{12}' = Ex + 0 \cdot d_1 + E(d - x - d_1) = Ed \left(1 - \frac{d_1}{d}\right).$$

Pre ubacivanja ploče je:

$$U_{12} = E \cdot d, \text{ pa je:}$$

$$U_{12}' = U_{12} \left(1 - \frac{d_1}{d}\right) < U_{12}.$$

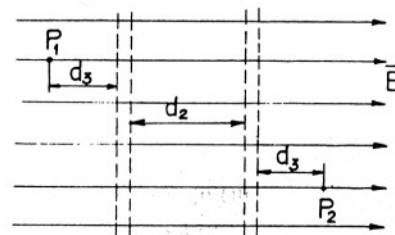
Iz ovoga se zaključuje da napon U_{12}' ne zavisi od položaja ubačene ploče.

Kada se između tačaka P_1 i P_2 umesto provodne ploče ubaci provodna folija, tada je $d_1 \ll d$, pa je:

$$U_{12}' \approx U_{12}.$$

1.51. U homogeno elektrostatičko polje jačine $E = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ unesu se dve jednake, velike provodne ploče, debljina $d_1 = 1 \text{ mm}$, na međusobnom rastojanju $d_2 = 1 \text{ cm}$ i postave upravno na linije prvobitnog elektrostatičkog polja,

kao što je prikazano isprekidanim linijama na sl. 1.51.



Sl. 1.51.

1.0 Nacrtati približan oblik linija polja posle postavljanja ploča.

2.0 Odrediti napon između tačaka

P_1 i P_2 označenih na sl. 1.51, pri čemu je $d_3 = 2 \text{ cm}$, pre i posle postavljanja ploča u polje.

Rezultat:

1.0 Posle ubacivanja ploča elektrostatičko polje izvan ploča se praktično ne menja.

2.0 Napon pre postavljanja ploča je:

$$U_{12} = E(2d_1 + d_2 + 2d_3) = 5,2 \text{ V}.$$

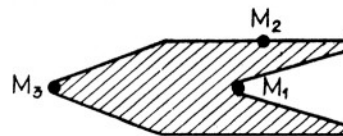
Napon posle postavljanja ploča je:

$$U_{12}' = E(d_2 + 2d_3) = 5 \text{ V}.$$

1.52. Provodno usamljeno nenaelektrisano telo je prikazano na sl.

1.52a.

1.0 Nacrtati približan oblik linija elektrostatičkog polja naelektrisanog tela.



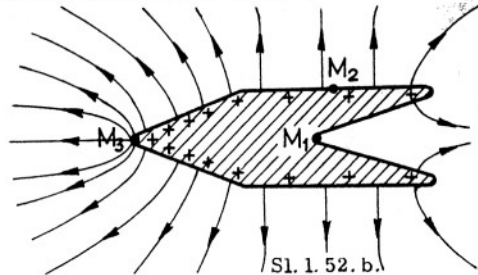
Sl. 1.52. a.

2.0 Kada se naelektrisano telo dodirne

malom metalnom kuglicom na izolovanoj dršci u tačkama M_1 , M_2 i M_3 , a posle svakog dodira kuglicom dodirne elektroskop, prikazati i objasniti pokazivanje elektroskopa.

Rezultat:

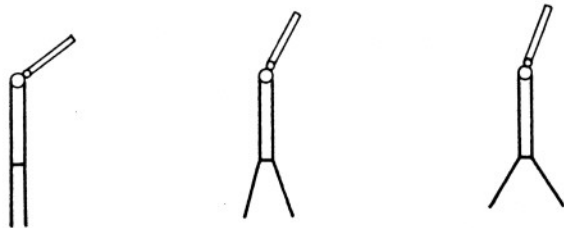
1° Približan oblik linija polja i raspodela naelektrisanja u slučaju pozitivno naelektrisanog tela je prikazan na sl. 1. 52b.



Sl. 1. 52. b.)

Najveća površinska gustina naelektrisanja i jačina polja je kod tačke M_3 , a najmanja, praktično jednaka nuli, kod tačke M_1 .

2° Pokazivanja elektroskopa su:

Za tačku M_1 Za tačku M_2 Za tačku M_3 .

Sl. 1. 52c.

1. 53. Provodna lopta poluprečnika $a = 2$ cm i naelektrisanja $Q = 10^{-9}$ C, nalazi se u vazduhu i može se smatrati usamljenom. Pokazati da će se naelektrisanje lopte ravnomerno rasporediti uz površinu lopte i izračunati površinsku gustinu naelektrisanja

Rešenje:

U statičkom stanju naelektrisanja, jačina polja u svim tačkama u lopti mora biti jednaka nuli. Primenom Gausovog zakona za bilo koju za-

tvorenu površinu S u lopti se dobija:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0,$$

pošto u lopti nema polja.

Zbog ovoga je i naelektrisanje obuhvaćeno proizvoljnom površinom S jednako nuli, pa se naelektrisanje raspoređuje u veoma tankom sloju uz površinu lopte.

Iz razloga simetrije i delovanja Kulonovih sila između naelektrisanja, raspodela naelektrisanja po površini lopte je ravnomerna.

Površinska gustina naelektrisanja je:

$$\sigma = \frac{Q_{na} S}{S} = \frac{Q}{4 \pi a^2} = 1,9904 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2.$$

1. 54. Površinska gustina naelektrisanja na usamljenom provodniku oblika elipsoida izračunava se prema izrazu* :

$$\sigma = \frac{Q}{4 \pi abc \left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{1/2}}$$

gde su a , b i c poluose elipsoida, a Q njegovo naelektrisanje.

Za $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm i $Q = 10^{-12}$ C izračunati jačinu elektrostatičkog polja u tačkama $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$, i izračunati odnos jačina elektrostatičkog polja u tačkama M_2 i M_3 .

Rešenje:

Jačina elektrostatičkog polja na površini provodnog tela u vazduhu se izračunava iz izraza:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

* Zbog obimnog matematičkog izvodjenja izraz za površinsku gustinu naelektrisanja provodnog elipsoida se navodi bez dokaza.

Jačina polja u tačkama M_1 , M_2 i M_3 je:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 bc} = 6 \frac{V}{m},$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ac} = 10 \frac{V}{m} \text{ i}$$

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ab} = 6 \frac{V}{m}.$$

Odnos jačina elektrostatičkih polja u tačkama M_2 i M_3 je:

$$\frac{E_2}{E_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{b}{c} = 1,67$$

1.55 Malo telo, naelektrisanja Q ($Q > 0$), nalazi se u vazduhu, blizu šuplje nanaelektrisane metalne sfere.

1^o Pokazati da je pozitivno indukovano naelektrisanje na sferi manje od naelektrisanja malog tela.

2^o Gde treba postaviti malo naelektrisanje pa da pozitivno indukovano naelektrisanje sfere bude jednako naelektrisanju malog tela?

Rešenje:

1^o Indukovana naelektrisanja se javljaju na metalnoj sferi na okolnim telima. Neke linije električnog polja naelektrisanog malog tela se završavaju na sferi, a neke na okolnim telima ili u beskonačnosti.

Zbog toga je indukovano pozitivno naelektrisanje na sferi manje od naelektrisanja malog tela.

2^o Kada se malo naelektrisanje stavi unutar šuplje nanaelektrisane sfere, naelektrisanje će se pojaviti uz obe njene površine. Kako metalnom delu sfere nema elektrostatičkog polja, pa ni njegovog fluksa kroz

bilo koju zamišljenu površinu unutar provodnog dela sfere, to se primenom Gausovog zakona zaključuje da je indukovano pozitivno naelektrisanje jednako pozitivnom naelektrisanju malog tela. Sve linije polja malog tela, u ovom slučaju, završavaju se na unutrašnjem zidu metalne sfere.

1.56. Metalna kuglica naelektrisanja Q ($Q > 0$), visi o neprovodnom koncu. Potrebno je potpuno razelektrisati kuglicu. U tu svrhu na raspolaganju stoji vrlo dubok, neuzemljen, nanaelektrisan, uzan metalni cilindar, zatvoren sa jedne strane. Na kom mestu treba kuglicom dodirnuti cilindar?

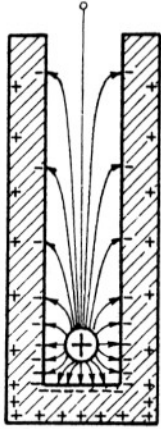
Rešenje:

Kada se kuglica prinese cilindru sa spoljne strane i ne dodiruje ga, na cilindru i okolnim telima će se indukovati naelektrisanja. Zbog toga će se neke linije elektrostatičkog polja, koje polaze od naelektrisane kuglice, završavati na cilindru, a ostale na okolnim telima ili u beskonačnosti. Indukovano naelektrisanje na cilindru, bliže kuglici, je suprotnog znaka od naelektrisanja kuglice i od njega manje po količini.

Ako se kuglicom dodirne cilindar, doći će do neutralizaci je negativnog indukovano naelektrisanja na cilindru sa delom pozitivnog naelektrisanja kuglice. Stoga će ukupno naelektrisanje cilindra i kuglice biti jednako zbiru preostalih naelektrisanja na njima, odnosno prvobitnom naelektrisanju Q kuglice. Ovo naelektrisanje će se raspodeliti i po cilindru i po kuglici.

Posle odvajanja kuglice i cilindra i kuglica i cilindar će biti pozitivno naelektrisani. Ovakvim postupkom se kuglica delimično razelektriše.

Kada se kuglica unese u cilindar i spusti duboko blizu njegovog dna, kuglica će indukovati naelektrisanje praktično samo na zidovima cilindra.



Sl. 1. 56.

Približna raspodela indukovanih naelektrisanja cilindra i linija polja kuglice prikazana je slikom 1. 56. Indukovana naelektrisanja uz unutrašnji zid cilindra su negativna i po količini praktično jednaka naelektrisanju kuglice. Linije polja koje polaze od kuglice se praktično sve završavaju na unutrašnjem zidu cilindra.

Pri dodiru kuglice i dna cilindra, doći će, praktično, do potpune neutralizacije naelektrisanja kuglice i negativnih indukovanih naelektrisanja cilindra.

Posle odvajanja kuglice od cilindra, ona će biti praktično razelektrisana, a cilindar pozitivno naelektrisan naelektrisanjem Q .

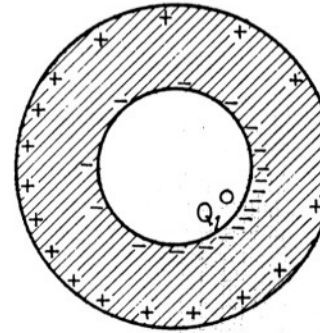
1. 57. U šupljoj metalnoj nenaelektrisanj kugli nalazi se malo telo naelektrisanja Q_1 , a izvan kugle malo telo naelektrisanja Q_2 .

1° Ako je $Q_1 Q_2 > 0$, označiti približnu raspodelu indukovanih naelektrisanja na kugli.

2° U kome delu prostora će se menjati polje pri pomeranju malog naelektrisanog tela u šupljini, a u kome delu pri pomeranju tela izvan kugle?

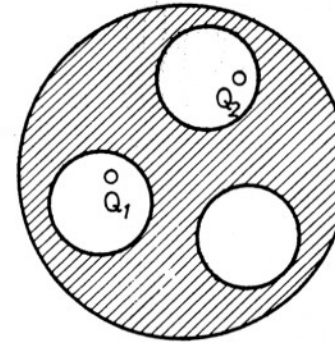
Rezultat

1° Za $Q_1 > 0$ i $Q_2 > 0$ približna raspodela indukovanih naelektrisanja je prikazana slikom 1. 57.



Sl. 1. 57.

1. 58. U metalnoj sferi se nalaze tri sferne šupljine. U dvema od njih se nalaze tela naelektrisanja $Q_1 = 2pC$ i $Q_2 = -3pC$, kao što je prikazano



Sl. 1. 58. a.

Q_2

2° Pri pomeranju malog tela naelektrisanja Q_1 u šupljini menja se samo polje u šupljini. Pomeranjem malog tela naelektrisanja Q_2 menja se polje izvan lopte.

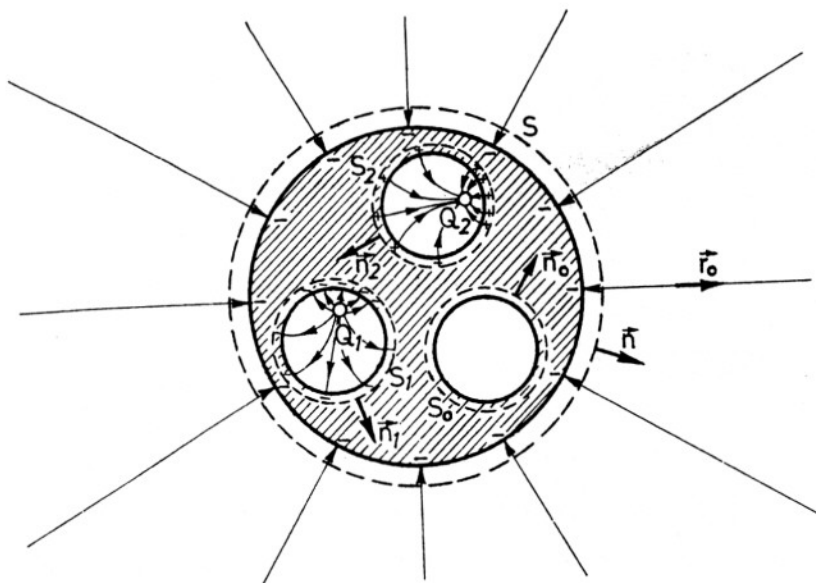
na slici 1. 58. a. Odrediti indukovana naelektrisanja uz zidove šupljina i sfere i približno predstaviti linije vektora jačine elektrostatičkog polja u šupljinama i izvan sfere.

Rešenje:

U unutrašnjosti metalnih provodnika nema elektro-

trostatičkog polja. Primenom Gausovog zakona na zamišljene sferne površine S_0 , S_1 i S_2 (slika 1. 58. b.), dobija se:

$$\oint_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'_0}{\epsilon_0} = 0, \quad \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q'_1}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{i} \quad \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_2 + Q'_2}{\epsilon_0} = 0,$$



Sl. 1. 58. b.

gde su Q'_0 , Q'_1 i Q'_2 indukovana naelektrisanja uz zidove šupljina.

Iz prethodnih jednačina je:

$$Q'_0 = 0, \quad Q'_1 = -Q_1 = -2 \text{ pC} \quad \text{i} \quad Q'_2 = -Q_2 = 3 \text{ pC}.$$

Kada se na zamišljenu sferu S primeni Gausov zakon, ima se:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q'_1 + Q_2 + Q'_2 + Q'}{\epsilon_0} = \frac{Q'}{\epsilon_0},$$

gde je Q' indukovano naelektrisanje uz spoljnu površinu sfere.

Ukupno indukovano naelektrisanje metalne sfere je jednako nuli:

$$Q'_1 + Q'_2 + Q' = 0,$$

odakle je:

$$Q' = -(Q'_1 + Q'_2) = -1 \text{ pC}.$$

Naelektrisanje Q' je ravnomerno raspoređeno uz spoljnu površinu

sfere. Polje izvan sfere je radijalno, vektora jačine:

$$\vec{E} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{r}_0.$$

Linije polja u šupljinama i izvan sfere su predstavljene na slici

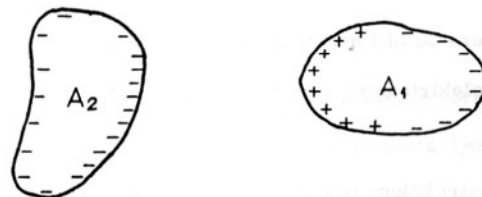
1. 58b.

1. 59. Metalno telo A_1 treba pozitivno naelektrisati. U tu svrhu na raspolaganju stoji metalno telo A_2 , naelektrisano negativno. Kako se može izvršiti ovo naelektrisanje, a da se pri tome ne promeni naelektrisanje metalnog tela A_2 ?

Rešenje:

Kada se naelektrisano metalno telo A_2 približi nenaelektrisanom metalnom telu A_1 , na ovome se indukuju naelektrisanja kao na slici

1. 59.



Sl. 1. 59.

Spajanjem tela A_1 , u prisustvu tela A_2 , provodnikom sa zemljom, u provodniku se obrazuje električno polje zbog razlike potencijala tela A_1 i zemlje. Pod dejstvom ovog polja negativna indukovana naelektrisanja tela A_1 će otići u zemlju, a potencijali tela A_1 i zemlje će se izjednačiti. Na telu A_1 će ostati pozitivno indukovano naelektrisanje, pa će, posle prekidanja provodne veze sa zemljom, telo A_1 biti pozitivno naelektrisano.

1.60 Objasniti kako se pomoću metalnog naelektrisanog tela A_1 može naelektrisati metalno telo A_2 istom vrstom naelektrisanja, a da se pri tome ne promeni naelektrisanje datog naelektrisanog metalnog tela A_1 .

Rešenje:

Postupkom opisanim u zadatku 1.59. može se jedno pomoćno nanaelektrisano metalno telo A_3 naelektrisati naelektrisanjem suprotnog znaka naelektrisanju tela A_1 . Primenjujući zatim isti postupak na pomoćno naelektrisano telo A_3 i nanaelektrisano telo A_2 , ovo će se naelektrisati naelektrisanjem istog znaka kao i telo A_1 .

1.61 U šuplju nanaelektrisanu sferu uneta je pozitivno naelektrisana kuglica. Posle ovoga, sfera je spojena provodnikom sa zemljom, a zatim kuglica izneta iz sfere, pri čemu se kuglica i sfera nisu dodirnule. Kako će biti naelektrisana sfera posle ukidanja njene provodne veze sa zemljom?

Rezultat:

Sfera će biti negativno naelektrisana sa ravnomernom površinskom gustinom naelektrisanja, a polje će postojati samo izvan sfere.

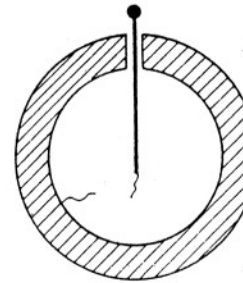
1.62. Na unutrašnjem zidu šuplje metalne sfere nalazi se metalni listić. Kroz mali otvor na sferi uvučen je tanak provodnik tako da ne dodiruje sferu. Na jednom kraju provodnik se završava metalnom kuglicom, a na drugom kraju metalnim listićem, kao na slici 1.62. Da li će se metalni listići privlačiti kada se malim naelektrisanim telom dodirne:

1° Spoljašnja površina sfere,

2° Kuglica na vrhu provodnika?

Rešenje:

1° Pri dodiru spoljašnje površine sfere malim naelektrisanim telom, naelektrisanje će se raspodeliti po spoljašnjoj površini sfere. U sferi neće biti naelektrisanja i polja. Kako su indukovana naelektrisanja na provodnom štapi i njegovom listiću vrlo mala, praktično zanemarljiva, to se listići u ovom



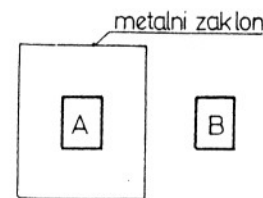
Sl. 1.62.

slučaju neće privlačiti.

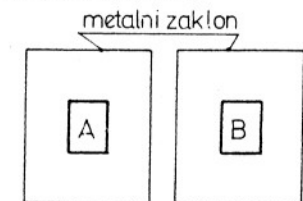
2° Kada se malim metalnim telom dodirene kuglica na provodniku sa listićem, listić će se naelektrisati te će postojati elektrostatičko polje u šupljini sfere. Na unutrašnjoj površini sfere će se indukovati naelektrisanja suprotnog znaka naelektrisanju provodnika sa listićem. U ovom slučaju listići će se privlačiti.

1.63. Da bi se telo B zaklonilo od uticaja elektrostatičkog polja naelektrisanog tela A, metalni neuzemljeni zakloni su postavljeni kao na slici 1.63 a,

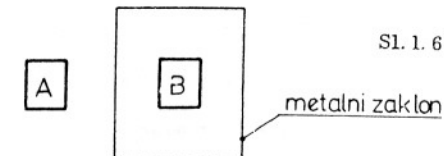
1.63. b. i 1.63 c. Koji je zaklon od navedenih efikasan, a koji nije?



Sl. 1.63. a.



Sl. 1.63. b.



Sl. 1.63. c.

Rešenje:

Zbog indukovanih naelektrisanja na površinama zaklona na slici 1. 63. a. , ovaj zaklon je neefikasan jer postoji elektrostatičko polje i izvan zaklona

U šupljinama provodnih tela koja se nalaze u elektrostatičkom polju drugih tela nema elektrostatičkog polja. Zbog ovoga je zaklon na slici 1. 63. c. efikasan.

Zakloni na slici 1. 63. b. efikasno zaklanjaju telo B, ali je zaklon oko tela A suvišan.

1. 6. ELEKTROSTATIČKA POLJA, POTENCIJALI I NAPONI POJEDINIH SISTEMA I NJIHOVE KAPACITIVNOSTI

1. 64. Metalna ravna folija, zanemarljive debljine, u vazduhu, je naelektrisana i naelektrisanje svakog njenog dela površine $S=0,1\text{m}^2$ je $Q=2 \cdot 10^{-10}\text{C}$.

Odrediti:

1^o Raspodelu naelektrisanja folije.

2^o Elektrostatičko polje u blizini folije.

Ivične efekte zanemariti.

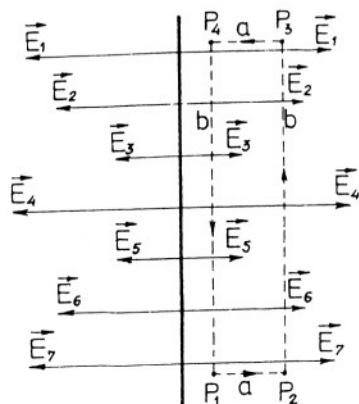
Rešenje:

Kako je folija veoma tanka, može se smatrati da njena naelektrisanja obrazuju jednu ravan. Vektori elektrostatičkog polja ovih naelektrisanja su u svakoj tački normalni na foliju, jer bi u protivnom njihove tangencijalne komponente (u ravni folije), preko električnih sila, izazvale kretanje naelektrisanja folije. Svi vektori jačine elektrostatičkog polja (zanemarujući ivične efekte) moraju biti istog intenziteta što se može pokazati na sledeći način.

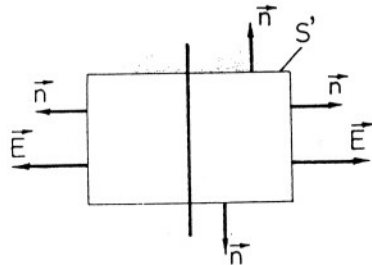
Pretpostavljajući suprotno (da vektori jačine elektrostatičkog polja nisu istog intenziteta), za rad sila elektrostatičkog polja na zatvorenom putu

$P_1 P_2 P_3 P_4 P_1$, kao na slici 1. 64. a. , ima se:

$$A_P = Q_P \oint_{P_1 P_2 P_3 P_4 P_1} \vec{E} d\vec{l} = Q_P (E_7 a \cos 0 + E_1 a \cos \pi) = Q_P a (E_7 - E_1).$$



Sl. 1. 64. a.



Sl. 1. 64. b.

Kako je rad sila elektrostatičkog polja na proizvoljnom zatvorenom putu jednak nuli, tj.:

$$A_F = Q_p \oint_1 \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

odnosno:

$$\oint_1 \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

to se zaključuje da mora biti:

$$a (E_7 - E_1) = 0$$

Iz prethodnog je $E_1 = E_7$, što znači da svi vektori elektrostatičkog polja ovde moraju biti istog intenziteta.

1° Određivanje raspodele naelektrisanja folije se može izvršiti primenom Gausovog zakona na zamišljenu površinu S' u obliku pravog valjka bazisa paralelnih foliji (sl. 1. 64. b.):

$$\oint_{S'} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{uS'}}{\epsilon_0}$$

Kako su izvodnice valjka paralelne linijama polja, to fluks vektora \vec{E} postoji samo kroz bazise valjka. Bazisi se nalaze u homogenom polju,

te je:

$$2ES \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

tj.:

$$2ES = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

a odavde je:

$$\frac{Q}{S} = \sigma = 2E \cdot \epsilon_0$$

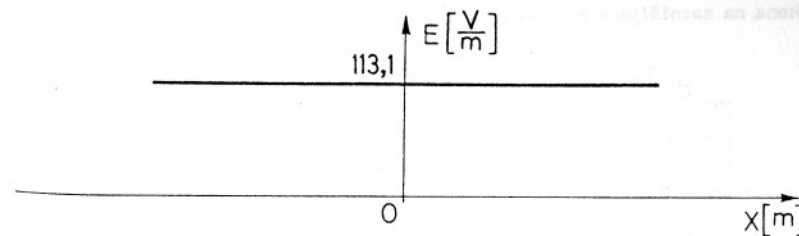
Iz ovoga se zaključuje da je raspodela naelektrisanja folije ravnomerna, površinske gustine:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{0,1 \text{ m}^2} = 2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

2° Jačina elektrostatičkog polja je, prema prethodnom:

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} = 113,1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Grafička predstava jačine polja, u funkciji rastojanja od folije, je predstavljena na slici 1. 64. c.



Sl. 1. 64. c.

1. 65. Ravna metalna ploča u vazduhu, debljine $d = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, je naelektrisan i naelektrisanje svakog njenog dela površine $S = 0,2 \text{ m}^2$ je $Q = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Odrediti:

1° Raspodelu naelektrisanja ploče.

2° Elektrostatičko polje u blizini ploče.

Zanemariti ivične efekte.

Rešenje:

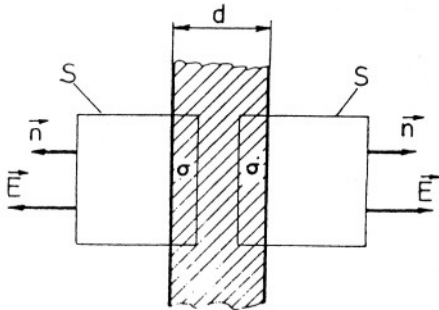
Naelektrisanja ploče se nalaze uz obe površine ploče i praktično se može smatrati da formiraju dve paralelne ravni. Vektori elektrostatičkog polja su normalni na površine ploče. U ploči nema elektrostatičkog polja, pa polja koja u unutrašnjosti ploče potiču od pojedinih slojeva naelektrisanja uz površine ploča moraju biti istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera.

Polje izvan ploče je homogeno, a prema razmatranjima iz zadatka 1.64.

1° Raspodela naelektrisanja je ravnomerna i njihova površinska gustina je jednaka na obema površinama ploče i iznosi:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{4 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{0,2 \text{ m}^2} = 2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

2° U cilju određivanja jačine elektrostatičkog polja primenom Gaussovog zakona na zamišljene površine oblika kocke prikazane na slici 1.65. a.



Sl. 1.65. a

dobija se:

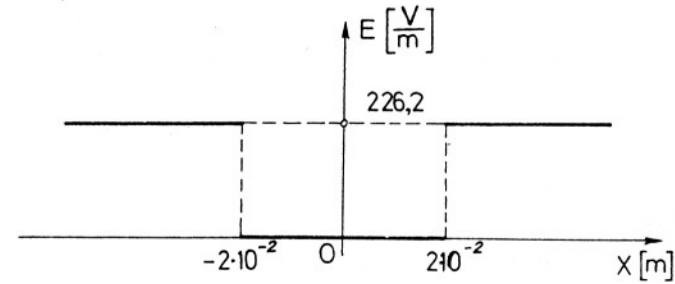
$$E S \cos 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

odnosno:

$$E = \frac{Q}{S \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 226,2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Grafički prikaz jačine elektrostatičkog polja u metalnoj ploči

i izvan nje je predstavljen na slici 1.65. b.:



Sl. 1.65. b.

1.66. Ravna metalna ploča u vazduhu, debljine $d = 1 \text{ cm}$, je pozitivno naelektrisan. Na rastojanju $l = 1 \text{ m}$ od nje jačina elektrostatičkog polja je $E = 113,1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$. Zanemarujući ivične efekte, odrediti

1° Površinsku gustinu naelektrisanja ploče.

2° Napon između ploče i tačaka udaljenih od nje $l = 1 \text{ m}$.

Rezultat:

1° Površinska gustina naelektrisanja je:

$$\sigma = 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

2° Napon je $U = 113,1 \text{ V}$.

1.67. U polje velike provodne naelektrisanane ploče debljine $d_1 = 4 \text{ mm}$, površinske gustine naelektrisanja $\sigma_1 = 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$, unese se druga velika naelektrisanana provodna ploča, debljine $d_2 = 5 \text{ mm}$, i postavi paralelno prvoj na rastojanju $l = 20 \text{ cm}$ od nje.

Odrediti:

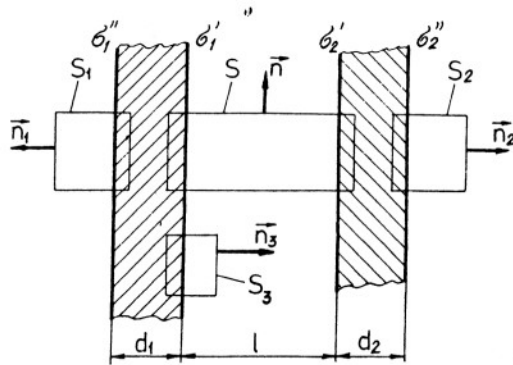
1° Površinske gustine naelektrisanja ploča

2° Elektrostatičko polje ovakvog sistema i grafički ga predstaviti.

Ivične efekte zanemariti.

Rešenje:

Pri unošenju nanaelektrisane provodne ploče u polje naelektrisane ploče javlja se pojava elektrostatičke indukcije. Po postavljanju ploče u zadati položaj, u statičkom stanju, naelektrisanja ploča su uz njihove površine. Površinske gustine naelektrisanja ploča su označene sa $\sigma_1', \sigma_1'', \sigma_2'$ i σ_2'' , kao na sl. 1.67.a.



Sl. 1.67. a.

Praktično se može smatrati da ova naelektrisanja formiraju četiri paralelne naelektrisane ravni.

1° Primenom Gausovog zakona na površinu S (sl. 1.67. a.) u obliku pravog valjka čiji su bazisi ΔS paralelni pločama, dobija se

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 = \frac{\sigma_1' \Delta S + \sigma_2' \Delta S}{\epsilon_0}$$

jer u pločama nema elektrostatičkog polja.

Odatve je:

$$\sigma_1' + \sigma_2' = 0,$$

odnosno:

$$\sigma_1' = -\sigma_2' \dots \dots \dots (1)$$

Na osnovu prethodne jednakosti se vidi da polje koje potiče od ravnih površinskih gustina naelektrisanja σ_1' i σ_2' postoji samo između ploča.

Kako u pločama nema elektrostatičkog polja, to vektori polja naelektrisanih ravnih površinskih gustina naelektrisanja σ_1'' i σ_2'' moraju biti u pločama jednakih intenziteta, a suprotnih smerova, odnosno:

$$\frac{\sigma_1''}{2 \epsilon_0} = \frac{\sigma_2''}{2 \epsilon_0},$$

tj.:

$$\sigma_1'' = \sigma_2'' \dots \dots \dots (2)$$

Iz uslova da ukupno naelektrisanje ploča pre i posle unošenja nanaelektrisane ploče mora biti jednako, dobija se:

$$\sigma_1' \Delta S + \sigma_1'' \Delta S = \sigma_1 \cdot 2 \Delta S \dots \dots (3)$$

i

$$\sigma_2' \Delta S + \sigma_2'' \Delta S = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Iz jednačina (1), (2), (3) i (4) dobijaju se površinske gustine naelektrisanja:

$$\sigma_1' = \sigma_1'' = \sigma_1 = 10^{-9} \frac{C}{m^2},$$

$$\sigma_2' = -\sigma_2'' = -\sigma_1 = -10^{-9} \frac{C}{m^2}$$

Naelektrisanja na drugoj ploči su posledica elektrostatičke indukcije.

2° Jačine elektrostatičkog polja se mogu dobiti primenom Gausovog zakona na zamišljene površine S_1, S_2 i S_3 (slika 1.67.a)

Za površinu S_1 je:

$$E_1 \Delta S \cos(\vec{E}_1, \vec{n}_1) = \frac{\sigma_1 \Delta S}{\epsilon_0}$$

Kako je $\angle(\vec{E}_1, \vec{n}_1) = 0$, to je:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = 113,1 \frac{V}{m}$$

Za površinu S_2 je:

$$E_2 \Delta S \cos(\vec{E}_2, \vec{n}_2) = \frac{\sigma_1 \Delta S}{\epsilon_0}$$

Ovde je:

$$\angle(\vec{E}_2, \vec{n}_2) = 0,$$

pa je:

$$E_2 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = 113,1 \frac{V}{m}$$

Za površinu S_3 je:

$$E_3 \Delta S \cos(\vec{E}_3, \vec{n}_3) = \frac{\sigma_1 \Delta S}{\epsilon_0},$$

i

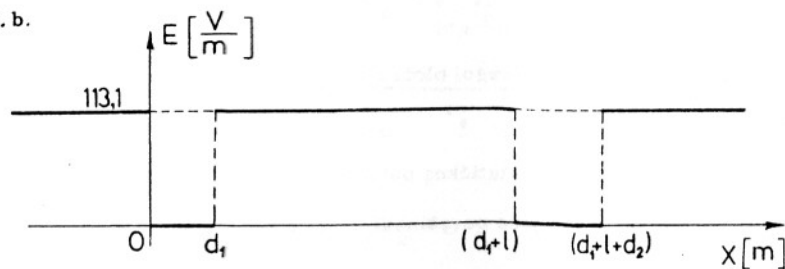
$$\angle(\vec{E}_3, \vec{n}_3) = 0$$

odnosno:

$$E_3 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = 113,1 \frac{V}{m}$$

Jačina elektrostatičkog polja je grafički predstavljena na slici

1. 67. b.



Sl. 1. 67. b.

Na osnovu prethodnog se vidi da se unošenjem i paralelnim postavljanjem ploče praktično ne menja polje u vazduhu.

1. 68. Dve velike provodne ploče, debljina d_1 i d_2 , su naelektrisane naelektrisanjima površinskih gustina $\sigma_1 = 10^{-9} \frac{C}{m^2}$ i $\sigma_2 = 10^{-10} \frac{C}{m^2}$, a zatim postavljene paralelno jedna drugoj u vazduhu, na međusobnom rastojanju d . Za taj slučaj odrediti:

1° Površinske gustine naelektrisanja ploča.

2° Jačinu elektrostatičkog polja ovakvog sistema i grafički ga predstaviti

Ivične efekte zanemariti.

Rešenje:

1° Primenjujući isti postupak kao u zadatku 1. 67, dobijaju

se ove jednačine:

$$\sigma_1' + \sigma_2' = 0 \dots \dots (1)$$

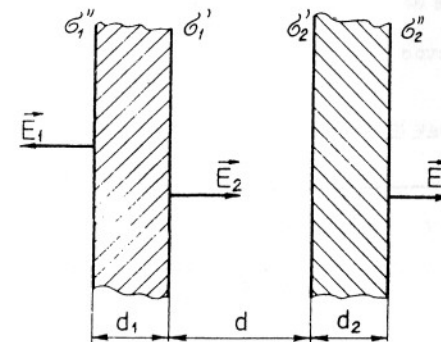
$$\sigma_1'' - \sigma_2'' = 0 \dots \dots (2)$$

$$\sigma_1' + \sigma_1'' = 2 \sigma_1 \dots \dots (3)$$

$$\sigma_2' + \sigma_2'' = 2 \sigma_2 \dots \dots (4),$$

gde su $\sigma_1', \sigma_1'', \sigma_2', \sigma_2''$ površinske gustine naelektrisanja označene na slici

1. 68. a.



Sl. 1. 68. a.

Rešenje ovog sistema jednačina je :

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_2 = 9 \cdot 10^{-10} \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_1'' = \sigma_1 + \sigma_2 = 11 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2},$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_1 = -9 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad \text{i}$$

$$\sigma_2'' = \sigma_2 + \sigma_1 = 11 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Iz ovoga se zaključuje da je došlo do pojave elektrostatičke indukcije u obe ploče

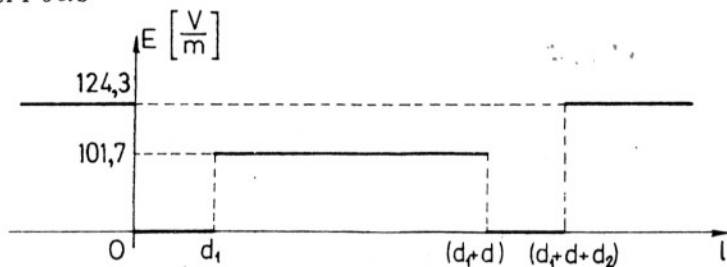
2° Jačine elektrostatičkog polja ovog sistema se dobijaju primenom Gausovog zakona kao u zadatku 1.67. Vektori elektrostatičkog polja \vec{E}_1 , \vec{E}_2 i \vec{E}_3 su prikazani na slici 1.68. a., a njihovi intenziteti su:

$$E_1 = \frac{\sigma_1''}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\epsilon_0} = 124,3 \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$E_2 = \frac{\sigma_1'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\epsilon_0} = 101,7 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad \text{i}$$

$$E_3 = \frac{\sigma_2''}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{\epsilon_0} = 124,3 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Jačina elektrostatičkog polja ovog sistema je grafički predstavljena na slici 1.68. b



Sl 1.68. b

1.69. Dve jednake metalne ploče naelektrisane su jednakim količinama elektriciteta suprotnog znaka. Površinske gustine ovih naelektrisanja su

$$\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad \text{i} \quad \sigma_2 = -2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

Kada se ove ploče postave paralelno jedna drugoj u vazduhu na međusobnom rastojanju $d = 1 \text{ cm}$, odrediti:

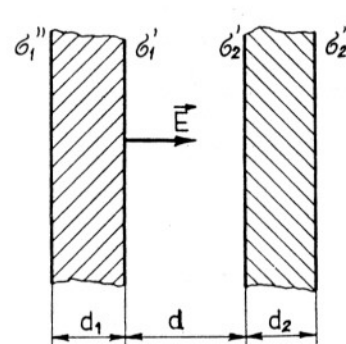
1° Površinske gustine naelektrisanja ploča,

2° Elektrostatičko polje ovog sistema.

3° Napon između ploča.

Rešenje:

1° Na osnovu rezultata prethodnih zadataka, ima se:



$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_2 = 4 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2},$$

$$\sigma_1'' = \sigma_1 + \sigma_2 = 0.$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_1 = -4 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \quad \text{i}$$

$$\sigma_2'' = \sigma_2 + \sigma_1 = 0.$$

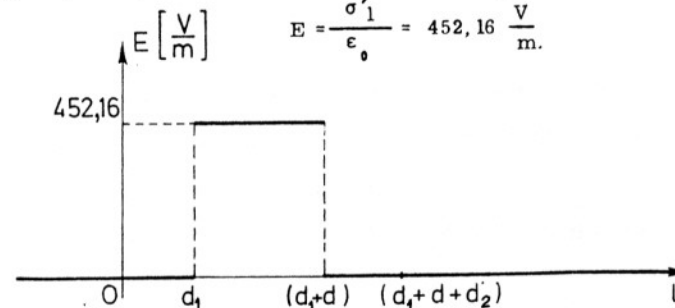
Iz dobijenog rezultata se zaključuje da se naelektrisanja nalaze uz sučeljene površine ploča.

Sl 1.69. a.

2° Elektrostatičko polje postoji samo između ploča (sl. 1.69. a.)

i njegova jačina je:

$$E = \frac{\sigma_1'}{\epsilon_0} = 452,16 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$



Sl. 1.69. b.

Na slici 1 69. b. grafički je predstavljena jačina elektrostatičkog polja

3^o Napon između ploča je:

$$U = V_1 - V_2 = Ed = 4,5216 \text{ V.}$$

Ovakav sistem predstavlja pločasti kondenzator

1.70. Velika naelektrisana provodna ploča debljine $d_1 = 6 \text{ mm}$, površinske gustine naelektrisanja $\sigma = 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$, je postavljena, u vazduhu, paralelno nenaelektrisanj provodnoj ploči debljine $d_2 = 2 \text{ mm}$, na rastojanju $d = 20 \text{ cm}$. Kada se paralelno između njih ubaci treća nenaelektrisana ploča, odnos napona između prve i druge ploče pre i posle ubacivanja treće ploče je:

$$U_{12} : U'_{12} = 4 : 3$$

Odrediti:

1^o Debljinu d_3 treće ploče.

2^o Napone U_{12} i U'_{12}

Rezultat:

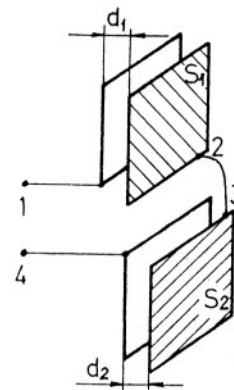
$$1^{\circ} \quad d_3 = 5 \text{ cm.}$$

$$2^{\circ} \quad U_{12} = 22,61 \text{ V} \quad \text{i} \quad U'_{12} = 16,96 \text{ V.}$$

1.71. Dva vazдушna pločasta kondenzatora dimenzija $d_1 = 1 \text{ mm}$, $S_1 = 33,9 \text{ cm}^2$ i $d_2 = 2 \text{ mm}$, $S_2 = 45,2 \text{ cm}^2$, su povezana kao što je prikazano na slici 1 71. a Ploče kondenzatora označene tačkama 1 i 3 su pozitivno naelektrisane naelektrisanjima $Q_1 = Q_2 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Odrediti:

1^o Napon U_{14} .

2^o Kapacitivnost ovog sistema između tačaka 1 i 4.



Sl. 1.71. a.

Rešenje:

Zadata grupa kondenzatora se može predstaviti kao na slici 1.71. b. Polja u kondenzatorima su homogena i njihove jačine su:

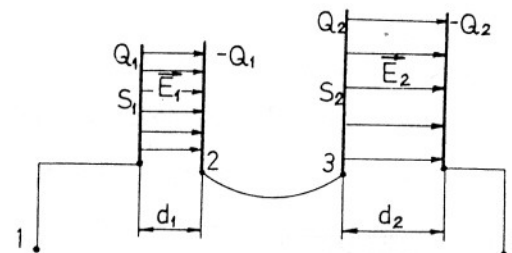
$$E_1 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0 S_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Naponi pojedinih kondenzatora su (sl 1.71. b.):

$$U_{12} = E_1 d_1 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S_1} d_1 = 200 \text{ V}$$

$$U_{34} = E_2 d_2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0 S_2} d_2 = 300 \text{ V}$$



Sl. 1.71. b.

Napon između tačaka 1 i 4 je:

$$U_{14} = \int_1^4 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_2 d\vec{l} = U_{12} + U_{34}$$

Sada je:

$$U_{14} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S_1} d_1 + \frac{Q_2}{\epsilon_0 S_2} d_2 = 200 \text{ V} + 300 \text{ V} = 500 \text{ V}$$

2° Kapacitivnosti pojedinih kondenzatora su :

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_{12}} = \epsilon_0 \frac{S_1}{d_1} = 30 \text{ pF} \quad \text{i}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{U_{34}} = \epsilon_0 \frac{S_2}{d_2} = 20 \text{ pF}$$

Kako su ploče vezane za tačke 1 i 4 naelektrisanje naelektrisanjima iste količine, a suprotnog znaka, to je kapacitivnost sistema između tačaka 1 i 4:

$$C_{14} = \frac{Q_1}{U_{14}} = \frac{Q_1}{Q_1 \left(\frac{d_1}{\epsilon_0 S_1} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S_2} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

odnosno

$$\frac{1}{C_{14}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Unošenjem brojnih vrednosti se dobija :

$$C_{14} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 12 \text{ pF}$$

1. 72. Dva pločasta vazдушna kondenzatora dimenzija $d_1 = 1 \text{ mm}$,

$S_1 = 34 \text{ cm}^2$, $d_2 = 2 \text{ mm}$ i $S_2 = 45,2 \text{ cm}^2$, su naelektrisana tako da je povr-

šinska gustina naelektrisanja pozitivnih ploča $\sigma_1 = 1,77 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

i $\sigma_2 = 1,33 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

Kada se ploče naelektrisanje naelektrisanjima istog znaka spoje provodnim žicama kao na slici 1. 72. a., odrediti:



Sl. 1. 72 a.

1° Površinske gustine naelektrisanja ploča.

2° Napon između ploča.

3° Kapacitivnost ovakvog sistema.

Rešenje:

1° Posle spajanja ploča provodnim vezama doći će do pre-raspodele naelektrisanja ploča, pa će ploče 1 i 3 kao i 2 i 4 biti na istom potencijalu, tako da je:

$$\sigma_1 \cdot S_1 + \sigma_2 \cdot S_2 = \sigma_1' \cdot S_1 + \sigma_2' \cdot S_2 \quad \dots \quad (1)$$

i

$$U_{12}' = U_{34}'$$

odnosno :

$$\frac{\sigma_1'}{\epsilon_0} d_1 = \frac{\sigma_2'}{\epsilon_0} d_2 \quad \dots \quad (2)$$

Iz jednačina (1) i (2) je:

$$\sigma_1' = \frac{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}{d_1 \left(\frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right)} = 2,12 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_2' = \frac{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}{d_2 \left(\frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right)} = 1,06 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

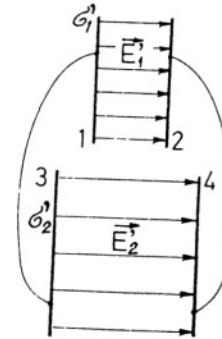
2° Napon između ploča je :

$$U_{12}' = U_{34}' = \frac{\sigma_1'}{\epsilon_0} d_1 = \frac{\sigma_2'}{\epsilon_0} d_2$$

odnosno :

$$U_{12}' = U_{34}' = \frac{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}{\epsilon_0 \left(\frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right)} = 240 \text{ V}$$

Sl. 1. 72. b.



3^o Kapacitivnost ovog sistema (sl. 1. 72. b.) je:

$$C = \frac{Q_+}{U_{12}'} = \frac{\sigma_1' S_1 + \sigma_2' S_2}{U_{12}'} = \epsilon_0 \frac{S_1}{d_1} + \epsilon_0 \frac{S_2}{d_2},$$

odnosno:

$$C = C_1 + C_2 = 50 \text{ pF}.$$

1. 73. Metalna usamljena lopta poluprečnika $a = 2 \text{ cm}$ i naelektrisanja $Q = 2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, nalazi se u vazduhu. Grafički predstaviti jačinu elektrostatičkog polja i potencijal unutar i izvan lopte, uzimajući tačku u beskonačnosti za referentu.

Rešenje:

U elektrostatici u unutrašnjosti provodnih tela nema naelektrisanja. Primenom Gausovog zakona na bilo koju zatvorenu površinu S'

u lopti (sl. 1. 73. a.) ima se:

$$\oint_{S'} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{uS'}}{\epsilon_0} = 0,$$

odnosno:

$$E = 0,$$

u svim tačkama u unutrašnjosti lopte.

Naelektrisanja se nalaze u tankom sloju uz površinu lopte i zbog delovanja samo Kulonovih

Sl. 1. 73. a.

siila, ravnomerno su raspoređena.

Elektrostatičko polje izvan lopte je radijalno i njegova jačina se

može odrediti primenom Gausovog zakona na zamišljenu sferu S'' , poluprečnika $r > a$, koncentričnu sa metalnom naelektrisanom loptom. Kako je u svim tačkama sfere S'' polje istog intenziteta, to se, prema slici 1. 73. a. ima:

$$\oint_{S''} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

tj.:

$$E \cdot 4 \pi r^2 \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

odnosno:

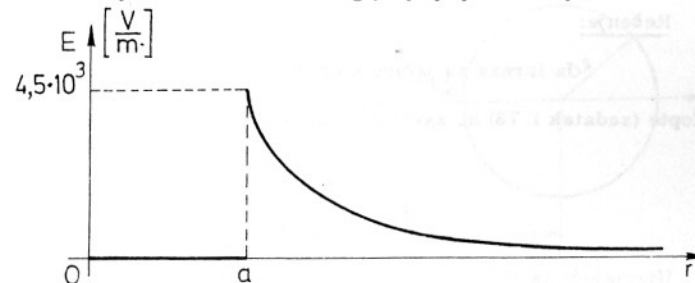
$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (r > a).$$

Iz ovog izraza se zaključuje da je za sve tačke izvan lopte polje isto kao kada bi se celokupno njeno naelektrisanje nalazilo u njenom centru.

Jačina polja na površini lopte je najveća i iznosi:

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2} = 4,5 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Grafik jačine elektrostatičkog polja je predstavljen na slici 1. 73. b.



Sl. 1. 73. b.

Potencijal tačkama koje se nalaze na rastojanju r od centra lopte

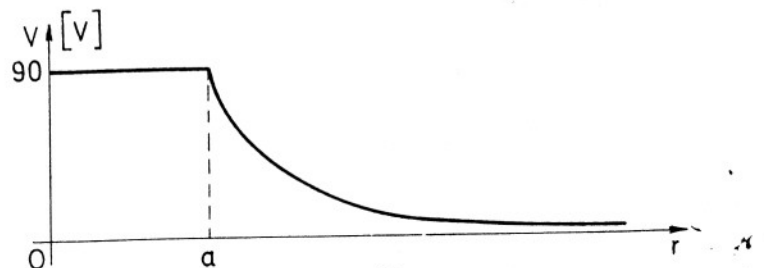
($r > a$) je:

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr \cdot \cos(\vec{E}, \vec{dr}) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Potencijal tačka lopte je:

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} = 90 \text{ V.}$$

Grafik potencijala je prikazan na slici 1. 73. c.



Sl. 1.73. c.

1. 74. Metalna lopta poluprečnika $a=5 \text{ cm}$, nalazi se u vazduhu daleko od drugih tela. Odrediti najveći potencijal i najveću površinsku gustinu naelektrisanja lopte. Najveća jačina elektrostatičkog polja za vazduh je

$$E_{\max} = 30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}.$$

Rešenje:

Iz izraza za jačinu elektrostatičkog polja metalne naelektrisane lopte (zadatak 1. 73) se zaključuje da je najveća jačina polja na površini lopte:

$$E_{\max} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2},$$

Uzimajući za referentu tačku beskonačnosti, izraz za potencijal

lopte je:

$$V_{\max} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} = a E_{\max} = 150 \text{ kV.}$$

Najveća površinska gustina naelektrisanja lopte je:

$$\sigma_{\max} = \epsilon_0 E_{\max} = 26,55 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

1. 75. Dve metalne lopte poluprečnika $a_1 = 4 \text{ mm}$ i $a_2 = 6 \text{ mm}$, naelektrisanja $Q_1 = -Q_2 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, respektivno, nalaze se u vazduhu na medjusobnom rastojanju $d = 1 \text{ m}$.

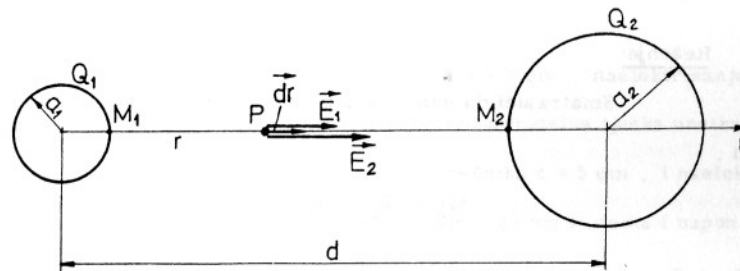
Odrediti napon izmedju ovih lopti.

Rešenje:

Napon izmedju prve i druge lopte je:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} dl.$$

Ovaj napon je najlakše odrediti preko najkraćeg puta izmedju lopti. Pod pretpostavkom da su naelektrisanja lopti ravnomerno raspoređena (što nije sasvim ispravno zbog medjusobnog dejstva naelektrisanja lopti), polje u nekoj tački P (sl. 1. 75.) je:



Sl. 1. 75.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

gde je:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \text{i}$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{(d-r)^2}.$$

Prema prethodnom je :

$$U_{12} = \int_{a_1}^{(d-a_2)} \left[\frac{Q_1}{4 \cdot \pi \epsilon_0 r^2} + \frac{|Q_2|}{4 \pi \epsilon_0 (d-r)^2} \right] dr = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 a_1} \int_{a_1}^{(d-a_2)} \frac{dr}{r^2} + \frac{|Q_2|}{4 \pi \epsilon_0 a_1} \int_{a_1}^{(d-a_2)} \frac{dr}{(d-r)^2}$$

odnosno :

$$U_{12} = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{d - a_1 - a_2}{a_1(d - a_2)} + \frac{d - a_1 - a_2}{a_2(d - a_1)} \right] = 750 \text{ V.}$$

1. 76. Nepokretne metalne lopte poluprečnika $a_1 = 1 \text{ cm}$ i $a_2 = 3 \text{ cm}$, u vazduhu, na medjusobnom rastojanju $d = 1 \text{ m}$, povezane su vrlo tankom provodnom žicom. Kada se lopte naelektrišu ukupnim naelektrisanjem $Q = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, odrediti :

1^o Naelektrisanje pojedinih lopti

2^o Potencijal lopti.

Rešenje:

Smatrajući da nema naelektrisanja na provodnoj žici, može

se pisati :

$$Q_1 + Q_2 = Q \dots \dots \dots (1)$$

gde su Q_1 i Q_2 naelektrisanja lopti.

Pošto su lopte spojene provodnom žicom, to su njihovi potencijali jednaki, te je napon između njih jednak nuli. Na osnovu rezultata zadatka 1. 75. se ima:

$$\frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{d - a_1 - a_2}{a_1 (d - a_2)} - \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{d - a_1 - a_2}{a_2 (d - a_1)} = 0,$$

odnosno :

$$a_2 (d - a_1) Q_1 - a_1 (d - a_2) Q_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Iz jednačina (1) i (2) mogu se odrediti naelektrisanja Q_1 i Q_2 :

U zadatom slučaju je $d \gg a_1$ i $d \gg a_2$, pa jednačina (2) dobija

ovaj oblik :

$$a_2 Q_1 - a_1 Q_2 = 0 \dots \dots \dots (2')$$

Iz jednačina (1) i (2') se dobija :

$$Q_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} Q = 10^{-10} \text{ C} \quad \text{i}$$

$$Q_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} Q = 3 \cdot 10^{-10} \text{ C.}$$

2^o Potencijali kugli su, praktično :

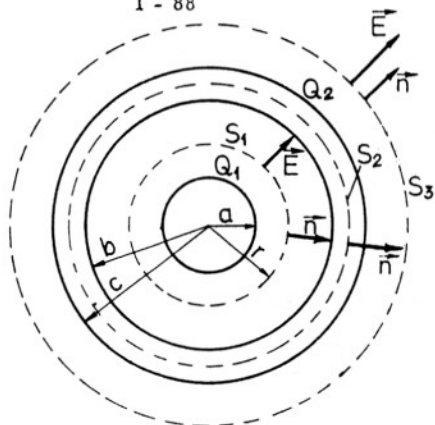
$$V_1 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a_1} = \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a_2} = V_2 = 90 \text{ V.}$$

1. 77. Oko metalne lopte poluprečnika $a = 2 \text{ cm}$, naelektrisanja $Q_1 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, u vazduhu, nalazi se koncentrična metalna ljuska unutrašnjeg poluprečnika $b = 4 \text{ cm}$, spoljašnjeg poluprečnika $c = 5 \text{ cm}$, i naelektrisanja $Q_2 = 6 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Odrediti polje i potencijale ovakvog sistema i napon između ljuske i lopte.

Rešenje:

Unutar metalne lopte poluprečnika a nema elektrostatičkog polja. U prostoru između lopte i ljuske polje je radijalno, usmereno kao na slici 1. 77.a. Izraz za jačinu elektrostatičkog polja u ovom delu prostora dobija se primenom Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površinu S_1 (Sl. 177. a.)

$$\oint_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$



Sl. 1. 77. a.

Kako je u svim tačkama sfere S_1 polje istog intenziteta, to je :

$$\oint_{S_1} \vec{E} dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E \oint_{S_1} dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0},$$

odnosno :

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (a < r < b).$$

U metalnoj ljuski nema elektrostatičkog polja, pa se primenom Gausovog zakona na zamišljenu površinu S_2 u ljuski (sl. 1. 77 a.) ima :

$$\oint_{S_2} \vec{E} dS = 0 = \frac{Q_1 + Q_2'}{\epsilon_0}, \quad (b < r < c),$$

gde je Q_2' naelektrisanje uz unutrašnju površinu metalne ljuske. Iz prethodnog izraza je :

$$Q_2' = -Q_1 = -3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

Kako je metalna ljuska pozitivno naelektrisana, to negativno naelektrisanje uz njenu unutrašnju površinu potiče od elektrostatičke indukcije.

Polje izvan ljuske je radijalno, usmereno od ljuske, a njegova jačina se određuje primenom Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površinu S_3

koncentričnu sa metalnom ljuskom (Sl. 1. 77 a.) :

$$\oint_{S_3} \vec{E} dS = \frac{Q_1 + Q_2' + Q_2''}{\epsilon_0},$$

odnosno :

$$E = \frac{Q_1 + Q_2' + Q_2''}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (r > c).$$

U prethodnom izrazu Q_2'' je naelektrisanje uz spoljašnju površinu metalne ljuske. Kako je ukupno naelektrisanje metalne ljuske Q_2 , to se Q_2'' može odrediti iz :

$$Q_2' + Q_2'' = Q_2,$$

tj. :

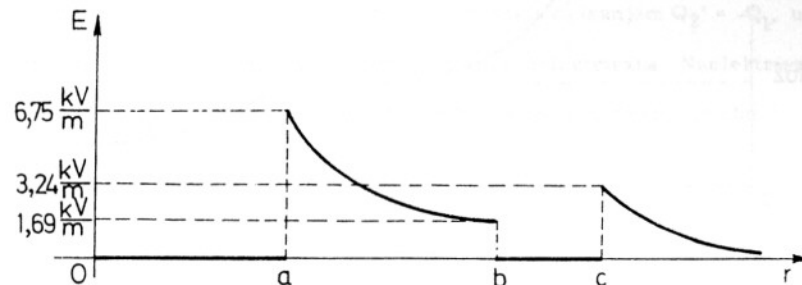
$$Q_2'' = Q_2 - Q_2' = Q_2 + Q_1 = 9 \cdot 10^{-10} \text{ C}.$$

Na osnovu ovoga se za jačinu polja izvan ljuske može pisati :

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad (r > c)$$

Jačina elektrostatičkog polja ovog sistema je predstavljena slikom

1. 77. b.



Sl. 1. 77. b.

Izraz za potencijal tačka izvan ljsuke je:

$$V = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \quad (r > c).$$

Potencijal ljsuke je:

$$V_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{c} = 162 \text{ V.}$$

Izraz za potencijal tačka između ljsuke i lopte je:

$$V = \int_r^{\infty} \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} + \int_b^c Q dr + \int_c^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2},$$

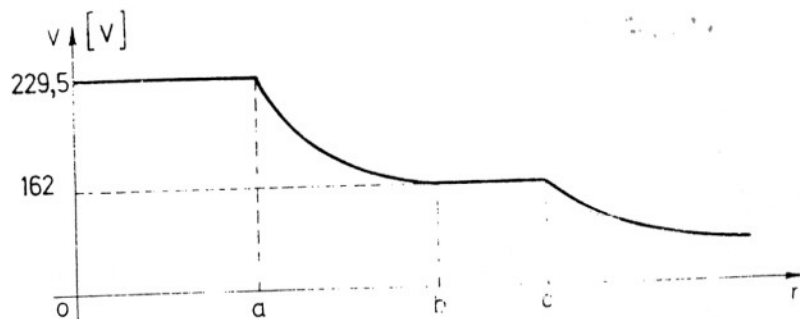
odnosno:

$$V = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{c}, \quad a < r < b.$$

Potencijal metalne lopte je:

$$V_2 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + V_1 = 229,5 \text{ V.}$$

Grafik potencijala je predstavljen na slici 1. 77. c.



Sli 1. 77. c.

Napon između metalne ljsuke i lopte je:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = -67,5 \text{ V.}$$

1. 78. Metalna lopta poluprečnika $a = 2 \text{ cm}$, i naelektrisanja $Q_1 = 3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, u vazduhu, je koncentrična sa metalnom ljsukom unutrašnjeg poluprečnika $b = 3 \text{ cm}$, spoljašnjeg poluprečnika $c = 4 \text{ cm}$ i naelektrisanja $Q_2 = 7 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Ako se lopta i ljsuka spoje provodnom žicom, odrediti njihove potencijale pre i posle spajanja žicom

Rešenje:

Pre spajanja ljsuke i lopte metalnom žicom, njihovi potencijali su (prema rezultatima zadatka 1. 77.) :

$$V_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{c} = 225 \text{ V i}$$

$$V_2 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{c} = 270 \text{ V.}$$

Napon između ljsuke i lopte je:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = -\frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = -45 \text{ V.}$$

Posle spajanja metalne ljsuke i lopte metalnim provodnikom, promeniće se njihova naelektrisanja, a one će biti na istom potencijalu. Naelektrisanje lopte Q_1 će se neutralisati sa indukovanim naelektrisanjem $Q_2' = -Q_1$, uz unutrašnju površinu ljsuke, pa će lopta ostati nenaelektrisana. Naelektrisanje ljsuke će biti $Q_2'' = Q_1 + Q_2$ i raspoređeno uz spoljašnju površinu ljsuke.

Potencijal ljsuke i lopte je, posle spajanja:

$$V_1' = V_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{c} = 225 \text{ V.}$$

1.79. Poluprečnik unutrašnjeg provodnika sfernog kondenzatora iznosi $a = 1$ cm, a unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika je dužine $b = 2$ cm. Napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika je $U_{12} = 180$ V.

Odrediti:

1° Najveću jačinu elektrostatičkog polja kondenzatora

2° Površinske gustine naelektrisanja elektroda, i

3° Kapacitivnost kondenzatora

Rešenje:

1° Elektrostatičko polje postoji samo između elektroda kondenzatora. Izvan kondenzatora nema polja, što se može pokazati primenom Gausovog zakona. Polje u kondenzatoru je radijalno, usmereno ka spoljašnjoj elektrodi, jačine:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Najveća jačina elektrostatičkog polja je na površini unutrašnje elektrode i iznosi:

$$E_{\max} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2}$$

Kako je napon između elektroda kondenzatora:

$$U_{12} = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

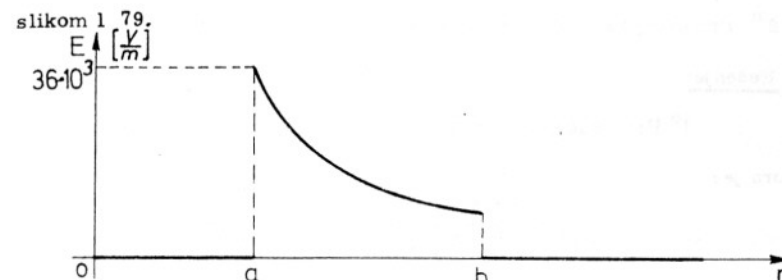
to su naelektrisanja elektroda kondenzatora:

$$Q_1 = -Q_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 U_{12} ab}{b-a} = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

Najveća jačina elektrostatičkog polja je:

$$E_{\max} = \frac{U_{12} \cdot b}{a(b-a)} = 36 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Grafik jačine elektrostatičkog polja kondenzatora prikazan je



Sl. 1.79.

2° Površinske gustine naelektrisanja unutrašnje i spoljašnje elektrode su:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi a^2} = 3,18 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad \text{i}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi b^2} = -0,795 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

3° Kapacitivnost kondenzatora je:

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 2,22 \text{ pF}$$

1.80. Odrediti najveće naelektrisanje elektroda sfernog vazdušnog kondenzatora poluprečnika elektroda $a = 3$ cm i $b = 5$ cm. Kritična jačina elektrostatičkog polja za vazduh je $E_{kr} = 30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$.

Rezultat:

$$|Q_{\max}| = 4\pi\epsilon_0 a^2 E_{kr} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

1.81. Poluprečnici elektroda sfernog vazdušnog kondenzatora su

$a = 1$ cm i $b = 2$ cm, a njihova naelektrisanja su $Q_1 = -Q_2 = 4 \cdot 10^{-10}$ C.

Kada se koncentrično sa elektrodama ubaci sferična metalna nenaelektrisana

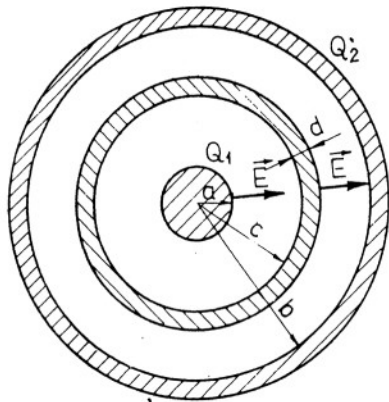
ljuska unutrašnjeg poluprečnika $c = 1,4 \text{ cm}$ i debljine $d = 2 \text{ mm}$, odrediti:

- 1° Priraštaj napona kondenzatora,
- 2° Priraštaj kapacitivnosti kondenzatora.

Rešenje:

1° Pre ubacivanja metalne ljuske napon između elektroda kondenzatora je:

$$U_{12} = \int_a^b \vec{E} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab} = 180 \text{ V}$$



Sl 1 81.

U ubačenoj metalnoj ljusci nema elektrostatičkog polja. Kako je ljuska normalna na linije prvobitnog polja, to je polje izvan ljuske isto kao i pre njenog ubacivanja.

Novi napon kondenzatora je (sl. 1.81):

$$U_{12}' = \int_a^c \vec{E} dr + \int_{(c+d)}^b \vec{E} dr,$$

gde je:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Iz prethodnog je:

$$U_{12}' = \frac{Q_1(c-a)}{4\pi\epsilon_0 ac} + \frac{Q_1(b-c-d)}{4\pi\epsilon_0 b(c+d)} = 147,85 \text{ V},$$

pa je priraštaj napona:

$$\Delta U_{12} = U_{12}' - U_{12} = -32,15 \text{ V}.$$

2° Kapacitivnosti kondenzatora pre i posle ubacivanja metalne ljuske su:

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 2,22 \text{ pF} \quad \text{i}$$

$$C' = \frac{Q_1}{U_{12}'} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{b}\right)} = 2,72 \text{ pF}$$

Priraštaj kapacitivnosti kondenzatora je:

$$\Delta C = C' - C = 0,5 \text{ pF}.$$

1.82. Na rastojanju $r = 3a$ od centra usamljene naelektrisane metalne lopte u vazduhu, poluprečnika $a = 10 \text{ cm}$, potencijal, prema tački u beskonačnosti, je $V_1 = 90 \text{ V}$. Odrediti naelektrisanje i kapacitivnost lopte.

Rezultat:

Naelektrisanje lopte je:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 V_1 r = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad a$$

njena kapacitivnost:

$$C = \frac{Q}{V_a} = 4\pi\epsilon_0 a = 11 \text{ pF}.$$

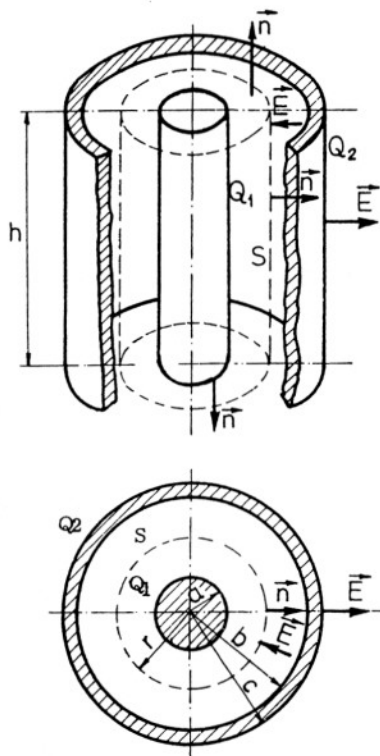
1.83. Unutrašnji provodnik vazdušnog koaksijalnog kabla je žica poluprečnika $a = 1 \text{ mm}$, a spoljašnji provodnik je cilindrična provodna cev poluprečnika $b = 5 \text{ mm}$ i $c = 7 \text{ mm}$. Na dužini $h = 10 \text{ cm}$ naelektrisanje unutrašnjeg provodnika je $Q_1 = -10^{-9} \text{ C}$, a spoljašnjeg $Q_2 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Zanemarujući ivične efekte, odrediti polje ovog kabla i napon između njegovih provodnika.

Rešenje:

U unutrašnjosti metalne žice nema naelektrisanja i elektrostatičkog polja. U prostoru između provodnika kabla elektrostatičko polje je radialno i usmereno ka žici, pošto je žica negativno naelektrisana. Izraz za jačinu elektrostatičkog polja između provodnika dobija se primenom Gausovog

zakona na zamišljenu valjkastu površinu S , visine h kao na slici 1. 83. a., koja predstavlja deo dugačkog koaksijalnog kabla:



Sl. 1 83. a.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

U svim tačkama bazisa ovog zamišljenog valjka je $\angle(\vec{E}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{te nema fluksa kroz bazise valjka.}$$

U svim tačkama oмотача zamišljenog valjka polje je iste jačine,

te je:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S \vec{E} d\vec{S}, \text{ pa je}$$

$$E \cdot 2\pi r h \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \text{ a}$$

odavde je:

$$E = \frac{-Q_1}{2\pi\epsilon_0 h r}, \text{ (} a < r < b \text{)}.$$

Primenom Gausovog zakona na zamišljenu valjkastu površinu sa oмотачem u unutrašnjosti spoljašnjeg provodnika ima se:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 = \frac{Q_1 + Q_2'}{\epsilon_0},$$

jer u spoljašnjem provodniku nema elektrostatičkog polja.

Naelektrisanje uz unutrašnju površinu spoljašnjeg provodnika na dužini h je, prema prethodnom:

$$Q_2' = -Q_1 = 10^{-9} \text{ C.}$$

Pojava naelektrisanja Q_2' uz unutrašnju površinu spoljašnjeg provodnika je posledica elektrostatičke indukcije.

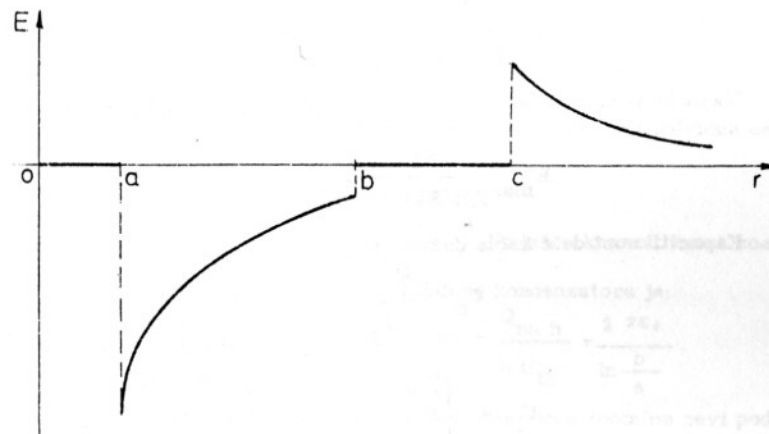
Kako je naelektrisanje dela spoljašnjeg provodnika dužine h jednako Q_2 , to je naelektrisanje uz njegovu spoljašnju površinu na toj dužini:

$$Q_2'' = Q_2 - Q_2' = Q_2 + Q_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C.}$$

Elektrostatičko polje izvan koaksijalnog kabla je radijalno, usmereno od kabla. (slika 1. 83. a.) Izraz za njegovu jačinu na rastojanju r od ose kabla je:

$$E = \frac{Q_2''}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{1}{r} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{1}{r}, \text{ } r > c.$$

Grafik algebarskog intenziteta elektrostatičkog polja je predstavljen slikom 1. 83. b.



Sl. 1 83. b.

Napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika koaksijalnog kabla je:

$$U_{12} = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \int_a^b \frac{-Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{dr}{r} \cos(\vec{E}, \vec{dr}), \text{ odnosno:}$$

$$U_{12} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a} = -288 \text{ V.}$$

1. 84. Koaksijalni vazdušni kabl poluprečnika $a = 0,6 \text{ cm}$, $b = 0,8 \text{ cm}$ i $c = 1 \text{ cm}$ je naelektrisan naelektrisanjima $Q_1 = -Q_2 = 10^{-8} \text{ C}$ na dužini $h = 10 \text{ m}$. Odrediti najveću jačinu elektrostatičkog polja u kابلu i podužnu kapacitivnost kabela.

Rešenje:

Kako su naelektrisanja provodnika kabela jednaka po količini, a suprotnog znaka, to elektrostatičko polje postoji samo između provodnika kabela. Polje je radijalno, usmereno ka spoljašnjem provodniku pošto je naelektrisanje unutrašnjeg provodnika kabela pozitivno. Izraz za jačinu polja na rastojanju r od ose kabela je:

$$E = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{r}, \quad a < r < b.$$

Najveća jačina polja je uz površinu unutrašnjeg provodnika i iznosi:

$$E_{\max} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{a} = 3 \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

Kapacitivnost dela kabela dužine h je:

$$C_h = \frac{Q_1}{U_{12}},$$

gde je:

$$U_{12} = \int_a^b E dr = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}.$$

Odavde je:

$$C_h = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Podužna kapacitivnost kabela je:

$$C' = \frac{C_h}{h} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} = 198 \frac{\text{pF}}{\text{m}}.$$

1. 85. Unutrašnji provodnik vazdušnog koaksijalnog kabela je žica poluprečnika $R_1 = 2 \text{ mm}$, naelektrisanja $Q_1 = 1,13 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ na dužini $h = 18 \text{ cm}$. Kapacitivnost dela kabela dužine h je $C = 10 \text{ pF}$. Odrediti unutrašnji poluprečnik R_2 spoljašnjeg provodnika kabela i površinsku gustinu naelektrisanja spoljašnjeg provodnika.

Rezultat:

Unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika je $R_2 = 5,44 \text{ mm}$, a površinska gustina naelektrisanja je $\sigma_2 = -1,84 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

1. 86. Između elektroda vazdušnog koaksijalnog kondenzatora poluprečnika $a = 1 \text{ cm}$ i $b = 2 \text{ cm}$, ubačena je, koncentrično sa elektrodama, metalna nanaelektrisan cev unutrašnjeg poluprečnika $c = 1,2 \text{ cm}$ i debljine d . Odnos podužnih kapacitivnosti koaksijalnog kondenzatora pre i posle ubacivanja metalne cevi je $\frac{C'}{C_1} = 0,5$. Odrediti debljinu d ubačene cilindrične cevi.

Rešenje:

Podužna kapacitivnost koaksijalnog kondenzatora je:

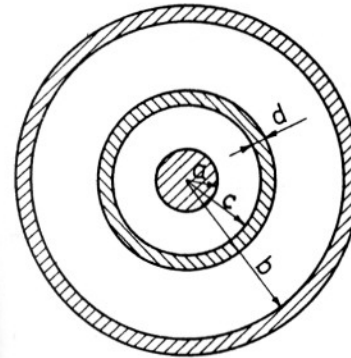
$$C' = \frac{Q_{na} h}{h U_{12}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Posle ubacivanja metalne cevi podužna kapacitivnost ovog kondenzatora

je:

$$C_1' = \frac{Q_{na} h}{h U_{12}'}, \quad \text{gde je}$$

$$U_{12}' = \int_a^c E dr + \int_{(c+d)}^b E dr, \quad \text{odnosno:}$$



Sl. 1. 86.

$$U_{12}' = \frac{Q_{na} h}{2 \pi \epsilon_0 h} \left(\ln \frac{c}{a} + \ln \frac{b}{c+d} \right) = \frac{Q_{na} h}{2 \pi \epsilon_0 h} \cdot \ln \frac{c b}{a(c+d)}. \text{ Prema prethodnim}$$

izrazima se dobija:

$$C_1' = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\ln \frac{c b}{a(c+d)}}$$

Iz odnosa podužnih kapacitivnosti kabla :

$$\frac{C'}{C_1'} = \frac{\ln \frac{c b}{a(c+d)}}{\ln \frac{b}{a}},$$

se dobija:

$$d = 0,5 \text{ cm.}$$

1. 87. Za koaksijalni vazdušni kondenzator, poluprečnika unutrašnjeg provodnika $a = 5 \text{ mm}$, odrediti unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika tako da pri naponu izmedju elektroda $U_{12} = 9 \text{ kV}$, najveća jačina elektrostatičkog polja u kondenzatoru bude $E_{\max} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

Rešenje:

Najveća jačina polja u koaksijalnom vazдушnom kondenzatoru je uz površinu unutrašnje elektrode i iznosi :

$$E_{\max} = \frac{Q_{na} h}{2 \pi \epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{a}$$

Napon izmedju unutrašnje i spoljašnje elektrode je:

$$U_{12} = \frac{Q_{na} h}{2 \pi \epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}.$$

Iz prethodnih relacija je:

$$U_{12} = E_{\max} a \ln \frac{b}{a},$$

te je:

$$b = a e^{\frac{U_{12}}{a E_{\max}}} = 9,1 \text{ mm.}$$

1. 88. Veoma dugačak prav provodnik poluprečnika $a = 0,6 \text{ mm}$, nalazi se usamljen u vazduhu. Odrediti najveću podužnu gustinu naelektrisanja provodnika Q' tako da ne dodje do pojave korone u vazduhu.

Rešenje:

Najveća jačina polja je uz površinu provodnika i iznosi:

$$E_{\max} = \frac{Q'_{\max}}{2 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a},$$

pa je najveća podužna gustina naelektrisanja:

$$Q'_{\max} = 2 \pi \epsilon_0 a E_{\max}$$

Pošto korona oko provodnika nastupa pri jačini polja:

$$E_{\max} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \text{ to je:}$$

$$Q'_{\max} = 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

1. 89. Dva dugačka paralelna žičana provodnika, poluprečnika $a = 1 \text{ mm}$, nalaze se u vazduhu, na rastojanju $d = 10 \text{ cm}$, daleko od drugih tela. Podužna gustina naelektrisanja provodnika je $Q_1' = -Q_2' = 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}}$.

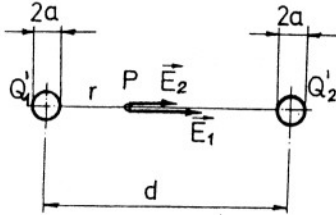
Grafički predstaviti jačinu polja u tačkama na pravoj koja je normalna na provodnike

Rešenje:

Pošto je rastojanje d izmedju provodnika mnogo veće od njihovih prečnika, to se može smatrati da je naelektrisanje na provodnicima ravnomerno raspoređeno.

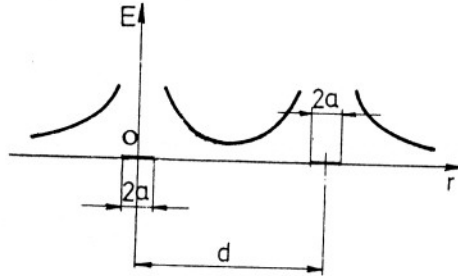
Jačina polja u tački P (sl. 1 89. a.) je:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1'}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \frac{|Q_2'|}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d-r}$$



Sl. 1 89. a.

Prema prethodnoj jednačini grafik jačine polja prikazan je na slici 1. 89. b.



Sl. 1 89. b.

1.90. Odrediti podužnu kapacitivnost dvožičnog voda iz zadatka 1. 89.

Rešenje:

Napon između pozitivno i negativno naelektrisanog provodnika je:

$$U_{12} = \int_a^{d-a} E dr = \frac{Q_1'}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{dr}{r} + \frac{|Q_2'|}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{dr}{d-r}$$

odnosno:

$$U_{12} = \frac{Q_1'}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a}$$

Podužna kapacitivnost dvožičnog voda je:

$$C' = \frac{Q_1'}{U_{12}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d-a}{a}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} \approx 6 \text{ pF/m}$$

191. Između provodnika dvožičnog voda poluprečnika $a = 3 \text{ mm}$, u vazduhu, razlika potencijala je $U_{12} = V_1 - V_2 = 72 \text{ kV}$.

Koliko treba da bude rastojanje d između provodnika, pa da ne dodje do pojave korone ?

Najveća jačina polja u vazduhu je $E_{\text{max}} = 30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$.

Rešenje:

Najveća jačina polja je uz površinu provodnika :

$$E_{\text{max}} = \frac{Q_1'}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{a(d-a)} = \frac{Q_1'}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a}$$

jer je $d \gg a$

Kako je:

$$U_{12} = \frac{Q_1'}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

to je:

$$Q_1' = \frac{\pi\epsilon_0 U_{12}}{\ln \frac{d}{a}}$$

odnosno:

$$E_{\text{max}} = \frac{U_{12}}{2a \ln \frac{d}{a}}$$

Iz prethodnog je:

$$d = a \cdot e^{\frac{U_{12}}{2aE_{\text{max}}}} = 16,5 \text{ cm.}$$

1 7 DIELEKTRIČNI MATERIJALI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

1. 92. Komad homogenog polarizovanog dielektrika je oblika diska poluprečnika $a = 5 \text{ cm}$ i debljine $d = 2 \text{ mm}$. Zapreminska gustina molekula dielektrika je $N' = 5 \cdot 10^{19} \frac{\text{molekula}}{\text{cm}^3}$. Električni moment dipola jednog molekula je $p = 6 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$. Pretpostavljajući da su vektori električnih momenata dipola svih molekula istog smera i u pravcu ose diska odrediti:

1^o Vektor polarizacije \vec{P} .

2^o Jačinu elektrostatičkog polja vezanih naelektrisanja u centru diska.

Rešenje:

1^o Vektor polarizacije se određuje iz :

$$\vec{P} = \frac{\left(\sum \vec{p} \right)_u \Delta V}{\Delta V}$$

U zadatom slučaju je:

$$\vec{P} = \frac{N_u \Delta V \cdot \vec{p}}{\Delta V} = N' \cdot \vec{p},$$

pošto je dielektrik homogen.

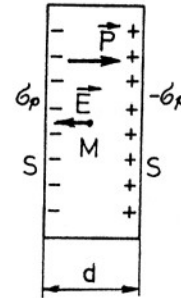
Intenzitet vektora polarizacije je :

$$P = N' \cdot p = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Vektor polarizacije \vec{P} je u pravcu diska (sl. 1. 92.).

2^o Kako je disk homogen, to se polja koja potiču od pojedinih naelektrisanja u disku međusobno poništavaju. Polje u nekoj tački se može odrediti

kao zbir elektrostatičkih polja vezanih naelektrisanja uz naspramne stranice diska. Površinska gustina ovih naelektrisanja se može odrediti smatrajući ceo disk većim dipolom. Tada je (sl. 1. 92):



Sl 1. 92.

$$P = \frac{Q_{na} S \cdot d}{d \cdot S} = \frac{Q_{na} S}{S}$$

S obzirom na to da je uobičajeno da se površinska gustina negativnih vezanih naelektrisanja obeležava sa σ_p (sl. 1. 92.), to je :

$$P = -\sigma_p = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Ovako velika površinska gustina vezanih naelektrisanja je posledica pretpostavke da su svi dipoli orijentisani u istom smeru. Realna površinska gustina vezanih naelektrisanja je znatno manja, jer termičko kretanje molekula remeti pravilne orijentacije dipola, težeći da je zameni orijentacijom u kojoj su svi pravci podjednako zastupljeni.

Jačina elektrostatičkog polja vezanih naelektrisanja u centru diska (tačka M, sl. 1. 92.) je:

$$E = \frac{-\sigma_p}{2 \epsilon_0} + \frac{-\sigma_p}{2 \epsilon_0} = 33,8 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Ovako velika jačina polja je posledica ranije pretpostavke.

1. 93. Jačina elektrostatičkog polja vazdušnog pločastog kondenzatora je E_0 . Između ploča kondenzatora ubaci se dielektrik sa polarnim molekulima zapreminske gustine N' . Smatrajući da se svi vektori \vec{p} električnih dipola molekula dielektrika postave u pravcu polja, odrediti jačinu elektrosta-

tičkog polja kondenzatora posle ubacivanja dielektrika

Rešenje:

Jačina polja koje potiče od vezanih naelektrisanja na površini dielektrika uz ploče kondenzatora je :

$$E_1 = \frac{-\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{N' p}{\epsilon_0}$$

Vektori \vec{E}_1 i \vec{E}_0 su suprotnog smera. Jačina polja u kondenzatoru je :

$$E = E_0 - E_1 = E_0 + \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{N' p}{\epsilon_0},$$

odnosno :

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$$

1 94. Između obloga pločastog kondenzatora površine ploča

$S = 10 \text{ cm}^2$ i rastojanja između njih $d = 2 \text{ mm}$, nalazi se dielektrična pločica električne susceptibilnosti $\chi_e = 3$ Naelektrisanja ploča kondenzatora su $Q_1 = -Q_2 = 10^{-9} \text{ C}$

Odrediti:

1° Površinsku gustinu vezanih naelektrisanja

2° Vektore jačine električnog polja, električne polarizacije i električnog pomeraja

Rešenje:

1° Jačina električnog polja u kondenzatoru je :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

Kako je :

$$E = \frac{P}{\epsilon_0 \chi_e} = \frac{-\sigma_p}{\epsilon_0 \chi_e}$$

to je :

$$\sigma + \sigma_p = -\frac{\sigma_p}{\chi_e}$$

Iz prethodne jednačine, površinska gustina vezanih naelektrisanja uz pozitivnu elektrodu je :

$$\sigma_p = -\sigma \frac{\chi_e}{1+\chi_e} = -7,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2},$$

gde je :

$$\sigma = \frac{Q_1}{S} = 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

Umesto prethodne relacije, često se za σ_p koristi izraz :

$$\sigma_p = -\sigma \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$$

2° Jačina elektrostatičkog polja je :

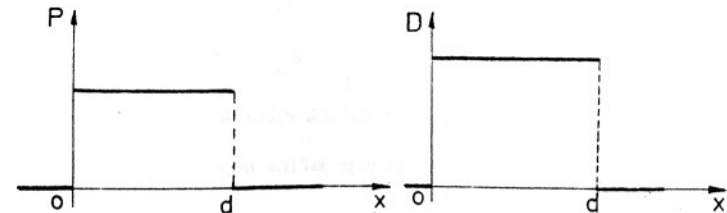
$$E = \frac{\sigma + \sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0(1+\chi_e)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon} = 28,26 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

Električna polarizacija je :

$$P = \chi_e \epsilon_0 E = -\sigma_p = 7,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

Električni pomeraj je :

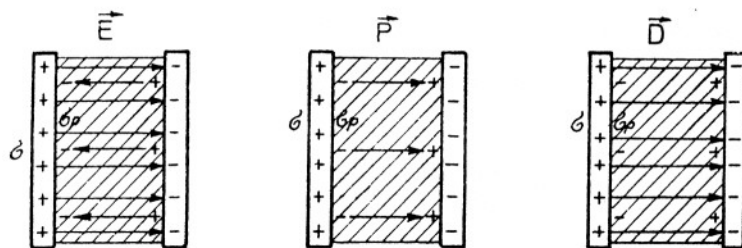
$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 \frac{\sigma + \sigma_p}{\epsilon_0} - \sigma_p = \sigma = 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$



Sl. 1. 94. a.

jer su vektori \vec{E} i \vec{P} istog smera. Intenziteti vektora \vec{P} i \vec{D} su grafički predstavljeni na sl. 1. 94. a.

Linije vektora \vec{E} , \vec{P} i \vec{D} su prikazane na sl. 1. 94. b.



Sl. 1. 94. b.

1. 95. Pločasti kondenzator, rastojanja izmedju ploča $d=4$ mm i površine ploča $S = 20$ cm², ima dielektrik relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 2$. Površinska gustina naelektrisanja ploča kondenzatora je $\sigma = 10^{-7}$ C/m²

Odrediti:

- 1^o Napon izmedju ploča kondenzatora.
- 2^o Kapacitivnost kondenzatora.

Rezultat:

- 1^o Napon izmedju pozitivne i negativne ploče je:

$$U_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} d = 22,6 \text{ V.}$$

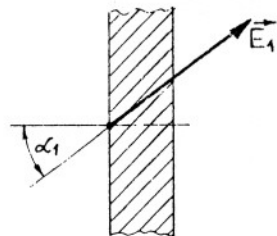
- 2^o Kapacitivnost kondenzatora je :

$$C = \frac{\sigma S}{U_{12}} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = 8,85 \text{ pF.}$$

1. 96. Staklena ploča relativne dielektrične konstante $\epsilon_f = 5$ se nalazi u vazduhu, u elektrostatičkom polju čija jačina neposredno uz površinu

staklene ploče iznosi $E_1 = 100$ V/m. Vektor jačine elektrostatičkog polja u vazduhu prikazan je na sl. 1. 96. a.

Odrediti vektor elektrostatičkog polja u staklu, neposredno uz površinu, za $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$.



Sl. 1. 96. a.

pa je:

$$E_{2t} = E_1 \sin \alpha_1 = 70,7 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Rešenje:

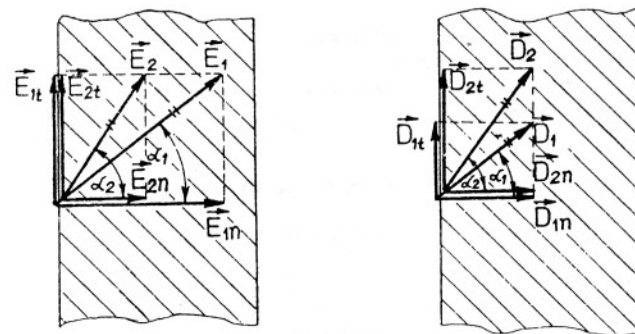
Na razdvojnoj površini dva dielektrika je:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{i}$$

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Prema sl. 1. 96. b. je:

$$E_{1t} = E_1 \sin \alpha_1 \quad \text{i} \quad E_{1n} = E_1 \cos \alpha_1,$$



Sl. 1. 96. b.

iz graničnog uslova :

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

se ima :

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n},$$

odnosno:

$$E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_{1n} = \frac{1}{\epsilon_{r2}} E_1 \cos \alpha_1 = 14,1 \frac{V}{m}$$

Jačina elektrostatičkog polja u staklu je :

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = 72 \frac{V}{m}.$$

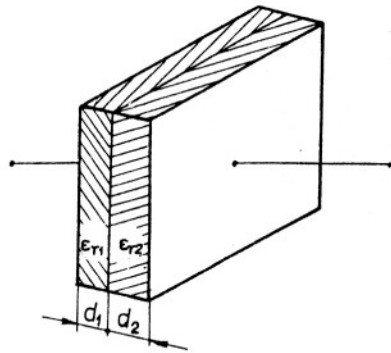
Prema slici 1.96. b. je :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = 5.$$

tj. :

$$\alpha_2 = 78^\circ 45'$$

1.97. U pločastom kondenzatoru, površine ploča $S = 32 \text{ cm}^2$ i naelektrisanja $Q = 16 \text{ nC}$, nalaze se dva homogena dielektrika, debljina $d_1 = 1 \text{ mm}$ i $d_2 = 3 \text{ mm}$, kao na sl. 1.97. a. Relativne dielektrične konstante ovih dielektrika su $\epsilon_{r1} = 3$ i $\epsilon_{r2} = 9$.



Sl. 1. 97. a.

trika su $\epsilon_{r1} = 3$ i $\epsilon_{r2} = 9$.

Odrediti:

1^o Vektore električnog pomeraja, jačine električnog polja i električne polarizacije.

2^o Površinske gustine vezanih naelektrisanja.

Rešenje:

1^o Vektor električnog pome-

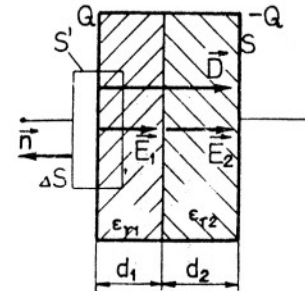
raja je normalan na ploče kondenzatora. Razdvojna površina dva dielektrika

je paralelna pločama kondenzatora, pa je zbog graničnih uslova vektor

\vec{D} isti u oba dielektrika.

Primenom uopštenog Gausovog zakona na zamišljenu zatvorenu

površinu S' (sl. 1.97. b.) ima se:



$$\oint \vec{D} dS = Q_u S' = \sigma \Delta S,$$

te je :

$$D = \frac{\sigma \Delta S}{\Delta S} = \sigma = \frac{Q}{S} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

Kako je:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Sl. 1. 97. b.

to su jačine električnog polja u dielektrcima :

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = 188,4 \frac{kV}{m} \quad \text{i}$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_2} = 62,8 \frac{kV}{m}.$$

Vektor električne polarizacije je:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}.$$

Za pojedine dielektrike je:

$$P_1 = D - \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 - \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) E_1 = 3,33 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

i

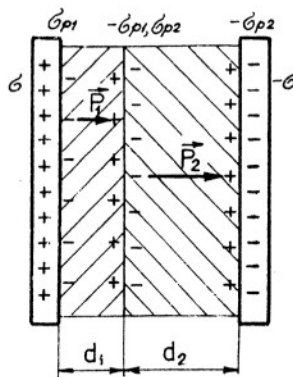
$$P_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) E_2 = 4,44 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}.$$

2^o U polarizovanom dielektriku je $P = -\sigma_p$, pa su površin-

ske gustine vezanih naelektrisanja pojedinih dielektrika (sl. 1.97. c.):

$$\sigma_{p1} = -P_1 = -3,33 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2} \quad \text{i}$$

$$\sigma_{p2} = -P_2 = -4,44 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}.$$



Sl. 1. 97. c.

1. 98. Odrediti napon i kapacitivnost kondenzatora opisanog u zadatku 1. 97.

Rešenje:

Napon između pozitivne i negativne ploče kondenzatora je :

$$U_{12} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = 376,8 \text{ V.}$$

Kapacitivnost kondenzatora je :

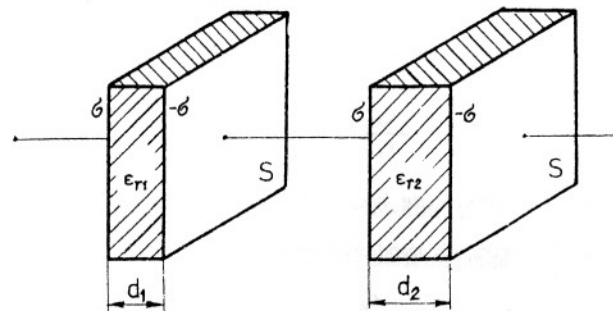
$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_2} d_2} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = 42,5 \text{ pF.}$$

Iz prethodnog izraza je:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_1 S} + \frac{1}{\epsilon_2 S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

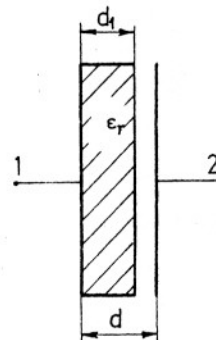
pa se ovaj kondenzator može predstaviti rednom vezom dva kondenzatora, kao na sl. 1. 98. Ovo se može uraditi stoga jer je razdvojna površina ovih dielektrika ekvipotencijalna. Postavljanjem metalne folije na razdvojnu površinu dielektrika ne menja se polje u kondenzatoru i praktično se obrazuju

dva kondenzatora u rednoj vezi, čije su kapacitivnosti C_1 i C_2 .



Sl. 1. 98.

1. 99. U vazdušni pločasti kondenzator, rastojanja između ploča $d = 5 \text{ mm}$, ubačen je papir debljine $d_1 = 4 \text{ mm}$ kao na sl. 1. 99. Relativna dielektrična konstanta papira je $\epsilon_r = 3$. Znajući da su dielektrične čvrstoće papira i vazduha $E_{1\text{max}} = 200 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ i $E_{2\text{max}} = 30 \frac{\text{kV}^*}{\text{cm}}$, odrediti naj-



Sl. 1. 99.

veći napon na koji sme da se priključi ovaj kondenzator.

Rešenje:

Pretpostavljajući da je ploča označena sa 1 na sl. 1. 99. pozitivno naelektrisana, za napon kondenzatora se ima :

$$U_{12} = E_1 d_1 + E_2 (d - d_1).$$

Iz graničnih uslova je: $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$.

* Dielektrična čvrstoća zavisi od debljine sloja dielektrika. Pri preciznijim proračunima ove čvrstoće se zadaju prema debljinama upotrebljenih slojeva dielektrika.

Do proboja kondenzatora dolazi kada je jačina polja bar u jednoj tački veća od odgovarajuće dielektrične čvrstoće. Kada je jačina polja u delu kondenzatora sa vazduhom bliska dielektričnoj čvrstoći vazduha, jačina polja u delu sa papirnim dielektrikom je :

$$E_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{2\max} = 10 \frac{\text{kV}}{\text{cm}},$$

što je manje od njegove dielektrične čvrstoće. Prema prethodnom, najveći napon na koji sme da se priključi kondenzator je :

$$U_{12\max} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{2\max} d_1 + E_{2\max}(d-d_1) = 7 \text{ kV}.$$

1. 100. Između ploča pločastog kondenzatora nalaze se dva dielektrika kao na sl. 1.100. a., pri čemu je $d = 5 \text{ mm}$, $S' = 10 \text{ cm}^2$, $S'' = 15 \text{ cm}^2$,

$\epsilon_{r1} = 5$ i $\epsilon_{r2} = 9$. Naelektrisanja ploča kondenzatora su $Q_1 = -Q_2 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Odrediti :

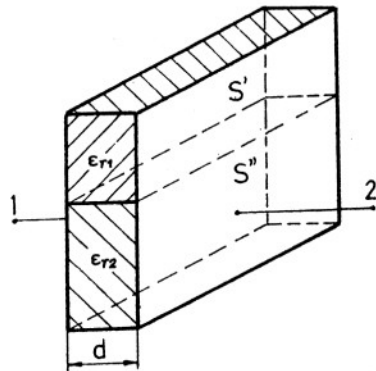
1° Vektore jačine električnog polja, električnog pomeraja i električne polarizacije.

2° Površinske gustine slobodnih i vezanih naelektrisanja.

Rešenje:

1° Vektor jačine električnog po-

lja je normalan na ploče kondenzatora i tangencijalan na razdvojnu površinu dva dielektrika. Iz graničnih uslova sledi da je jačina električnog polja ista u oba dielektrika.



Sl. 1.100. a.

Kako je :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

to je, za pojedine dielektrike u kondenzatoru :

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E} \quad \text{i}$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}.$$

Zanemarujući ivične efekte, primenom Gausovog zakona na zamišljenu zatvorenu površinu S oko pozitivno naelektrisanu ploču (sl. 1.100. b.), ima se :

$$D_1 S' + D_2 S'' = Q_1.$$

Prema prethodnom je jačina električnog polja u kondenzatoru :

$$E = \frac{Q_1}{\epsilon_1 S' + \epsilon_2 S''} = 12 \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

Električni pomeraji u dielektrikima su :

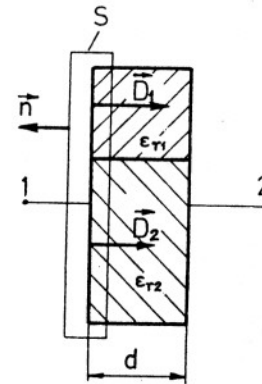
$$D_1 = \epsilon_1 E = 5,31 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad \text{i}$$

$$D_2 = \epsilon_2 E = 9,56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Električne polarizacije pojedinih dielektrika su :

$$P_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) E = 4,25 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad \text{i}$$

$$P_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) E = 8,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$



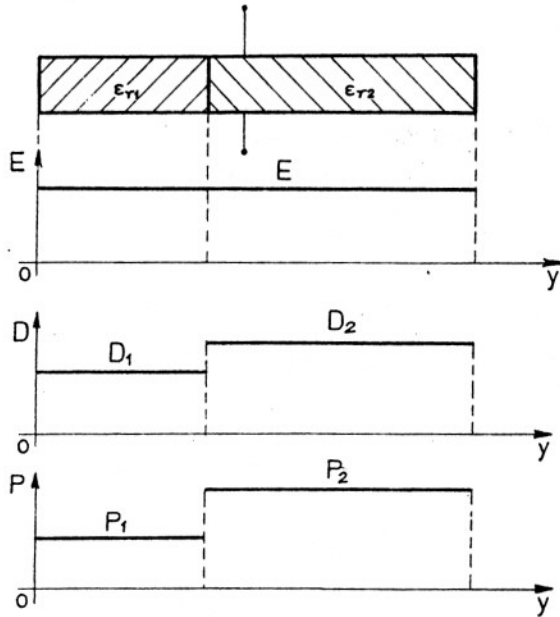
Sl. 1.100. b.

Grafici jačine polja, električnog pomeraja i polarizacije u kondenzatoru su predstavljeni na sl. 1.100. c.

2° Površinske gustine slobodnih naelektrisanja su :

$$\sigma' = D_1 = 5,31 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad \text{i}$$

$$\sigma'' = D_2 = 9,56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$



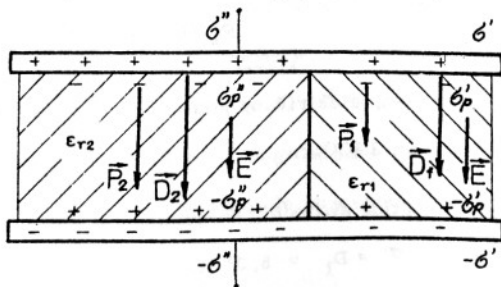
Sl. 1.100. c.

Vezana naelektrisanja se nalaze uz ploče kondenzatora i njihove površinske gustine su :

$$\sigma_p' = -P_1 = -4,25 \cdot 10^{-7} \frac{C}{m^2} \quad i$$

$$\sigma_p'' = -P_2 = -8,5 \cdot 10^{-7} \frac{C}{m^2}$$

Približna raspodela naelektrisanja je predstavljena na sl. 1.100. d.



Sl. 1.100. d.

I.101. Odrediti napon i kapacitivnost kondenzatora opisanog u zadatku 1.100.

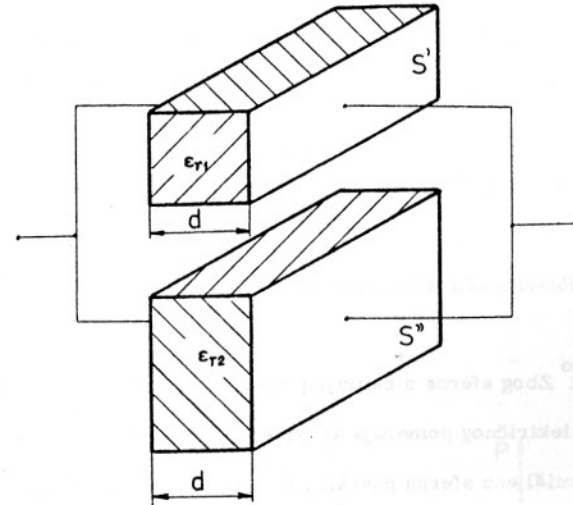
Rešenje:

Napon kondenzatora je:

$$U_{12} = E \cdot d = \frac{Q_1}{\epsilon_1 S' + \epsilon_2 S''} \quad d = 60V.$$

Kapacitivnost kondenzatora je:

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = \epsilon_1 \frac{S'}{d} + \epsilon_2 \frac{S''}{d} \approx 33 \text{ pF.}$$



Sl. 1.101.

Iz izraza za kapacitivnost se zaključuje da se zadati kondenzator može predstaviti paralelnom vezom dva pločasta kondenzatora, kao na sl.

I.101. Kapacitivnosti ovih kondenzatora su .

$$C_1 = \epsilon_1 \frac{S'}{d} \quad i$$

$$C_2 = \epsilon_2 \frac{S''}{d} \quad ,$$

1.102. Odrediti najveći napon na koji sme da se priključi kondenzator opisan u zadatku 1.100. Dielektrične čvrstoće upotrebljenih dielektrika su $E_{1\max} = 200 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ i $E_{2\max} = 300 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$.

Rešenje:

Kako je polje iste jačine u oba dielektrika, to je njegova najveća jačina određena manjom dielektričnom čvrstoćom. Stoga je :

$$U_{12\max} = E_{1\max} d = 100 \text{ kV.}$$

1.103. Oko metalne lopte poluprečnika a i naelektrisanja Q ($Q > 0$) nalazi se homogeni dielektrik debljine d , relativne dielektrične konstante ϵ_r

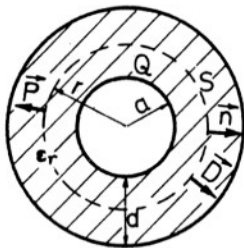
Odrediti:

1° Vektore električnog pomeraja, jačine električnog polja i električne polarizacije.

2° Površinske gustine vezanih naelektrisanja.

Rešenje:

1° Zbog sferne simetrije polje ovakvog sistema je radijalno. Intenzitet vektora električnog pomeraja se određuje primenom uopštenog Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površinu S , koncentričnu sa metalnom loptom (sl. 1.103. a.)



Sl. 1. 103. a.

Za $r < a$ je :

$$D = 0.$$

Za $r > a$ se iz :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \text{ dobija :}$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Kako je $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ to je :

$$E = 0 \text{ za } r < a,$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}, \text{ za } a < r < (a+d),$$

i

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \text{ za } r > (a+d).$$

Za električnu polarizaciju se iz :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

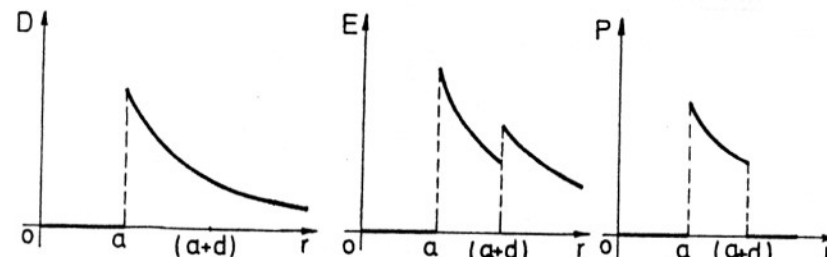
dobija :

$$P = 0 \text{ za } r < a$$

$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{4\pi r^2}, \text{ za } a < r < (a+d) \text{ i}$$

$$P = 0, \text{ za } r > (a+d).$$

Jačine vektora \vec{D} , \vec{E} , i \vec{P} su grafički predstavljene na sl. 1.103. b.



Sl. 1. 103. b.

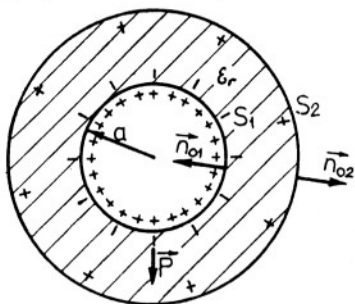
2° Indukovana vezana naelektrisanja polarizovanog dielektrika obuhvaćena zamišljenom sfernom površinom S (sl. 1. 103. a) su

$$Q_p = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \oint_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS = - (\vec{P} \cdot \vec{n}) S = - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q.$$

Površinska gustina vezanih naelektrisanja, u okolini neke tačke na površinu polarizovanog dielektrika, se može odrediti iz:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_0$$

Vektor normale \vec{n}_0 na površinu uz koju su vezana naelektrisanja usmeren je od dielektrika, kao na sl. 1.103. c,



Sl. 1.103. c.

1.104. Odrediti potencijal i kapacitivnost lopte sa dielektrikom opisane u zadatku 1.103.

Rešenje:

Potencijal metalne lopte, prema tački u beskonačnosti, je:

$$V_a = \int_a^{a+d} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{dr}{r^2} + \int_{a+d}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

odnosno:

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a+d)} \left(1 + \frac{d}{a\epsilon_r} \right)$$

Kapacitivnost je:

$$C = \frac{Q}{V_a} = \frac{4\pi\epsilon_0(a+d)}{1 + \frac{d}{a\epsilon_r}}$$

1.105. Poluprečnik unutrašnje elektrode sfernog kondenzatora je a i naelektrisanje Q (Q > 0). Između elektroda kondenzatora su dva koncentrična sloja dielektrika relativnih dielektričnih konstanti ϵ_{r1} i ϵ_{r2} . Poluprečnik razdvojne sferne površine dielektrika je b, a unutrašnji poluprečnik spoljašnje elektrode je c.

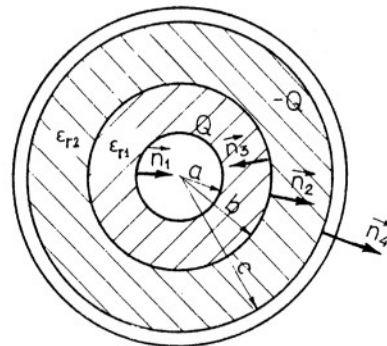
Odrediti:

1° Vektore električnog pomeraja, jačine električnog polja i jačine električne polarizacije.

2° Površinske gustine vezanih naelektrisanja.

Rešenje:

1° Zbog sferne simetrije, električno polje kondenzatora je radialno. Primenom uopštenog Gausovog zakona za intenzitet električnog pomeraja se ima:



Sl. 1.105. a.

$$D = 0, \quad r < a,$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad a < r < b \quad \text{i}$$

$$D = 0, \quad r > c.$$

Jačina električnog polja kondenzatora je:

$$E = 0, \quad r < a,$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r^2}, \quad a < r < b,$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r^2}, \quad b < r < c \quad \text{i}$$

$$E = 0, \quad r > c.$$

Električna polarizacija je:

$$P = 0, \quad r < a,$$

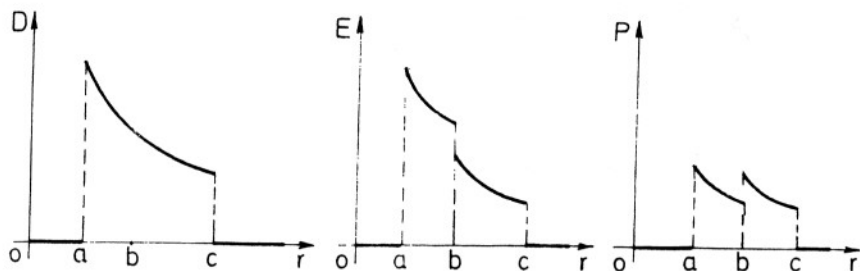
$$P = D - \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad a < r < b,$$

$$P = D - \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad b < r < c \quad i$$

$$P = 0, \quad r > c.$$

Grafici intenziteta vektora \vec{D} , \vec{E} i \vec{P} su predstavljeni na

sl. 1. 105. b.



Sl. 1. 105. b.

2^o Normale na graničnim površinama dielektrika, potrebne za određivanje površinskih gustina indukovanih vezanih naelektrisanja, prikazane su na sl. 1. 105. a.

Na unutrašnjoj i spoljašnjoj površini prvog dielektrika je:

$$\sigma_{p1} = \vec{P}(a) \cdot \vec{n}_1 = - \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{4\pi a^2} \quad i$$

$$\sigma_{p2} = \vec{P}(b) \cdot \vec{n}_2 = - \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{4\pi b^2}$$

Na unutrašnjoj i spoljašnjoj površini drugog dielektrika je:

$$\sigma_{p3} = \vec{P}(b) \cdot \vec{n}_3 = - \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi b^2} \quad i$$

$$\sigma_{p4} = \vec{P}(c) \cdot \vec{n}_4 = - \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi c^2}$$

1.106. Odrediti izraz za potencijal tačaka izmedju elektroda sfernog kondenzatora iz zadatka 1.105, uzimajući da se spoljna elektroda nalazi na nultom potencijalu. Odrediti kapacitivnost ovog kondenzatora.

Rešenje:

Potencijal tačaka na rastojanju r ($b < r < c$) od centra sfernog kondenzatora je, prema prethodnom zadatku:

$$V = \int_r^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right).$$

Potencijal tačaka na rastojanju r ($a < r < b$) je:

$$V = \int_r^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} dr + \int_b^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} dr$$

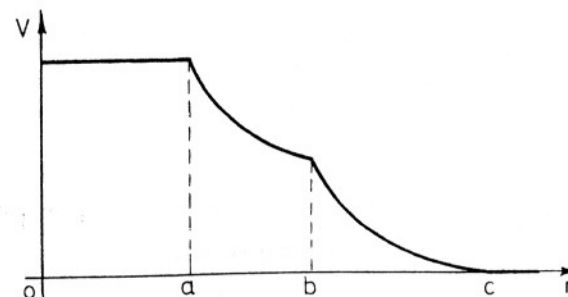
odnosno:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

Napon izmedju unutrašnje i spoljašnje elektrode je:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

Grafik potencijala je prikazan na slici 1.106.

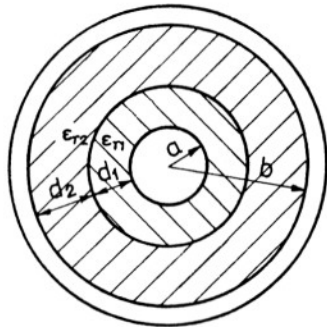


Sl. 1. 106.

Prema prethodnom, ima se:

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{b-a}{ab} + \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{c-b}{bc}$$

1.107. Poluprečnik unutrašnje elektrode sfernog kondenzatora je $a = 3$ mm, a unutrašnji poluprečnik spoljašnje elektrode je $b = 13$ mm. Dielektrik se sastoji iz dva koncentrična sloja, kao na sl. 1.107., relativnih dielektričnih konstanti



Sl. 1.107.

nih dielektričnih konstanti

$\epsilon_{r1} = 9$ i $\epsilon_{r2} = 4$. Odrediti

debljine d_1 i d_2 slojeva dielektrika tako da najveće jačine električnih polja u dielektricima

buđu jednake.

Rezultat:

$$d_1 = a \left(-1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \right) = 1,5 \text{ mm}$$

$$d_2 = b - (a + d_1) = 8,5 \text{ mm.}$$

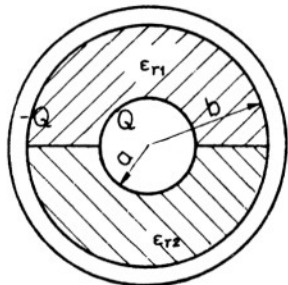
1.108. Između elektroda sfernog kondenzatora postavljena

su dva dielektrika relativnih dielektričnih

konstanti ϵ_{r1} i ϵ_{r2} , kao na sl. 1.108. a.

Poluprečnici elektroda kondenzatora su a i b , a naelektrisanje unutrašnje elektrode je Q ($Q > 0$). Odrediti:

1° Vektore električnog polja, električnog pomeraja i električne polarizacije u kondenzatoru.



Sl. 1.108. a.

2° Površinske gustine slobodnih i vezanih naelektrisanja.

Rešenje:

1° Električno polje u kondenzatoru je radijalno i vektor električnog polja je tangencijalan na razdvojnu površinu dva dielektrika.

Zbog ovoga je električno polje isto u oba dielektrika. U svim tačkama na rastojanju r od centra kondenzatora električno polje ima istu jačinu.

Primenom uopštenog Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površinu S (sl. 1.108. b.) koncentričnu sa elektrodama kondenzatora, polupreč-

nika r ($a < r < b$), ima se:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_1 \frac{S}{2} + D_2 \frac{S}{2} = Q,$$

gdje su D_1 i D_2 električni pomeraji u pojedinim dielektricima.

Kako je $D_1 = \epsilon_1 E$ i $D_2 = \epsilon_2 E$,

to je:

$$\epsilon_1 E \frac{S}{2} + \epsilon_2 E \frac{S}{2} = Q,$$

odnosno:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{1}{r^2}, \quad a < r < b$$

Sl. 1.108. b.

Sada je:

$$D_1 = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi r^2}, \quad a < r < b \quad \text{i}$$

$$D_2 = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi r^2}, \quad a < r < b$$

Jačina električne polarizacije dielektrika je:

$$P_1 = D_1 - \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi r^2}, \quad a < r < b$$

i

$$P_2 = D_2 - \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi r^2}, \quad a < r < b$$

2° Površinske gustine slobodnih naelektrisanja se mogu odrediti primenom uopštenog Gausovog zakona na zamišljene male, cilindrične, zatvorene površine S' , čiji je jedan bazis u provodniku, a drugi u dielektriku. Normale \vec{n}' na ove zamišljene površine su usmerene od površine ka periferiji, pa je :

$$\vec{D} \cdot \Delta S \cdot \cos(\vec{D}, \vec{n}') = Q_{u S'}$$

odnosno

$$\sigma = \vec{D} \cdot \vec{n}'$$

Na unutrašnjoj elektrodi je:

$$\sigma_1 = \vec{D}_1(a) \cdot \vec{n}' = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi a^2}$$

i

$$\sigma_2 = \vec{D}_2(a) \cdot \vec{n}' = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Na spoljašnjoj elektrodi je:

$$\sigma_1 = \vec{D}_1(b) \cdot \vec{n}' = -\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi b^2}$$

i

$$\sigma_2 = \vec{D}_2(b) \cdot \vec{n}' = -\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi b^2}$$

Površinske gustine vezanih naelektrisanja se određuju iz :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_o$$

gde je normala \vec{n}_o usmerena od površine dielektrika.

Uz unutrašnju elektrodu kondenzatora je :

$$\sigma_{p1} = \vec{P}_1(a) \cdot \vec{n}_o = -\frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi a^2}$$

i

$$\sigma_{p2} = \vec{P}_2(a) \cdot \vec{n}_o = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi a^2}$$

Uz spoljašnju elektrodu kondenzatora površinske gustine vezanih

naelektrisanja su :

$$\sigma_{p1} = \vec{P}_1(b) \cdot \vec{n}_o = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi b^2}$$

i

$$\sigma_{p2} = \vec{P}_2(b) \cdot \vec{n}_o = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \cdot \frac{Q}{2\pi b^2}$$

Kako je vektor \vec{P} radijalan, to je na razdvojnim površinama dva dielektrika :

$$\angle(\vec{P}, \vec{n}_o) = \frac{\pi}{2}$$

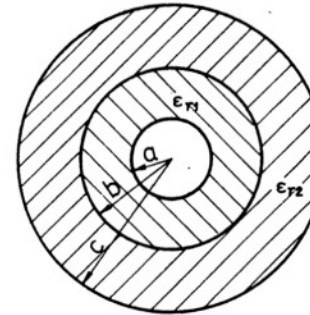
pa na njima nema vezanih naelektrisanja.

1.109. Odrediti izraz za kapacitivnost kondenzatora iz zadatka 1.108.

Rezultat:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_o(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})ab}{b-a}$$

1.110. Odrediti poduznu kapacitivnost koaksijalnog kabla prikazanog na sl 1.110.



Sl. 1.110.

Rešenje:

Poduzna kapacitivnost koaksijalnog kabla je :

$$C' = \frac{Q_{na} \text{ dužini } h}{U_{12} h}$$

Napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika je :

$$U_{12} = \int_a^b \frac{Q_{na} h}{2\pi\epsilon_o\epsilon_{r1}h} \cdot \frac{dr}{r} + \int_b^c \frac{Q_{na} h}{2\pi\epsilon_o\epsilon_{r2}h} \cdot \frac{dr}{r}$$

odnosno :

$$U_{12} = \frac{Q_{na} h}{2\pi\epsilon_o h} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{c}{b} \right]$$

Prema prethodnom, za podužnu kapacitivnost koaksijalnog kabla se ima :

$$C' = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{c}{b}}$$

1.111. Odrediti najveći napon na koji sme da se priključi kondenzator iz zadatka 1.110. kada su $a = 3 \text{ mm}$, $b = 6 \text{ mm}$ i $c = 12 \text{ mm}$. Relativne dielektrične konstante i dielektrične čvrstoće dielektrika su $\epsilon_{r1} = 5$, $\epsilon_{r2} = 8$, $E_{1kr} = 200 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ i $E_{2kr} = 300 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$.

Rešenje:

Najveće jačine elektrostatičkog polja u pojedinim dielektricima su :

$$E_{1\text{max}} = \frac{C' U_{12}}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} a} \cdot \frac{1}{a}$$

$$i \quad E_{2\text{max}} = \frac{C' U_{12}}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} b} \cdot \frac{1}{b}$$

Kada je: $E_{1\text{max}} = E_{1kr} = 200 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$, tada je:

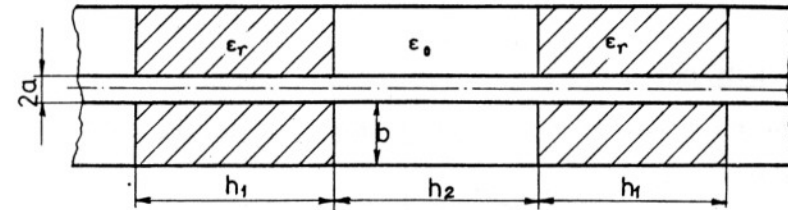
$$U_{12} = \frac{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} a}{C'} E_{1kr} = 67,6 \text{ kV},$$

$$i \quad E_{2\text{max}} = \frac{E_{1kr} \epsilon_{r1} a}{\epsilon_{r2} b} = 62,5 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} < E_{2kr}$$

Znači, najveći napon na koji sme da se priključi ovaj kondenzator je :

$$U_{12} = 67,6 \text{ kV}.$$

1.112. Odrediti kapacitivnost koaksijalnog kabla (sl. 1.112.)



Sl. 1.112.

dužine $l = \frac{m}{2} (h_1 + h_2)$, gde je m paran broj.

Rezultat:

$$C = m \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{b+a}{a}} (h_1 \epsilon_r + h_2)$$

1.113.* U koaksijalnom kablu nalazi se podmetač od dielektrika relativne dielektrične konstante ϵ_r , kao na slici 1.113.

Odrediti podužnu kapacitivnost ovog kabla.

Rezultat:

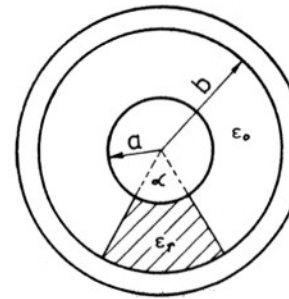
Jačina elektrostatičkog polja

koaksijalnog kabla je :

$$E = \frac{Q}{na h} \frac{1}{\epsilon_0 h [2\pi + (\epsilon_r - 1)\alpha]} \frac{1}{r}$$

a napon između provodnika kabla je :

$$U_{12} = \int_a^b E dr = \epsilon_0 h \frac{Qna h}{[2\pi + (\epsilon_r - 1)\alpha]} \ln \frac{b}{a}$$

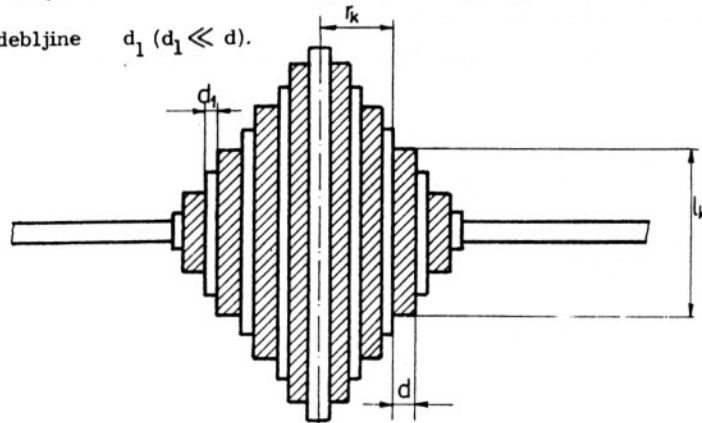


Sl. 1.113.

Prema prethodnim izrazima, podužna kapacitivnost koaksijalnog kabla je:

$$C' = \frac{[2\pi + (\epsilon_r - 1)\alpha] \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

1.114.* Cilindrični kondenzator, prikazan na slici 1.114, se sastoji od n slojeva dielektrika iste debljine d , između kojih se nalaze metalne folije debljine d_1 ($d_1 \ll d$).



Sl. 1.114.

Odrediti:

1° Dužine l_k dielektričnih slojeva tako da najveća jačina polja bude ista u svim dielektricima.

2° Kapacitivnost kondenzatora.

Rešenje:

1° Najveće jačine polja u pojedinim dielektricima su na njihovim unutrašnjim graničnim površinama. Ove jačine polja, prema oznakama sa sl. 1.114., su:

$$E_{1\max} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_1 l_1}, \quad E_{2\max} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_2 l_2}, \quad \dots, \quad E_{k\max} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_k l_k}, \quad \dots,$$

$$E_{n\max} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r_n l_n}$$

Iz uslova:

$$E_{1\max} = E_{2\max} = \dots = E_{k\max} = \dots = E_{n\max}, \text{ je:}$$

$$r_1 l_1 = r_2 l_2 = \dots = r_k l_k = \dots = r_n l_n.$$

Kako je, prema sl. 1.1.114.:

$$r_2 = r_1 + d, \quad r_3 = r_1 + 2d, \quad \dots, \quad r_k = r_1 + (k-1)d, \quad \dots, \quad r_n = r_1 + (n-1)d,$$

to se za dužinu k -tog dielektrika dobija:

$$l_k = \frac{r_1 l_1}{r_k} = \frac{r_1 l_1}{r_1 + (k-1)d}$$

2° Napon između unutrašnje i spoljašnje elektrode ovog kondenzatora je:

$$U = \int_{r_1}^{r_1+d} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_2+d} E_2 dr + \dots + \int_{r_k}^{r_k+d} E_k dr + \dots + \int_{r_n}^{r_n+d} E_n dr,$$

odnosno:

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \left[\frac{1}{l_1} \ln \frac{r_1+d}{r_1} + \frac{1}{l_2} \ln \frac{r_2+d}{r_2} + \dots + \frac{1}{l_k} \ln \frac{r_k+d}{r_k} + \dots + \frac{1}{l_n} \ln \frac{r_n+d}{r_n} \right]$$

Iz prethodnog je:

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{1}{l_k} \ln \frac{r_k+d}{r_k}.$$

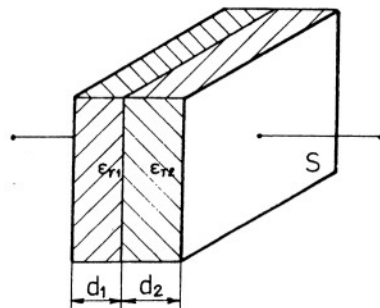
Kada je $r_1 l_1 = r_2 l_2 = \dots = r_k l_k = \dots = r_n l_n$, tada je:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\epsilon r_1 l_1} \sum_{k=1}^n r_k \ln \frac{r_k+d}{r_k}.$$

1. 3. ENERGIJA I SILE U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

1. 115. U pločastom kondenzatoru nalaze se dva dielektrika kao

na slici 1. 115. Naelektrisanje kondenzatora je Q . Odrediti:



Sl. 1. 115.

1^o Elektrostatičku energiju kondenzatora.

2^o Kapacitivnost kondenzatora.

Rešenje:

1^o Zapreminske gustine energije u dielektricima kondenzatora su :

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_1 E_1^2 \quad \text{i} \quad w_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_2 E_2^2$$

Kako su elektrostatička polja u svakom dielektriku posebno homogena, to je energija polja kondenzatora :

$$W_e = \frac{\epsilon_1 E_1^2}{2} S d_1 + \frac{\epsilon_2 E_2^2}{2} S d_2,$$

odnosno :

$$W_e = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \right).$$

2^o Upoređujući prethodni izraz sa izrazom za elektrostatičku energiju kondenzatora :

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

2. STALNE JEDNOSMERNE ELEKTRIČNE STRUJE

2. 1. VEKTOR GUSTINE ELEKTRIČNE STRUJE I INTENZITET ELEKTRIČNE STRUJE.

OMOV ZAKON U LOKALNOM OBLIKU

2. 1.* Odrediti izraz za srednju brzinu slobodnih elektrona u homo-

genom metalnom provodniku u tački u kojoj je vektor jačine električnog polja \vec{E} .

Rešenje:

Prema elektronskoj teoriji metala termičko kretanje slobodnih elektrona je haotično. Slobodni elektroni se kreću pravolinijski sve dok ne dodju dovoljno blizu nekog atoma, pri čemu dolazi do rasejanja elektrona. Pri ovom rasejanju brzina i pravac kretanja elektrona se menjaju. Zbog niza uzastopnih rasejanja slobodnog elektrona njegova brzina u nekom trenutku ne zavisi od ranijih brzina. Vreme izmedju uzastopnih rasejanja elektrona je različito. Srednje vreme izmedju dva uzastopna rasejanja svih slobodnih elektrona zove se vreme slobodnog puta i označava sa τ .

Neosredno posle rasejanja količina kretanja elektrona je

$$m_e \vec{v}_T,$$

gde je \vec{v}_T vektor termičke brzine elektrona.

Usled prisustva homogenog električnog polja, pod dejstvom sile $\vec{F}_e = Q_e \vec{E}$, količina kretanja elektrona se povećava i za vreme t od rase-

janja. priraštaj količine kretanja elektrona je:

$$Q_e \vec{E} t.$$

Ukupna količina kretanja slobodnog elektrona u trenutku t posle sudara je:

$$m_e \vec{v}_T + Q_e \vec{E} t.$$

Pri slabim električnim poljima, što je najčešći slučaj u provodnicima, priraštaj količine kretanja elektrona je mali, te se brzina elektrona malo menja. Pod ovim okolnostima, vreme slobodnog puta elektrona je približno isto kao i pri termičkom kretanju i ne zavisi od jačine polja.

Srednja količina kretanja svih N slobodnih elektrona u zapremini V , u određenom trenutku posmatranja pojave je:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[m_e (\vec{v}_T)_k + Q_e \vec{E} t_k \right] = m_e \vec{v}_{sr},$$

Termičke brzine $(\vec{v}_T)_k$ slobodnih elektrona u trenutku posmatranja pojave su različite, a kako se sva rasejanja ne odigravaju istovremeno, to je i vreme t_k od poslednjeg rasejanja do trenutka posmatranja različito za razne elektrone.

Usled haotičnog kretanja srednja termička brzina slobodnih elektrona je jednaka nuli.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_e (\vec{v}_T)_k = 0,$$

pa je:

$$m_e \vec{v}_{sr} = Q_e \vec{E} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k.$$

Kako je

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k = \tau,$$

to se ima:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{Q_e \tau}{m_e} \vec{E}.$$

Veličina određena izrazom:

$$\frac{|Q_e| \tau}{m_e} = \mu$$

se naziva pokretljivost elektrona. Izraz za srednju brzinu slobodnih elektrona je:

$$\vec{v}_{sr} = \mu \vec{E}.$$

2.2.* Odrediti izraz za specifičnu provodnost homogenog metalnog provodnika.

Rešenje:

Pri homogenom električnom polju u provodniku vektor gustine električne struje u bilo kojoj tački provodnika je:

$$\vec{J} = N' Q_e \vec{v}_{sr},$$

gde je N' koncentracija slobodnih elektrona.

Koristeći izraz za srednju brzinu slobodnih elektrona pri slabom električnom polju u provodniku (zadatak 2.1.), ima se:

$$\vec{J} = \frac{N' Q_e^2 \tau}{m_e} \vec{E}.$$

Veličina

$$\frac{N' Q_e^2 \tau}{m_e} = \sigma,$$

se naziva specifična električna provodnost i karakteriše svaku tačku provodnika.

Kako je

$$\mu = \frac{|Q_e| \tau}{m_e},$$

može se pisati:

$$\sigma = N' |Q_e| \mu$$

Relacija

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},$$

predstavlja Ohm zakon u lokalnom obliku.

Ova linearna zavisnost gustine električne struje i jačine električnog polja u provodniku važi u slučajevima kada koncentracija slobodnih elektrona i njihova pokretljivost ne zavise od jačine električnog polja u provodniku. Prema prethodnom, Ohm zakon u linearnom obliku važi za provodnike sa slabim električnim poljima, što je i najčešći slučaj.

2.3.* Odrediti srednje vreme između dva uzastopna rasejanja slobodnih elektrona u homogenom bakarnom provodniku na sobnoj temperaturi. Provodnost bakra i koncentracija slobodnih elektrona u bakarnom provodniku, na sobnoj temperaturi, su:

$$\sigma = 6.10 \frac{7 \text{ S}}{\text{m}} \quad \text{i} \quad N' = 8,4 \cdot 10^{28} \frac{\text{elektrona}}{\text{m}^3}$$

Rezultat:

Iz izraza:

$$\sigma = \frac{N' Q_e^2 \tau}{m_e}$$

je:

$$\tau = \frac{\sigma m_e}{N' Q_e^2} = 2,54 \cdot 10^{-14} \text{ s.}$$

2.4. Odrediti pokretljivost slobodnih elektrona u provodniku iz

zadatka 2.3.

Rezultat: $\mu = \frac{\sigma}{|Q_e| N'} = 4,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{Vs}}$

2.5. U dugačkom, homogenom, bakarnom provodniku uspostavljena je stalna električna struja. Smatrajući da je gustina struje ista u svim tačkama provodnika i da iznosi $J = 2 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$, odrediti srednju brzinu* elektrona usled delovanja električnog polja. Smatrati da u električnoj struji učestvuje po jedan elektron svakog atoma bakra. Atomska masa i specifična gustina bakra su $A_{\text{Cu}} = 63,4 \text{ ajm}$ i $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Rešenje:

Iz izraza za vektor gustine električne struje

$$\vec{J} = N' Q_e \vec{v},$$

je:

$$\vec{v} = \frac{1}{N' Q_e} \vec{J}.$$



Sl. 2.5.

Koncentracija slobodnih elektrona se dobija iz

$$N' = \frac{N_u \Delta V}{\Delta V}$$

Posmatrani bakarni provodnik je homogen, pa se, uzimajući najpogodniju za-

preminu za sračunavanje $\Delta V = 1 \text{ cm}^3$, dobija:

$$N' = \frac{N_u 1 \text{ cm}^3}{1 \text{ cm}^3} = \frac{\rho_{\text{Cu}} 1 \text{ cm}^3}{1 \text{ cm}^3 A_{\text{Cu}}} = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{A_{\text{Cu}}} = 8,4 \cdot 10^{22} \frac{\text{sl. el.}}{\text{cm}^3}$$

*

Ova brzina se često zove driftovska brzina od engleskog naziva drift velocity.

Prema prethodnom, vektor srednje brzine elektrona je:

$$\vec{v} = -1,48 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \vec{r}_{OJ}$$

gde je sa \vec{r}_{OJ} označen jedinični vektor (ort) vektora gustine električne struje \vec{J} .

Vektor brzine elektrona i vektor gustine električne struje su suprotnog smera.

2.6. U staklenoj cevi se nalazi normalni rastvor srebronitrat (AgNO₃) u vodi. (Za rastvor jednovalentnih jona se kaže da je normalan kada se u 1dm³ rastvora nalazi Avogadrov broj, N_A = 6,023 · 10²³, molekula rastvorka). Na jone Ag⁺ i NO₃⁻ razloženo je 75% molekula AgNO₃. Kada se između krajeva cevi uspostavi stalno električno polje, ustanovljene su brzine jona v₊ = 0,0006 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ i v₋ = 0,0007 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Odrediti vektor gustine obrazovane električne struje u rastvoru, smatrajući da se koncentracija jona ne menja.

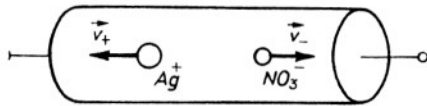
Rešenje:

Vektor gustine električne struje u rastvoru je:

$$\vec{J} = N'_+ Q_+ \vec{v}_+ + N'_- Q_- \vec{v}_-$$

gde su: N'₊ i N'₋ koncentracije jona Ag⁺ i NO₃⁻, a

$$Q_+ = -Q_- = -Q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$$



Sl. 2.6.

Kako su, prema zadatim podacima, koncentracije jona:

$$N'_+ = N'_- = \frac{3}{4} \frac{N_A \text{ u } 1 \text{ dm}^3}{1 \text{ dm}^3} = \frac{3}{4} \frac{N_A \text{ jona}}{\text{dm}^3} = 4,52 \cdot 10^{26} \frac{\text{jona}}{\text{m}^3}$$

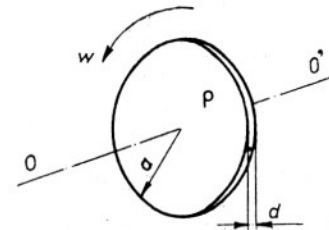
to se za vektor gustine obrazovane električne struje, sračunatog prema smeru orta brzine v₊, r_{ov+} dobija:

$$\vec{J} = \left[4,52 \cdot 10^{26} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^{-6} + 4,52 \cdot 10^{26} \cdot (-1,602 \cdot 10^{-19}) \cdot (-7 \cdot 10^{-6}) \right] \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \vec{r}_{ov+}$$

odnosno:

$$\vec{J} = 9,42 \cdot 10^2 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \vec{r}_{ov+}$$

2.7. Disk od homogenog dielektričnog materijala, poluprečnika a i debljine d, ravnomerno je naelektrisan po zapremini naelektrisanjem za-



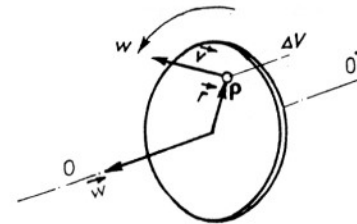
Sl. 2.7. a.

preminske gustine ρ. Disk se okreće oko središnje ose O-O' stalnom ugaonom brzinom w, kao na sl. 2.7. a.

Odrediti izraz za vektor gustine obrazovane električne struje \vec{J} .

Rešenje:

Pri okretanju diska, zajedno sa njim, okreću se i naelektrisanja, pa obrazuju kružnu električnu struju oko ose okretanja O-O'.



Sl. 2.7. b.

Za vektor gustine električne struje u veoma maloj zapremini ΔV, na odstojanju r od ose okretanja O-O', se ima:

$$\vec{J} = \frac{(NQ)_u \Delta V}{\Delta V} \vec{v} = \rho \vec{v}$$

Kako je

$$v = w r,$$

to se, uvodeći vektor ugaone brzine \vec{w} i vektor odstojanja \vec{r} zapremine ΔV od ose okretanja O-O', (sl. 2.7. b.)

može pisati:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Prema prethodnom je izraz za vektor gustine obrazovane električne struje:

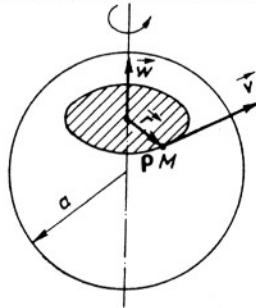
$$\vec{J} = \rho \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

2. 8. Dielektrik oblika lopte, poluprečnika a , naelektrisan je ravnomerno po zapremini naelektrisanjem zapreminske gustine ρ ($\rho > 0$). Lopta se okreće oko jednog svog prečnika stalnom ugaonom brzinom ω .

Određiti vektor gustine obrazovane električne struje.

Rešenje:

Naelektrisanja lopte se okreću stalnom ugaonom brzinom ω i obrazuju kružnu električnu struju, čiji je vektor gustine struje u



Sl. 2. 8.

tački M (sl. 2. 8):

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

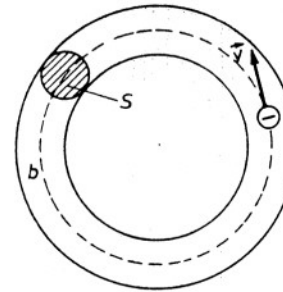
Gustina struje nije ista u svim tačkama lopte, već zavisi od odstojanja tačke od ose okretanja.

2. 9. U tankoj torusnoj cevi, kružnog poprečnog preseka površine $S = 5 \text{ cm}^2$, srednje dužine $b = 10 \text{ m}$, ostvareno je kretanje elektrona stalnom brzinom $v = 2,3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. U toku jednog perioda kretanja elektrona kroz poprečni presek cevi prodje $N = 10$ elektrona.

Određiti jačinu i smer električne struje u cevi.

Rešenje:

Ovakvo kretanje elektrona približno odgovara kretanju elektrona u elektronskom sinhrotronu, kod nekih elektronskih akceleratora. Smatrajući da su elektroni ravnomerno raspoređeni po poprečnom preseku cevi i da su im brzine jednake, za vektor gustine obrazovane električne struje u cevi se ima:



Sl. 2. 9. a.

Jačina struje kroz poprečni presek cevi se određuje iz:

$$I = |\vec{J}| S \cos(\vec{J}, \vec{n}) = \vec{J} \cdot \vec{S},$$

jer je gustina struje ista u svim tačkama poprečnog preseka cevi. Za usvojeni smer normale na površinu poprečnog preseka cevi (sl. 2. 9. b), ima se:

$$I = |\vec{J}| S \cos 0 = |\vec{J}| S = 0,368 \text{ A}.$$



Sl. 2. 9. b.

Prethodnim izrazom određena je algebarska vrednost jačine struje prema usvojenom smeru normale na površinu poprečnog preseka. Jačina struje je $0,368 \text{ A}$, a smer isti kao i smernormale prema kojoj je sračunata.

$$\vec{J} = N' Q_e \vec{v}.$$

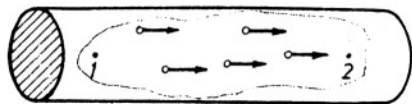
U posmatranom slučaju je:

$$N' = \frac{N}{\Delta V} \approx \frac{N}{Sb} = 2 \cdot 10^{13} \frac{\text{elektrona}}{\text{m}^3},$$

pa je:

$$\vec{J} \approx -736 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \vec{r}_{ov}.$$

2.10 U homogenom aluminijumskom provodniku, površine poprečnog preseka $S = 3 \text{ mm}^2$, ostvareno je kretanje elektrona od tačke označene sa 1 ka tački označenoj sa 2,

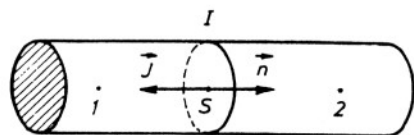


Sl. 2.10. a.

Smatrajući da je gustina struje ista u svim tačkama provodnika i da iznosi $J = 2 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$, odrediti intenzitet struje u provodniku. Kolika količina elektriciteta protekne kroz poprečni presek provodnika za 6 minuta?

Rešenje:

Prema zadatim podacima, vektor gustine električne struje je isti u svim tačkama provodnika i orijentisan je od tačke 2 ka tački 1. (sl. 2.10. b). Prema orijentaciji normale na površinu poprečnog preseka provodnika (sl. 2.10. b), za intenzitet električne struje se ima:



Sl. 2.10. b.

Kako su provodnici najčešće tanki, označavanje referentnog smeru normalom na površinu poprečnog preseka nije pogodno, pa se ovaj označava strelicom pored provodnika, kao na slici 2.10. c.

I je algebarski intenzitet struje prema referentnom smeru

referentni smer za I

Sl. 2.10. c.

Količina elektriciteta q protekla kroz poprečni presek provodnika u vremenskom intervalu Δt je:

$$q = I \Delta t,$$

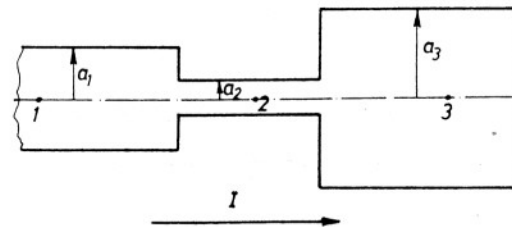
jer je protok elektriciteta ravnomeran. S obzirom na to da je $\Delta t > 0$, to i izraz sa protokom količinu elektriciteta q ima algebarsko značenje prema referentnom smeru za struju.

U posmatranom slučaju je:

$$q = (-6\text{A})(360\text{s}) = -2160\text{C}.$$

Kroz poprečni presek provodnika je za 6 minuta proteklo 2160 C u suprotnom smeru od referentnog.

2.11. Homogeni bakarni provodnik se sastoji od tri cilindrična dela, poluprovodnika poprečnih preseka a_1 , a_2 i a_3 , kao na slici 2.11. a.



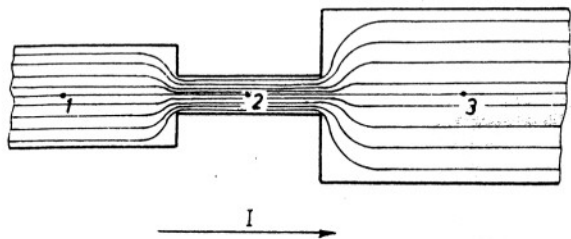
Sl. 2.11. a.

U provodniku postoji stalna jednosmerna struja jačine I , a smeru označenog na slici 2.11. a. 1° Približno predstaviti linije vektora gustine struje \vec{J} u ovom provodniku.

2° Odrediti odnose gustina struja u tačkama označenim sa 1, 2 i 3 na slici 2.11. a, smatrajući da je struja ravnomerno raspodeljena po poprečnim presecima određenim ovim tačkama.

Rezultat:

1° Približan oblik linija vektora gustine struje \vec{J} je prikazan na slici 2.11. b.

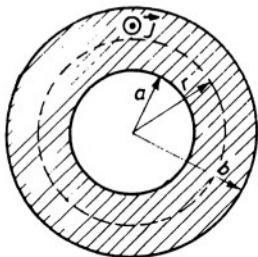


Sl. 2.11. b.

2^o Odnos gustina struja u tačkama 1, 2 i 3 je:

$$J_1 : J_2 : J_3 = \frac{1}{a_1^2} : \frac{1}{a_2^2} : \frac{1}{a_3^2}$$

2.12. U bakarnoj cevi poluprečnika a i b ($b > a$) postoji stalna jednosmerna struja. Smatrajući raspodelu struje po poprečnom preseku



Sl. 2.12. a.

cevi ravnomernom gustine J , odrediti intenzitet električne struje obuhvaćene zamišljenom kružnom konturom poluprečnika r ($a < r < b$), kao na sl. 2.12. a.

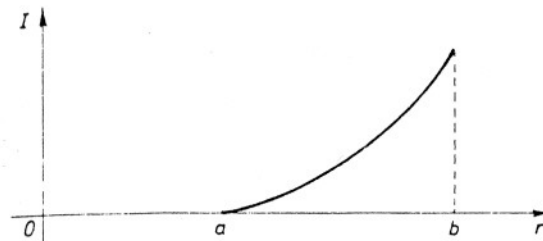
Rešenje:

Za usvojeni referentni smer (smer vektora normale) u smeru vektora \vec{J} , ima se:

$$I = J S(r) \cos 0 = J \pi(r^2 - a^2), \quad a < r < b.$$

Na slici 2.12. b. je grafički predstavljena jačina obuhvaćene struje

je u zavisnosti od r .



Sl. 2.12. b.

2.13. Traka od dielektrika, širine $d = 40$ cm, naelektrisana je sa jedne svoje strane po površini. Smatrajući da je raspodela naelektrisanja ravnomerna, površinske gustine $\sigma = 1,60 \cdot 10^{-7} \frac{C}{m^2}$, odrediti linijsku gustinu električne struje obrazovane pravolinijskim kretanjem trake stalnom brzinom $v = 0,8 \frac{m}{s}$ u pravcu njene duže ose.

Rešenje:

Kako se naelektrisanja nalaze u vrlo tankom sloju na površini trake, to ona praktično obrazuju strujni plašt. Zbog ovoga se može definisati linijska gustina električne struje:

$$J_l = \frac{I}{d} = \frac{q_{za} \Delta t}{d \cdot \Delta t} = \frac{\sigma dv \Delta t}{d \Delta t} = \sigma v,$$

odnosno:

$$J_l = 1,28 \cdot 10^{-7} \frac{A}{m}.$$

Smer vektora \vec{J}_l je određen znakom naelektrisanja, a pravac vektorom brzine \vec{v} .

2.14. Unutrašnji provodnik koaksijalnog kabla je bakarna žica poluprečnika r_1 , a spoljašnji provodnik je veoma tanka bakarna cev, unutrašnjeg poluprečnika r_2 i debljine d . ($d \ll r_2$). U kablju postoji jednosmerna struja stalne jačine I . Odrediti gustine struja u kablju smatrajući ih ravnomernim.

Rezultat:

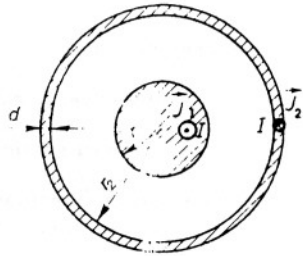
Površinska gustina struje u unutrašnjem provodniku kabla je:

$$J_1 = \frac{I}{\pi r_1^2}$$

a gustina struje u spoljašnjem provodniku kabla je:

$$J_2 = \frac{I}{2\pi r_2 d}, \quad d \ll r_2$$

smerovi struja i odgovarajući vektori gustina struja su označeni na slici 2.14.



Sl. 2.14.

2.15. Jačina anodne struje jedne elektronske cevi je $I = 1,6$ mA.

Odrediti broj elektrona koji padnu na anodu te cevi za dve sekunde.

Rezultat: Za dve sekunde na anodu padne:

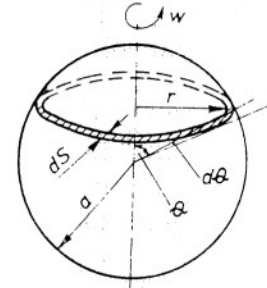
$$N = 2 \cdot 10^{16} \text{ elektrona}$$

2.16. Metalna lopta poluprečnika a i naelektrisanja Q , obrće se u vazduhu oko jednog svog prečnika, stalnom ugaonom brzinom w . Odrediti izraz za jačinu električne struje, smatrajući da je prilikom obrtanja

naelektrisanje lopte ravnomerno raspoređeno po njenoj površini.

Rešenje:

Kada se površina lopte izdeli na prstenove, čiji su centri na osi obrtanja (sl. 2.16), tada naelektrisanju koje se obrće sa elementarnim



Sl. 2.16.

prstenom površine dS odgovara kružna struja jačine

$$dI = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{dS}{T}$$

gde je T period obrtanja lopte.

Kako je:

$$dS = 2\pi a \sin \theta d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

to je:

$$dI = \frac{Qw}{4\pi} \sin \theta d\theta$$

Kružna struja usled obrtanja ukupnog naelektrisanja lopte je jednaka zbiru svih elementarnih struja, odnosno:

$$I = \frac{Qw}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

Kako je:

$$\int_\alpha^\beta \sin \theta d\theta = \cos \alpha - \cos \beta$$

to je:

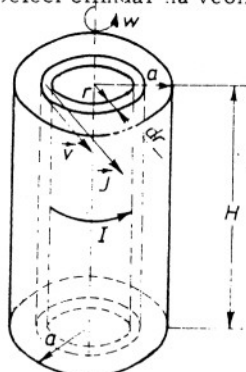
$$I = \frac{Qw}{4\pi} [\cos 0 - \cos \pi] = \frac{Qw}{2\pi}$$

2.17. Dugačak cilindar od dielektričnog materijala, kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a i visine H , ravnomerno je naelektrisan po zapremini naelektrisanjem zapreminske gustine ρ ($\rho > 0$). Cilindar se okreće oko svoje ose stalnom ugaonom brzinom w .

Odrediti intenzitet ovako obrazovane električne struje kroz zamišljenu nepomičnu površinu $S = aH$, jedne polovine uzdužnog preseka cilindra.

Rešenje:

Obrtanjem cilindra oko ose obrazuje se kružna električna struja. Deleći cilindar na veoma tanke, koaksijalne cilindrične prstenove



Sl. 2. 17.

debljine dr (sl. 2. 17), za jačinu obrazovane električne struje, kroz površinu $dS = Hdr$, se ima

$$\delta I = \frac{dQ_{\text{kroz } dS \text{ za } dt}}{dt} = \frac{Q_{udV}}{T}$$

jer je protok elektriciteta ravnomeran. U prethodnom izrazu sa T je označen period obrtanja cilindra.

Prema prethodnom je:

$$\delta I = \frac{\rho dV}{T} = \rho w H r dr.$$

Sabirajući sve elementarne struje, za jačinu ukupne struje se može pisati:

$$I = \int_S \delta I = \int_0^a \rho w H r dr = \rho w H \int_0^a r dr.$$

Kako je:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

to je:

$$I = \frac{1}{2} \rho w H a^2.$$

Imajući u vidu zadatak 2. 8, do istog rezultata se može doći i

preko:

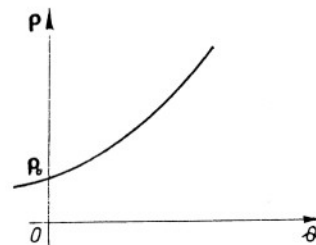
$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \rho(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \rho w H a^2$$

2. 18. Specifične otpornosti aluminijumskog provodnika na nuli i 20°C su izmerene i iznose $\rho_0 = 2,44 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ i $\rho = 2,63 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$.

Odrediti temperaturni sačinilac otpornosti α za aluminijum.

Rešenje:

Specifične otpornosti svih materijala se menjaju sa temperaturom. Na slici 2. 18. je prikazana zavisnost specifične otpornosti



Sl. 2. 18.

metalnih provodnika od temperature. Ova kriva se može predstaviti sledećim izrazom (stepenim redom):

$$\rho = \rho_0 + a\Theta + b\Theta^2 + c\Theta^3 + \dots,$$

pri čemu su ρ_0 specifična otpornost na 0°C , koeficijenti a, b, c, \dots

konstante karakteristične za svaki metal. a Θ temperatura izražena u $^\circ\text{C}$.

Za temperature bliske 0°C , članovi drugog i višeg reda se mogu zanemariti, pa je:

$$\rho = \rho_0 + a\Theta.$$

Pogodno je prethodni izraz predstaviti u obliku:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha\Theta),$$

gde je α temperaturni sačinilac otpornosti i određen izrazom:

$$\alpha = \frac{a}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 \Theta}$$

U zadanom slučaju je:

$$\alpha = \frac{2,63 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m} - 2,44 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}}{2,44 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m} \cdot 20^\circ \text{C}} = 0,0039 \frac{\Omega}{\Omega^\circ \text{C}}$$

2.19. Ako su ρ_1 i ρ_2 specifične otpornosti metala na relativno bliskim temperaturama Θ_1 i Θ_2 oko 0°C , izraženim u $^\circ \text{C}$, pokazati da je

$$\rho_2 = \rho_1 \left[1 + \alpha (\Theta_2 - \Theta_1) \right]$$

Rešenje:

Polazeći od izraza:

$$\rho_1 = \rho_0 (1 + \alpha \Theta_1)$$

$$\rho_2 = \rho_0 (1 + \alpha \Theta_2)$$

ima se:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \alpha \Theta_2}{1 + \alpha \Theta_1}$$

Kako se radi o temperaturama bliskim 0°C , to je $\alpha \Theta_1 \ll 1$

i $\alpha \Theta_2 \ll 1$, pa se može pisati:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(1 + \alpha \Theta_2)(1 - \alpha \Theta_1)}{1 - (\alpha \Theta_1)^2} \approx \rho_1 (1 + \alpha \Theta_2 - \alpha \Theta_1 - \alpha^2 \Theta_1 \Theta_2)$$

pa je:

$$\rho_2 = \rho_1 \left[1 + \alpha (\Theta_2 - \Theta_1) \right]$$

2.20 U tankom cilindričnom provodniku kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a , uspostavljena je stalna struja jačine I . Usled proticanja elektriciteta temperatura provodnika se poveća za $\Delta \Theta = \Theta_2 - \Theta_1$. Odrediti odnos jačina električnog polja u provodniku na temperaturama Θ_1 i Θ_2 , ako se jačina struje održava konstantnom.

Rešenje:

Polazeći od Omovog zakona u lokalnom obliku:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},$$

i smatrajući da je raspodela struje po poprečnom preseku provodnika ravnomerna, na temperaturama Θ_1 i Θ_2 se ima:

$$I = \sigma_1 E_1 a^2 \pi = \sigma_2 E_2 a^2 \pi,$$

uz zanemarivanje promena dimenzija provodnika sa temperaturom.

Kako je:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

i za male promene temperature

$$\rho_2 = \rho_1 (1 + \alpha \Delta \Theta)$$

to je:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \alpha \Delta \Theta.$$

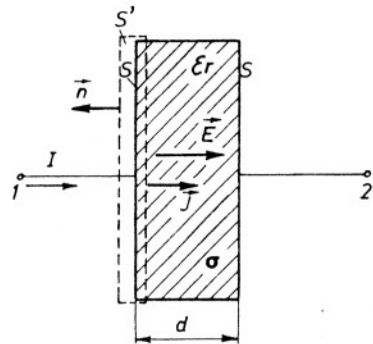
Kod većine metalnih provodnika temperaturni sačinilac otpornosti α je pozitivan, pa je za $\Delta \Theta = \Theta_2 - \Theta_1 > 0$ i $E_2 > E_1$.

2.21. Između elektroda pločastog kondenzatora, čija je površina S , i rastojanje d , nalazi se nesavršen dielektrik provodnosti σ i

relativne dielektrične konstante ϵ_r . Napon između elektroda kondenzatora je stalan i iznosi $U_{12} = U$ ($U > 0$). Odrediti izraz za intenzitet električne struje u priključnim provodnicima kondenzatora.

Rešenje:

Smatrajući da se struja ravnomerno raspoređuje po po-



Sl. 2. 21.

prečnom preseku dielektrika paralelnom elektrodi, na osnovu

$$\oint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

za zamišljenu površinu S' oblika paralelepipeda, dveju strana paralelnih elektrodi, a koji obuhvata jednu elektrodu (sl. 2. 21.) ima se:

$$-I + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Iz prethodnog je:

$$I = JS$$

i smeru od elektrode 1 ka elektrodi 2.

Vektor jačine električnog polja u dielektriku je

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

i električno polje je homogeno.

Napon između elektroda kondenzatora je:

$$U_{12} = Ed = \frac{J}{\sigma} d.$$

Odatavde je:

$$J = \frac{\sigma}{d} U_{12},$$

pa je jačina struje u priključnim provodnicima kondenzatora:

$$I = \frac{\sigma S}{d} U_{12}.$$

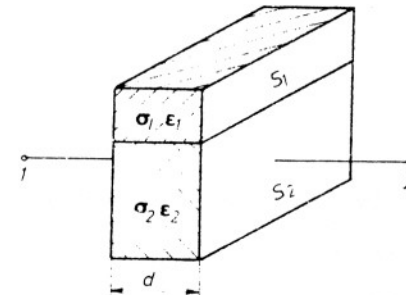
Kako je kapacitivnost ovog kondenzatora:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d},$$

pa se može pisati:

$$I = \frac{\sigma}{\epsilon} C U_{12}.$$

2. 22. Između elektroda pločastog kondenzatora postavljena su dva nesavršena, homogena dielektrika, kao na slici 2. 22. a. Relativne dielektrične konstante dielektrika su ϵ_{r1} i ϵ_{r2}

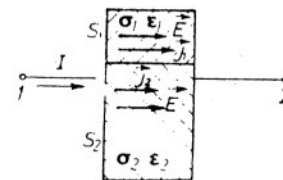


Sl. 2. 22. a.

a njihove specifične provodnosti su σ_1 i σ_2 . Napon između elektroda kondenzatora je $U_{12} = U$, ($U > 0$). Odrediti intenzitet električne struje u priključnim provodnicima kondenzatora.

Rešenje:

Na slici 2. 22. b. prikazani su vektori jačina polja i gustina struja u oba dielektrika, kao i smer struje u priključnim provodnicima kon-



Sl. 2. 22. b.

denzatora.

Smatrajući električno polje homogenim u celom kondenzatoru, njegova jačina je:

$$E = \frac{U_{12}}{d} = \frac{U}{d},$$

a smer vektora jačine električnog polja je od elektrode 1 ka elektrodi 2.

Gustine električnih struja u pojedinim dielektricima kondenzatora su:

$$J_1 = \sigma_1 E = \sigma_1 \frac{U}{d}$$

i

$$J_2 = \sigma_2 E = \sigma_2 \frac{U}{d}$$

Primenjujući

$$\oint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0,$$

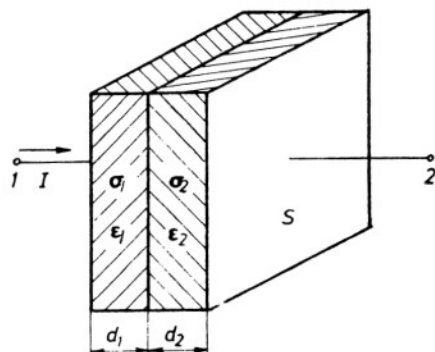
na pogodno zamišljenu površinu S' , koja obuhvata jednu elektrodu kondenzatora, dobija se:

$$I = J_1 S_1 + J_2 S_2,$$

odnosno

$$I = \left(\sigma_1 \frac{S_1}{d} + \sigma_2 \frac{S_2}{d} \right) U.$$

2. 23. Dva nesavršena, homogena dielektrika, relativnih dielektričnih konstanti ϵ_{r1} i ϵ_{r2} i malih



Sl. 2. 23. a.

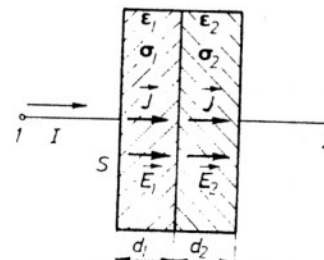
specifičnih provodnosti, σ_1 i σ_2 , su postavljena između elektroda pločastog kondenzatora, kao što je pokazano na slici 2. 23. a. Jačina struje u priključnim provodnicima kondenzatora je I , a smer označen na slici.

Odrediti izraz za napon U_{12} između elektroda kondenzatora.

Rešenje:

Kako su linije električnog polja upravne na površini elektrode kondenzatora i razdvojnu površinu dva dielektrika, to se, primenom Omovog

zakona u lokalnom obliku ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$), zaključuje da su i linije vektora gustine električne struje normalne na elektrode kondenzatora i razdvojnu površinu



Sl. 2. 23. b.

dielektrika. Gustina električne struje

je ista u oba dielektrika:

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \vec{J},$$

i iznosi:

$$J = \frac{I}{S}.$$

Jačine električnih polja u pojedinim

dielektricima su:

$$E_1 = \frac{J_1}{\sigma_1} = \frac{I}{S \sigma_1}$$

i

$$E_2 = \frac{J_2}{\sigma_2} = \frac{I}{S \sigma_2}$$

Izraz za napon između elektroda kondenzatora je, sl. 2. 23. b,

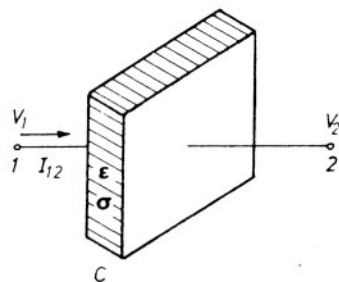
$$U_{12} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = I \left(\frac{d_1}{\sigma_1 S} + \frac{d_2}{\sigma_2 S} \right).$$

2. 2. ELEKTRIČNA OTPORNOST I ELEKTRIČNA PROVODNOST.

DŽULOV ZAKON

2. 24. Dielektrik između elektroda pločastog kondenzatora je stak-

lo, relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 5$ i specifične električne provodnosti $\sigma = 10^{-12} \frac{S}{m}$. Kapacitivnost ovog kondenzatora je $C = 500 \text{ pF}$. Napon između elektroda kondenzatora je



Slika 2. 24.

između elektroda kondenzatora je

$$U_{12} = 2 \text{ kV}.$$

Odrediti jačinu električne struje kroz kondenzator i električnu otpornost dielektrika između elektroda.

Rešenje:

Na osnovu rezultata zadatka 2. 21. je:

$$I_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon} CU_{12},$$

gde je intenzitet struje I_{12} sračunat prema referentnom smeru od 1 ka 2.

(slika 2. 24.). Prema prethodnom je:

$$I_{12} = 22,6 \cdot 10^{-9} \text{ A}.$$

Električna otpornost se definiše izrazom:

$$R = \frac{U_{12}}{I_{12}}$$

Pri primeni prethodne relacije treba voditi računa o referentnim

smerovima. Za posmatrani kondenzator je:

$$R = \frac{U_{12}}{I_{12}} \approx 88,5 \cdot 10^9 \Omega.$$

Polazeći od izraza za struju

$$I_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon} CU_{12},$$

dobija se vrlo jednostavan izraz za električnu provodnost kondenzatora:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I_{12}}{U_{12}} = \frac{\sigma}{\epsilon} C.$$

2. 25. Odrediti izraz za električnu otpornost dielektrika između elektroda kondenzatora sa dvoslojnim nesavršenim dielektrikom opisanim u zadatku 2. 23.

Rezultat:

Primenjujući definiciju električne otpornosti i imajući u vidu rešenje zadatka 2. 23. , izraz za električnu otpornost dielektrika između elektroda kondenzatora je:

$$R = \frac{d_1}{\sigma_1 S} + \frac{d_2}{\sigma_2 S} = R_1 + R_2.$$

U prethodnom izrazu su sa R_1 i R_2 označene električne otpornosti pojedinih slojeva dielektrika.

2. 26. Odrediti električnu provodnost dielektrika kondenzatora opisanog u zadatku 2. 22.

Rezultat:

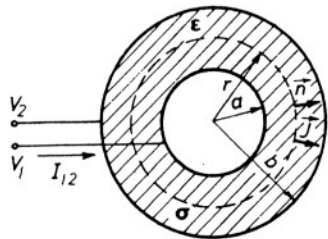
$$G = \sigma_1 \frac{S_1}{d} + \sigma_2 \frac{S_2}{d} = G_1 + G_2.$$

gde su sa G_1 i G_2 označene električne provodnosti pojedinih dielektrika zmedju elektroda kondenzatora.

2. 27. Izmedju elektroda sfernog kondenzatora poluprečnika a i b ($a < b$), nalazi se homogen, nesavršen dielektrik, relativne dielektrične konstante ϵ_r i specifične električne provodnosti σ pri jednosmernoj struji. Odrediti izraz za električnu provodnost dielektrika izmedju elektroda ovog kondenzatora, pri jednosmernoj struji.

Rešenje:

Da bi se odredila električna provodnost kondenzatora može se postupiti na sledeći način:



Sl. 2. 27.

1^o Neka je $I_{12} > 0$, intenzitet struje u priključnim provodnicima kondenzatora.

2^o Vektor gustine električne struje je radijalan, usmeren od unutrašnje ka spoljašnjoj elektrodi (sl. 2. 27) i intenziteta:

$$J = \frac{I_{12}}{4\pi r^2}, \quad a \leq r \leq b.$$

3^o Na osnovu Omovog zakona vektor električnog polja je:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma},$$

njegova jačina je

$$E = \frac{I_{12}}{4\pi \sigma r^2}, \quad a \leq r \leq b.$$

4^o Izraz za napon izmedju unutrašnje i spoljašnje elektrode kondenzatora je:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_a^b E dr = \frac{I_{12}}{4\pi \sigma} \frac{b-a}{ab}.$$

5^o Na osnovu definicije električne provodnosti se ima:

$$G = \frac{I_{12}}{U_{12}} = \frac{4\pi ab \sigma}{b-a}.$$

Prethodni postupak se može primeniti pri određivanju električnih provodnosti, odnosno električnih otpornosti, u slučajevima sličnim prethodnom.

2. 28. Dielektrik izmedju provodnika koaksijalnog kabla, poluprečnika provodnika a i b ($a < b$), ima relativnu dielektričnu konstantu ϵ_r i malu specifičnu provodnost σ pri jednosmernoj struji. Odrediti izraz za podužnu električnu provodnost kabla.

Rezultat: Izraz za podužnu električnu provodnost kabla je:

$$G' = \frac{G_{\text{kabla dužine } h}}{h} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}.$$

2. 29. Dva veoma dugačka, tanka, paralelna provodnika, kružnog poprečnog preseka poluprečnika a , na međusobnom rastojanju d ($d \gg a$), obrazuju dvožični vod. Provodnici se nalaze u homogenoj dielektričnoj sredini, male specifične provodnosti σ . Odrediti izraz za podužnu provodnost voda.

Rezultat:

Koristeći vezu izmedju električne provodnosti, dielektrič-

ne konstante, specifične provodnosti i kapacitivnosti, može se pisati:

$$G' = \frac{\sigma}{\epsilon} C' .$$

Kako je izraz za podužnu kapacitivnost dvožičnog voda:

$$C' = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{d}{a}} ,$$

to je:

$$G' = \frac{\pi \sigma}{\ln \frac{d}{a}} .$$

2. 30.* Odrediti izraz za električnu otpornost sfernog uzemljivača, poluprečnika a , ukopanog duboko u zemlju. Specifična električna provodnost zemlje je σ .

Rešenje:

Primenjujući postupak opisan u zadatku 2. 27. , ima se

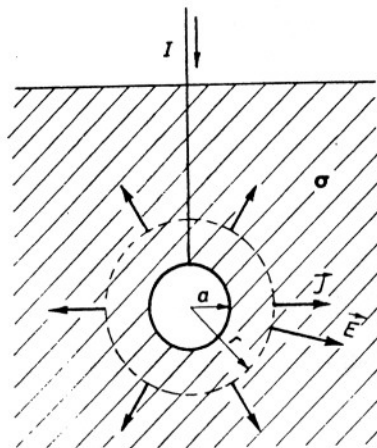
$$J = \frac{I}{4 \pi r^2} ,$$

jer na uzemljivaču nema nagomilavanja elektriciteta.

Jačina električnog polja u tačkama udaljenim r ($r > a$) od centra uzemljivača (sl. 2. 30.) je

$$E = \frac{I}{4 \pi \sigma r^2} .$$

Kako je uzemljivač ukopan duboko u zemlju, to je njegov potencijal prema



Sl. 2. 30.

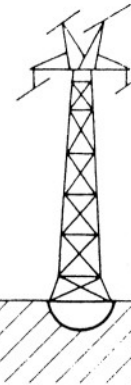
tački u beskonačnosti:

$$V_a = \int_a^{\infty} E dr = \frac{I}{4 \pi \sigma a} ,$$

Izraz za otpornost sfernog uzemljivača je:

$$R = \frac{V_a}{I} = \frac{1}{4 \pi \sigma a} .$$

2. 31.* Uzemljenje metalnog stuba dalekovoda se može predstaviti polusfernim uzemljivačem, kao što je pokazano na slici 2. 31. a. Poluprečnik



Sl. 2. 31. a.

polusfernog uzemljivača je $r_0 = 1$ m,

a specifična električna provodnost zemlje oko uzemljivača je $\sigma = 2 \cdot 10^{-2} \frac{S}{m}$

Odrediti:

1^o Otpornost ovog uzemljivača.

2^o Napon koraka* izmedju ta-

čaka na zemlji na rastojanju $r_1 = 4$ m

i $r_2 = 4,8$ m od centra uzemljivača,

kada je pri udaru groma u stub dale-

kovoda, jačina struje u uzemljivaču $I = 100$ kA. Koliki je najveći napon koraka?

Rešenje:

1^o Smatrajući da su linije vektora gustine električne struje

* Napon koraka je razlika potencijala tačaka na zemlji koje su na istom poluprečniku, na međusobnom rastojanju jednakom dužini čovečjeg koraka (oko 80 cm).

radijalne, za gustinu električne struje se ima:

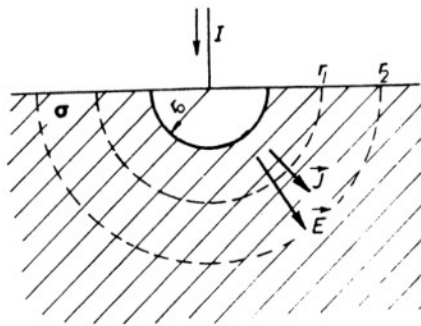
$$J = \frac{I}{2\pi r^2}, \quad r > r_0.$$

Kako je $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, to je

$$E = \frac{I}{2\pi \sigma r^2}, \quad r > r_0.$$

Potencijal uzemljivača prema tački u beskonačnosti je:

$$V_{r_0} = \frac{I}{2\pi \sigma r_0}.$$



Sl. 2. 31. b.

Električna otpornost uzemljivača je:

$$R = \frac{V_{r_0}}{I} = \frac{1}{2\pi \sigma r_0} \approx 8 \Omega.$$

2^o Napon koraka je

$$U_{\text{koraka}} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{I}{2\pi \sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

odnosno:

$$U_{\text{koraka}} = 33.1 \text{ kV}.$$

Najveći napon koraka je između tačke na uzemljivaču i tačke radijalno udaljene od njega za 80 cm. Ovaj napon iznosi:

$$(U_{\text{koraka}})_{\text{max}} = \frac{I}{2\pi \sigma} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1'} \right),$$

de je $r_1' = 1,8 \text{ m}$.

Zamenom brojnih vrednosti se dobija:

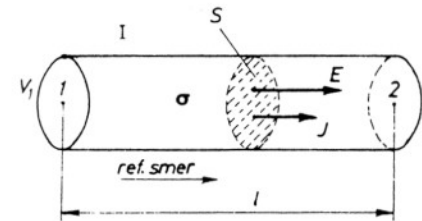
$$(U_{\text{koraka}})_{\text{max}} = 352 \text{ kV}.$$

2. 32. Odrediti izraz za električnu otpornost homogenog, pravolinijskog metalnog provodnika dužine l , malog poprečnog preseka površine S i specifične električne provodnosti σ . Zatim izračunati električnu otpornost bakarnog provodnika dužine $l = 5 \text{ m}$, površine poprečnog preseka $S = 3 \text{ mm}^2$ i specifične električne provodnosti $\sigma = 59 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$.

Rešenje:

Za male površine poprečnog preseka može se smatrati da je gustina struje ista u svim tačkama poprečnog preseka provodnika. Za pretpostavljenu električnu struju intenziteta I (sl. 2. 32.) je:

$$J = \frac{I}{S}.$$



Jačina električnog polja u provodniku je:

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S}.$$

Sl. 2. 32.

Napon između tačaka 1 i 2, na krajevima provodnika, je

$$U_{12} = V_1 - V_2 = El = \frac{l}{\sigma S} I.$$

Izraz za električnu otpornost provodnika je:

$$R = \frac{U_{12}}{I} = \frac{l}{\sigma S}.$$

Uvodeći specifičnu električnu otpornost provodnika

$$\rho = \frac{1}{\sigma},$$

izraz za električnu otpornost provodnika dobija oblik:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Za zadati bakarni provodnik, električna otpornost je:

$$R = 28,2 \text{ m}\Omega$$

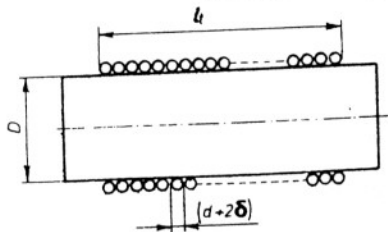
2.33. Potrebno je načiniti žičani otpornik otpornosti $R = 5 \Omega$. Raspolaže se izolovanom konstantanskom žicom prečnika provodnog dela $d = 1 \text{ mm}$ i debljine izolacije $\delta = 10 \mu$. (Konstantan je legura bakra, nikla i mangana, Cu - Ni - Mn). Specifična električna otpornost konstantana na temperaturi $\Theta = 0^\circ \text{C}$ je $\rho = 50 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. i može se smatrati konstantnom u radnom opsegu temperatura otpornika. Otpornik treba formirati namotavanjem konstantanske žice u jednom sloju, zavojak do zavojka, na keramičko telo oblika valjka prečnika $D = 10 \text{ mm}$.

Odrediti:

- 1^o Potrebnu dužinu konstantanske žice.
- 2^o Potrebnu dužinu keramičkog tela.

Rešenje:

Na slici 2.33. je prikazan presek otpornika.



Sl. 2.33.

1^o Polazeći od izraza za električnu otpornost tankog žičanog provodnika

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

za dužinu potrebnu za formiranje ot-

pornika se dobija:

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{\pi d^2 R}{4 \rho} = 7,85 \text{ m.}$$

2^o Dužina keramičkog tela, prekrivenog konstantanskom žicom,

je

$$l_t = N \cdot (d + 2\delta),$$

gde je N broj zavojaka konstantanske žice, određen sa:

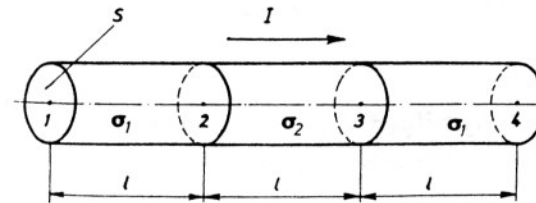
$$N = \frac{l}{\pi D}$$

Prema prethodnom je

$$l_t = \frac{d + 2\delta}{\pi D} l = 25 \text{ cm.}$$

Pri izradi otpornika uzima se nešto veća dužina kalemskog keramičkog tela od izračunate dužine radi pričvršćivanja žice i celog otpornika.

2.34. Provodnik prikazan slikom 2.34. se sastoji od dva metala različitih specifičnih provodnosti $\sigma_1 = 20 \sigma_2$. Dužine pojedinih delova l



Sl. 2.34.

kao i površine njihovih poprečnih preseka S su jednake. Smatrajući raspodelu struje po poprečnom preseku ravnomernom i zanemaruju-

ći otpornosti pojedinih spojeva odrediti:

1^o Odnose otpornosti pojedinih delova provodnika,

2° Odnose napona $\frac{U_{12}}{U_{23}}$, $\frac{U_{12}}{U_{14}}$ i $\frac{U_{23}}{U_{14}}$, ako je jačina

struje u provodniku $I_{14} = I$.

3° Električnu otpornost provodnika između tačaka 1 i 4.

Rešenje:

1° Na osnovu zadatka 2.32 izrazi za električne otpornosti pojedinih delova su:

$$R_1 = \frac{1}{\sigma_1} \frac{l}{S} \quad \text{i} \quad R_2 = \frac{1}{\sigma_2} \frac{l}{S}$$

Odnos ovih otpornosti je

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{20}$$

2° Naponi pojedinih delova provodnika su:

$$U_{12} = E_1 l = \frac{I_{12}}{\sigma_1 S} l = \frac{I}{\sigma_1 S} l = R_1 I$$

$$U_{23} = E_2 l = \frac{I_{23}}{\sigma_2 S} l = \frac{I}{\sigma_2 S} l = R_2 I$$

$$U_{34} = E_1 l = \frac{I_{34}}{\sigma_1 S} l = \frac{I}{\sigma_1 S} l = R_1 I = U_{12}$$

i

$$U_{14} = E_1 l + E_2 l + E_1 l = U_{12} + U_{23} + U_{34} = I (2 R_1 + R_2)$$

Prema prethodnom je:

$$\frac{U_{12}}{U_{23}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{U_{12}}{U_{14}} = \frac{R_1}{2 R_1 + R_2} = \frac{1}{22}$$

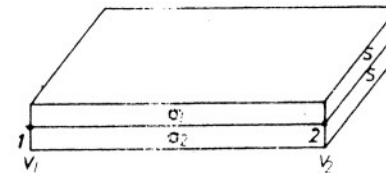
$$\text{i} \quad \frac{U_{23}}{U_{14}} = \frac{R_2}{2 R_1 + R_2} = \frac{20}{22}$$

3° Električna otpornost provodnika između tačaka 1 i 4 je:

$$R_{14} = \frac{U_{14}}{I_{14}} = 2 R_1 + R_2$$

2.35. Bimetalni provodnik se sastoji od dve spojene tanke

metalne trake jednakih dimenzija kao na slici 2.35. Specifične električne



provodnosti pojedinih delova su σ_1

i σ_2 , pri čemu je $\sigma_1 = 5 \sigma_2$.

Razlika potencijala tačaka 1 i 2

je $V_1 - V_2 = U_{12}$.

Sl. 2.35.

Određiti:

1° Odnose provodnosti pojedinih delova bimetalnog provodnika.

2° Odnose jačina struja kroz pojedine delove bimetalnog provod-

nika.

3° Električnu provodnost bimetalnog provodnika između tačaka 1 i 2.

Rešenje:

1° Smatrajući raspodelu struja po poprečnim presecima

pojedinih delova bimetalnog provodnika ravnomernim, za njihove električne

provodnosti se ima:

$$G_1 = \frac{\sigma_1 S}{l} \quad \text{i} \quad G_2 = \frac{\sigma_2 S}{l}$$

Odnos ovih provodnosti je:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 5.$$

2° Jačine struja kroz poprečne preseke pojedinih delova bimetalnog provodnika su:

$$I_1 = J_1 S = \sigma_1 E S = \sigma_1 \frac{S}{l} U_{12} = G_1 U_{12}$$

i

$$I_2 = J_2 S = \sigma_2 E S = \sigma_2 \frac{S}{l} U_{12} = G_2 U_{12}$$

a sračunate su prema referentnim smerovima od 1 ka 2. Njihov odnos je, prema prethodnom

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} = 5.$$

3° Električna provodnost bimetalnog provodnika je

$$G = \frac{I_{12}}{U_{12}},$$

pri čemu je I_{12} jačina struje kroz poprečni presek (2 S) celog bimetalnog provodnika.

Kako je:

$$I_{12} = J_1 S + J_2 S = I_1 + I_2,$$

odnosno

$$I_{12} = G_1 U_{12} + G_2 U_{12} = (G_1 + G_2) U_{12},$$

to je:

$$G = G_1 + G_2.$$

2.36. Na temperaturi $\Theta_1 = 18^\circ\text{C}$ otpornost bakarne žice iznosi $R_1 = 3,6 \Omega$. Posle izvesnog vremena, usled proticanja elektriciteta, žica se zagrejala i njena otpornost je $R_2 = 4,12 \Omega$. Odrediti temperaturu žice znajući da je temperaturni sačinitelj bakra $\alpha = 0,0043 \frac{\Omega}{\Omega^\circ\text{C}}$.

Rezultat:

$$\text{Kako je } R_2 = R_1 [1 + \alpha (\Theta_2 - \Theta_1)]$$

to je:

$$\Theta_2 = \Theta_1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) = 51,6^\circ\text{C}.$$

2.37. Otpornost žičanog provodnika je $R = 3 \Omega$. Odrediti otpornost žičanog provodnika od istog materijala čiji je prečnik poprečnog preseka dva puta veći, dužina dva puta manja, na istoj temperaturi.

Rezultat: Tražena otpornost je:

$$R_1 = 1 \Omega.$$

2.38. Otpornik od legureroma i nikla ima, na temperaturi

$\Theta_1 = 20^\circ\text{C}$, električnu otpornost $R_1 = 1,2 \text{ k}\Omega$ i temperaturni sačinitelj $\alpha_1 = 1,10 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Sa njim na red je vezan ugljeni otpornik čiji je temperaturni sačinitelj $\alpha_2 = 0,2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Pod pretpostavkom da se ovaj otpornik zagreju do iste temperature, odrediti kolika treba da bude električna otpornost ugljenog otpornika na 20°C , tako da otpornost redne dve ovih otpornika praktično ne zavisi od temperature? Kolika je otpornost redne dve na 20°C , u tom slučaju?

Rešenje:

Kako je za otpornik od legure hroma i nikla na temperaturi Θ_2

$$R_2 = R_1 \left[1 + \alpha_1 (\Theta_2 - \Theta_1) \right],$$

a za ugljeni otpornik na istoj temperaturi

$$R_2' = R_1' \left[1 + \alpha_2 (\Theta_2 - \Theta_1) \right],$$

to se za otpornost njihove redne veze ima

$$R = R_2 + R_2' = R_1 + R_1' + (\Theta_2 - \Theta_1) (\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_1').$$

Otpornost R neće zavistiti od temperature, ako je

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_1' = 0.$$

Ugljeni otpornik treba da ima otpornost

$$R_1' = - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} R_1 = 660 \Omega.$$

Otpornost redne veze ovih otpornika u ovom slučaju je:

$$R = R_1 + R_1' = 1860 \Omega$$

2. 39. Odrediti izraz za snagu gubitaka u homogenom nesavršenom dielektriku kondenzatora prikazanog na sl. 2. 39. a. Napon između elektroda kondenzatora je $U = V_1 - V_2$, a specifična provodnost dielektrika je σ .

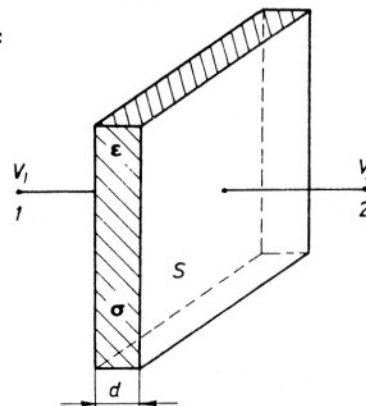
Rešenje:

Izraz za zapreminsku gustinu snage gubitaka je

$$\frac{dP}{dV} = \rho J^2.$$

Snaga gubitaka u dielektriku elementarne zapremine dV (sl. 2. 39. b)

je:



Sl. 2. 39. a.

Gustina električne struje u dielektriku je

$$J = \sigma E = \sigma \frac{U}{d},$$

pa je izraz za snagu gubitaka u dielektriku

$$P = \frac{\sigma S}{d} U^2.$$

Pošto je električna provodnost dielektrika

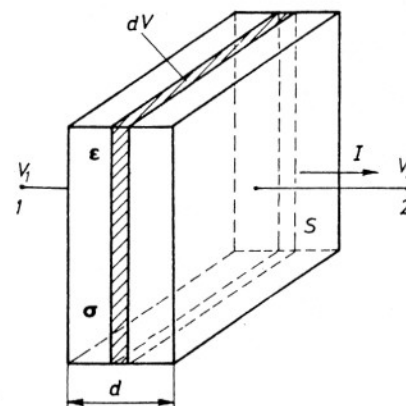
$$G = \frac{\sigma S}{d} = \frac{1}{R}$$

to se izraz za snagu gubitaka može

predstaviti u obliku:

$$\text{ili } P = G U^2,$$

$$P = \frac{U^2}{R}.$$



Sl. 2. 39. b.

2. 40. Odrediti izraz za snagu gubitaka u dielektricima kondenzatora opisanog u zadatku 2. 22.

Rezultat:

Snaga gubitaka u dielektriku kondenzatora je

$$P = P_1 + P_2 = G_1 U^2 + G_2 U^2 = \left(\frac{\sigma_1 S_1}{d} + \frac{\sigma_2 S_2}{d} \right) U^2.$$

2. 41. Odrediti izraz za snagu gubitaka u dielektricima kondenzatora opisanog u zadatku 2. 23.

Rezultat:

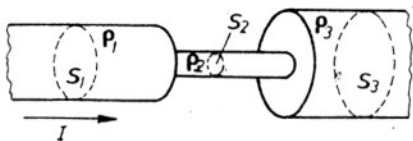
Snaga gubitaka u dielektricima kondenzatora je;

$$P = P_1 + P_2 = \rho_1 \frac{I^2}{S^2} V_1 + \rho_2 \frac{I^2}{S^2} V_2 = (R_1 + R_2) I^2.$$

2. 42. Tanak provodnik prikazan na slici 2. 42. se sastoji od tri homogena metalna dela specifičnih električnih otpornosti ρ_1 , ρ_2 i ρ_3 , i površine poprečnih preseka S_1 , S_2 , i S_3 . U provodniku postoji jedno-

smerna struja stalne jačine I ; označenog smera (sl. 2. 42.)

Odrediti odnose zapreminskih gustina snaga gubitaka u pojedinim delovima provodnika.



Sl. 2. 42.

Rezultat:

Polazeći od izraza za zapreminsku gustinu snage

$$\frac{\Delta P}{\Delta V} = \rho J^2$$

ima se:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_1 : \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_2 : \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_3 = \frac{\rho_1}{S_1^2} : \frac{\rho_2}{S_2^2} : \frac{\rho_3}{S_3^2}$$

2. 43. Radi određivanja električne otpornosti jednog žičanog provodnika u njemu je za vreme $t = 1$ h održavana jednosmerna struja stalne jačine $I = 1$ A, pri čemu je kalorimetrom izmerena razvijena toplota $W = 2$ kcal. Kolika je električna otpornost ovog provodnika?

Rešenje:

Polazeći od Džulovog zakona

$$W = RI^2 t$$

za električnu otpornost provodnika se može pisati:

$$R = \frac{W}{I^2 t} = 2,32 \Omega$$

2. 44. Električni čajnik ima dva grejača. Pri uključivanju samo jednog grejača čaj provri za $t_1 = 4$ min. Pri uključivanju samo drugog grejača ista količina čaja, pod istim okolnostima kao i u prethodnom slučaju, provri za $t_2 = 12$ min. Za koje vreme će ista količina čaja da provri kada se uključe oba grejača i to

- na red,
- paralelno?

Smatrati da u svim slučajevima ukupna količina razvijene topline ide samo na zagrevanje čaja.

Rešenje:

Kada je uključen samo prvi grejač ukupna razvijena

toplota pri zagrevanju čaja je:

$$W = R_1 I_1^2 t_1 = \frac{U^2}{R_1} t_1.$$

Kada je uključen samo drugi grejač, pošto se radi o zagrevanju iste količine čaja pod istim okolnostima kao i u prethodnom slučaju, ukupna razvijena toplota je:

$$W = R_2 I_2^2 t_2 = \frac{U^2}{R_2} t_2.$$

a) Pri rednom uključivanju grejača je

$$W = R_1 I_3^2 t_3 + R_2 I_3^2 t_3 = (R_1 + R_2) I_3^2 t_3 = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_3.$$

Na osnovu prethodnih jednačina se dobija

$$t_3 = t_1 + t_2 = 16 \text{ min.}$$

b) Pri paralelnom uključivanju grejača je

$$W = R_1 I_1^2 t_4 + R_2 I_2^2 t_4 = \frac{U^2}{R_1} t_4 + \frac{U^2}{R_2} t_4 = U^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) t_4.$$

Sada je

$$t_4 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 3 \text{ min.}$$

2.45. Treba projektovati električni grejač koji bi vodu mase

$m = 2 \text{ kg}$ zagrejao od $\Theta_1 = 16^\circ\text{C}$ do $\Theta_2 = 90^\circ\text{C}$ za $t = 12 \text{ min}$. Raspolaže se žicom od kantala (legura: aluminijum, kobalt, hrom, gvoždje) podužne otpornosti $R' = 7 \frac{\Omega}{\text{m}}$, za koju se može smatrati da se ne menja u posmatranom opsegu temperature. Grejač se priključuje na jednosmerni na-

pon $U = 110\text{V}$. Pri projektovanju treba uzeti da 75% razvijene toplote ide na zagrevanje vode.

Smatrati da se specifična toplota vode ne menja u posmatranom opsegu temperatura i da iznosi $c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr}^\circ\text{C}}$.

Odrediti potrebnu dužinu žice od kantala.

Rezultat:

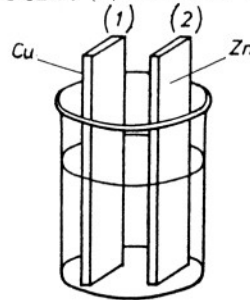
Potrebna dužina žice od kantala je

$$l = \frac{3U^2 t}{4 R' mc (\Theta_2 - \Theta_1)} = 1,507 \text{ m.}$$

2. 3. PROSTO ELEKTRIČNO KOLO

OMOV ZAKON

2. 46.* U rastvor sumporne kiseline (H_2SO_4) uronjene su ploče od bakra (1) i cinka (2) kao na sl. 2. 46. a. Približno nacrtati linije električnog polja u prostoru između elektroda izvan elektrolita. Odrediti izraz za elektromotornu silu ovakvog električnog izvora*.



Sl. 2. 46. a.

Ploča i elektrolita. Usled dejstva hemijskih sila pozitivni joni cinka odlaze sa ploče od cinka u rastvor ostavljajući na ovoj ploči elektrone. U rastvoru se pozitivni joni cinka jedine sa negativnim jonima SO_4 obrazujući molekule $ZnSO_4$.

Pozitivni joni vodonika koji su u rastvoru nastali razlaganjem molekula sumporne kiseline, kreću se prema bakarnoj ploči (sl. 2. 46. b.) i na njoj se neutrališu uzimajući sa nje elektrone. Zbog ovoga se elektroda označena sa (1) naelektriše pozitivno, a elektroda označena sa (2) naelektriše negativno.

Rešenje:

Prilikom utapanja nanaelektrisanih ploča u elektrolit dolazi do kratkotrajnog hemijskog procesa između

ploča i elektrolita. Usled dejstva hemijskih sila pozitivni joni cinka odlaze sa ploče od cinka u rastvor ostavljajući na ovoj ploči elektrone. U rastvoru se pozitivni joni cinka jedine sa negativnim jonima SO_4 obrazujući molekule $ZnSO_4$.

Pozitivni joni vodonika koji su u rastvoru nastali razlaganjem molekula sumporne kiseline, kreću se prema bakarnoj ploči (sl. 2. 46. b.) i na njoj se neutrališu uzimajući sa nje elektrone. Zbog ovoga se elektroda označena sa (1) naelektriše pozitivno, a elektroda označena sa (2) naelektriše negativno.

Proces naelektrisanja elektroda se završava kada elektrostatičke sile oko elektroda (usled dejstva naelektrisanja na elektrodama i oko njih u elektrolitu) postanu jednake po jačini hemijskim silama, a suprotnog su smera. Pri ravnoteži u elektrolitu je

$$\vec{F}_{\text{elektrostatičke}} + \vec{F}_{\text{hemijske}} = 0$$

Kako ove sile deluju na ista naelektrisanja to se može napisati

$$QE_{\text{elektrostatičko}} + QE_{\text{usled dejstva hemijskih sila}} = 0.$$

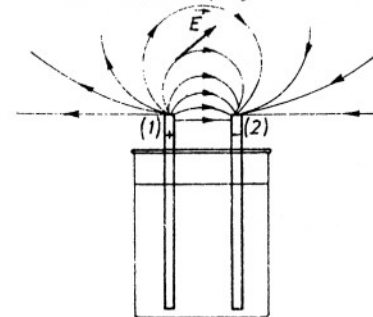
Ekvivalentno polje usled dejstva hemijskih sila je neelektrične prirode i često se naziva "strano" polje i označava sa \vec{E}_{strano} ili \vec{E}_{st} . Prema prethodnom je u elektrolitu

$$\vec{E}_{\text{elektrostatičko}} + \vec{E}_{\text{strano}} = 0$$

odnosno

$$\vec{E} + \vec{E}_{\text{st}} = 0.$$

Strano polje postoji samo u elektrolitu, a izvan elektrolita postoji samo elektrostatičko polje, usled naelektrisanja elektroda. Linije elektrostatičkog polja izvan elektrolita su približno prikazane na sl. 2. 46. b.



Sl. 2. 46. b.

Na osnovu prethodnog ovaj električni izvor (a to važi i za ostale izvore) može se predstaviti kao na

sl. 2. 46. c.

Usled dejstva hemijskih sila naelektrišu se elektrode, pa su njihovi potencijali V_1 i V_2 . Da bi se izrazilo dejstvo hemijskih sila, ili stranih ne-

* Zbog male i nestabilne elektromotorne sile ovakav električni izvor nije našao praktičnu primenu.

električnih sila uopšte, uvodi se elektromotorna sila izvora, skraćeno ems.

Smer dejstva stranog polja određuje smer elektromotorne sile, a njena jačina se definiše izrazom

$$\text{jačina elektromotorne sile} = \int_2^1 \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l}$$

Prethodni zbir (integral) se formira od elektrode (2) ka elektrodi (1) po putanji kroz elektrolit.

Polazeći od činjenice da je u elektrolitu, u odsustvu električne struje,

$$\vec{E} + \vec{E}_{st} = 0,$$

to se za bilo koju putanju u elektrolitu od elektrode (2) ka elektrodi (1) ima

$$\int_2^1 (\vec{E} + \vec{E}_{st}) \cdot d\vec{l} = 0,$$

odnosno

$$\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_2^1 \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ tj.}$$

$$\int_2^1 \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l} = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Kako je polje \vec{E} elektrostatičko to

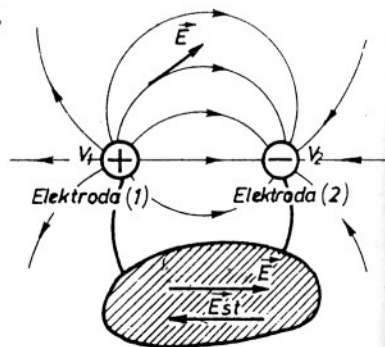
$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ne zavisi od putanje izmedju elektrode (1) i elektrode (2), to se, uzimajući putanju izvan elektrolita sl. 2. 46. c, ima

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2.$$

Prema tome je, u odsustvu električne struje kroz rastvor,

$$\text{ems} = V_1 - V_2 = U_{12}.$$

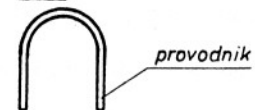


Sl. 2. 46. c.

Poslednja relacija predstavlja podlogu za praktično merenje ems izvora.

U slučajevima kada ne može doći do zabune ems se obeležava sa \mathcal{E} .

2. 47.* Nacrtati približan oblik linija polja oko polova baterije i



provodnika koji je primaknut polovima baterije kao na sl. 2. 47. a.

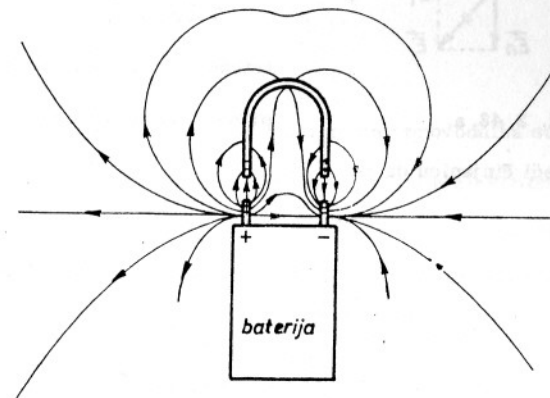
Rešenje:



Sl. 2. 47. a.

Usled dejstva elektromotorne sile, na polovima (krajevima) baterije, nalaze se nagomilana naelektrisanja. Zbog ovoga se provodnik nalazi

u elektrostatičkom polju ovih naelektrisanja, pa se usled elektrostatičke indukcije i u njemu izdvajaju naelektrisanja. Približna raspodela naelektrisanja i linije polja oko polova baterije i provodnika su prikazani na sl. 2. 47. b.



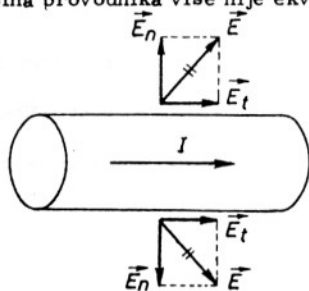
Sl. 2. 47. b.

2. 48. Pokazati da u okolini provodnika sa stalnom jednosmernom strujom postoji električno polje i da nije normalno na površinu provodnika.

Rešenje:

Kada je provodnik jednim svojim krajem priključen na pol generatora i u provodniku ne postoji električna struja (otvoreno kolo), uz površinu provodnika se nalaze nagomilana pozitivna ili negativna naelektrisanja usled dejstva ems izvora. Polje u okolini provodnika je elektrostatičko. Površina provodnika je ekvipotencijalna i vektori polja su normalni na nju (vektori polja nemaju komponentu u pravcu provodnika).

Kada se u provodniku uspostavi električna struja (zatvoreno kolo) površina provodnika više nije ekvipotencijalna, jer potencijali tačaka na povr-



Sl. 2. 48. a.

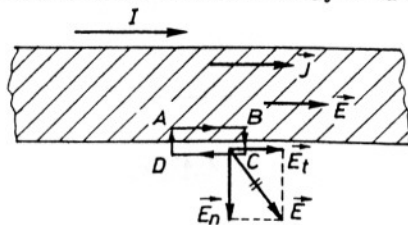
šini provodnika, a duž provodnika nisu jednaki. Usled ovoga vektor električnog polja ima i tangencijalnu komponentu sl. 2. 48. a.

Tangencijalna komponenta električnog polja neposredno uz površinu provodnika sa spoljne strane, se može

odrediti koristeći činjenicu da je

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Prema oznakama na sl. 2. 48. b. uzimajući da su dužine stranica



Sl. 2. 48. b.

BC i AD pravougaonika ABCD veoma male može se pisati

$$E \overline{AB} - E_{lt} \overline{DC} = 0,$$

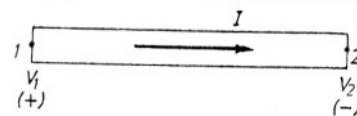
odnosno

$$E_{lt} = E = \rho J.$$

Normalna komponenta električnog polja uz površinu provodnika sa spoljne strane se može odrediti kao i u elektrostatici preko površinske gusline naelektrisanja uz površinu provodnika

$$E_n = \frac{Q_{na} \Delta S}{\epsilon_0 \Delta S}.$$

2. 49.* Nacrtati približan oblik linija električnog polja oko pravolinijskog provodnika sa stalnom jednosmernom strujom, kao na sl. 2. 49. a. Razlika potencijala krajeva provodnika je

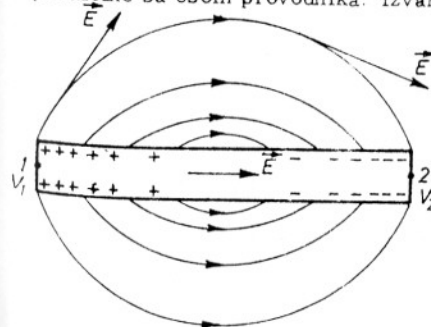


$$V_1 - V_2 = U \quad (U > 0)$$

Sl. 2. 49. a.

Rešenje:

Linije električnog polja unutar provodnika su pravolinijske paralelne sa osom provodnika. Izvan provodnika linije električnog polja polaze



Sl. 2. 49. b.

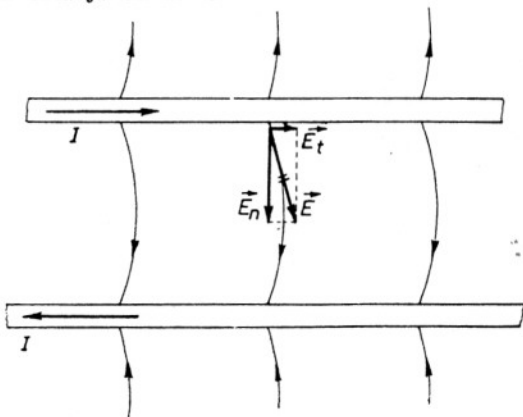
od provodnika pod oštrim uglom prema provodniku. Pri ovome, u blizini tačke normalna komponenta vektora jačine električnog polja je usmerena od provodnika. Pri pomeranju od tačke 1 ka tački 2 duž linije polja, normalna komponenta vektora jačine polja se smanjuje.

Na sredini linije polja normalna komponenta je jednaka nuli, a zatim se povećava i usmerena je ka provodniku. Saglasno ovome (a i prema zadatku 2. 48), menja se gustina naelektrisanja u provodniku i po količini i po znaku od tačke 1 ka tački 2. Slika 2. 49. b. približno prikazuje linije električnog polja oko provodnika i raspodelu naelektrisanja u provodniku.

2. 50. Približno predstaviti linije električnog polja oko provodnika dvožičnog voda sa stalnom jednosmernom strujom jačine I .

Rezultat:

Tangencijalna komponenta E_t vektora jačine električnog polja E je najčešće mnogo manja od normalne komponente E_n , što je uzeto u obzir prilikom crtanja sl. 2. 50.



Sl. 2. 50.

2. 51.* Vazdušni dvožični vod se sastoji od dva tanka bakarna provodnika, kružnog poprečnog preseka na međusobnom rastojanju $d = 4$ cm. Specifična provodnost bakra je $\sigma = 57 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$. U vodu postoji stalna jednosmerna struja gustine $J = 0,2 \frac{A}{mm^2}$, ravnomerno raspodeljena po poprečnom preseku

provodnika voda. Približno odrediti tangencijalnu i normalnu komponentu vektora jačine električnog polja uz površinu provodnika voda, na mestu na kome je napon između provodnika voda $U = 100$ V.

Rešenje:

Prema prethodnom zadatku za tangencijalnu komponentu vektora jačine električnog polja se ima

$$E_t = \frac{J}{\sigma} = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{V}{m}$$

Smatrajući da su normalne komponente vektora jačine električnog polja u tačkama između provodnika, na posmatranom mestu, jednake (što nije ispravno, ali se može upotrebiti za grubu procenu jačine normalne komponente električnog polja), iz izraza za napon između provodnika voda:

$$U = E_n \cdot d,$$

se ima:

$$E_n = \frac{U}{d} = 2500 \frac{V}{m}$$

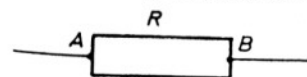
Jačina električnog polja uz površinu provodnika je

$$E = \sqrt{E_t^2 + E_n^2} \approx E_n,$$

a ugao koji vektor jačine polja \vec{E} zaklapa sa normalom na površinu provodnika je

$$\alpha = \arctg \frac{E_t}{E_n} \approx 0.$$

2. 52. U otporniku, električne otpornosti R , šematski prikazanom na sl. 2. 52. a. postoji stalna jednosmerna električna struja. Odrediti izraz



Sl. 2. 52. a.

za električni napon između krajeva otpornika, smatrajući električno polje u celom otporniku homogenim.

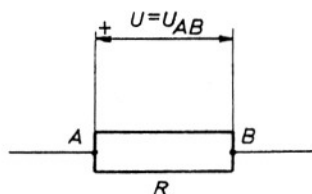
Rešenje:

Napon između krajeva A i B otpornika je

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

Ovaj izraz za napon ima algebarsko značenje. Ako je napon pozitivan tačka koja odgovara prvom indeksu napona (A) je na višem potencijalu od tačke koja odgovara drugom indeksu napona (B). Ako je napon negativan tačka koja odgovara prvom indeksu napona (A) je na nižem potencijalu od tačke koja odgovara drugom indeksu napona (B).

Ukoliko se uz oznaku za napon ne pišu indeksi može doći do zabune oko toga koja je tačka na višem potencijalu, a koja na nižem, što je važno pri rešavanju kola. U ovom slučaju se i za napon uvodi referentni smer koji se grafički označava strelicom pored otpornika između dve vertikalne crte, a uz tačku koja odgovara prvom indeksu napona stavlja se oznaka "+".



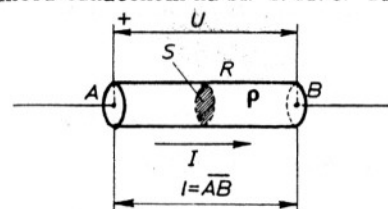
Sl. 2. 52. b.

Na slici 2. 52. b. je prikazan referentni smer za napon U_{AB} . Kako je:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

to se pri ovakvom sračunavanju napon naznačena integracija vrši polazeći od tačke pored koje stoji oznaka "+" na grafički označenom referentnom smeru za napon.

a) Neka se intenzitet struje u otporniku računa prema referentnom smeru označenom na sl. 2. 52. c. Tada je



Sl. 2. 52. c.

$$U = \vec{E} \cdot \vec{AB} = E \cdot \overline{AB} \cos(\vec{E}, \vec{AB}).$$

Kako je

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

i

$$I = JS \cos(\vec{J}, \vec{AB})$$

to je

$$E = \rho \frac{I}{S \cos(\vec{J}, \vec{AB})}$$

Izraz za napon je

$$U = \rho \frac{\overline{AB}}{S} I \frac{\cos(\vec{E}, \vec{AB})}{\cos(\vec{J}, \vec{AB})} = RI \frac{\cos(\vec{E}, \vec{AB})}{\cos(\vec{J}, \vec{AB})},$$

odnosno

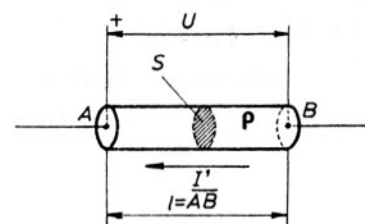
$$U = RI$$

Za ove referentne smerove napona i struje kaže se da su usaglašeni (grafički se jedna strelica nadovezuje na drugu, sl. 2. 52. c).

b) Ako se intenzitet struje računa prema referentnom smeru kao na sl. 2. 52. d, tada je

$$I' = -I.$$

Izraz za napon U između krajeva otpornika je



Sl. 2. 52. d.

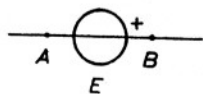
$$U = -RI'.$$

Za ovakve referentne smerove napona

i struje se kaže da su neusaglašeni

(strelice se ne nadovezuju, sl. 2. 52. d.)

2. 53. Odrediti izraz za napon između krajeva generatora ems E,



Sl. 2. 53. a.

šematski prikazanog na sl. 2. 53. a.

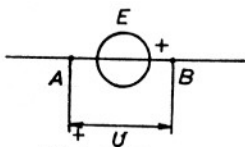
Rešenje:

Napon U između tačaka

A i B (sl. 2. 53. b.) je

$$U = V_A - V_B$$

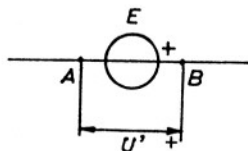
Kako je ems $E = V_B - V_A$ (zadatak 2. 46.) to je



Sl. 2. 53. b.

$$U = -(V_B - V_A) = -E$$

Pri ovome oznaka E ima algebarsko značenje prema referentnom smeru od A ka B.

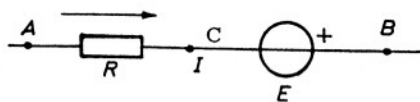


Sl. 2. 53. c.

Napon U' (sl. 2. 53. c.) između tačaka B i A je

$$U' = V_B - V_A = E$$

2. 54. Na sl. 2. 54.a je prikazan deo električnog kola sa stalnom



Sl. 2. 54. a.

električnom strujom.

Odrediti izraz za napon između tačaka A i B.

Rešenje:

Napon između tačaka A i B je

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

odnosno: $U_{AB} = (V_A - V_C) + (V_C - V_B)$,

to jest: $U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$

Prema zadatku 2. 52. i 2. 53. je:

$$U_{AB} = RI - E$$

Izraz za napon između dve tačke u električnom kolu je moguće formirati i neposrednim algebarskim sabiranjem sabiraka tipa RI i E. Pri ovome se algebarski zbir može formirati idući putanjom duž kola od tačke koja odgovara prvom indeksu napona ka tački koja odgovara drugom indeksu napona, ili idući putanjom u suprotnom smeru od prethodnog. Postupak je moguće šematizovati, a sprovodi se na sledeći način:

1° Putanja duž kola u smeru od prvog ka drugom indeksu napona.

Član RI ulazi u zbir sa predznakom "+" (plus) kada se smer putanje poklapa sa referentnim smerom za struju u posmatranom otporniku.

Član RI ulazi u zbir sa predznakom "-" (minus) kada je smer putanje u posmatranom otporniku suprotan referentnom smeru za struju.

Elektromotorna sila E ulazi u zbir sa predznakom "-" kada je smer putanje isti kao i referentni smer za ems E.

Elektromotorna sila E ulazi u zbir sa predznakom "+" u slučaju kada je smer putanje suprotan referentnom smeru za ems E.

Prethodni postupak se simbolički označava sa:

$$U_{AB} = \sum_A^B (RI, -E)$$

2° Putanja pri sabiranju je od tačke koja odgovara drugom indeksu napona ka tački koja odgovara prvom indeksu napona:

Član RI ulazi u zbir sa predznakom "+" (plus) u slučaju kada je smer putanje suprotan referentnom smeru za struju u posmatranom otporniku.

Član RI ulazi u zbir sa predznakom "-" (minus) kada je smer putanje isti kao i referentni smer za struju u otporniku.

Elektromotorna sila E ulazi u zbir sa predznakom "+" u slučaju kada je smer putanje isti kao referentni smer za ems E .

Elektromotorna sila E ulazi u zbir sa predznakom "-" kada je smer putanje suprotan referentnom smeru za E .

Ovaj način sabiranja se simbolički označava sa:

$$U_{AB} = \sum_B^A (E, -RI).$$

U praktičnoj upotrebi se češće nalazi drugi način.

2.55 Baterija ems $E = 4,5 \text{ V}$ i unutrašnje otpornosti $R_i = 0,1 \Omega$ i otpornik otpornosti $R = 120 \Omega$ (Sl. 2.55. a) su spojeni dvema bakarnim žicama svaka

dužine $l = 30 \text{ cm}$. i površine poprečnog preseka $S = 0,3 \text{ mm}^2$. Specifična električna provodnost bakra na sobnoj temperaturi je $\sigma = 57 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$.

Odrediti jačinu i smer obrazovane struje i nacrtati ekvivalentnu električnu šemu.

Rešenje: U prostom kolu sa jednim generatorom struja je istog smera kao i ems generatora. Jačina ove struje je određena Omovim zakonom

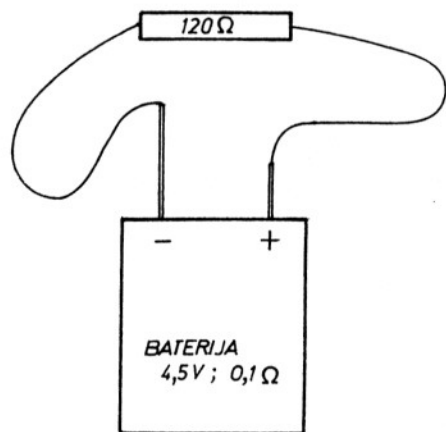
$$I = \frac{E}{\Sigma R},$$

Sl. 2.55. a.

pri čemu je ΣR zbir svih otpornosti kola. U posmatranom slučaju je

$$\Sigma R = R + R_i + R_z.$$

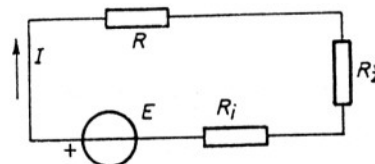
Otpornost bakarnih žica je: $R_z = \frac{2l}{\sigma S} = 0,035 \Omega$



Jačina struje u kolu je

$$I = \frac{E}{R + R_i + R_z} \approx 37,5 \text{ mA}.$$

Na osnovu prethodne jednačine se može nacrtati ekvivalentna električna šema električnog kola prikazanog na slici 2.55. a, koja je prikazana na slici 2.55. b.



Sl. 2.55. b.

Kod realnih električnih kola otpornost provodnika za vezu je najčešće zanemarljiva prema ostalim otpornostima u tom kolu, pa se tada i ne uzima u obzir u Omovom zakonu.

2.56. Generator stalne ems $E = 20 \text{ V}$ i unutrašnje otpornosti $R_i = 0,5 \Omega$ i prijemnik otpornosti $R = 50 \Omega$ vezani su kao na šemi (slika 2.56. a)

Odrediti:

1° Intenzitet struje u kolu.

2° Napon na krajevima prijem-

nika

3° Električnu snagu prijemnika.

Rešenje:

1° Smer struje u kolu

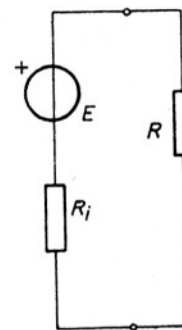
je označen na sl. 2.56. b., a jačina struje je

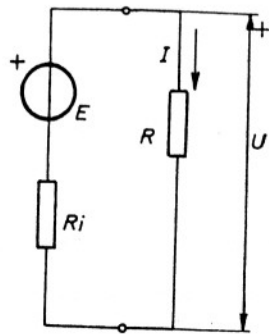
$$I = \frac{E}{R + R_i} = 0,396 \text{ A}.$$

Sl. 2.56. a.

2° Prema smerovima označenim na sl. 2.56. b. i zadatku 2.52. napon na krajevima prijemnika je

$$U = RI = 19,8 \text{ V}.$$





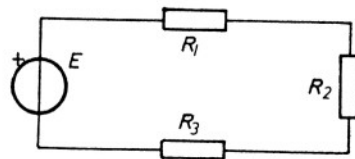
Sl. 2.56. b.

2 - 58

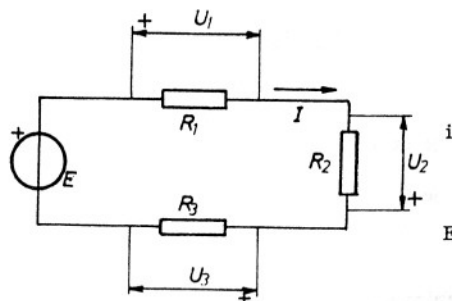
3^o Na prijemniku otpornosti R se električni rad pretvara u toplotu (Džulov efekat), pa je brzina ove energetske transformacije (električna snaga)

$$P = RI^2 = 7,84 \text{ W.}$$

2.57. Generator stalne ems $E = 20 \text{ V}$ i zanemarljive unutrašnje otpornosti i otpornici otpornosti $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$ i $R_3 = 500 \Omega$ obrazuju električno kolo kao na sl. 2.57. a.



Sl. 2.57. a.



Sl. 2.57. b.

Odrediti napone na krajevima otpornika i električne snage na njima usled Džulovog efekta.

Rezultat:

Prema smerovima označenim na slici 2.57. b, su

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = 20 \text{ mA.}$$

$$U_1 = R_1 I = 4 \text{ V,}$$

$$U_2 = -R_2 I = -6 \text{ V}$$

$$U_3 = R_3 I = 10 \text{ V.}$$

Električne snage otpornika su

$$P_1 = R_1 I^2 = 80 \text{ mW,}$$

$$P_2 = R_2 I^2 = 120 \text{ mW,}$$

$$P_3 = R_3 I^2 = 200 \text{ mW.}$$

2 - 59

2.58. Generator stalne ems $E = 10 \text{ V}$, zanemarljive unutrašnje otpornosti, otpornik otpornosti $R_1 = 200 \Omega$ otpornik otpornosti R vezani su

kao na sl. 2.58.

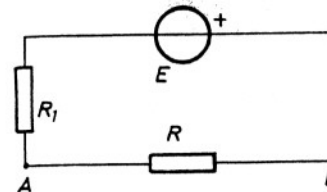
Kolika je otpornost R, ako je na-

pon $U_{BA} = 8 \text{ V}$?

Rezultat:

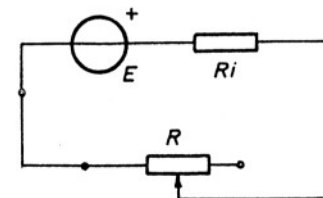
Otpornost otpornika je

$$R = \frac{R_1}{\frac{E}{U_{BA}} - 1} = 800 \Omega.$$



Sl. 2.58.

2.59. Generator nepoznatih karakteristika E i R_i i otpornik promenljive otpornosti R vezani su u prosto električno kolo kao na sl. 2.59.



Sl. 2.59.

Pri otpornosti promenljivog otpornika

$R_1 = 5 \Omega$ jačina električne struje u kolu

je $I_1 = 364 \text{ mA}$, a pri otpornosti promen-

ljivog otpornika $R_2 = 10 \Omega$ jačina električne

struje u kolu je $I_2 = 190 \text{ mA}$.

Odrediti ems E i unutrašnju ot-

pornost R_i generatora.

Rešenje:

Polazeći od Omovog zakona ima se

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_i}$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2 + R_i}$$

Iz prethodnih jednačina je

$$E = \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2} (R_2 - R_1) = 2 \text{ V}$$

i

$$R_i = \frac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2} = 0,5 \Omega .$$

2.60. Akumulatorska baterija i otpornik promenljive otpornosti obrazuju prosto električno kolo. Kada je otpornost promenljivog otpornika $R_1 = 3 \Omega$ jačina struje u kolu je $I_1 = 1,5 \text{ A}$, a kada je otpornost promenljivog otpornika $R_2 = 5 \Omega$ jačina struje u kolu je $I_2 = 1 \text{ A}$.

Odrediti jačinu struje kratkog spoja akumulatorske baterije.

Rezultat:

Primenjujući postupak kao u zadatku 2.59. za jačinu struje kratkog spoja akumulatorske baterije se ima

$$I_0 = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{R_2 I_2 - R_1 I_1} = 6 \text{ A}.$$

2.61. Generator stalne elektromotorne sile, zanemarljive unutrašnje otpornosti i otpornik otpornosti $R = 20 \Omega$ obrazuju prosto električno kolo. Kada se u kolo uključi ampermetar, čija je otpornost $R_A = 0,2 \Omega$ njegovo pokazivanje je $I = 128,7 \text{ mA}$.

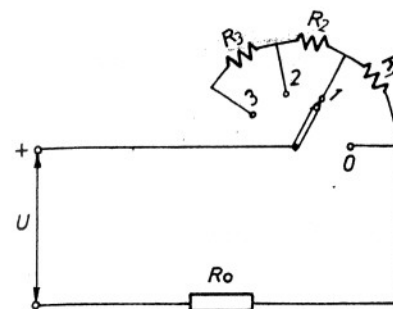
Kolika je jačina struje u kolu pre uključivanja ampermetra u kolo?

Rezultat:

Jačina struje u kolu pre uključivanja ampermetra je

$$I_0 = 130 \text{ mA}.$$

2.62. Prijemnik otpornosti $R_0 = 300 \Omega$ i reostat čije su otpornosti između pojedinih sekcija R_1 , R_2 i R_3 vezani su na red i priključeni na jednosmerni napon $U = 120 \text{ V}$, kao na sl. 2.62.



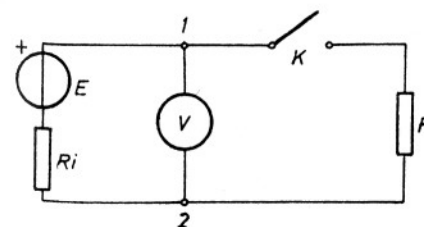
Sl. 2.62.

Kolike treba da budu otpornosti R_1 , R_2 i R_3 pojedinih sekcija reostata, tako da se pri pomeranju ručice reostata iz položaja O u položaje 1, 2, i 3. jačina struje smanjuje po 0,1 A.

Rezultat:

Otpornosti pojedinih sekcija reostata su $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ i $R_3 = 600 \Omega$

2.63. Između krajeva generatora ems $E = 30 \text{ V}$ i unutrašnje otpornosti $R_i = 1,5 \Omega$ priključen je voltmetar i otpornik otpornosti $R = 8,5 \Omega$ kao na sl. 2.63. Otpornost voltmetra je mnogo veća od ostalih otpornosti u kolu.



Sl. 2.63.

Koliki napon pokazuje voltmetar kada je prekidač K otvoren, a koliki kada je zatvoren?

Rešenje:

Pri otvorenom prekidaču K, zbog velike unutrašnje otpornosti voltmetra može se smatrati da praktično nema struje kroz generator i voltmetar.

Zbog ovoga voltmetar pokazuje praktično napon jednak elektromotor-

noj sili generatora, tj.

$$U_{12} = E.$$

Kada je prekidač K zatvoren, praktično se obrazuje prosto električno kolo sa strujom jačine

$$I = \frac{E}{R + R_i} = 3A$$

i smera od 1 ka 2 kroz otpornik otpornosti R. Napon koji sada pokazuje voltmetar je

$$U_{12} = E - R_i I = 25,5 V.$$

2.64. Pet identičnih električnih sijalica vezano je na red i priključeno na idealan generator ems $E = 120 V$. Baloni sijalica su od zamagljenog stakla tako da se vlakno u sijalicama ne vidi. Pri radu se vlakno jedne sijalice prekinulo i sijalice su prestale da svetle.

Kako se može odrediti u kojoj je sijalici vlakno prekinuto.

1° Koristeći se voltmetrom i

2° Bez upotrebe mernih instrumenata.

Rezultat:

1° Napon između krajeva sijalice čije je vlakno prekinuto po veličini je jednak ems generatora, što se može ustanoviti upotrebom voltmetra.

2° Vezujući provodnik uzastopno između krajeva svake sijalice, sijalice će zasvetleti kada je provodnik vezan između krajeva sijalice čije je vlakno prekinuto.

2.65. Otpornici otpornosti $R_1 = 280 \Omega$ i $R_2 = 160 \Omega$ su tako projektovani da najveći napon između krajeva svakog od njih iznosi $U_{\max} = 14 V$. Na koliki najveći napon U sme da se priključi redna veza ovih otpornika?

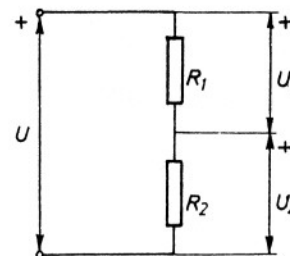
Rešenje:

Prema oznakama na sl. 2.65. odnos napona otpornika je

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{4}$$

Pri najvećem naponu između krajeva otpornika otpornosti R_1 , napon između krajeva otpornika otpornosti R_2 je

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1} U_{\max} = 8 V < U_{\max}$$



Sl. 2.65.

Prema ovome najveći dozvoljeni napon između krajeva redne veze otpornika je

$$U = U_{\max} + U_2 = 22 V.$$

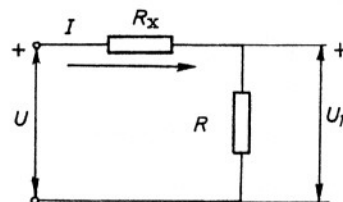
2.66. Električni grejač je tako projektovan da je pri naponu između njegovih krajeva od $U_1 = 120 V$ jačina struje u njemu $I_1 = 2 A$. Kolika treba da bude otpornost otpornika, vezanog na red sa grejačem, da bi posle priključenja ove redne veze na izvor napona $U = 220 V$, grejač radio pod uslovima prema kojima je projektovan?

Rezultat:

Prema oznakama na sl.

2.66. otpornost otpornika redno vezanog grejaču je

$$R_x = \frac{U - U_1}{I_1} = 50 \Omega.$$



Sl. 2.66.

2.67. Generator stalne elektromotorne sile E i unutrašnje otpornosti R_i i otpornik promenljive otpornosti R obrazuju prosto električno kolo.

Odrediti:

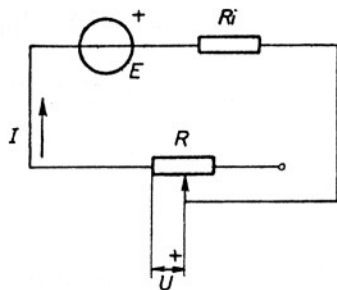
1° Otpornost promenljivog otpornika R pri kojoj se električni rad u otporniku najbrže pretvara u toplotu.

2° Najveću električnu snagu otpornika.

3° Snagu generatora pri prethodnim uslovima i koeficijent korisnog dejstva generatora.

Rešenje:

1° Snaga na otporniku je (sl. 2.67. a.)



Sl. 2. 67. a.

$$P = UI = EI - R_i I^2.$$

Grafik snage otpornika u funkciji jačine struje je prikazan na sl. 2.67. b. Prethodni izraz za snagu otpornika se može transformisati na ovaj način

$$P = EI - R_i I^2 + \frac{E^2}{4R_i} - \frac{E^2}{4R_i},$$

odnosno

$$P = \frac{E^2}{4R_i} - \left(\frac{E}{2\sqrt{R_i}} - I\sqrt{R_i} \right)^2.$$

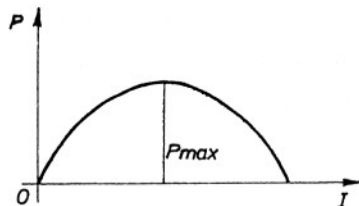
Iz prethodnog izraza se zaključuje da je snaga otpornika najveća

kada je

$$\frac{E}{2\sqrt{R_i}} - I\sqrt{R_i} = 0.$$

Na osnovu poslednje relacije za struju u kolu pri maksimalnoj snazi otpornika se može pisati

$$I_{Pmax} = \frac{E}{2R_i}$$



Sl. 2. 67. b.

Najveća snaga na otporniku otpornosti R je kada je ukupna otpornost kola $2R_i$, odnosno kada je

$$R = R_i.$$

Kada je u kolu ostvaren ovaj slučaj za prijemnik se kaže da je prilagodjen po snazi na generator.

Do uslova prilagodjenja prijemnika po snazi ($R = R_i$) može se doći posmatranjem izraza

$$P = RI^2 = \frac{E^2 R}{(R+R_i)^2} \quad \text{i traženjem uslova za}$$

njegovu najveću vrednost ($\frac{dP}{dR} = 0$ i $\frac{d^2P}{dR^2} < 0$).

2° Najveća električna snaga otpornika je

$$P_{max} = RI_{Pmax}^2 = \frac{E^2}{4R_i}.$$

3° Snaga koju generator razvija je

$$P_g = EI,$$

gde su E i I računati prema istom referentnom smeru u kolu. U slučaju prilagodjenja ova snaga iznosi

$$P_g = E \cdot \frac{E}{2R_i} = \frac{E^2}{2R_i}.$$

Koeficijent korisnog dejstva generatora je

$$\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{EI - R_i I^2}{EI} = \frac{R}{R+R_i}$$

U slučaju prilagodjenja koeficijent korisnog dejstva generatora je

$$\eta = \frac{1}{2}, \quad \text{odnosno } \eta = 50\%.$$

2.67. Generator stalne elektromotorne sile E i unutrašnje otpornosti

R_i i otpornik promenljive otpornosti R obrazuju prosto električno kolo.

Odrediti:

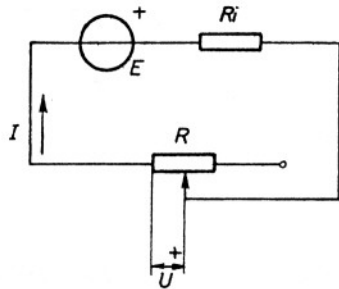
1° Otpornost promenljivog otpornika R pri kojoj se električni rad u otporniku najbrže pretvara u toplotu.

2° Najveću električnu snagu otpornika.

3° Snagu generatora pri prethodnim uslovima i koeficijent korisnog dejstva generatora.

Rešenje:

1° Snaga na otporniku je (sl. 2.67. a.)



Sl. 2.67. a.

$$P = UI = EI - R_i I^2.$$

Grafik snage otpornika u funkciji jačine struje je prikazan na sl. 2.67. b. Prethodni izraz za snagu otpornika se može transformisati na ovaj način

$$P = EI - R_i I^2 + \frac{E^2}{4R_i} - \frac{E^2}{4R_i},$$

odnosno

$$P = \frac{E^2}{4R_i} - \left(\frac{E}{2\sqrt{R_i}} - I\sqrt{R_i} \right)^2.$$

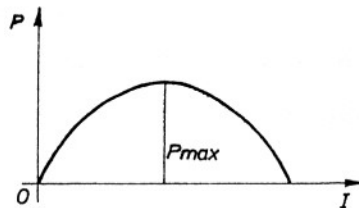
Iz prethodnog izraza se zaključuje da je snaga otpornika najveća

kada je

$$\frac{E}{2\sqrt{R_i}} - I\sqrt{R_i} = 0.$$

Na osnovu poslednje relacije za struju u kolu pri maksimalnoj snazi otpornika se može pisati

$$I_{Pmax} = \frac{E}{2R_i}$$



Sl. 2.67. b.

Najveća snaga na otporniku otpornosti R je kada je ukupna otpornost kola $2R_i$, odnosno kada je

$$R = R_i.$$

Kada je u kolu ostvaren ovaj slučaj za prijemnik se kaže da je prilagodjen po snazi na generator.

Do uslova prilagodjenja prijemnika po snazi ($R = R_i$) može se doći posmatranjem izraza

$$P = RI^2 = \frac{E^2 R}{(R+R_i)^2} \quad \text{i traženjem uslova za}$$

njegovu najveću vrednost ($\frac{dP}{dR} = 0$ i $\frac{d^2P}{dR^2} < 0$).

2° Najveća električna snaga otpornika je

$$P_{max} = RI_{Pmax}^2 = \frac{E^2}{4R_i}.$$

3° Snaga koju generator razvija je

$$P_g = EI,$$

gde su E i I računati prema istom referentnom smeru u kolu. U slučaju prilagodjenja ova snaga iznosi

$$P_g = E \cdot \frac{E}{2R_i} = \frac{E^2}{2R_i}.$$

Koeficijent korisnog dejstva generatora je

$$\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{EI - R_i I^2}{EI} = \frac{R}{R+R_i}$$

U slučaju prilagodjenja koeficijent korisnog dejstva generatora je

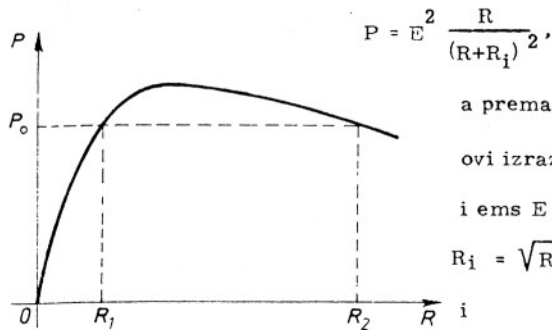
$$\eta = \frac{1}{2}, \quad \text{odnosno } \eta = 50\%.$$

U ovom slučaju se rad generatora deli na dva jednaka dela. Jedan deo ovog rada se pretvara u toplotu na otporniku otpornosti R , a drugi isto toliki u samom generatoru.

2. 68. Jednosmerni električni generator i prijemnik promenljive otpornosti obrazuju prosto električno kolo. Kolike su unutrašnja otpornost generatora R_1 i elektromotorna sila generatora E kada je pri otpornostima prijemnika R_1 i R_2 ($R_1 < R_2$) snaga prijemnika usled Džulovog efekta ista iznosi P_0 ?

Rešenje:

Iz izraza za snagu prijemnika otpornosti R



Sl. 2. 68.

Na sl. 2. 68. je prikazana zavisnost snage prijemnika usled Džulovog efekta, pri stalnoj ems i stalnoj unutrašnjoj otpornosti generatora, u funkciji promenljive otpornosti prijemnika.

2. 69. Električna peć je priključena na generator stalne ems. Otpornost priključnih žica iznosi $R_z = 2 \Omega$. Pri naponu $U = 120 \text{ V}$ izmedju krajeva generatora, električna snaga peći je $P = 600 \text{ W}$.

$$P = E^2 \frac{R}{(R+R_1)^2},$$

a prema zadatim uslovima, dobijaju se ovi izrazi za unutrašnju otpornost R_1 i ems E generatora.

$$R_1 = \sqrt{R_1 R_2}$$

i

$$E = \sqrt{P_0} (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}).$$

Odrediti električnu otpornost R zagrevnog tela električne peći.

Rezultat:

Iz izraza za električnu snagu peći

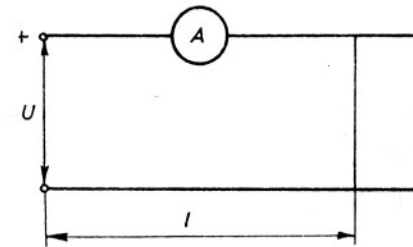
$$P = RI^2 = \frac{R U^2}{(R_z + R)^2}$$

se dobijaju sledeća rešenja za otpornosti zagrevnog tela peći

$$R_1 = 19,8 \Omega \text{ i } R_2 = 0,2 \Omega$$

2. 70. Napon izmedju krajeva dvožičnog voda na njegovom početku

je $U = 48 \text{ V}$ (sl. 2. 70) Provodnici voda su homogeni podužne otpornosti $R' = 12 \frac{\Omega}{\text{km}}$.



Sl. 2. 70.

Odrediti na kom udaljenju od početka voda je napravljen kratak spoj izmedju provodnika voda, ako ampermetar pokazuje $I = 1 \text{ A}$.

Rezultat:

Udaljenost mesta kratkog spoja provodnika voda od njegovog početka je $l = 2 \text{ km}$.

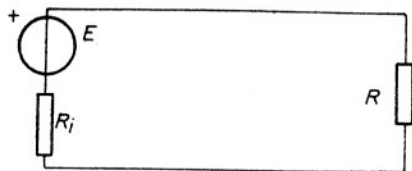
2. 71. Napon izmedjedju krajeva bakarnog dvožičnog voda na njegovom početku je stalan i iznosi $U_1 = 125 \text{ V}$. Na kraju voda, a na rastojanju $l = 200 \text{ m}$ od početka voda priključen je na vod prijemnik električne otpornosti $R = 12,1 \Omega$.

Odrediti površinu poprečnog preseka provodnika voda tako da pad napona izmedju provodnika voda ne bude veći od 4 V .

Rezultat:

Površina poprečnog preseka provodnika voda je $S = 17,54 \text{ mm}^2$.

2.72. Generator stalne ems $E = 70\text{V}$ i unutrašnje otpornosti $R_i = 1\Omega$, dvo žični vod ukupne otpornosti provodnika $R_z = 11\Omega$ i prijemnik promenljive otpornosti R obrazuju kolo kao na sl. 2. 72.



Sl. 2. 72.

Rešenje:

Iz izraza za električnu snagu prijemnika:

$$P_o = \frac{R E^2}{(R + R_i + R_z)^2}$$

se dobijaju ove električne otpornosti prijemnika:

$$R_1 = 9\Omega \quad \text{i} \quad R_2 = 16\Omega$$

Izrazi za snage gubitaka uvodu i generatoru, pri ovim otpornostima prijemnika, su:

$$P'_{\text{gubitaka}} = \frac{(R_i + R_z)E^2}{(R_1 + R_i + R_z)^2}$$

$$\text{i}$$

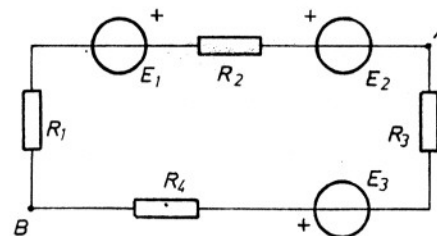
$$P''_{\text{gubitaka}} = \frac{(R_i + R_z)E^2}{(R_2 + R_i + R_z)^2}$$

Iz prethodnih izraza se zaključuje da su gubici manji kada je otpornost prijemnika veća. Stoga je povoljnije izabrati:

$$R = 16\Omega$$

2.73. Tri generatora elektromotornih sila $E_1 = 25\text{V}$, $E_2 = 5\text{V}$ i

$E_3 = 30\text{V}$, zanemarljivih unutrašnjih otpornosti i četiri prijemnika otporno-



Sl. 2. 73. a.

Rešenje:

1° Intenzitet električne struje je određen uopštenim Ohmovim

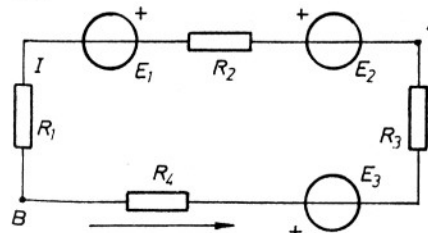
zakonom:

$$I = \frac{\sum E}{\sum R}$$

U prethodnom izrazu je:

$\sum R$ zbir svih otpornosti kola (otpornosti prijemnika, unutrašnjih otpornosti generatora i otpornosti veza),

$\sum E$ algebarski zbir elektromotornih sila svih generatora u kolu, sračunat prema proizvoljno izabranom referentnom smeru u kolu, I je intenzitet struje u kolu prema usvojenom referentnom smeru.



referentni smer u kolu

Sl. 2. 73. b.

Za usvojeni referentni smer u kolu kao na slici 2. 73. b. je:

$$I = \frac{-E_3 + E_2 - E_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = -0,1\text{A}$$

Jačina struje u kolu je 0,1A, a smer suprotan referentnom smeru.

2° Napon između tačaka A i B u kolu je:

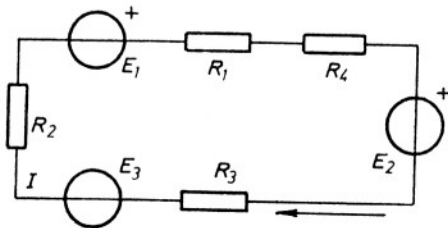
$$U_{AB} = V_A - V_B = \sum_B^A (E, -RI) = -R_4 I - E_3 - R_3 I = 5V.$$

Tačka A je za 5 V na višem potencijalu od tačke B.

Do istog rezultata za napon U_{AB} može se doći formiranjem sume i drugim putem između tačaka B i A:

$$U_{AB} = R_1 I + E_1 + R_2 I - E_2 = 5V.$$

2.74. Generatori elektromotornih sila $E_1 = 25V$, $E_2 = 5V$ i nepoznate E_3 kao i prijemnici otpornosti $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 150\Omega$, $R_3 = 450\Omega$ i $R_4 = 300\Omega$,



Sl. 2.74. a.

povezani su kao na slici 2.74. a. Intenzitet električne struje u kolu je $I = 10\text{mA}$ prema označenom referentnom smeru.

Odrediti ems E_3 .

Rešenje:

Prema usvojenom referentnom smeru za ems E_3 , kaona slici

2.74. b., ima se:

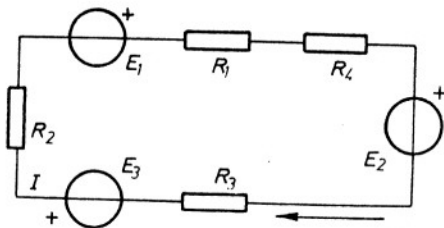
$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Iz prethodnog izraza je:

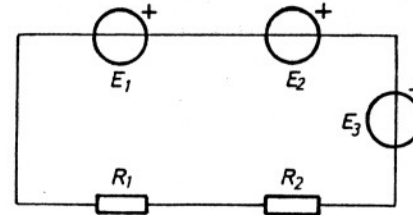
$$E_3 = -10V.$$

Iz rezultata se zaključuje da je smer ems E_3 suprotan referentnom smeru prema kome je sračunata

Sl. 2.74. b.



2.75. Generatori stalnih ems $E_1 = 10V$, $E_2 = 20V$, $E_3 = 40V$ i prijemnici otpornosti $R_1 = 600\Omega$ i $R_2 = 400\Omega$ obrazuju prosto kolo kao na sl. 2.75. a.



Sl. 2.75. a.

Odrediti električne snage koje razvijaju generatori i snage usled Džulovog efekta u otpornicima.

Rešenje:

Prema usvojenom referentnom smeru (sl. 2.75. b.) intenzitet struje u kolu je

$$I = \frac{E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2} = -10\text{mA}$$

Električna snaga koju razvija generator se definiše proizvodom njegove ems i intenziteta struje kroz generator

$$P_E = EI,$$

pri čemu su ems i intenzitet struje računati prema istom referentnom smeru.

Za referentne smerove sa sl. 2.75. b.

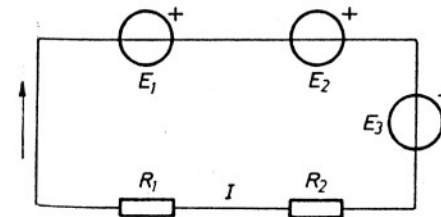
snage koje razvijaju pojedini generatori su:

$$P_{E_1} = E_1 I = -100\text{mW},$$

$$P_{E_2} = E_2 I = -200\text{mW}$$

i

$$P_{E_3} = -E_3 I = 400\text{mW}.$$



Sl. 2.75. b.

Iz prethodnog se zaključuje da aparati elektromotornih sila E_1 i E_2 rade kao prijemnici (za svaki od njih su elektromotorné sile i struja suprotnog smera). Aparat elektromotorne sile E_3 radi kao generator (njegova elektromotorna sila i struja kroz njega su istog smera).

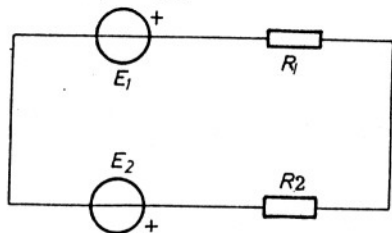
Snage usled Džulovog efekta u prijemnicima su:

$$P_{R_1} = R_1 I^2 = 60 \text{ mW},$$

i

$$P_{R_2} = R_2 I^2 = 40 \text{ mW}.$$

2.76. Aparati elektromotornih sila E_1 i E_2 , zanemarljivih unutrašnjih otpornosti, i prijemnici otpornosti R_1 i R_2 obrazuju prostó električno kolo kao na sl. 2.76. a.



Sl. 2.76. a.

Snage prijemnika otpornosti R_1 i R_2 usled Džulovog efekta su $P_{R_1} = 1 \text{ W}$ i

$$P_{R_2} = 0,25 \text{ W}.$$

Generator ems E_1 razvija snagu

$$P_{E_1} = 5 \text{ W}.$$

Kolika je snaga koju razvija aparat čija je ems E_2 ? Da li ovaj aparat radi kao generator ili kao prijemnik?

Rešenje:

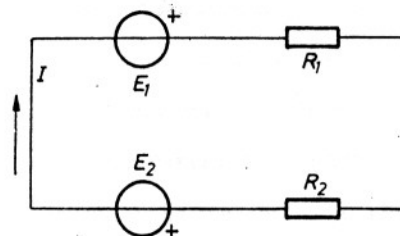
Za proizvoljno izabran referentni smer u kolu (sl. 2.76. b.)

izraz za intenzitet struje je

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}.$$

Iz ovog izraza se dobija

$$R_1 I + R_2 I = E_1 - E_2.$$



Sl. 2.76. b.

Množenjem leve i desne strane prethodnog izraza sa I dobija se

$$R_1 I^2 + R_2 I^2 = E_1 I - E_2 I.$$

Imajući u vidu definiciju snage koju razvija generator (zadatak 2.75) može

se pisati:

$$P_{R_1} + P_{R_2} = P_{E_1} + P_{E_2}.$$

Snaga koju razvija aparat ems E_2 je

$$P_{E_2} = P_{R_1} + P_{R_2} - P_{E_1} = -3,75 \text{ W}.$$

Na osnovu dobijenog rezultata ($P_{E_2} < 0$) se zaključuje da ovaj aparat radi kao prijemnik.

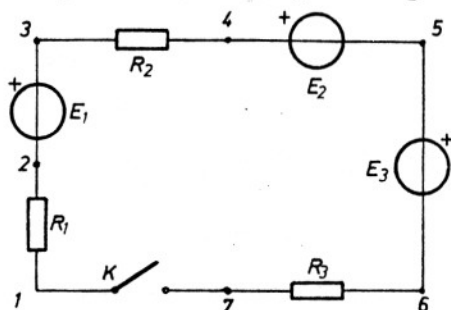
2.77. Pet jednakih akumulatorskih baterija je, radi punjenja, redno vezano sa otpornikom promenljive otpornosti R i priključeno na stalan jednosmerni napon $U = 40 \text{ V}$. Ems svake akumulatorske baterije na početku punjenja je $E = 5,6 \text{ V}$, a unutrašnja otpornost $R_1 = 0,02 \Omega$. Kolika treba da bude otpornost R promenljivog otpornika tako da jačina struje na početku punjenja bude $I = 1 \text{ A}$?

Rezultat:

Otpornost promenljivog otpornika treba da bude $R = 11,9 \Omega$.

2, 78. Elektromotorne sile i otpornosti u kolu prikazanom na sl. 2. 78a.

su: $E_1 = 40\text{V}$, $E_2 = 75\text{V}$, $E_3 = 25\text{V}$, $R_1 = 150\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$ i $R_3 = 450\ \Omega$.



Sl. 2. 78. a.

Nacrtati dijagram potencijala za prikazano kolo kada je:

- 1° Prekidač K otvoren
- 2° Prekidač K zatvoren.

Za tačku referentnog potencijala uzeti tačku 1 (sl. 2. 78 a) i smatrati da je njen potencijal jednak nuli.

Rešenje:

1° Kako je prekidač K otvoren, to u kolu nema električne struje. Prema oznakama na sl. 2. 78. a. potencijali pojedinih tačaka su:

$$V_2 = U_{21} = \sum_1^2 (E, -RI) = 0,$$

$$V_3 = U_{31} = \sum_1^3 (E, -RI) = V_2 + E_1 = 40\text{V},$$

$$V_4 = U_{41} = \sum_1^4 (E, -RI) = V_3 = 40\text{V},$$

$$V_5 = U_{51} = \sum_1^5 (E, -RI) = V_4 - E_2 = -35\text{V}$$

$$V_6 = U_{61} = \sum_1^6 (E, -RI) = V_5 - E_3 = -60\text{V}$$

i

$$V_7 = U_{71} = \sum_1^7 (E, -RI) = V_6 = -60\text{V}.$$

2° Prema usvojenom referentnom smeru u kolu (sl. 2. 78. b.) intenzitet struje je

$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3} = -60\text{mA}.$$

U ovom slučaju su potencijali tačaka:

$$V_1' = 0$$

$$V_2' = -R_1 I = 9\text{V},$$

$$V_3' = V_2' + E_1 = 49\text{V},$$

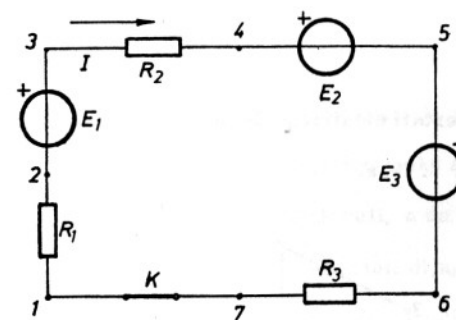
$$V_4' = V_3' - R_2 I = 73\text{V},$$

$$V_5' = V_4' - E_2 = -2\text{V},$$

$$V_6' = V_5' - E_3 = -27\text{V}$$

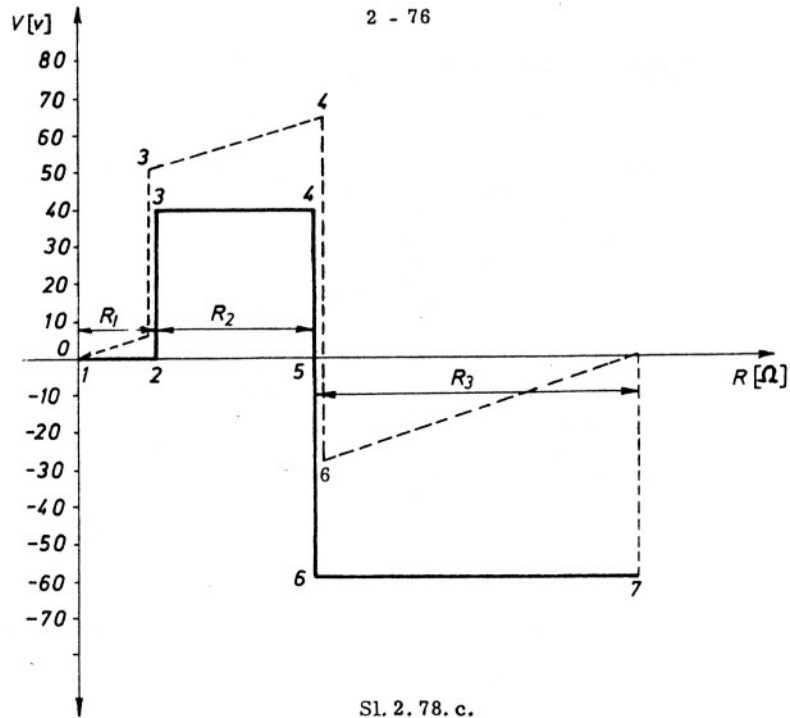
i

$$V_7' = V_6' - R_3 I = 0.$$

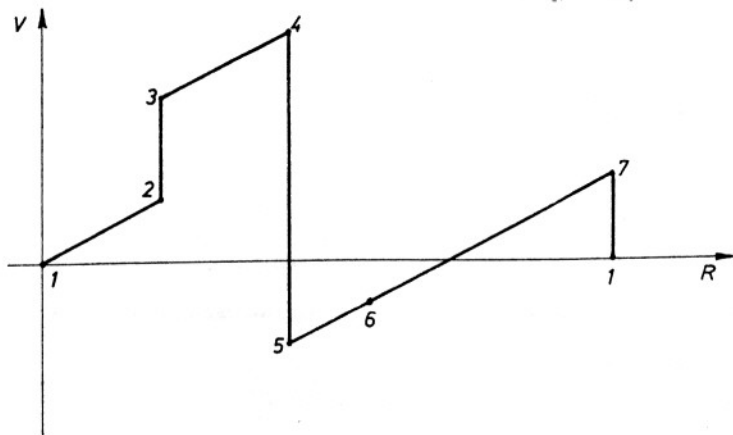


Sl. 2. 78. b.

Na slici 2. 78. c. je punom linijom prikazan dijagram potencijala za slučaj otvorenog prekidača, a isprekidanom linijom za slučaj kada je prekidač zatvoren.

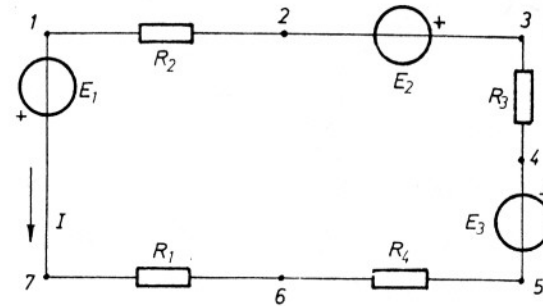


2. 79. Nacrtati električnu šemu prostog kola čiji je dijagram potencijala prikazan na sl. 2. 79. a.

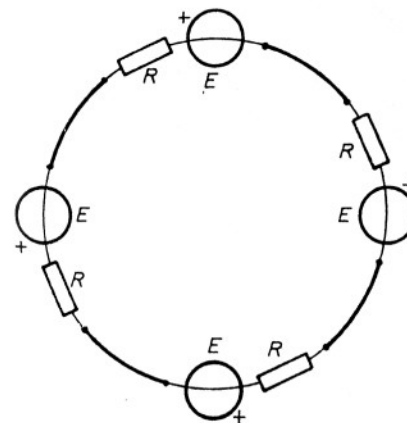


Rezultat:

Šema električnog kola i smer struje u kolu su prikazani na sl. 2. 79. b.



2. 80. Četiri generatora jednakih elektromotornih sila E i jednakih unutrašnjih otpornosti R povezani su provodnicima zanemarljivih električnih otpornosti u prosto kolo kao na sl. 2. 80. a.



- 1^o Pokazati da je napon između bilo koje dve tačke spojnih provodnika jednak nuli, a da struja u kolu postoji.
- 2^o Nacrtati dijagram potencijala za kolo, uzimajući neku tačku na spojnom provodniku za referentnu.

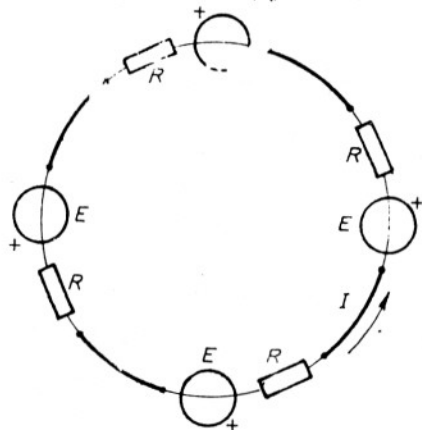
Rešenje:

1^o Jačina struje u kolu, prema označenom smeru na

sl. 2. 80. b. je:

$$I = \frac{4E}{4R} = \frac{E}{R}$$

Napon između proizvoljno izabranih tačaka A i B na spojnim pro-
tencijama (sl. 2. 80. b.) je



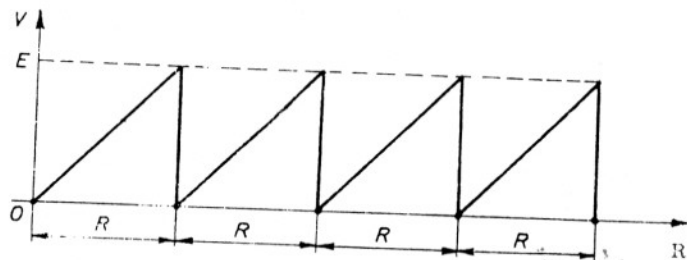
Sl. 2. 80. b.

$$U_{AB} = kE - kRI, \quad k=1; 2; 3; 4.$$

odnosno

$$U_{AB} = k(E - E) = 0.$$

2^o Dijagram potencijala je prika-
zan na sl. 2. 80. c.



Sl. 2. 80. c.

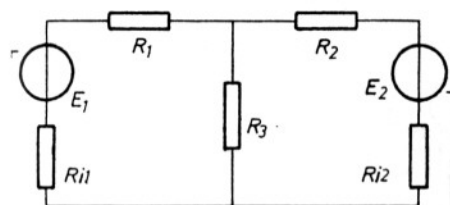
2. 4. KIRHOFOVI ZAKONI

2. 81. Generatori stalnih elektromotornih sila $E_1 = 20V$ i

$E_2 = 6V$, unutrašnjih otpornosti $R_{i1} = 0,2 \Omega$ i $R_{i2} = 0,05 \Omega$ i prijemnici ot-
pornosti $R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 700 \Omega$ i $R_3 = 400 \Omega$, vezani su kao na slici

2. 81. a. Odrediti intenzitete struja

u svim granama ovog kola.



*Sl. 2. 81. a.

Rešenje:

Zadato kolo je razgrana-
to i ima tri grane. Stoga je potrebno
postaviti tri jednačine radi odredjiva-
nja intenziteta struja ovih grana. Ove

jednačine se mogu napisati primenom prvog i drugog Kirhofovog zakona na zadato
kolo.

Prvi Kirhofov zakon glasi:

Algebarski zbir intenziteta struja svih grana koje se stiču u
jednom čvoru je jednak nuli.

Pri ovome intenziteti struja grana imaju algebarsko značenje
prema referentnim smerovima u granama, a njihov algebarski zbir se formira
prema referentnom smeru koji je, po dogovoru, od čvora. Prvi Kirhofov zakon
se simbolički označava na sledeći način:

$$\sum_k I_k = 0.$$

k, za čvor M

Drugi Kirhofov zakon glasi:

Algebarski zbir napona svih elemenata za bilo koji zatvoreni put u kolu je jednak nuli.

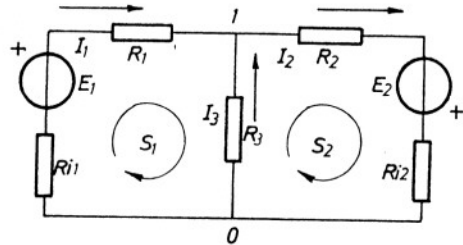
Ovaj algebarski zbir se formira prema proizvoljno izabranom referentnom smeru duž zatvorenog puta i simbolički označava kao:

$$\sum (E_i - RI) = 0$$

po zatvorenom putu S

Kolo se rešava na sledeći način:

1^o Usvoje se referentni smerovi za struje u svakoj grani kola.



Sl. 2. 81. b.

2^o Za zadato kolo je $n_g - (n_\chi - 1) = 2$, pa treba izabrati dva nezavisna zatvorena puta u kolu i pridodati im referentne smerove. Na slici 2. 81. b. su zatvoreni putevi označeni sa S_1 i S_2 .

Jednačine po drugom Kirhofovom zakonu za ove puteve su:

$$S_1: R_3 I_3 - R_{11} I_1 + E_1 - R_1 I_1 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$S_2: -R_3 I_3 - R_2 I_2 + E_2 - R_{12} I_2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

3^o Zamenjujući u jednačinama (1), (2) i (3) brojne vrednosti poznatih veličina izraženih jedinicama MKSA sistema, dobija se ovaj sistem jednačina

(sl. 2. 81. b.)

Kako je za zadato kolo $n_\chi - 1 = 1$, to se po prvom Kirhofovom zakonu piše jedna jednačina. Za grane koje se stižu u čvoru označenom sa 1 na sl. 2. 81. b. je

$$-I_1 - I_3 + I_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$-300,2 I_1 + 400 I_3 = -20 \dots \dots \dots (2)$$

$$-700,05 I_2 - 400 I_3 = -6 \dots \dots \dots (3)$$

Rešavajući prethodni sistem jednačina i zanemarujući unutrašnje otpornosti generatora prema ostalim otpornostima kola, dobija se:

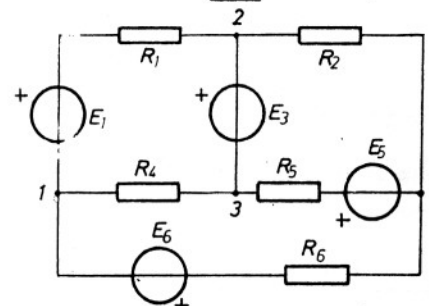
$$I_1 = 40 \text{ mA},$$

$$I_2 = 20 \text{ mA}$$

i

$$I_3 = -20 \text{ mA}.$$

2. 82. Za kolo prikazano na slici 2. 82. a. je poznato:



Sl. 2. 82. a.

$E_1 = 50 \text{ V}, E_3 = 60 \text{ V}, E_5 = 120 \text{ V},$
 $E_6 = 90 \text{ V}, R_1 = 100 \Omega, R_2 = 200 \Omega$
 $R_4 = 150 \Omega, R_5 = 300 \Omega$ i
 $R_6 = 180 \Omega$.

Odrediti intenzitete struja grana zadatog kola.

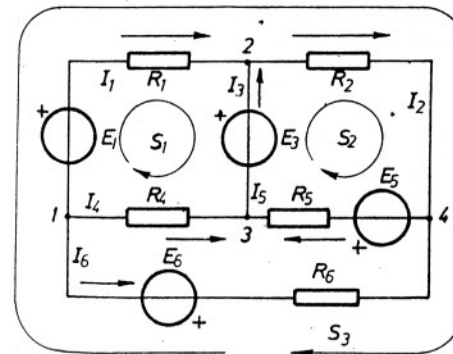
Rešenje: Za referentne smerove

u granama i zatvorenim putevima kao na slici 2. 82. b, prema prvom i drugom Kirhofovom zakonu dobijaju se ove jednačine:

$$\text{Čvor 1: } I_1 + I_4 + I_6 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Čvor 2: } -I_1 - I_3 + I_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{Čvor 3: } -I_4 + I_3 - I_5 = 0 \dots \dots \dots (3)$$



Sl. 2. 82. b.

Zatvoren put S_1 : $E_1 - R_1 I_1 - E_3 + R_4 I_4 = 0 \dots\dots\dots (4)$

Zatvoren put S_2 : $-R_2 I_2 + E_5 - R_5 I_5 + E_3 = 0 \dots\dots\dots (5)$

Zatvoren put S_3 : $E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_6 I_6 - E_6 = 0 \dots\dots\dots (6)$

Zamenjujući brojne vrednosti poznatih veličina izraženih jedinicama MKSA sistema dobija se:

$I_1 + I_4 + I_6 = 0 \dots\dots\dots (1)$

$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 \dots\dots\dots (2)$

$I_3 - I_4 - I_5 = 0 \dots\dots\dots (3)$

$-100 I_1 + 150 I_4 = 10 \dots\dots\dots (4)$

$-200 I_2 - 300 I_5 = -180 \dots\dots\dots (5)$

$-100 I_1 - 200 I_2 + 180 I_6 = 40 \dots\dots\dots (6)$

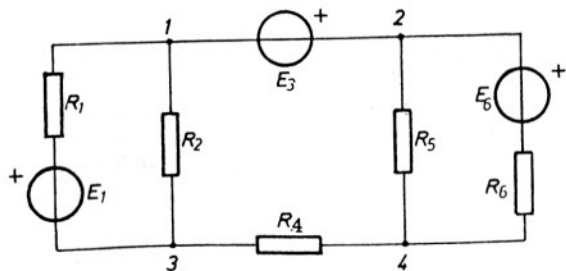
Rešavanjem ovih jednačina za intenzitete struja grana zadatog

kola se dobija:

$I_1 = -220 \text{ mA}, \quad I_3 = 400 \text{ mA}, \quad I_5 = 480 \text{ mA},$
 $I_2 = 180 \text{ mA}, \quad I_4 = -80 \text{ mA} \quad i \quad I_6 = 300 \text{ mA}.$

2. 83. Elektromotorne sile i otpornosti kola prikazanog na sl.

2. 83. a su $E_1 = 50 \text{ V}, E_3 = 60 \text{ V}, E_6 = 30 \text{ V}, R_1 = 200 \Omega, R_2 = 300 \Omega, R_4 = 80 \Omega$
 $R_5 = 300 \Omega, i R_6 = 600 \Omega$. Odrediti intenzitete struja grana.

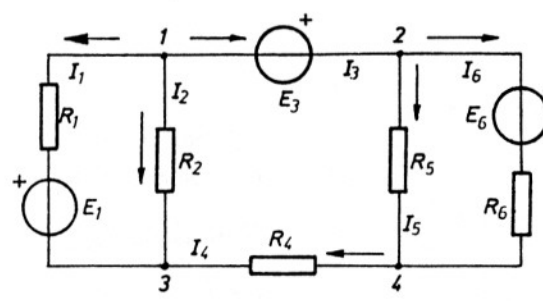


Sl. 2. 83. a.

Rezultat:

Prema referentnim smerovima označenim na sl. 2. 83. b

intenziteti struja grana su:



$I_1 = -220 \text{ mA},$
 $I_2 = 20 \text{ mA},$
 $I_3 = 200 \text{ mA},$
 $I_4 = 200 \text{ mA},$
 $I_5 = 166,7 \text{ mA},$
 i
 $I_6 = 33,3 \text{ mA}.$

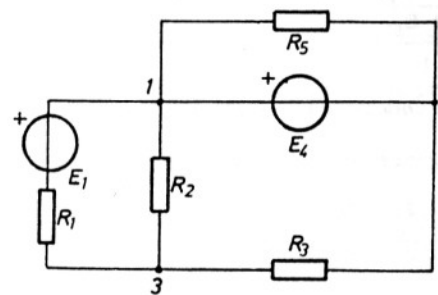
Sl. 2. 83. b.

2. 84. Odrediti struje u granama kola prikazanog na sl. 2. 84. a.

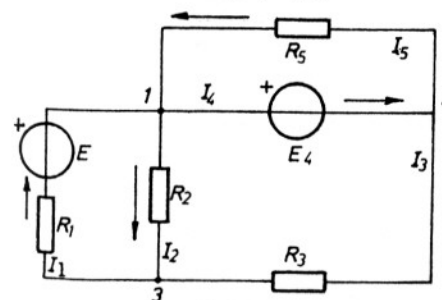
za koje su: $E_1 = 50 \text{ V}, E_4 = 10 \text{ V}, R_1 = 2 \text{ k}\Omega, R_2 = 3 \text{ k}\Omega, R_3 = 800 \Omega$ i $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$.

Rezultat:

Intenziteti struja grana prema referentnim smerovima označenim na sl. 2. 84. b su:



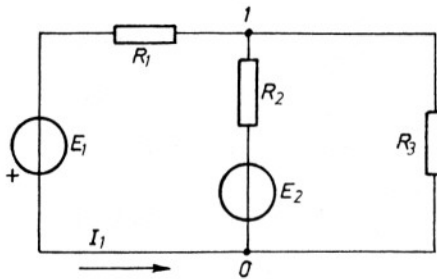
Sl. 2. 84. a.



Sl. 2. 84. b.

$I_1 = 16 \text{ mA},$
 $I_2 = 6 \text{ mA},$
 $I_3 = -10 \text{ mA},$
 $I_4 = 0$
 i
 $I_5 = -10 \text{ mA}.$

2. 85. Otpornosti otpornika u kolu prikazanom slikom 2. 85. a su $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 500\Omega$ i $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$. Intenzitet struje u grani sa prijemnikom otpornosti R_1 je $I_1 = 50 \text{ mA}$ prema označenom referentom smeru na slici 2. 85. a., a elektromotorna sila generatora u ovoj grani je $E_1 = 30 \text{ V}$.



Sl. 2. 85. a.

Odrediti:

1° Intenzitet struje i snagu prijemnika otpornosti R_3 .

2° Elektromotornu silu E_2 .

Rešenje:

Prema sl. 2. 85. a.

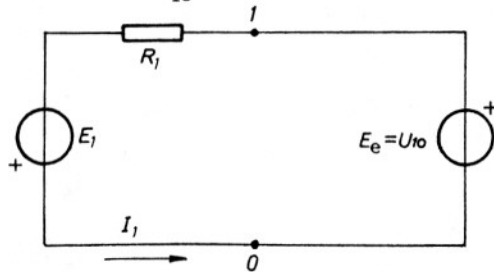
napon između tačaka 1 i 0 je

$$U_{10} = -E_1 + R_1 I_1 = 20 \text{ V.}$$

Posmatrajući prethodni izraz za napon može se pisati:

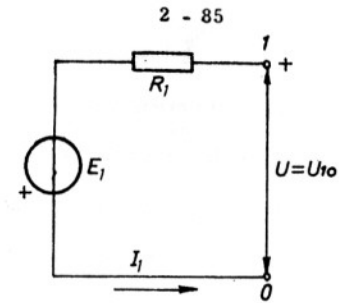
$$I_1 = \frac{U_{10} + E_1}{R_1}.$$

Iz ovog izraza se zaključuje da se ostatak kola između tačaka 1 i 0 prema posmatranoj grani može zameniti idealnim generatorom ems $E_e = U_{10}$ i vezane za isti referentni smer kao i napon U_{10} (sl. 2. 85. b.)



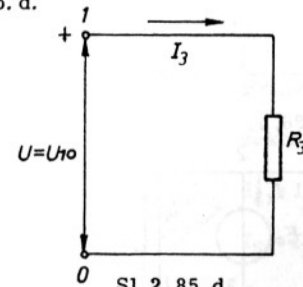
Sl. 2. 85. b.

Da se ne bi uvodio novi ekvivalentni idealni generator ekvivalentno kolo se prikazuje kao na sl. 2. 85. c.



Sl. 2. 85. c.

1° Prijemnik otpornosti R_3 je također vezan između tačaka 1 i 0. Na osnovu prethodnog može se ostatak kola prema njemu zameniti naponom U_{10} kao na sl. 2. 85. d.



Sl. 2. 85. d.

Intenzitet struje prijemnika otpornosti R_3 (sl. 2. 85. d.) je

$$I_3 = \frac{U_{10}}{R_3} = 10 \text{ mA.}$$

Snaga ovog prijemnika je $P_3 = R_3 I_3^2 = 0,2 \text{ W}$.

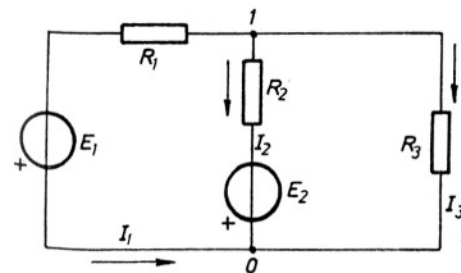
2° Usvajajući referentni smer za struju I_2 kao na sl. 2. 85. e

i primenjujući prvi Kirhofov zakon dobija se

$$I_2 = -I_1 - I_3 = -60 \text{ mA.}$$

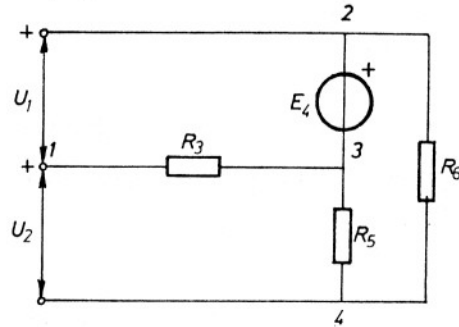
Prema usvojenom referentnom smeru za E_2 , prikazanom na sl. 2. 85. e, je

$$E_2 = -U_{10} + R_2 I_2 = -50 \text{ V.}$$

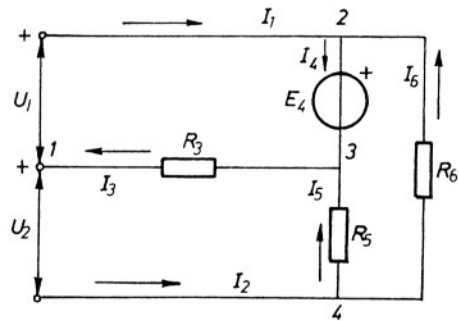


Sl. 2. 85. e

2.86. Otpornosti prijemnika u kolu prikazanom na sl. 2. 85. a. su $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 10 \text{ k}\Omega$ i $R_6 = 5 \text{ k}\Omega$. Elektromotorna sila generatora je $E_4 = 40 \text{ V}$, a poznati su i naponi $U_1 = 50 \text{ V}$ i $U_2 = 30 \text{ V}$. Odrediti intenzitete struja grana.



Sl. 2. 86. a.



Sl. 2. 86. b.

Rezultat:

Prema referentnim smerovima za struje prikazanim na sl. 2. 85. b, intenziteti struja grana su:

$$I_1 = 25 \text{ mA},$$

$$I_2 = -20 \text{ mA},$$

$$I_3 = 5 \text{ mA},$$

$$I_4 = 9 \text{ mA},$$

$$I_5 = -4 \text{ mA},$$

$$I_6 = -16 \text{ mA}.$$

i

2.87. Za deo kola prikazan na sl. 2. 87. a je poznato:

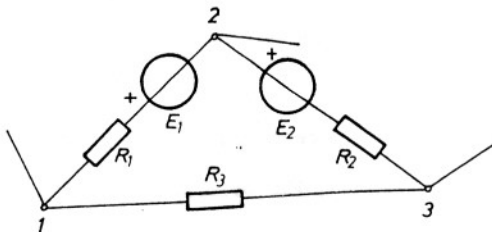
$$E_1 = 12 \text{ V}, \quad E_2 = 7 \text{ V},$$

$$R_1 = 100 \Omega, \quad R_2 = 200 \Omega,$$

$$\text{i } R_3 = 180 \Omega. \quad \text{Izmereni su}$$

$$\text{naponi } U_{12} = 14 \text{ V} \text{ i } U_{23} = 4 \text{ V}.$$

Odrediti struje u svim provodnicima prikazanog dela kola.



Sl. 2. 87. a.

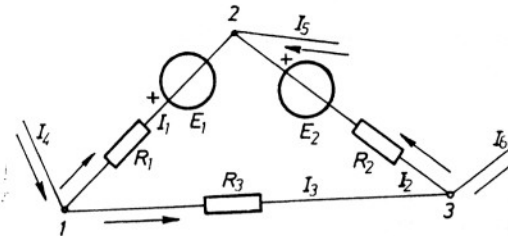
Rešenje:

Prema referentnim smerovima za struje označeni na sl. 2. 87. b. ima se:

$$I_1 = \frac{U_{12} - E_1}{R_1} = 20 \text{ mA},$$

$$I_2 = \frac{-U_{23} + E_2}{R_2} = 15 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{U_{13}}{R_3} = \frac{U_{12} + U_{23}}{R_3} = 100 \text{ mA}$$



Primenom prvog Kirhofovog zakona dobija se:

$$I_4 = I_1 + I_3 = 120 \text{ mA},$$

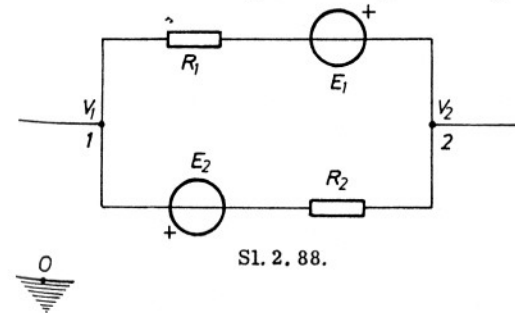
$$I_5 = I_1 - I_2 = -35 \text{ mA}$$

i

$$I_6 = I_3 - I_2 = 85 \text{ mA}.$$

Sl. 2. 87. b.

2.88. Elektromotorne sile i otpornosti u delu kola prikazanom slikom 2. 88. su : $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.



Sl. 2. 88.

Potencijali tačaka 1 i 2 prema tački O izvan kola (prema zemlji) su: $V_1 = 10 \text{ V}$ i $V_2 = -8 \text{ V}$.
Odrediti struje svih grana prikazanog kola.

Rešenje:

Za referentne smerove struja od tačke 1 ka tački 2

se ima:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2 + E_1}{R_1} = 15 \text{ mA}$$

i

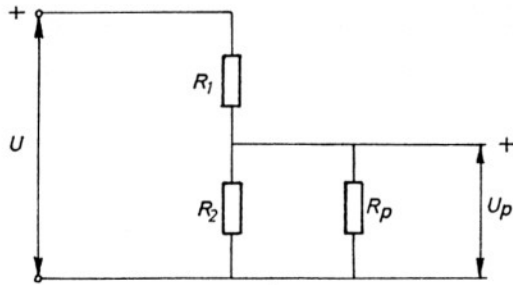
$$I_2 = \frac{V_1 - V_2 - E_2}{R_2} = 10 \text{ mA.}$$

Struja napojne grane, prema referentnom smeru ka tački 1 je:

$$I = I_1 + I_2 = 25 \text{ mA.}$$

2.89. Odrediti odnos napona U_p i U za kolo prikazano sa sl.

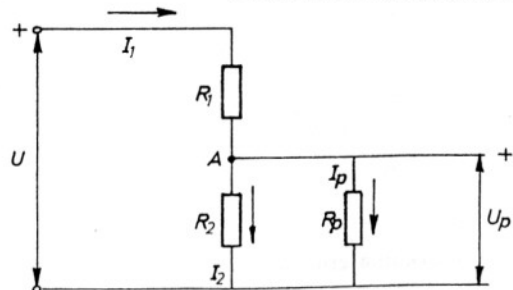
2.89. a. Koliki je odnos ovih napona ako je R_p mnogo veće od R_2 ?



Sl. 2.89. a.

Rešenje:

Izrazi za struje u kolu (sl. 2.89. b.) su:



$$I_1 = \frac{U - U_p}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U_p}{R_2} \quad \text{i}$$

$$I_p = \frac{U_p}{R_p}$$

Primenom prvog Kirhofovog zakona na grane koje se stižu

u čvoru A se ima:

$$I_1 = I_2 + I_p$$

odnosno:

$$\frac{U - U_p}{R_1} = \frac{U_p}{R_2} + \frac{U_p}{R_p}$$

Iz prethodnog izraza je:

$$\frac{U_p}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_p}}$$

U slučaju kada je R_p mnogo veće od R_2 struja I_p se može zanemariti prema struji I_2 pa je:

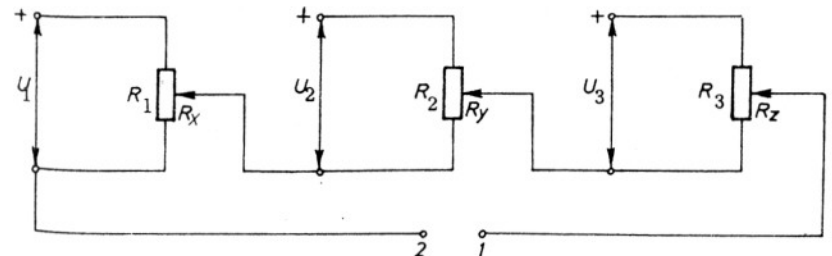
$$\frac{U - U_p}{R_1} \approx \frac{U_p}{R_2}$$

Na osnovu prethodnog je:

$$\frac{U_p}{U} \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ovaj slučaj je u praktičnoj primeni najčešći.

2.90. U kolu prikazanom na sl. 2.90. su poznati naponi U_1 , U_2 ,



Sl. 2.90.

U_3 i otpornosti R_1 , R_2 i R_3 .

Odrediti izraz za napon između tačaka 1 i 2.

Rešenje:

Prema sl. 2.90, izraz za napon između tačaka 1 i 2 je:

$$U_{12} = \frac{R_x}{R_1} U_1 + \frac{R_y}{R_2} U_2 + \frac{R_z}{R_3} U_3.$$

Uvodjenjem oznaka:

$$\frac{R_x}{R_1} U_1 = k_1 U_1 = X,$$

$$\frac{R_y}{R_2} U_2 = k_2 U_2 = Y,$$

i

$$\frac{R_z}{R_3} U_3 = k_3 U_3 = Z,$$

pri čemu su k_1 , k_2 i k_3 brojevi od 0 do 1, može se pisati:

$$U_{12} = X + Y + Z.$$

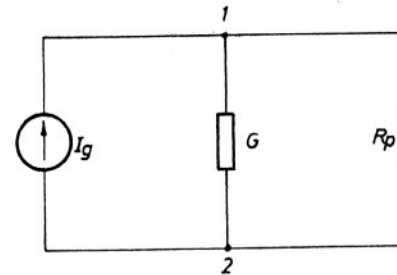
Ukoliko su X , Y i Z srazmerne veličinama koje treba sabrati napon U_{12} je srazmeran njihovom zbiru. Zbog prethodnog, kolo sa sl. 2.90. se koristi kao osnovno kolo u uredjajima za sabiranje.

2.91. Generator struje $I_g = 15$ mA i unutrašnje provodnosti $G = 2,5 \cdot 10^{-4}$ S i prijemnik otpornosti $R_p = 2$ k Ω , vezani su u kolu kao na sl. 2.91.

Odrediti:

1° Struje u svim granama kola,

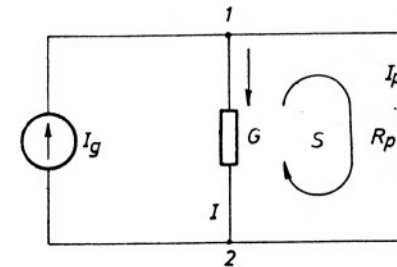
2° Napon U_{12} .



Sl. 2.91. a.

Primenom drugog Kirhofovog zakona po zatvorenom putu ozna-

čenom sa S na sl. 2.91. b. je:



Sl. 2.91. b.

2° Napon između krajeva 1 i 2 prijemnika je:

$$U_{12} = R_p I_p = 20 \text{ V},$$

što je i napon između krajeva strujnog generatora.

Ovaj zadatak se može rešiti i smatrajući prikazano kolo strujnim razdelnikom. Radi određivanja izraza za struju jedne paralelne grane polazi se od izraza za napon između krajeva paralelnih grana i prvog Kirhofovog zakona.

Prema oznakama na sl. 2.91. b. je:

$$U_{12} = R_p I_p = \frac{I}{G}$$

i

$$I_g = I_p + I.$$

Rešenje:

1° U prikazanom kolu nepoznate su struje u granama sa R_p i G .

Primenom prvog Kirhofovog zakona je:

$$I_g = I + I_p.$$

$$-R_p I_p + \frac{I}{G} = 0.$$

Iz prethodnih jednačina struje su:

$$I_p = \frac{I}{1 + R_p G} = 10 \text{ mA}$$

i

$$I = \frac{R_p G}{1 + R_p G} I_g = 5 \text{ mA}.$$

Iz prethodnih jednačina je:

$$I_p = \frac{\frac{1}{G}}{R_p + \frac{1}{G}} I_g = 10 \text{ mA}$$

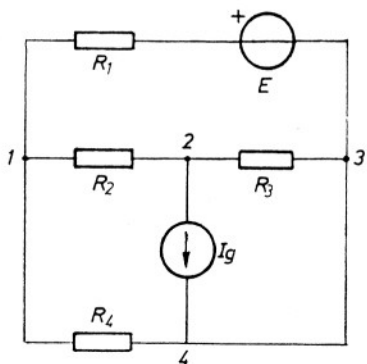
i

$$I = \frac{R_p}{R_p + \frac{1}{G}} I_g = 5 \text{ mA}$$

Ukoliko se prethodni izrazi koriste kao obrasci treba voditi računa o referentnim smerovima prema kojima su određeni.

2.92. Naponski generator ems $E = 7,2 \text{ V}$, strujni generator

struje $I_g = 18 \text{ mA}$ i otpornici otpornosti $R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 150 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$, i $R_4 = 60 \Omega$, vezani su u kolo kao na sl. 2.92. a.



Sl. 2.92. a.

Određiti struje u svim granama kola.

Rešenje:

Kada kolo sa n_g grana u n_s grana ima strujne generatore, pri rešavanju kola neposrednom primenom Kirchofovih zakona postupa se na ovaj način:

1° Po prvom Kirchofovom zakonu piše se $(n_s - 1)$ jednačina.

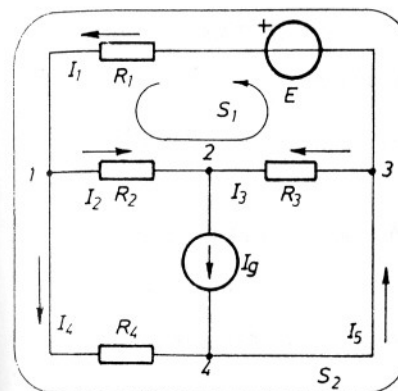
2° Struje n_s grana u kojima se nalaze strujni generatori su određene strujama strujnih generatora.

3° Po drugom Kirchofovom zakonu postavlja se $[n_g - (n_s - 1) - n_s]$ jednačina. Pri ovome zatvoreni putevi u kolu ne treba da obuhvataju grane sa

strujnim generatorima jer su, u opštem slučaju, naponi između krajeva strujnih generatora nepoznati.

Prethodni postupak daje dovoljan broj jednačina za određivanje struja svih grana.

Primenjujući opisani postupak, a prema referentnim smerovima označenim na sl. 2.92. b. se ima:



Čvor 1: $-I_1 + I_2 + I_4 = 0 \dots\dots\dots (1)$

Čvor 2: $-I_2 - I_3 + I_g = 0 \dots\dots\dots (2)$

Čvor 3: $I_1 + I_3 - I_5 = 0 \dots\dots\dots (3)$

S_1 : $E - R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \dots\dots (4)$

S_2 : $E - R_1 I_1 - R_4 I_4 = 0 \dots\dots\dots (5)$

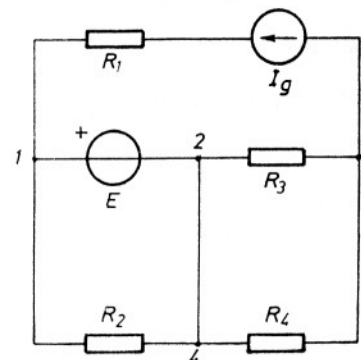
Unošenjem brojnih vrednosti poznatih veličina u gornje jednačine i njihovim rešavanjem do-

bija se: Sl. 2.92. b.

$$I_1 = 21,67 \text{ mA}, \quad I_2 = 10 \text{ mA}, \quad I_3 = 8 \text{ mA}, \quad I_4 = 11,67 \text{ mA}$$

$$I_5 = 29,67 \text{ mA}$$

2.93. Za kolo prikazano na sl. 2.93. a. je poznato: $E = 6 \text{ V}$,



Sl. 2.93. a.

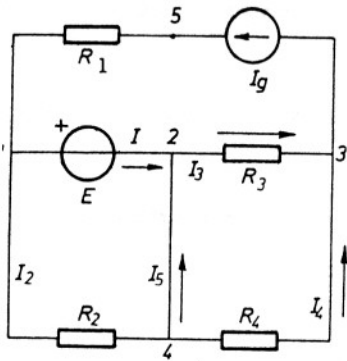
$I_g = 10 \text{ mA}$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$

$R_3 = 50 \Omega$ i $R_4 = 200 \Omega$. Odrediti:

- 1° Struje svih grana kola,
- 2° Napon između krajeva strujnog generatora.

Rezultat:

1° Prema označenim referentnim smerovima na sl. 2.93. b.



Sl. 2.93. b.

struje grana su:

$$I = -20 \text{ mA},$$

$$I_2 = 30 \text{ mA},$$

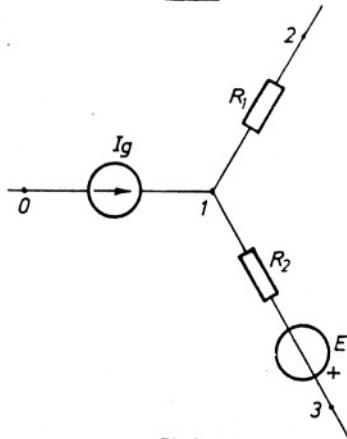
$$I_3 = 8 \text{ mA}$$

$$I_4 = 2 \text{ mA} \quad \text{i} \quad I_5 = 28 \text{ mA}.$$

2^o Napon između krajeva strujnog generatora je:

$$U_{35} = -R_1 I_g - E - R_3 I_3 = -7,4 \text{ V}.$$

2.94. Otpornosti u delu kola prikazanom na sl. 2.94. su:



Sl. 2.94.

$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$. Elektromotorna sila naponskog generatora je $E = 6 \text{ V}$, a struja strujnog generatora je $I_g = 5 \text{ mA}$. Potencijali tačaka 2 i 3 prema tački O su $V_2 = -7 \text{ V}$ i $V_3 = -17 \text{ V}$.

Odrediti:

1^o Struje grana prikazanog

dela kola.

2^o Napon između krajeva strujnog generatora.

Rezultat:

1^o Intenziteti struja su:

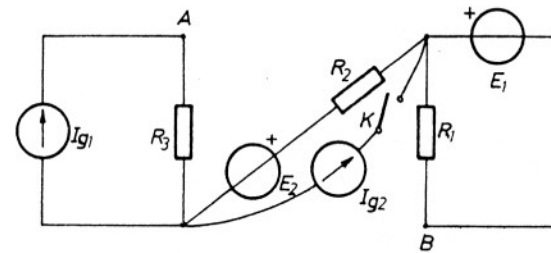
$$I_{21} = 2 \text{ mA}$$

$$\text{i} \quad I_{13} = 7 \text{ mA}.$$

2^o Napon između krajeva i O strujnog generatora je:

$$U_{10} = -9 \text{ V}.$$

2.95. Za kolo prikazano na sl. 2.95. je poznato:



Sl. 2.95.

$$E_1 = 10 \text{ V}, \quad E_2 = 12 \text{ V},$$

$$I_{g1} = 6 \text{ mA}, \quad I_{g2} = 24 \text{ mA},$$

$$R_1 = 200 \Omega, \quad R_2 = 1 \text{ k}\Omega.$$

$$\text{i} \quad R_3 = 3 \text{ k}\Omega.$$

Odrediti napon između tačaka

A i B kada je prekidač K otvo-

ren i kada je zatvoren.

Rezultat:

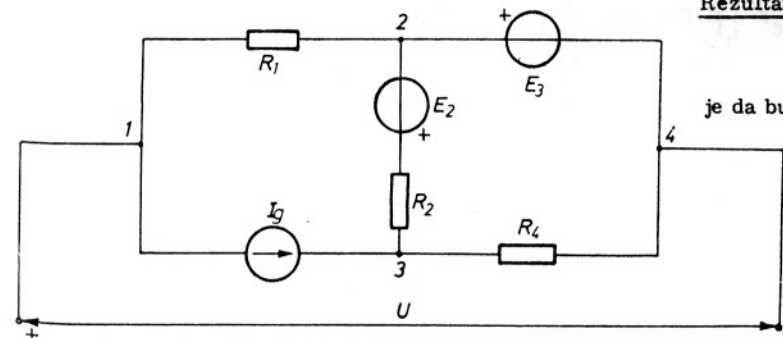
Pri otvorenom prekidaču K je:

$$U_{AB} = 16 \text{ V},$$

a pri zatvorenom prekidaču

$$U'_{AB} = -8 \text{ V}.$$

2.96. Kolika treba da bude otpornost R_2 u kolu prikazanom na sl. 2.96. tako da bude $U_{23} = 0$? Poznato je: $U = 10 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $E_3 = 20 \text{ V}$, $I_g = 20 \text{ mA}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ i $R_4 = 500 \Omega$.



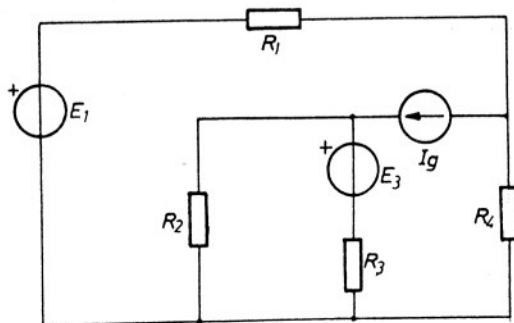
Rezultat:

Potrebno

je da bude $R_2 = 300 \Omega$,

Sl. 2.96.

2.97. Za kolo prikazano na sl. 2.97. a. poznate su ems $E_1 = 12V$, struja strujnog generatora $I_g = 100 \text{ mA}$ i otpornost $R_1 = 320 \Omega$, $R_4 = 180 \Omega$.

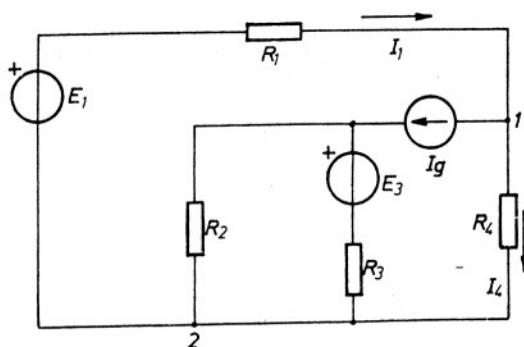


Sl. 2.97. a.

Odrediti snagu koju razvija ems E_1 .

Rešenje:

Snaga koju razvija ems E_1 je:



Sl. 2.97. b.

Iz prethodnih jednačina je:

$$I_1 = \frac{E_1 + R_4 I_g}{R_1 + R_4} = 60 \text{ mA.}$$

Snaga koju razvija ems E_1 je:

$$P_{E1} = 0,72 \text{ W}$$

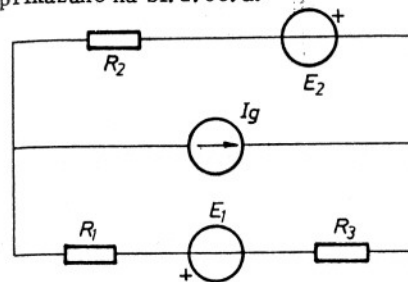
$P_{E1} = E_1 I_1$,
a prema referentnim smerovima
kao na sl. 2.97. b.

Struja I_1 se može odrediti
iz ovih jednačina:

$$I_1 = I_g + I_4$$

$$\text{i } R_4 I_4 = E_1 - R_1 I_1.$$

2.98. Poznate su ems $E_1 = 24V$, $E_2 = 12V$, struja strujnog generatora $I_g = 10 \text{ mA}$ i otpornosti $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 400 \Omega$ i $R_3 = 300 \Omega$ za kolo prikazano na sl. 2.98. a.



Sl. 2.98. a.

1° Odrediti snage koje primaju pojedine grane kola.

2° Na osnovu prethodnog zaključiti kako se pojedini generatori ponašaju u kolu.

Rešenje:

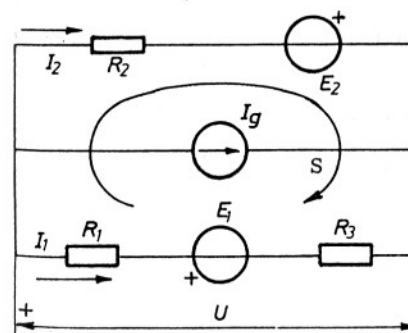
1° Snaga koju grana

između tačaka A i B prima se definiše izrazom

$$P_{AB} = U_{AB} I_{AB}$$

pri čemu sve veličine imaju algebarsko značenje.

Vodeći računa o prethodnoj definiciji referentni smerovi struja i napona označeni su na sl. 2.98. b.



Sl. 2.98. b.

Po prvom i drugom Kirhofovom zakonu je:

$$I_1 + I_2 + I_g = 0$$

i

$$(R_1 + R_3)I_1 + E_1 - R_2 I_2 + E_2 = 0.$$

Zamenjivanjem brojnih vrednosti poznatih veličina i rešavanjem ovih jednačina se dobija:

$$I_1 = -50 \text{ mA} \quad \text{i} \quad I_2 = 40 \text{ mA.}$$

Napon između krajeva grana je:

$$U = -E_2 + R_2 I_2 = 4 \text{ V.}$$

Snage koje primaju pojedine grane su:

$$P_1 = UI_1 = -200 \text{ mW},$$

$$P_2 = UI_2 = 160 \text{ mW}$$

i

$$P_3 = UI_g = 40 \text{ mW}.$$

Iz prethodnog se zaključuje da je zbir svih snaga koje primaju grane kola jednak nuli.

2^o Posmatrajući prethodne izraze za snage može se zaključiti sledeće:

a) Grana sa E_1 , R_1 i R_3 u celini radi kao generator jer je $P_1 < 0$, pa i elektromotorna sila E_1 radi kao generator, razvijajući snagu $P_{E_1} = -E_1 I_1 = 1,2 \text{ W}$.

b) Grana sa E_2 i R_2 u celini radi kao prijemnik jer je $P_2 > 0$. Pri ovome ems E_2 razvija snagu

$$P_{E_2} = E_2 I_2 = 480 \text{ mW i radi kao generator.}$$

Snaga prijemnika otpornosti R_2 je:

$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 640 \text{ mW}.$$

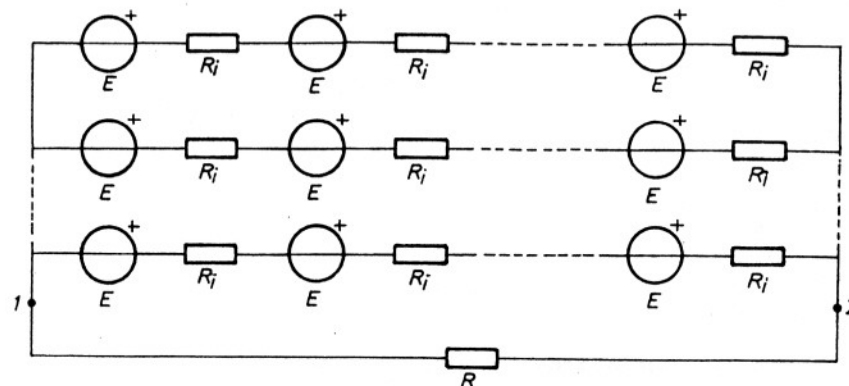
Kako je snaga prijemnika otpornosti R_2 veća od snage koju razvija E_2 to se i cela grana ponaša kao prijemnik, i ako ems grane radi kao generator.

c) Strujni generator radi kao prijemnik jer je

$$P_3 > 0.$$

2.99. Od trideset jednakih akumulatora svaki ems $E=2\text{V}$ i unutrašnje otpornosti $R_i = 0,6 \Omega$ vezano je po n na red, a zatim su ove redne grupe akumulatora vezane paralelno i priključene na prijemnik otpornosti $R = 2 \Omega$

kao na sl. 2.99.



Sl. 2.99.

Određiti n tako da jačina struje u prijemniku bude najveća.

Rešenje:

Izraz za intenzitet struje bilo koje od paralelnih grana sa akumulatorima je

$$I'_{12} = \frac{nE - U_{21}}{nR_i}.$$

Primenom prvog Kirhofovog zakona za intenzitet struje prijemnika otpornosti R se ima:

$$I_{21} = \frac{30}{n} I'_{12} = \frac{30}{n} \cdot \frac{nE - U_{21}}{nR_i}.$$

Takodje je

$$I_{21} = \frac{U_{21}}{R},$$

Pa se iz prethodnih izraza dobija

$$I_{21} = \frac{30nE}{n^2R_i + 30R}.$$

Jačina struje u prijemniku ima najveću vrednost za

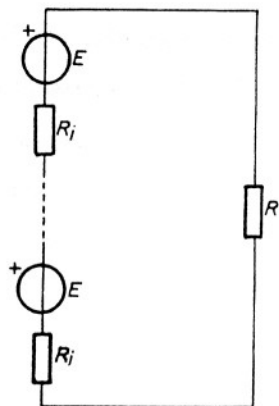
$$n = \sqrt{\frac{30R}{R_i}} = 10,$$

što se dobija iz

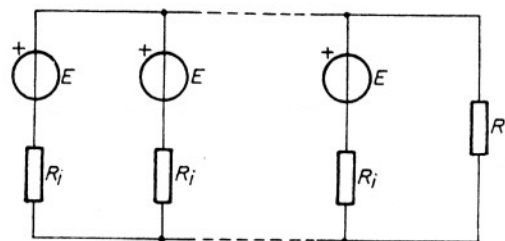
$$\frac{dI_{21}}{dn} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2 I_{21}}{dn^2} < 0.$$

2.100. Prijemnik otpornosti R i n jednakih akumulatora elektromotornih sila E i unutrašnjih otpornosti R_i su:

1. Svi vezani na red (sl. 2.100a.)
2. Svi vezani paralelno (sl. 2.100b.)



Sl. 2.100a.



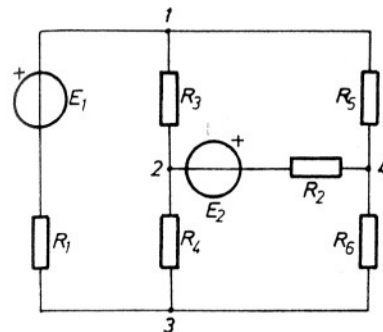
Sl. 2.100b.

Odrediti koja je od navedenih veza pogodnija u cilju dobijanja što veće struje u prijemniku u slučajevima kada je:

- a) $R = R_i$
- b) $R \gg nR_i$
- c) $R \ll \frac{R_i}{n}$

Rezultat:

- a) Jačina struje u prijemniku je ista za oba navedena načina



Sl. 2.108. a.

Odrediti intenzitete struja svih grana.

Rešenje:

Kako je za dato kolo

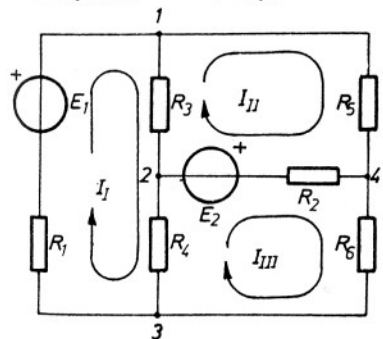
$n_k = n_g - (n_\chi - 1) = 3$, to je u cilju rešavanja kola potrebno izabrati tri konture.

Konture koje "prekrivaju"

celo kolo bez preklapanja (nalik na saće

pčela) nazivaju se elementarne konture, ćelije ili okca. Ukoliko se sve elementarne konture orijentišu na isti način (u smeru kretanja kazaljke na časovniku, ili u suprotnom smeru), svi koeficijenti $R_{kj} = R_{jk}$, $k \neq j$, u jednačinama po metodi konturnih struja su negativni.

Imajući u vidu prethodno, za rešavanje datog kola su izabrane elementarne konture kao na sl. 2.108. b. Sistem jednačina po metodi konturnih struja (sl. 2.108. b) je:



Sl. 2.108. b.

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3 + R_4)I_I - R_3 I_{II} - R_4 I_{III} &= E_1 \\ -R_3 I_I + (R_2 + R_3 + R_5)I_{II} - R_2 I_{III} &= -E_2 \\ -R_4 I_I - R_2 I_{II} + (R_2 + R_4 + R_6)I_{III} &= E_2 \end{aligned}$$

Zamenom brojnih vrednosti poznatih veličina izraženih jedinicama MKSA sistema se dobija:

$$\begin{aligned} 720I_I - 120I_{II} - 300I_{III} &= 24, \\ -120I_I + 1120I_{II} - 800I_{III} &= -32 \\ -300I_I - 800I_{II} + 1800I_{III} &= 32. \end{aligned}$$

Iz prethodnog sistema jednačina je:

$$\begin{aligned} I_I &= 40 \text{ mA}, \\ I_{II} &= -10 \text{ mA}, \\ \text{i} \\ I_{III} &= 20 \text{ mA}. \end{aligned}$$

Struje pojedinih grana kola su:

$$I_{31} = I_I = 40 \text{ mA},$$

$$I_{14} = I_{II} = -10 \text{ mA},$$

$$I_{43} = I_{III} = 20 \text{ mA},$$

$$I_{12} = I_I - I_{II} = 50 \text{ mA},$$

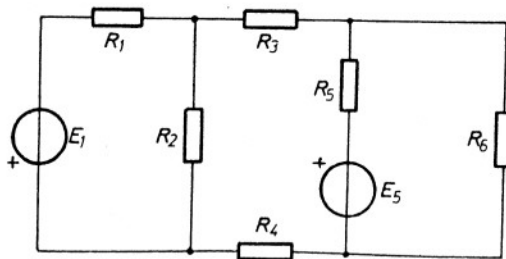
$$I_{23} = I_I - I_{III} = 20 \text{ mA},$$

i

$$I_{42} = I_{II} - I_{III} = -30 \text{ mA}.$$

2.109. Odrediti struje svih grana za kolo prikazano na sl. 2.109. a

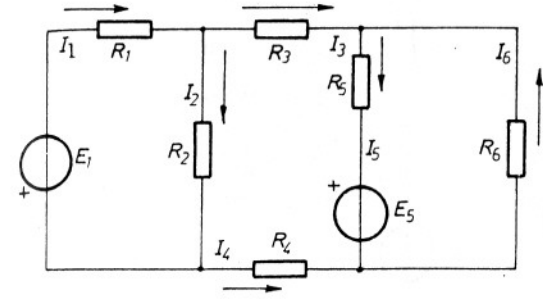
Poznato je: $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_5 = 100 \text{ V}$, $R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$, $R_3 = 400 \Omega$, $R_4 = 200 \Omega$, $R_5 = 500 \Omega$ i $R_6 = 2 \text{ k}\Omega$.



Sl. 2.109. a.

Rezultat:

Za referentne smerove prikazane na slici 2.109. b. je:



Sl. 2.109. b.

$$\begin{aligned} I_1 &= -50 \text{ mA}, \\ I_2 &= 20 \text{ mA}, \\ I_3 &= -70 \text{ mA}, \\ I_4 &= 70 \text{ mA}, \\ I_5 &= -96 \text{ mA}, \\ I_6 &= -26 \text{ mA}. \end{aligned}$$

2.110. Generatori elektromotornih sila $E_1 = 50 \text{ V}$, $E_2 = 35 \text{ V}$,

$E_3 = 6 \text{ V}$, $E_4 = 8 \text{ V}$, zanemarljivih unutrašnjih otpornosti,

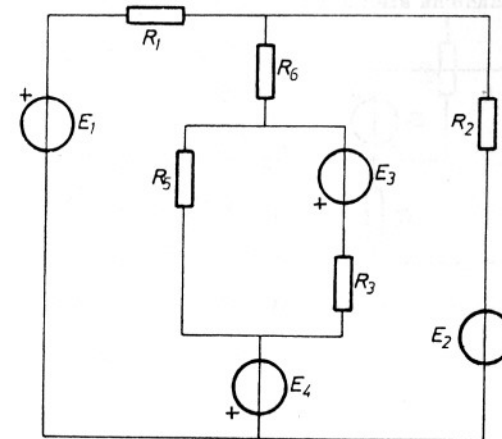
i otpornici otpornosti $R_1 = 300 \Omega$

$R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$,

$R_5 = 100 \Omega$ i $R_6 = 400 \Omega$

vezani su u kolo kao što je prikazano na slici 2.110. a.

Odrediti struje svih grana kola.

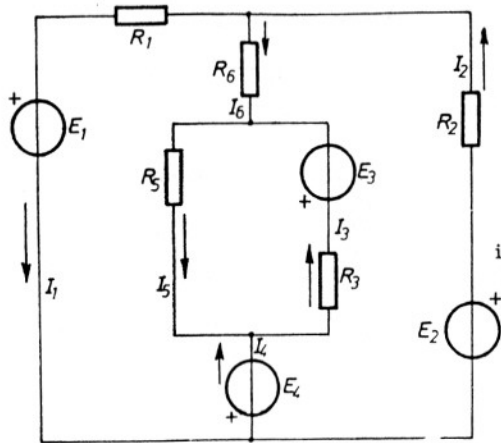


Sl. 2.110. a.

Rezultat:

Intenziteti struja grana kola, prema referentnim smerovima

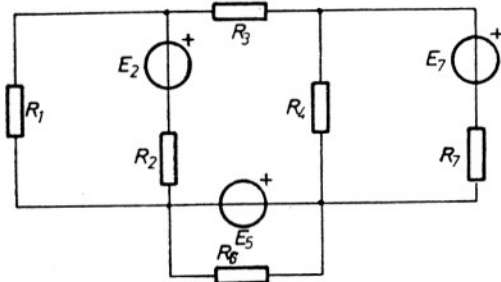
označenim na slici 2.110. b., su:



- $I_1 = -60 \text{ mA}$,
- $I_2 = 30 \text{ mA}$,
- $I_3 = -50 \text{ mA}$,
- $I_4 = -90 \text{ mA}$,
- $I_5 = 40 \text{ mA}$,
- $I_6 = 90 \text{ mA}$.

Sl. 2.110. b.

2.111. Za kolo prikazano na slici 2.111. a. je poznato: $E_2 = 25 \text{ V}$,



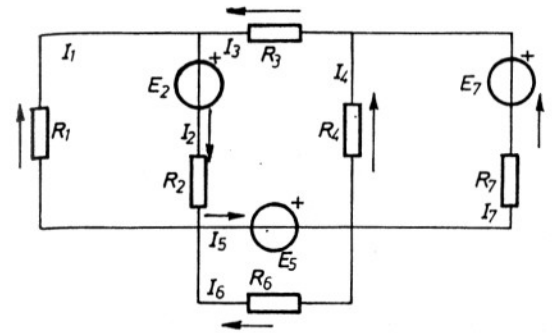
- $E_5 = 10 \text{ V}$, $E_7 = 40 \text{ V}$,
 - $R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$,
 - $R_3 = 200 \Omega$, $R_4 = 260 \Omega$,
 - $R_6 = 500 \Omega$ i $R_7 = 300 \Omega$.
- Odrediti struje svih grana kola.

Sl. 2.111. a.

Rezultat:

Za referentne smerove kao na slici 2.111. b. je:

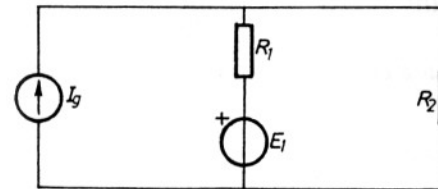
- $I_1 = -50 \text{ mA}$,
- $I_2 = -10 \text{ mA}$,



- $I_3 = 40 \text{ mA}$
- $I_4 = -50 \text{ mA}$,
- $I_5 = 60 \text{ mA}$,
- $I_6 = 20 \text{ mA}$
- $I_7 = 90 \text{ mA}$.

Sl. 2.111. b.

2.112. Generator elektromotorne sile $E_1 = 24 \text{ V}$, zanemarljive unutrašnje otpornosti, generator struje $I_g = 18 \text{ mA}$, zanemarljive unutrašnje provodnosti i otpornici otpornosti $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 400 \Omega$, vezani su u kolo prikazano na



slici 2.112. a.

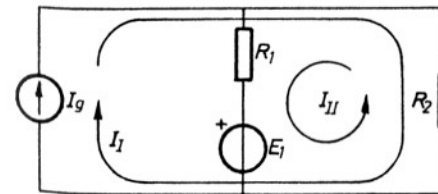
Odrediti struje svih grana kola.

Rešenje:

Za zadato kolo je

$$n_k = n_g - (n_\xi - 1) = 2, \text{ pa}$$

treba izabrati dve konture. Kako se u jednoj grani kola nalazi strujni generator, to se može izabrati jedna nezavisna kontura tako da grana sa strujnim generatorom pripada samo njoj. Struja strujnog generatora, u ovom slučaju, određuje



konturnu struju te nezavisne konture.

Na slici 2.112. b. su prikazane izabrane konture. Prema oznakama na toj slici je:

Sl. 2.112. b.

$$I_I = I_g = 18 \text{ mA} \dots \dots \dots (1)$$

i

$$R_{21} I_I + R_{22} I_{II} = E_{II} \dots \dots \dots (2)$$

Pri ovome je:

$$R_{21} = -R_2 = -400 \Omega$$

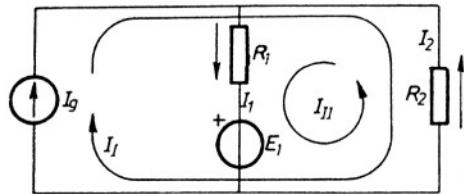
$$R_{22} = R_1 + R_2 = 1400 \Omega$$

i

$$E_{II} = -E_1 = -24 \text{ V}$$

Iz jednačine (2) je:

$$I_{II} = -12 \text{ mA}$$



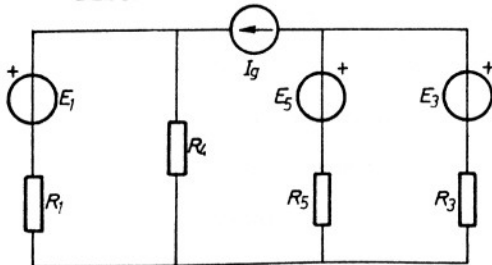
Sl. 2. 112. c.

Prema slici 2. 112. c. je:

$$I_1 = I_{II} = -12 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_{II} - I_1 = -30 \text{ mA}$$

2. 113. Za kolo prikazano na slici 2. 113. a. je poznato: $E_1 = 120 \text{ V}$,



Sl. 2. 113. a.

$$E_3 = 150 \text{ V}, E_5 = 80 \text{ V},$$

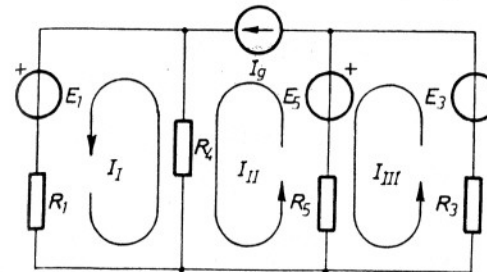
$$I_g = 25 \text{ mA}, R_1 = 100 \Omega$$

$$R_3 = 600 \Omega \text{ i } R_4 = R_5 = 400 \Omega$$

Odrediti struje svih grana datog kola.

Rešenje:

Za dato kolo je $n_K = n_g - (n_\chi - 1) = 3$. Na slici 2. 113. b. su



Sl. 2. 113. b.

označene tri elementarne konture orijentisane na isti način. Jednačine po metodi konturnih struja su:

$$(R_1 + R_4) I_I - R_4 I_{II} = -E_1 \dots \dots (1)$$

$$I_{II} = I_g = 25 \text{ mA} \dots \dots \dots (2)$$

$$-R_5 I_{II} + (R_3 + R_5) I_{III} = E_3 - E_5 \dots (3)$$

Iz jednačina (1) i (2) je

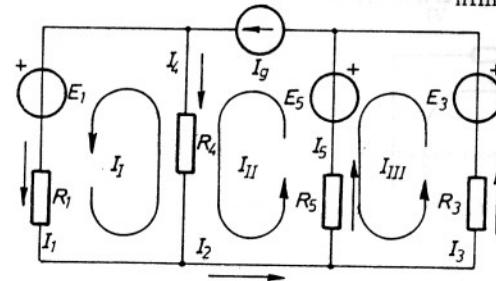
$$I_I = -220 \text{ mA}$$

Iz jednačina (2) i (3) je

$$I_{III} = 80 \text{ mA}$$

Intenziteti struja grana kola, prema referentnim smerovima označe-

nim na slici 2. 113. c., su:



Sl. 2. 113. c.

$$I_1 = I_I = -220 \text{ mA},$$

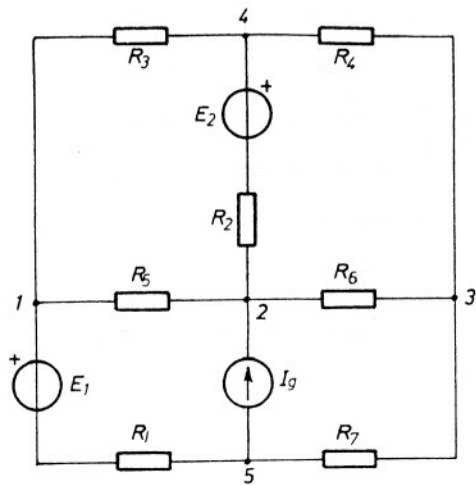
$$I_2 = I_{II} = 25 \text{ mA},$$

$$I_3 = I_{III} = 80 \text{ mA},$$

$$I_4 = -I_I + I_{II} = 245 \text{ mA}$$

$$I_5 = I_{II} - I_{III} = -55 \text{ mA}.$$

2. 114. Za kolo prikazano na slici 2. 114. a. je poznato: $I_g = 60 \text{ mA}$,



Sl. 2. 114. a.

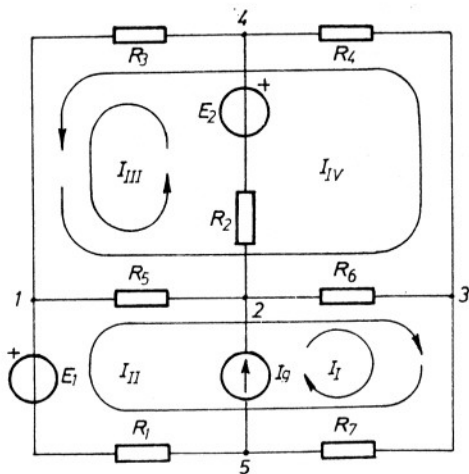
$E_1 = 4 \text{ V}$, $E_2 = 42 \text{ V}$,
 $R_1 = 400 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$,
 $R_3 = 280 \Omega$, $R_4 = 400 \Omega$,
 $R_5 = 300 \Omega$, $R_6 = 1 \text{ k}\Omega$
 i $R_7 = 200 \Omega$

Odrediti:

- 1^o Struje kroz naponske generatore.
- 2^o Napon između krajeva strujnog generatora.
- 3^o Snage koje razvijaju generatori.

Rešenje:

Konture na slici 2. 114. b. su nezavisne i radi lakšeg rešavanja problema, odabrane su tako da su grane sa generatorima obuhvaćene samo po jednom konturom. Jednačine konturnih struja su:



Sl. 2. 114. b.

$$I_I = I_g \dots \dots (1)$$

$$(R_6 + R_7)I_I + (R_1 + R_5 + R_6 + R_7)I_{II} + R_5 I_{III} + (R_5 + R_6)I_{IV} = E_1 \dots \dots (2)$$

$$R_5 I_{II} + (R_2 + R_3 + R_5)I_{III} + (R_3 + R_5)I_{IV} = E_2 \dots \dots (3)$$

$$R_6 I_I + (R_5 + R_6)I_{II} + (R_3 + R_5)I_{III} + (R_3 + R_4 + R_5 + R_6)I_{IV} = 0 \dots \dots (4)$$

Iz prethodnih jednačina je:

$$I_I = 60 \text{ mA},$$

$$I_{II} = -20 \text{ mA},$$

$$I_{III} = 95 \text{ mA}$$

i

$$I_{IV} = -45 \text{ mA}.$$

1^o Struje kroz naponske generatore su:

$$I_{51} = I_{II} = -20 \text{ mA}$$

i

$$I_{24} = I_{III} = 95 \text{ mA}.$$

2^o Napon između krajeva 2 i 5 strujnog generatora je:

$$U_{25} = -R_1 I_{51} + E_1 - R_5 I_{24}$$

Kako je

$$I_{12} = I_{II} + I_{III} + I_{IV} = 30 \text{ mA},$$

to je

$$U_{25} = 3 \text{ V}.$$

3^o Snage koje razvijaju generatori su:

$$P_{E_1} = E_1 I_{51} = -80 \text{ mW},$$

$$P_{E_2} = E_2 I_{24} = 3990 \text{ mW}$$

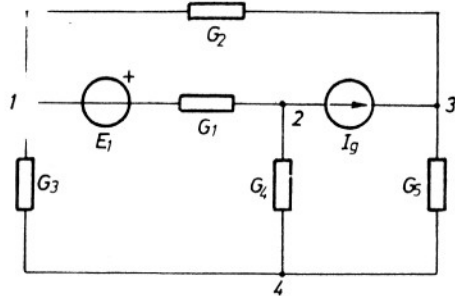
i

$$P_{I_g} = U_{25} I_g = 180 \text{ mW}.$$

Iz prethodnog se zaključuje da aparat elektromotorne sile E_1 radi kao prijemnik, a aparati sa elektromotornom silom E_2 i strujom I_g rade kao generatori.

2.115. Elektromotorna sila naponskog generatora (slika 2.115) je

$E_1 = 62\text{V}$, struja strujnog generatora je $I_g = 10\text{mA}$, a provodnosti prijemnika



Sl. 2.115.

su $G_1 = 5\text{ mS}$, $G_2 = 10\text{ mS}$, $G_3 = 2,5\text{ mS}$
i $G_4 = G_5 = 1\text{ mS}$.

Odrediti snage svih elemenata prikazanog kola.

Rezultat:

Primenom metode konturnih

struja se dobija:

$$I_{13} = -20\text{ mA},$$

$$I_{24} = 40\text{ mA},$$

$$I_{12} = 50\text{ mA},$$

$$I_{34} = -10\text{ mA}$$

$$\text{i } I_{14} = -30\text{ mA}.$$

1° Snaga prijemnika su:

$$P_{G_1} = \frac{I_{12}^2}{G_1} = 0,5\text{W},$$

$$P_{G_3} = \frac{I_{14}^2}{G_3} = 0,36\text{W},$$

$$P_{G_2} = \frac{I_{13}^2}{G_2} = 0,04\text{W},$$

$$P_{G_4} = \frac{I_{24}^2}{G_4} = 1,6\text{W}$$

$$\text{i } P_{G_5} = \frac{I_{34}^2}{G_5} = 0,1\text{W}.$$

2° Snaga koju razvija elektromotorna sila E_1 je:

$$P_{E_1} = E_1 I_{12} = 3,1\text{W}.$$

3° Snaga koju razvija generator struje je:

$$P_{I_g} = U_{32} I_g.$$

Napon između krajeva 3 i 2 strujnog generatora je:

$$U_{32} = -50\text{V},$$

te je

$$P_{I_g} = -0,5\text{W}.$$

Zbir snaga koje razvijaju generatori je jednak zbiru snaga prijemnik

$$P_{E_1} + P_{I_g} = P_{G_1} + P_{G_2} + P_{G_3} + P_{G_4} + P_{G_5}.$$

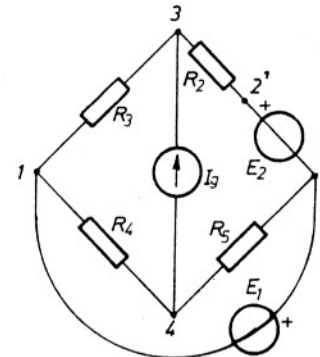
Zamenom brojnih vrednosti je:

$$3,1\text{W} + (-0,5\text{W}) = 0,5\text{W} + 0,04\text{W} + 0,36\text{W} + 1,6\text{W} + 0,1\text{W},$$

odnosno

$$2,6\text{W} = 2,6\text{W}.$$

2.116. Za električno kolo prikazano na slici 2.116. a. je poznato:



Sl. 2.116. a.

$E_1 = E_2 = 10\text{V}$, $I_g = 40\text{mA}$, $R_2 = R_3 = 500\Omega$

i $R_4 = R_5 = 1\text{k}\Omega$.

Nacrtati dijagram potencijala za zatvoreni put S: 132'241, uzimajući tačku 1 za referentnu tačku sa nultim relativnim potencijalom.

Rezultat:

Struje grana datog

kola su:

$$I_{12} = 25\text{ mA},$$

$$I_{32} = 0,$$

$$I_{31} = 40\text{ mA},$$

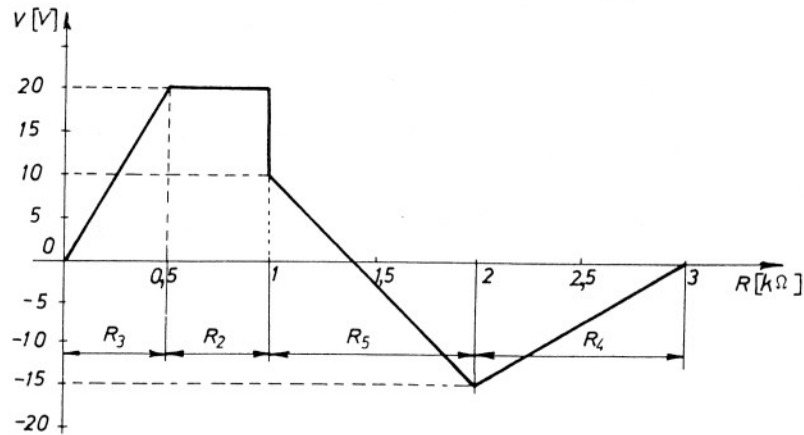
$$I_{41} = -15\text{ mA},$$

$$I_{42} = -25\text{ mA}.$$

Potencijali tačaka na zatvorenom putu S su:

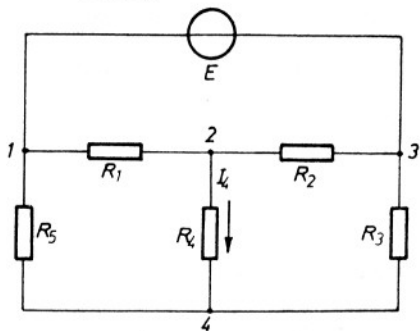
$$\begin{aligned} V_1 &= 0, & V_2 &= V_2' - E_2 = 10V, \\ V_3 &= R_3 I_{31} = 20V, & V_4 &= V_2 + R_5 I_{42} = -15V \\ V_2' &= V_3 - R_2 I_{32} = 20V, & V_1 &= V_4 - R_4 I_{41} = 0. \end{aligned}$$

Na slici 2. 116. b. je prikazan dijagram potencijala.



Sl. 2. 116. b.

2. 117. U kolu prikazanom slikom 2. 117. a. je: $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 300\Omega$



Sl. 2. 117. a.

$R_3 = 400\Omega$, $R_4 = R_5 = 100\Omega$ i

$I_4 = 20\text{mA}$.

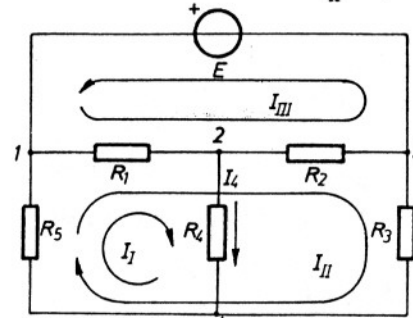
Odrediti elektromotornu silu E.

Rešenje:

Elektromotorna sila

E se može odrediti pomoću jednačina napisanih po metodi konturnih struja.

Zadato kolo ima $n_k = 3$, nezavisne konture. Kako je poznata struja



Sl. 2. 117. b.

jedne grane kola pogodno je izabrati konture tako da ta grana pripada samo jednoj konturi. Tada poznata struja određuje konturnu struju te konture. Takođe je povoljno granu sa nepoznatom elektromotornom silom E obuhvatiti samo jednom konturom. Pri ovome

se neoznata elektromotorna sila E samo jednom pojavljuje u sistemu jednačina.

S obzirom na predhodno konture su izabrane kao na slici 2. 117. b. Na istoj slici je označen i izabrani referentni smer za elektromotornu silu E.

Jednačine po metodi konturnih struja su:

$$(R_1 + R_4 + R_5)I_1 + (R_1 + R_5)I_2 + R_1 I_3 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$(R_1 + R_5)I_1 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_5)I_2 + (R_1 + R_2)I_3 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$R_1 I_1 + (R_1 + R_2)I_2 + (R_1 + R_2)I_3 = E \dots \dots \dots (3)$$

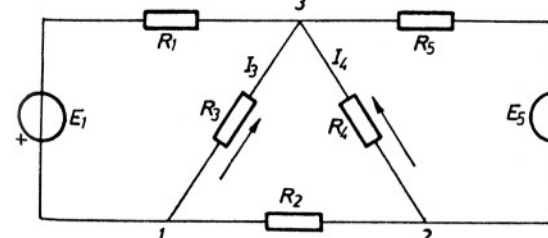
i

$$I_1 = I_4.$$

Iz prethodnog sistema jednačina se dobija:

$$E = -30V.$$

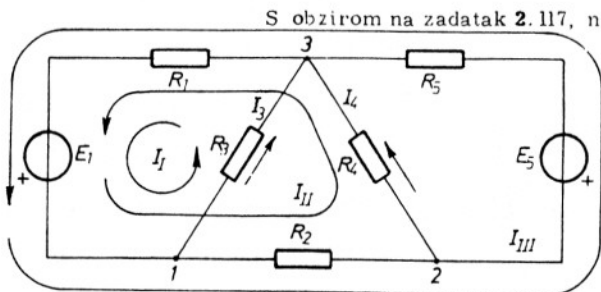
2. 118. U kolu prikazanom na slici 2. 118. a. je poznato: $E_1 = 6V$,



Sl. 2. 118. a.

$R_1 = 2\text{ k}\Omega$, $R_2 = 500\Omega$,
 $R_4 = 1,5\text{ k}\Omega$, $R_5 = 750\Omega$,
 $I_3 = 3\text{ mA}$ i $I_4 = 15\text{ mA}$.
 Odrediti otpornost R_3 i elektromotornu silu E_5 .

Rešenje:



Sl. 2.118. b.

S obzirom na zadatak 2.117, najpovoljnije konture su kao na slici 2.118. b.

Za ove konture sistem jednačina po metodu konturnih struja je:

$$(R_1 + R_3)I_3 + R_1I_4 + R_1I_{III} = E_1 \dots (1)$$

$$R_1I_3 + (R_1 + R_2 + R_4)I_4 + (R_1 + R_2)I_{III} = E_1 \dots (2)$$

$$R_1I_3 + (R_1 + R_2)I_4 + (R_1 + R_2 + R_5)I_{III} = E_1 - E_5 \dots (3)$$

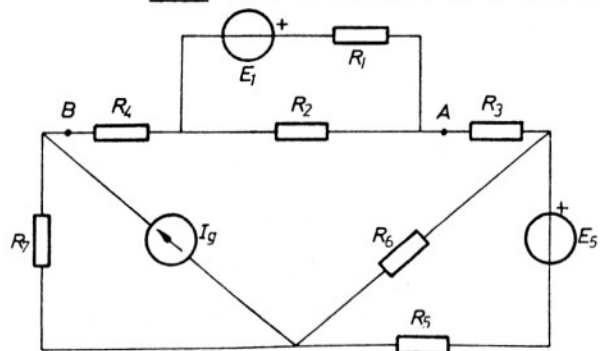
Iz prethodnih jednačina se dobija:

$$R_3 = 6 \text{ k}\Omega$$

i

$$E_5 = 40,5 \text{ V.}$$

2.119. Za kolo prikazano slikom 2.119. a. je poznato: elektromotorna



Sl. 2.119. a.

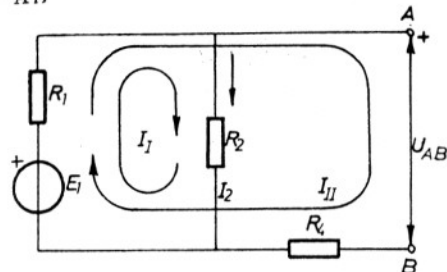
sila $E_1 = 6 \text{ V}$, otpornosti $R_1 = 130 \Omega$, $R_2 = 320 \Omega$, $R_4 = 50 \Omega$ i napon između tačaka A i B $U_{AB} = 47 \text{ V}$.
 Odrediti snagu otpornika otpornosti R_2 .

Rešenje:

Kako su tačke A i B

jedina veza dva dela datog kola, to se jedan deo kola može zameniti naponom

U_{AB} i kolo prikazati kao na slici 2.119. b.



Sl. 2.119. b.

Radi određivanja snage otpornika otpornosti R_2 treba odrediti struju kroz njega. Prema slici 2.119. b. je:

$$(R_1 + R_2)I_1 + R_1I_{II} = E_1$$

$$R_1I_1 + (R_1 + R_4)I_{II} = E_1 - U_{AB}$$

Iz prethodnih jednačina se dobija:

$$I_1 = 0,1 \text{ A,}$$

$$I_2 = I_1 = 0,1 \text{ A.}$$

pa je (sl. 2.119. b.):

Snaga otpornika je:

$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 3,2 \text{ W.}$$

2.120. U kolu prikazanom slikom 2.120. a. je poznato: $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$,

$$R_2 = 500 \Omega, E_2 = 32,5 \text{ V,}$$

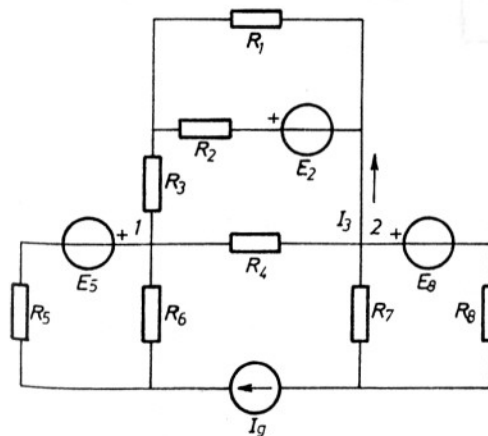
$$R_3 = 1 \text{ k}\Omega, I_3 = 25 \text{ mA.}$$

Odrediti napon U_{12} .

Rešenje:

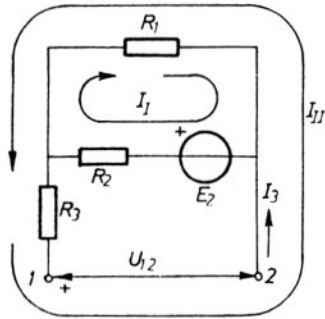
Prema zadatku 2.119.

i ovde je moguće deo kola između tačaka 1 i 2, sa neoznatim elementima, zameniti naponom. Na slici 2.120. b. je prikazano kolo posle zamene



Sl. 2.120. a.

dela kola naponom U_{12} . Primenjujući metodu konturnih struja ima se:



Sl. 2. 120. b.

$$I_{II} = I_3 = 25 \text{ mA} \dots\dots\dots (1)$$

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_1 I_{II} = E_2 \dots\dots\dots (2)$$

$$- R_1 I_1 + (R_1 + R_3) I_{II} = -U_{12} \dots\dots\dots (3)$$

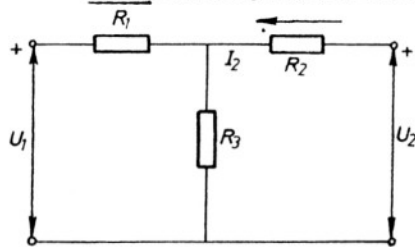
Iz jednačine (2) je:

$$I_1 = 33 \text{ mA, pa se}$$

iz jednačine (3) dobija:

$$U_{12} = -9 \text{ V.}$$

2. 121. Za kolo prikazano slikom 2. 121. a. je poznato: $U_1 = 20 \text{ V}$,



Sl. 2. 121. a.

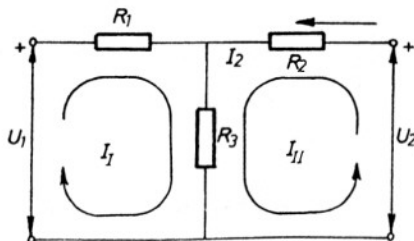
$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 100 \Omega \quad \text{i}$$

$$R_3 = 200 \Omega.$$

Odrediti izraz za intenzitet struje I_2 i grafički ga predstaviti u funkciji napona U_2 .

Rešenje:

Prema slici 2. 121. b. je:



Sl. 2. 121. b.

$$(R_1 + R_3)I_I + R_3 I_{II} = U_1$$

$$R_3 I_I + (R_2 + R_3)I_{II} = U_2$$

Iz prethodnih jednačina je

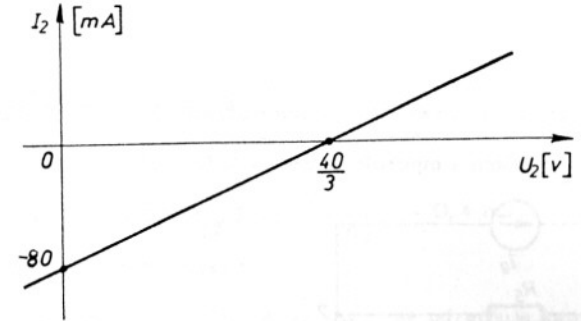
$$I_2 = I_{II} = \frac{U_2(R_2 + R_3) - U_1 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2}$$

Zamenom brojnih vrednosti poznatih veličina izraženih jedinicama

MKSA sistema je:

$$I_2 = (0,6 U_2 - 8) 10^{-2} \text{ A,}$$

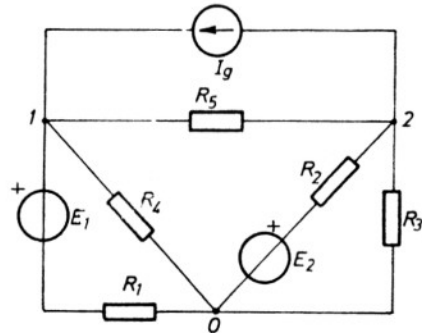
a grafički je predstavljeno na slici 2. 121. c.



Sl. 2. 121. c.

2.6. METODA NAPONA IZMEDJU ČVOROVA

2.122. Generatori elektromotornih sila $E_1 = 10\text{V}$ i $E_2 = 30\text{V}$, generator struje $I_g = 80\text{mA}$ i otpornici otpornosti $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$,



Sl. 2.122. a.

$R_3 = 1\text{k}\Omega$, $R_4 = 2\text{k}\Omega$ i $R_5 = 2,5\text{k}\Omega$ vezani su u kolo na slici 2.122. a.

Određiti struje svih grana kola primenom metode napona između čvorova.

Rešenje:

Određivanje struja grana primenom metode napona između čvorova, kada nijedna grana kola ne sadrži samo idealni generator napona, sprovodi se na sledeći način:

1° Jedan čvor kola treba usvojiti za referentni. Za dato kolo je za referentni uzet čvor označen sa O. Naponi U_{10} i U_{20} između ostalih čvorova i referentnog su tada relativni potencijali čvorova 1 i 2 prema referentnom.

2° Napisati sistem jednačina u opštem obliku koje se po ovoj metodi neposredno pišu za kolo. Ovaj sistem jednačina za dato kolo je:

$$\begin{aligned} G_{11} U_{10} + G_{12} U_{20} &= I_I \\ G_{21} U_{10} + G_{22} U_{20} &= I_{II} \end{aligned}$$

3° Odrediti koeficijente i slobodne članove u prethodnom sistemu

jednačina

Koeficijent tipa G_{kk} se određuje kao zbir provodnosti svih grana vezanih za čvor k, a u posmatranom slučaju su:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 5,9 \text{ mS}$$

$$i \quad G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = 1,9 \text{ mS.}$$

Koeficijent tipa $G_{kj} = G_{jk}$, $k \neq j$, se određuje kao zbir provodnosti svih grana između čvorova k i j sa predznakom minus. Za dato kolo je:

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_5} = -0,4 \text{ mS.}$$

Slobodni član u jednačinama I_I , I_{II} , se određuje kao algebarski zbir struja svih strujnih generatora i količnika $\frac{E_k}{R_k}$, formiran prema referentnom smeru "ka čvoru". Za kolo sa sl. 2.122. a. je:

$$I_I = I_g + \frac{E_1}{R_1} = 130 \text{ mA}$$

$$i \quad I_{II} = \frac{E_2}{R_2} - I_g = -65 \text{ mA.}$$

4° Uneti brojne vrednosti poznatih veličina, izraženih jedinicama MKSA sistema. Za dato kolo se dobija ovaj sistem jednačina:

$$5,9 \cdot 10^{-3} U_{10} - 0,4 \cdot 10^{-3} U_{20} = 130 \cdot 10^{-3}$$

$$-0,4 \cdot 10^{-3} U_{10} + 1,9 \cdot 10^{-3} U_{20} = -65 \cdot 10^{-3}$$

5° Rešiti sistem jednačina. Rešenja prethodnog sistema jednačina

su:

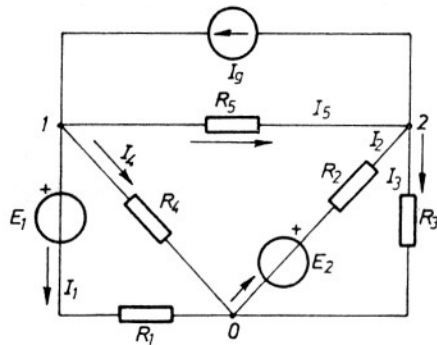
$$U_{10} = 20\text{V} \quad i$$

$$U_{20} = -30\text{V.}$$

6° Odrediti napone između krajeva svih grana kola. Naponi U_{10} i U_{20} su naponi između krajeva svih grana vezanih između čvora 1 i referentnog i između čvora 2 i referentnog. Napon između krajeva grana vezanih između čvorova 1 i 2 je:

$$U_{12} = U_{10} - U_{20} = 50V.$$

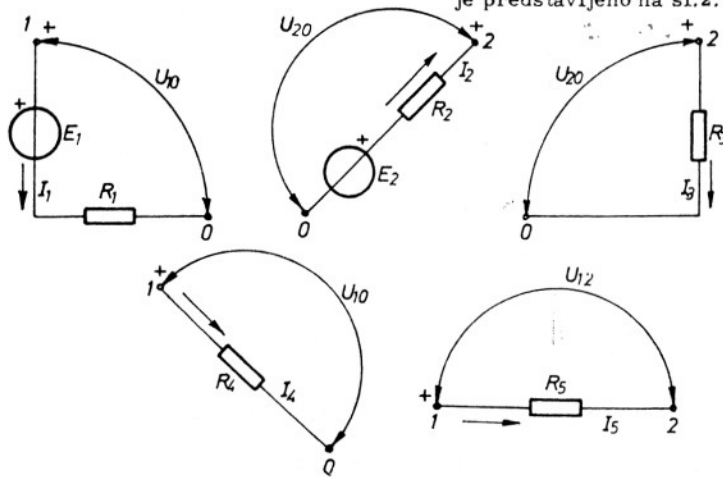
7° Usvajati referentne smerove za struje u granama. Za dato kolo referentni smerovi u granama su prikazani na sl. 2. 122. b. Intenziteti struja



Sl. 2. 122. b.

grana se određuju iz poznatih karakteristika grane (elektromotorne sile i otpornosti) i napona između krajeva grane.

Radi preglednijeg određivanja struje grane, može se ostatak kola prema svakoj grani zameniti naponom između krajeva grane. Ovo je predstavljeno na sl. 2. 122. c.



Sl. 2. 122. c.

Posmatrajući pojedina ekvivalentna prosta kola sa sl. 2. 122. c.

i primenjujući uopšteni Ohmov zakon, ima se:

$$I_1 = \frac{U_{10} - E_1}{R_1} = 50 \text{ mA},$$

$$I_2 = \frac{-U_{20} + E_2}{R_2} = 30 \text{ mA},$$

$$I_3 = \frac{U_{20}}{R_3} = -30 \text{ mA},$$

$$I_4 = \frac{U_{10}}{R_4} = 10 \text{ mA},$$

$$I_5 = \frac{U_{12}}{R_5} = 20 \text{ mA}.$$

2. 123. Za kolo prikazano slikom 2. 123. a. je poznato: $E_1 = 100V$,

$$E_2 = 80V, R_1 = 2k\Omega, R_2 = 5k\Omega$$

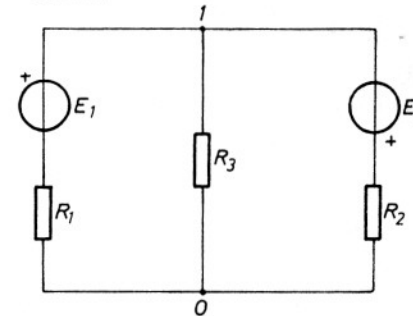
$$\text{i } R_3 = 1k\Omega.$$

Odrediti struje svih grana kola.

Rešenje:

Dato kolo ima

$$n_g = 3 \text{ grane i } n_{\check{c}} = 2 \text{ čvora.}$$



Sl. 2. 123. a.

Sistem jednačina koji bi trebalo rešavati, ako bi se kolo rešavalo metodom konturnih struja imao bi $n_k = n_g - (n_{\check{c}} - 1) = 2$ jednačine. Primena metode napona između čvorova traži rešavanje sistema od $m = n_{\check{c}} - 1 = 1$ jednačine. U ovom slučaju je, prema prethodnom, povoljnije primeniti metodu napona između čvorova.

Ako se čvor označen sa O usvoji za referentan, sistem jednačina je:

$$G_{11} U_{10} = I_I$$

Posmatrajući kolo, može se pisati:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) U_{10} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}$$

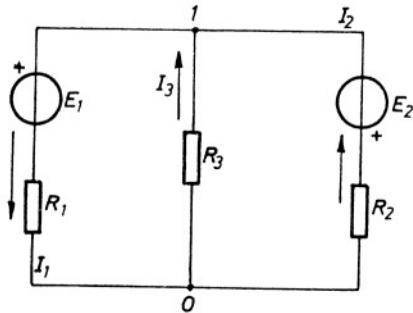
Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$1,7 \cdot 10^{-3} U_{10} = 34 \cdot 10^{-3}$$

pa je

$$U_{10} = 20V.$$

Usvajajući referentne smerove za struje kao na slici 2.123. b. ima se:



Sl. 2.123. b.

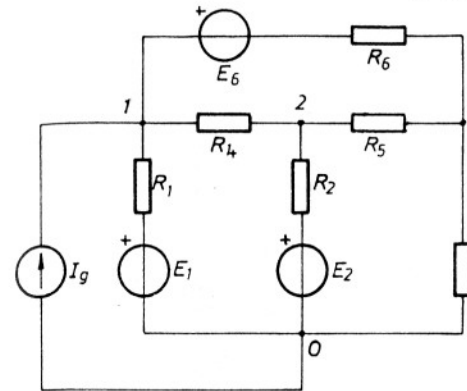
$$I_1 = \frac{U_{10} - E_1}{R_1} = -40 \text{ mA},$$

$$I_2 = \frac{-U_{10} - E_2}{R_2} = -20 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{-U_{10}}{R_3} = -20 \text{ mA}$$

2.124. Generatori elektromotornih sila $E_1 = 76V$, $E_2 = -6V$ i $E_6 = 46V$, generator struje $I_g = 20 \text{ mA}$, i otpornici otpornosti $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 400\Omega$, $R_4 = 200\Omega$, $R_5 = 100\Omega$ i $R_6 = 2 \text{ k}\Omega$ vezani su u kolo kao na slici 2.124.

Odrediti struje svih grana kola primenom metode napona izmedju čvorova.



Sl. 2.124.

Rešenje:

Usvajajući čvor označen sa

O za referentni sistem jednačina je:

$$G_{11} U_{10} + G_{12} U_{20} + G_{13} U_{30} = I_I$$

$$G_{21} U_{10} + G_{22} U_{20} + G_{23} U_{30} = I_{II}$$

$$G_{31} U_{10} + G_{32} U_{20} + G_{33} U_{30} = I_{III}$$

Posmatrajući sl. 2.124. je:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right) U_{10} - \frac{1}{R_4} U_{20} - \frac{1}{R_6} U_{30} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_6}{R_6} + I_g$$

$$-\frac{1}{R_4} U_{10} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) U_{20} - \frac{1}{R_5} U_{30} = \frac{E_2}{R_2}$$

$$-\frac{1}{R_6} U_{10} - \frac{1}{R_5} U_{20} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) U_{30} = -\frac{E_6}{R_6}$$

Unošenjem brojnih vrednosti poznatih veličina i rešavajući postavljene

ni sistem jednačina dobija se:

$$U_{10} = 26 \text{ V},$$

$$U_{20} = 14 \text{ V}$$

$$i \quad U_{30} = 10 \text{ V}.$$

Prema prethodnom je:

$$U_{12} = U_{10} - U_{20} = 12V,$$

$$U_{13} = U_{10} - U_{30} = 16V$$

i

$$U_{23} = U_{20} - U_{30} = 4V.$$

Struje grana datog kola su:

$$I_{10} = \frac{U_{10} - E_1}{R_1} = -25 \text{ mA},$$

$$I_{20} = \frac{U_{20} - E_2}{R_2} = 20 \text{ mA},$$

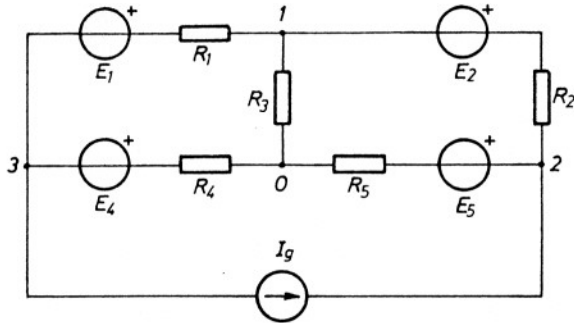
$$I_{30} = \frac{U_{30}}{R_3} = 25 \text{ mA} \quad \text{i}$$

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{R_4} = 60 \text{ mA},$$

$$I_{32} = \frac{-U_{23}}{R_5} = -40 \text{ mA},$$

$$I_{13} = \frac{U_{13} - E_6}{R_6} = -15 \text{ mA}.$$

2.125. Za kolo prikazano na slici 2.125. poznato je: $I_g = 25 \text{ mA}$,



Sl. 2.125.

$$E_1 = 12 \text{ V}, E_2 = 10 \text{ V},$$

$$E_4 = 26 \text{ V}, E_5 = 15 \text{ V},$$

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 2 \text{ k}\Omega,$$

$$R_3 = 1 \text{ k}\Omega, R_4 = 200 \Omega,$$

$$\text{i } R_5 = 5 \text{ k}\Omega.$$

Odrediti struje svih grana kola primenom metode napona izmedju čvorova.

Rezultat:

$$I_{10} = -10 \text{ mA},$$

$$I_{13} = 30 \text{ mA},$$

$$I_{20} = 5 \text{ mA},$$

$$I_{12} = -20 \text{ mA}$$

$$\text{i } I_{30} = 5 \text{ mA}.$$

2.126. U kolu prikazanom slikom 2.126. je poznato: $E_1 = 24 \text{ V}, E_2 = 60 \text{ V},$

$$E_4 = 90 \text{ V}, I_g = 6 \text{ mA}, R_1 = 2 \text{ k}\Omega,$$

$$R_2 = 2 \text{ k}\Omega, R_3 = 3 \text{ k}\Omega, R_4 = 500 \Omega$$

$$\text{i } R_6 = 6 \text{ k}\Omega.$$

Odrediti struje grana

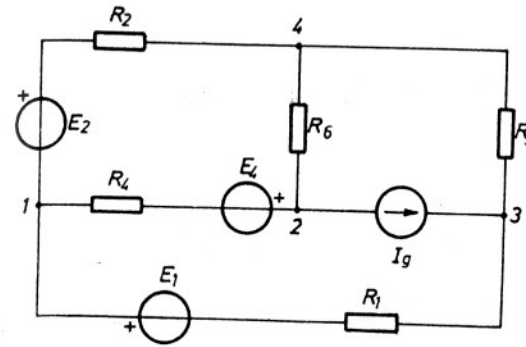
i snage koje grane primaju.

Rezultat:

Struje grana su:

$$I_{12} = 12 \text{ mA}, I_{13} = -18 \text{ mA},$$

Sl. 2.126.



$$I_{14} = 6 \text{ mA}, I_{24} = 6 \text{ mA} \quad \text{i} \quad I_{34} = -12 \text{ mA}.$$

Snage koje grane primaju su:

$$P_{12} = U_{12} I_{12} = -1008 \text{ mW},$$

$$P_{13} = U_{13} I_{13} = 216 \text{ mW},$$

$$P_{14} = U_{14} I_{14} = -288 \text{ mW},$$

$$P_{23} = U_{23} I_g = 432 \text{ mW},$$

$$P_{24} = U_{24} I_{24} = 216 \text{ mW}$$

$$\text{i } P_{34} = U_{34} I_{34} = 432 \text{ mW}.$$

2.127. Za razgranato kolo sa sl. 2.127. je poznato: $E_1 = 50 \text{ V},$

$$E_3 = 30 \text{ V}, I_g = 40 \text{ mA},$$

$$R_1 = 200 \Omega, R_2 = 500 \Omega,$$

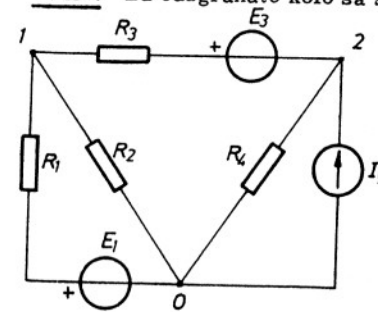
$$R_3 = 3 \text{ k}\Omega, \text{ i } R_4 = 10 \text{ k}\Omega.$$

Odrediti struje svih

grana kola.

Rezultat:

Primenom metode



Sl. 2.127.

napona između čvorova se dobija:

$$U_{10} = 40V \quad \text{i} \quad U_{20} = 100V.$$

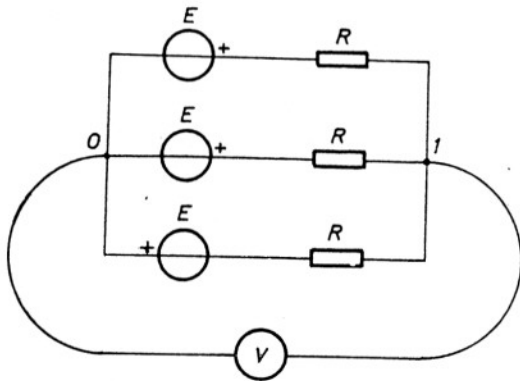
Struje grana su:

$$I_{10}(\text{kroz } R_2) = 80\text{mA}, \quad I_{20} = 10\text{mA},$$

$$I_{10}(\text{kroz } E_1 \text{ i } R_1) = -50\text{mA} \quad \text{i} \quad I_{12} = -30\text{mA}.$$

2.128. Tri jednaka generatora elektromotornih sila $E=30V$, i tri jednaka otpornika otpornosti $R = 100 \Omega$, vezani su u kolo kao na slici

2.128. Koliki napon pokazuje voltmetar zanemarljive provodnosti vezan između čvorova 1 i O?



Sl. 2.128.

dju čvorova 1 i O?

Rešenje:

Primenom metode

napona između čvorova je:

$$G_{11} U_{10} = I_I,$$

odnosno

$$\frac{3}{R} U_{10} = \frac{E}{R},$$

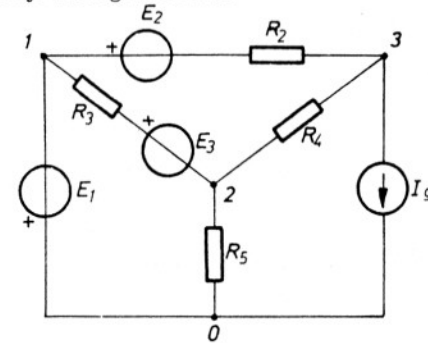
pa voltmetar pokazuje napon

$$U_{10} = \frac{E}{3} = 10V.$$

2.129. Za kolo prikazano slikom 2.129 je: $E_1 = 30V$, $E_2 = -22V$,

$E_3 = 12V$, $I_g = 23\text{mA}$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$, $R_3 = 1\text{k}\Omega$, $R_4 = 2,2\text{k}\Omega$ i $R_5 = 300\Omega$.

Odrediti struje svih grana kola:



Sl. 2.129.

Rešenje:

Za dato kolo je $m = n_{\xi} - 1 = 3$, pa se po metodi napona između čvorova određuju tri napona između pojedinih čvorova i referentnog. Posmatrajući kolo na sl. 2.129. se vidi da je napon između čvorova 1 i O određen elektromotornom silom E_1 i iznosi

$$U_{10} = -E_1 = -30V \dots \dots \dots (1)$$

Poznavanjem napona U_{10} i usvajanjem čvora označenog sa O za referentni, eliminiše se prva jednačina iz sistema jednačina po metodi napona između čvorova. Za određivanje napona U_{20} i U_{30} su dovoljne druga i treća jednačina iz sistema:

$$-\frac{1}{R_3} U_{10} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) U_{20} - \frac{1}{R_4} U_{30} = -\frac{E_3}{R_3} \dots \dots (2)$$

$$-\frac{1}{R_2} U_{10} - \frac{1}{R_4} U_{20} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) U_{30} = -\frac{E_2}{R_2} - I_g \dots \dots (3)$$

Unošenjem brojnih vrednosti zadatih veličina i određenog na-

pona U_{10} dobija se:

$$\frac{158}{33} U_{20} - \frac{15}{33} U_{30} = -42$$

$$i \quad -\frac{10}{22} U_{20} + \frac{21}{22} U_{30} = -27.$$

Iz prethodnog sistema su:

$$U_{20} = -12 \text{ V}$$

$$i \quad U_{30} = -34 \text{ V.}$$

Struje grana kola su:

$$I_{20} = \frac{U_{20}}{R_5} = -40 \text{ mA}, \quad I_{12} = \frac{U_{10} - U_{20} - E_3}{R_3} = -30 \text{ mA},$$

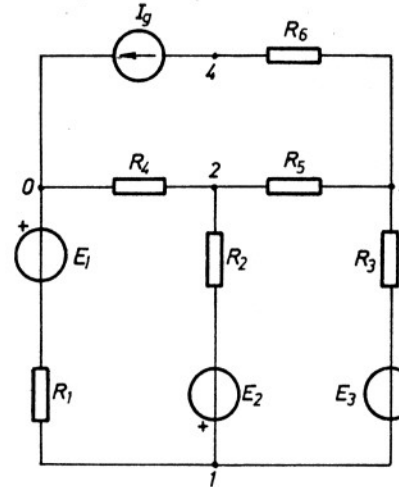
$$I_{13} = \frac{U_{10} - U_{30} - E_2}{R_2} = 13 \text{ mA} \quad i \quad I_{23} = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_4} = 10 \text{ mA}.$$

Postavljajući jednačinu za čvor 1 po prvom Kirhofovom zakonu za struju grane sa generatorom ems E_1 se dobija:

$$I_{10} = -I_{12} - I_{13} = 17 \text{ mA}.$$

2.130. Na slici 2.130 je prikazano razgranato kolo za koje je $I_g = 75 \text{ mA}$, $E_1 = 70 \text{ V}$, $E_2 = 30 \text{ V}$, $E_3 = 40 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$,

$R_4 = 100 \Omega$, $R_5 = 500 \Omega$ i $R_6 = 300 \Omega$.



Sl. 2.130.

Odrediti:

1° Napon između krajeva

strujnog generatora.

2° Snagu koju razvoja struj-

ni generator.

Rešenje:

1° Napon između

krajeva strujnog generatora se može

odrediti polazeći od izraza:

$$U_{04} = -U_{30} + R_6 I_g.$$

Napon U_{30} se može odrediti, primenom metode napona između

čvorova, iz sledećih jednačina:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) U_{10} - \frac{1}{R_2} U_{20} - \frac{1}{R_3} U_{30} = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}$$

$$-\frac{1}{R_2} U_{10} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) U_{20} - \frac{1}{R_5} U_{30} = -\frac{E_2}{R_2}$$

i

$$-\frac{1}{R_3} U_{10} - \frac{1}{R_5} U_{20} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) U_{30} = \frac{E_3}{R_3} - I_g.$$

Zamenom brojnih vrednosti i rešavanjem prethodnog sistema jedna-

čina dobijaju se:

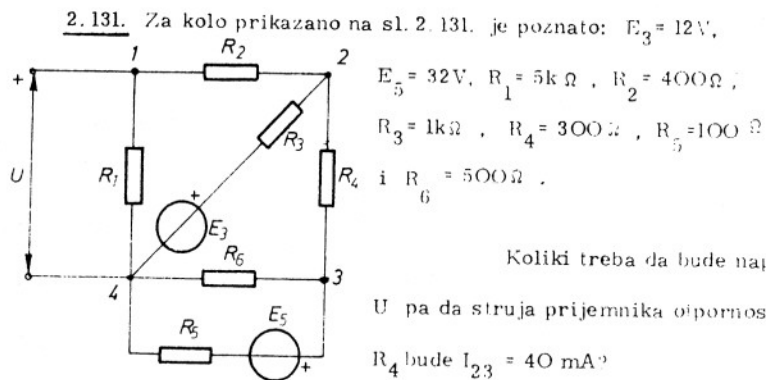
$$U_{10} = -20 \text{ V}, \quad U_{20} = -10 \text{ V} \quad i \quad U_{30} = -40 \text{ V}.$$

Napon između krajeva strujnog generatora je:

$$U_{04} = 62,5 \text{ V}.$$

2^o Snaga koju razvija strujni generator je:

$$P_{I_g} = U_{04} I_g = 4,6875W.$$



Sl. 2.131.

Koliki treba da bude napon

U pa da struja prijemnika otpornosti

R_4 bude $I_{23} = 40 mA$

Rešenje:

Prema zadatim po-

$$U_{23} = R_4 I_{23} = 12V.$$

Na osnovu oznaka na sl. 2.131. je:

$$U_{23} = U_{24} - U_{34},$$

$$U = U_{14}.$$

Usvajajući čvor 4 za referentni se ima:

$$-\frac{1}{R_2} U + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)(U_{23} + U_{34}) - \frac{1}{R_4} U_{34} = \frac{E_3}{R_3}$$

$$-\frac{1}{R_4} (U_{23} + U_{34}) + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) U_{34} = \frac{E_5}{R_5}$$

Iz prethodnih jednačina je:

$$U_{34} = 30V \quad \text{i} \quad U = 70V.$$

2.132. Za kolo prikazano slikom 2.132. je poznato: $E_1 = 9V$,

$$R_1 = 6\Omega, R_2 = 40\Omega, R_3 = 10\Omega,$$

$$R_4 = 100\Omega, R_5 = 60\Omega \text{ i } I_5 = 0,2A.$$

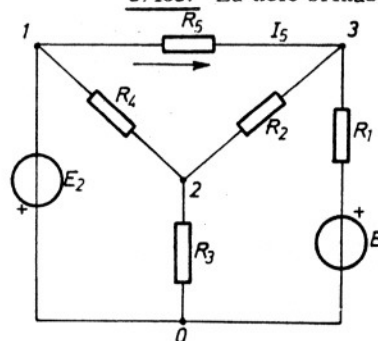
Određiti elektromotornu

silu E_2 .

Rezultat:

Elektromotorna

sila je $E_2 = -21,3V$.



Sl. 2.132.

2.133. Za kolo prikazano na sl. 2.133. poznate su otpornosti

$$R_1 = 100\Omega \text{ i } R_2 = 200\Omega. \text{ Određiti}$$

izraz za jačinu struje prijemnika

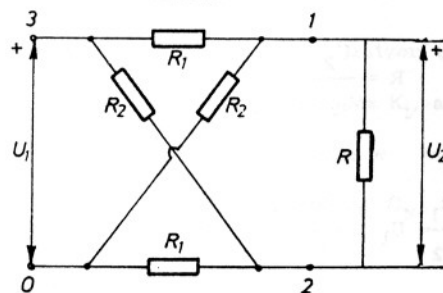
otpornosti R u funkciji napona

U_1 i U_2 (sl. 2.133).

Rešenje:

Jednačine po me-

todi napona između čvorova za



Sl. 2.133.

dato kolo su:

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U_{10} - \frac{1}{R} U_{20} - \frac{1}{R_1} U_{30} = 0$$

$$-\frac{1}{R} U_{10} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U_{20} - \frac{1}{R_2} U_{30} = 0$$

i

$$U_{30} = U_1.$$

Kako je

$$U_2 = U_{12} = U_{10} - U_{20}$$

to se iz prethodnih jednačina dobija:

$$U_2 = \frac{R(R_2 - R_1)}{2R_1R_2 + R(R_1 + R_2)} U_1$$

Izraz za struju prijemnika je:

$$I_{12} = \frac{U_2}{R} = \frac{R_2 - R_1}{2R_1R_2 + R(R_1 + R_2)} U_1$$

Smenjujući

$$R = \frac{U_2}{I_{12}}$$

u prethodni izraz dobija se:

$$I_{12} = \frac{R_2 - R_1}{2R_1R_2} U_1 - \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2} U_2$$

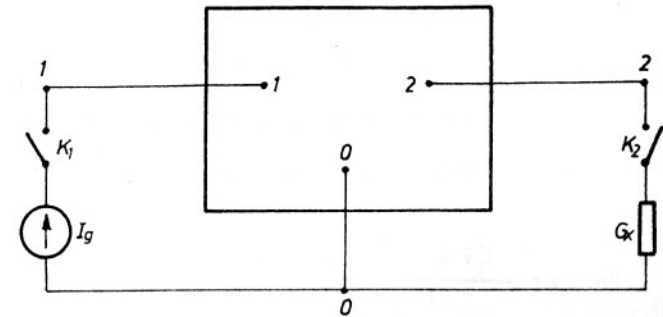
Zamenom brojnih vrednosti poznatih veličina izraženih jedinicama MKSA sistema se dobija:

$$I_{12} = 2,5 (U_1 - 3U_2) \text{ mA.}$$

2.134. Razgranato kolo ima tri čvora, koji su na sl. 2.134. označeni sa O, 1 i 2., i nalazi se u stacionarnom stanju. Relativni potencijal čvora 2 prema čvoru O je $V_2 = 4V$.

Zatvaranjem prekidača K_1 u kolo se uključuje generator struje

$I_g = 0,2A$. Pri ovome su priraštaji potencijala čvorova, prema prethodnom stacionarnom stanju u kolu, $\Delta V_1 = 8V$ i $\Delta V_2 = 5V$.



Sl. 2.134.

Kada se, zatim, zatvori prekidač K_2 potencijal čvora 2 postaje isti kao i pre zatvaranja prekidača K_1 , a priraštaj potencijala čvora 1, prema prethodnom stacionarnom stanju je $\Delta V_1' = -4V$.

Odrediti provodnost G_x .

Rešenje:

Za stacionarno stanje pre zatvaranja prekidača K_1 jedna-

čine po metodi napona između čvorova su:

$$G_{11} U_{10} + G_{12} U_{20} = I_I \quad \dots \quad (1)$$

$$G_{21} U_{10} + G_{22} U_{20} = I_{II} \quad \dots \quad (2)$$

Za stacionarno stanje u kolu posle zatvaranja prekidača K_1 jedna-

čine po metodi napona između čvorova su:

$$G_{11} U'_{10} + G_{12} U'_{20} = I'_I \quad \dots \quad (3)$$

$$G_{21} U'_{10} + G_{22} U'_{20} = I'_{II} \quad \dots \quad (4)$$

Pri ovome su:

$$U'_{10} = U_{10} + \Delta V_1.$$

$$U'_{20} = U_{20} + \Delta V_2$$

i

$$I'_I = I_I + I_g.$$

Oduzimajući jednačinu (1) od jednačine (3) i jednačinu (2) od jednačine (4) dobija se:

$$G_{11} \Delta V_1 + G_{12} \Delta V_2 = I_g \dots \dots \dots (5)$$

i

$$G_{21} \Delta V_1 + G_{22} \Delta V_2 = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Za stacionarno stanje, posle zatvaranje prekidača K_2 je:

$$G_{11} U''_{10} + G_{12} U_{20} = I'_I \dots \dots \dots (7)$$

i

$$G_{21} U''_{10} + G'_{22} U_{20} = I_{II} \dots \dots \dots (8)$$

gde su:

$$U''_{10} = U'_{10} + \Delta V'_1 = U_{10} + \Delta V_1 + \Delta V'_1$$

i

$$G'_{22} = G_{22} + G_x.$$

Oduzimanjem jednačine (1) od jednačine (7) i jednačine (2) od jednačine (8) dobija se:

$$G_{11} (\Delta V_1 + \Delta V'_1) = I_g \dots \dots \dots (9)$$

i

$$G_{12} (\Delta V_1 + \Delta V'_1) + G_x U_{20} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

Iz jednačine (9) je:

$$G_{11} = \frac{I_g}{\Delta V_1 + \Delta V'_1} = 50 \text{ mS.}$$

Iz jednačine (5) je:

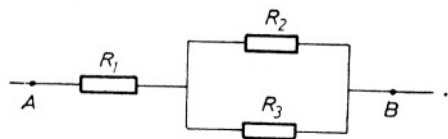
$$G_{12} = \frac{I_g - G_{11} \Delta V_1}{\Delta V_2} = -40 \text{ mS.}$$

Provodnost G_x dobija se iz jednačine (10)

$$G_x = - \frac{G_{12} (\Delta V_1 + \Delta V'_1)}{U_{20}} = 40 \text{ mS.}$$

2.7. TRANSFIGURACIJE KOLA

2.135. Deo razgranatog električnog kola je prikazan na sl. 2.135. a.

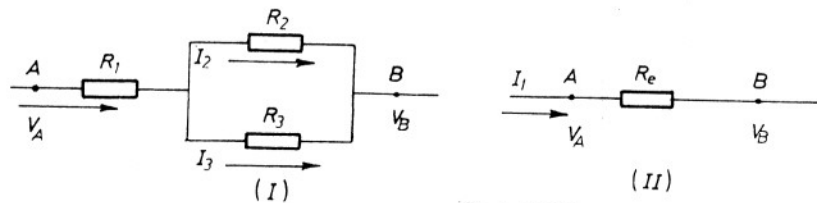


Sl. 2.135. a.

promene struje i potencijali.

Rešenje:

U netransfigurisanom delu kola se neće promeniti struje i potencijali, ako potencijali tačaka A i B i struja I_1 (sl. 2.135. b.) budu isti pre i posle transfiguracije.



Sl. 2.135. b.

Prema oznakama sa sl. 2.135. b. (I) je:

$$I_1 = I_2 + I_3 \dots\dots\dots (1)$$

$$-R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

i

$$V_A = V_B + R_2 I_2 + R_1 I_1 \dots\dots (3)$$

Iz (1) i (2) je:

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1$$

pa se zamenom u izraz (3) dobija:

$$V_A = V_B + (R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}) I_1 \dots\dots\dots (4)$$

Za deo kola prikazan na sl. 2.135. b. (II) je

$$V_A = V_B + R_e I_1 \dots\dots\dots (5)$$

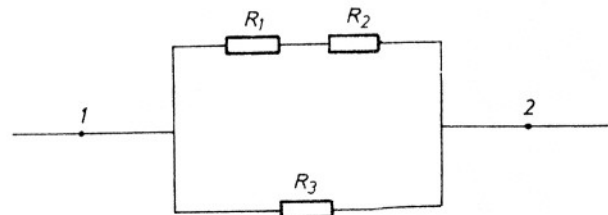
Upoređujući izraze (4) i (5) se zaključuje da mora biti

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 520 \Omega$$

Ovakva veza otpornika se često zove redno - paralelna.

2.136. Odrediti otpornost ekvivalentnog otpornika za grupu ot-

pornika prikazanu na sl. 2.136. a. Poznato je: $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 250 \Omega$ i $R_3 = 200 \Omega$



Sl. 2.136. a.

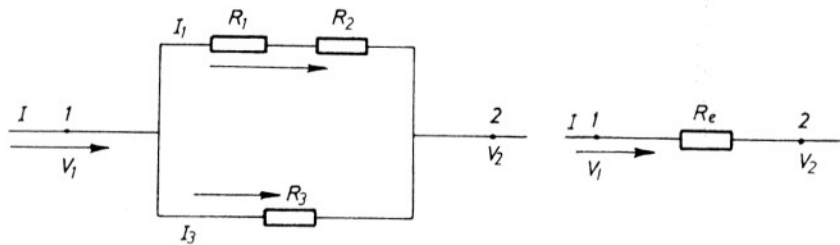
Rešenje:

Prema oznakama sa slike 2.136. b. je:

$$V_1 = V_2 + \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} I \dots \dots \dots (1)$$

i

$$V_1 = V_2 + R_e I \dots \dots \dots (2)$$



Sl. 2.136. b.

Upoređujući izraze (1) i (2) dobija se:

$$R_e = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} = 120 \Omega$$

2.137. Za grupu otpornika prikazanu na slici 2.137. a. nacrtati

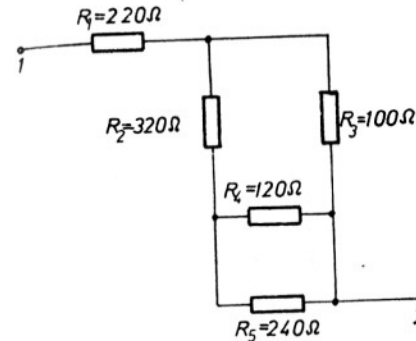
električnu šemu i odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka 1 i 2.



Sl. 2.137. a.

Rešenje:

Ekvivalentna električna šema za zadatu grupu otpornika je prikazana na sl. 2.137. b.

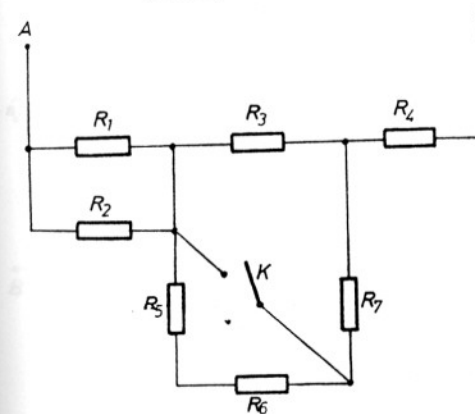


Ekvivalentna otpornost grupe između tačaka 1 i 2 je:

$$R_{12} = R_1 + \frac{R_3 \left(R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_3 + R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} = 300 \Omega$$

Sl. 2.137. b.

2.138. Poznate su sve otpornosti otpornika vezanih u grupu



kao na slici 2.138. a. :

- $R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 600 \Omega$,
- $R_3 = 600 \Omega$, $R_4 = 180 \Omega$,
- $R_5 = 200 \Omega$, $R_6 = 400 \Omega$
- i $R_7 = 300 \Omega$.

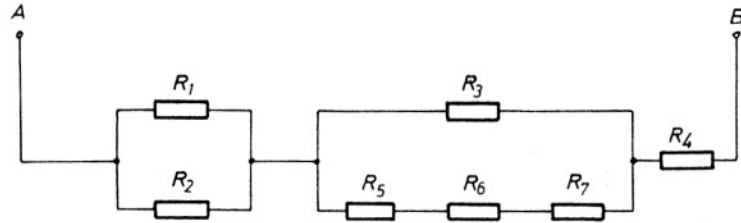
Odrediti otpornost R_e ekvivalentnog otpornika za prikazanu grupu kada je:
 1° Prekidač K otvoren.
 2° Prekidač K zatvoren.

Sl. 2.138. a.

Rešenje:

1° Kada je prekidač K otvoren, data grupa otpornika se može predstaviti kao na slici 2.138. b.

2 - 150

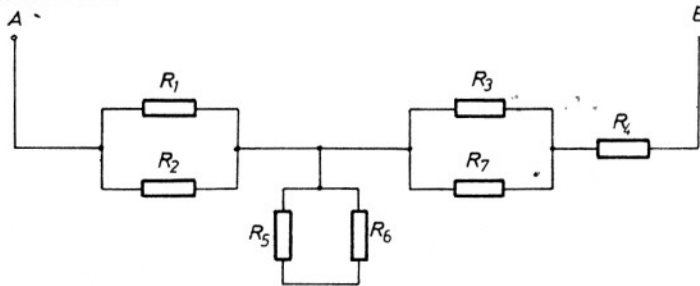


Sl. 2. 138. b.

Imajući u vidu zadatke 2. 135 i 2. 136, može se neposredno pisati izraz za otpornost R_e ekvivalentnog otpornika:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 (R_5 + R_6 + R_7)}{R_3 + R_5 + R_6 + R_7} + R_4 = 740 \Omega$$

2^o Pri zatvorenom prekidaču K, grupa otpornika se može prikazati kao na slici 2. 138. c.



Sl. 2. 138. c.

Ekvivalentna otpornost, u ovom slučaju je:

$$R'_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_7}{R_3 + R_7} + R_4 = 580 \Omega$$

2. 139. Prijemnici provodnosti $G_1 = 2 \text{ mS}$, $G_2 = 5 \text{ mS}$, $G_3 = 4 \text{ mS}$,

$G_4 = 2 \text{ mS}$, $G_5 = 5 \text{ mS}$ i $G_6 = 2 \text{ mS}$,

vezani su u grupu kao na sl. 2. 139.

Odrediti ekvivalentnu provodnost grupe između tačaka A i B.

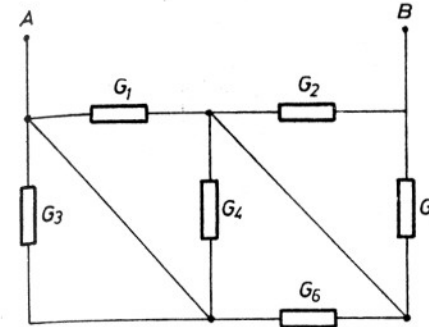
Rezultat:

Ekvivalentna provod-

nost grupe je:

$$G_{AB} = \frac{(G_1 + G_4 + G_6)(G_2 + G_5)}{G_1 + G_4 + G_6 + G_2 + G_5} = 3,75 \text{ mS}$$

Sl. 2. 139.



2. 140. Otpornici otpornosti $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 150 \Omega$,

$R_4 = 300 \Omega$, $R_5 = 60 \Omega$,

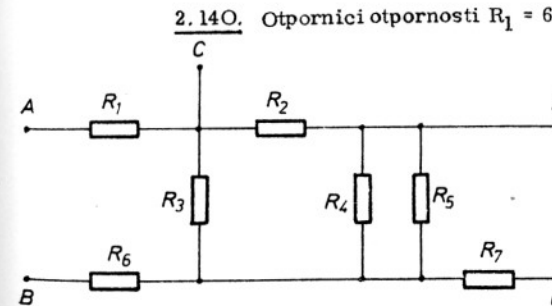
$R_6 = 100 \Omega$ i $R_7 = 200 \Omega$,

vezani su u grupu kao na

slici 2. 140.

Odrediti ekvivalentne otpornosti između svih pa-

rova označenih tačaka.



Sl. 2. 140.

Rezultat:

1^o $R_{AB} = 220 \Omega$.

2^o $R_{AC} = 60 \Omega$.

3^o $R_{AD} = 100 \Omega$.

4^o $R_{AF} = 320 \Omega$.

5^o $R_{BC} = 160 \Omega$.

6^o $R_{BD} = 140 \Omega$.

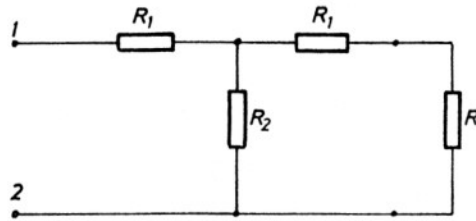
7^o $R_{BF} = 300 \Omega$.

8^o $R_{CD} = 40 \Omega$.

9^o $R_{CF} = 260 \Omega$.

10^o $R_{DF} = 240 \Omega$.

2.141. Za deo kola prikazan na slici 2.141 je poznato: $R_1 = 200\Omega$ i



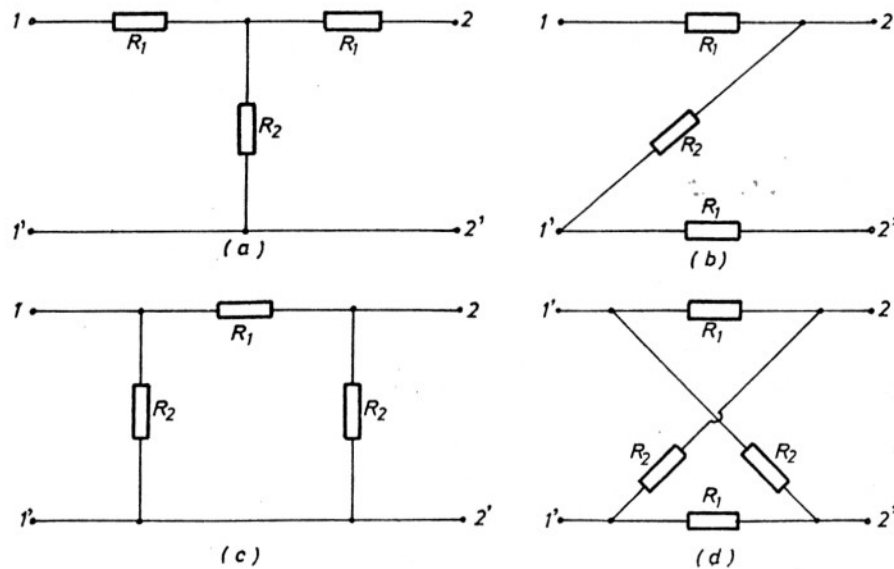
$R_2 = 800\Omega$. Odrediti otpornost R tako da ekvivalentna otpornost izmedju tačaka 1 i 2 bude $R_e = R$.

Sl. 2.141.

Rezultat: Otpornost R treba da bude:

$$R = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)} = 600\Omega$$

2.142. Za kola prikazana na slici 2.142. je poznato:



Sl. 2.142.

1^o Ekvivalentna otpornost $R_{e1} = 320\Omega$ izmedju tačaka 1 i 1' kada su tačke 2 i 2' kratko spojene, i

2^o Ekvivalentna otpornost $R_{e2} = 500\Omega$ izmedju tačaka 1 i 1' kada su tačke 2 i 2' razdvojene.

Odrediti otpornosti R_1 i R_2 .

Rezultat:

Za kolo prikazano na slici 2.142. a. tražene otpornosti su:

$$R_1 = 200\Omega \quad \text{i} \quad R_2 = 300\Omega$$

Za kolo prikazano na slici 2.142. b. su:

$$R_1 = 200\Omega \quad \text{i} \quad R_2 = 300\Omega$$

Za kolo prikazano na slici 2.142. c su:

$$R_1 = \frac{1600}{3}\Omega \quad \text{i} \quad R_2 = 800\Omega$$

Za kolo prikazano na slici 2.142. d. su:

$$R_1 = 800\Omega \quad \text{i} \quad R_2 = 200\Omega$$

2.143. Za deo kola prikazan slikom 2.143. a. je poznato: $R_1 = 100\Omega$

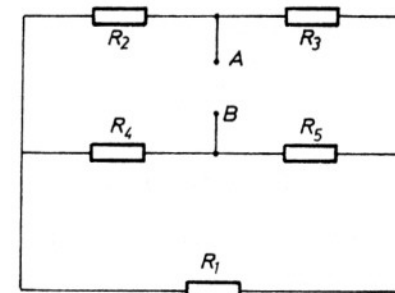
$$R_2 = 50\Omega, \quad R_3 = 100\Omega, \quad R_4 = 540\Omega$$

$$\text{i} \quad R_5 = 520\Omega.$$

Odrediti ekvivalentnu otpornost izmedju tačaka A i B.

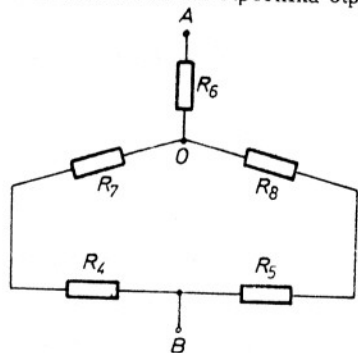
Rešenje:

Radi lakšeg odredjivanja ekvivalentne otpornosti izmedju tačaka A i B, može se trougao otpornika otpornosti R_1, R_2, R_3 transfigurirati



Sl. 2.143. a.

sati u trokraku zvezdu otpornika otpornosti R_6, R_7, R_8 (sl. 2.138. b.).



Sl. 2.143. b.

Otpornosti ekvivalentne zvezde su:

$$R_6 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 20 \Omega$$

$$R_7 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 20 \Omega$$

i

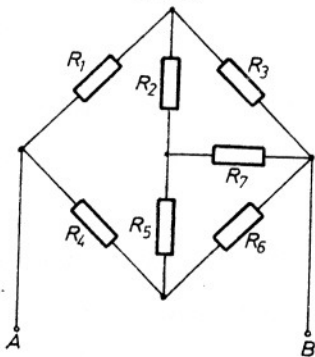
$$R_8 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 40 \Omega$$

Prema slici 2.143. b., ekvivalentna otpornost je:

$$R_{AB} = R_6 + \frac{(R_4 + R_7)(R_5 + R_8)}{R_4 + R_7 + R_5 + R_8} = 300 \Omega$$

2.144. Otpornici otpornosti $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \Omega$ i $R_4 = R_5 =$

$= R_6 = R_7 = 200 \Omega$, vezani su kao na slici 2.144.



Sl. 2.144.

otpornosti R_1, R_2, R_3 i R_4, R_5, R_6 transfigurisati u trougle otpornika.

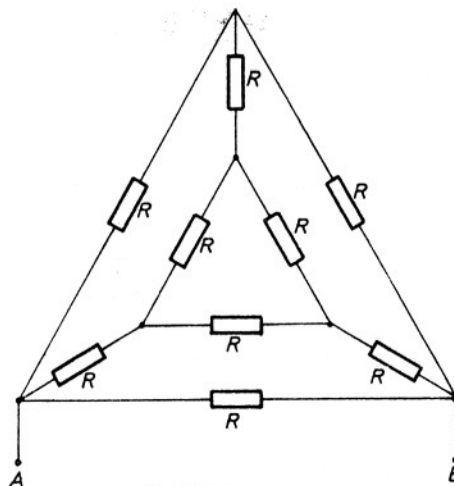
Ekvivalentna otpornost date grupe otpornika izmedju tačaka A i

B je:

$$R_e = 120 \Omega$$

2.145. Odrediti ekvivalentnu otpornost izmedju tačaka A i B

za grupu otpornika prikazanu na slici 2.145, kada je $R = 150 \Omega$



Sl. 2.145.

Rezultat:

Ekvivalentna

otpornost je:

$$R_{AB} = \frac{8}{15} R = 80 \Omega$$

2.146. Za deo kola prikazan na slici 2.146. poznate su otpornosti

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 200 \Omega, R_3 = 500 \Omega$$

$$R_4 = 300 \Omega, R_5 = 1 \text{ k} \Omega, R_6 = 150 \Omega$$

i $R_7 = 150 \Omega$

Odrediti ekvivalentnu ot-

pornost izmedju tačaka A i B.

Rezultat:

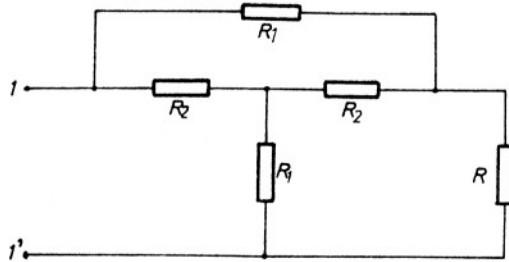
Ekvivalentna otpornost iz-

medju tačaka A i B je:

$$R_{AB} = 250 \Omega$$

Sl. 2.146.

2.147. Odrediti otpornost R tako da ekvivalentna otpornost za



Sl. 2.147.

deo kola prikazan na slici 2.147. izmedju tačaka

1 i 1' bude $R_e = 620 \Omega$.

Poznato je $R_1 = 1,5 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 500 \Omega$.

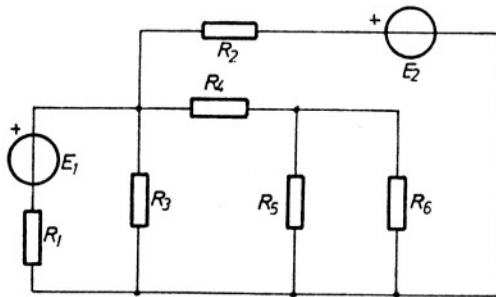
Rezultat:

Potrebno je da bude

$$R = 100 \Omega$$

2.148. Elektromotorne sile generatora u kolu prikazanom na

slici 2.148. a. su $E_1 = 5 \text{ V}$ i $E_2 = 32 \text{ V}$. Otpornosti otpornika su $R_1 = 800 \Omega$,



Sl. 2.148. a.

$R_2 = 150 \Omega$, $R_3 = 600 \Omega$,
 $R_4 = 180 \Omega$, $R_5 = 300 \Omega$ i
 $R_6 = 200 \Omega$.

Odrediti snage koje razvijaju generatori.

Rešenje:

Radi odredjivanja snaga koje razvijaju generatori u kolu potrebno je odrediti struje kroz generatore. Struje ostalih grana (koje ne sadrže generatore) nije potrebno odredjivati, pa se transfiguracijom dela kola sa ovim strujama, kao na sl. 2.148. b., brže dolazi do rešenja.

Pri ovoj transfiguraciji je:

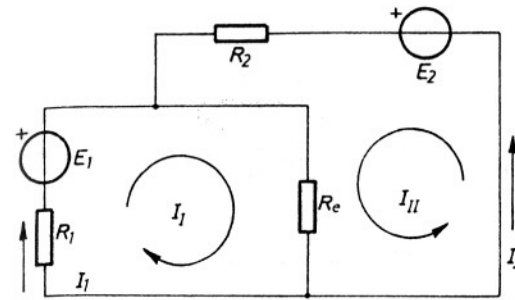
$$R_e = \frac{R_3 \left(R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right)}{R_3 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}}$$

odnosno $R_e = 200 \Omega$

Prema slici 2.148. b. je:

$$(R_1 + R_e)I_I + R_e I_{II} = E_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$R_e I_I + (R_e + R_2)I_{II} = E_2 \dots \dots \dots (2)$$



Sl. 2.148. b.

Iz prethodnih jednačina se dobija:

$$I_I = -15 \text{ mA} \quad \text{i} \quad I_{II} = 100 \text{ mA.}$$

Struje grana sa generatorima su:

$$I_1 = I_I = -15 \text{ mA} \quad \text{i} \quad I_2 = I_{II} = 100 \text{ mA}$$

Snage koje razvijaju generatori su:

$$P_{E_1} = E_1 I_1 = -75 \text{ mW} \quad \text{i} \quad P_{E_2} = E_2 I_2 = 3,2 \text{ W.}$$

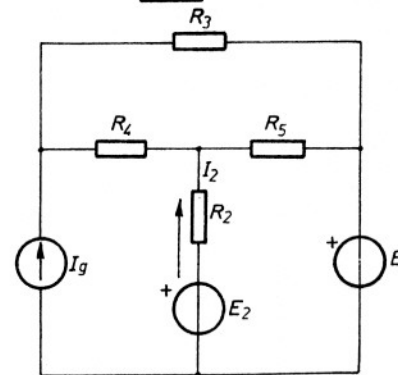
2.149. Za kolo prikazano na slici 2.149. a. je poznato: $I_g = 0,3 \text{ A}$.

$E_2 = 40 \text{ V}$, $R_2 = 140 \Omega$, $R_3 = 210 \Omega$,
 $R_4 = 420 \Omega$, $R_5 = 105 \Omega$ i $I_2 = 0,1 \text{ A}$.

Odrediti elektromotornu silu E_1 .

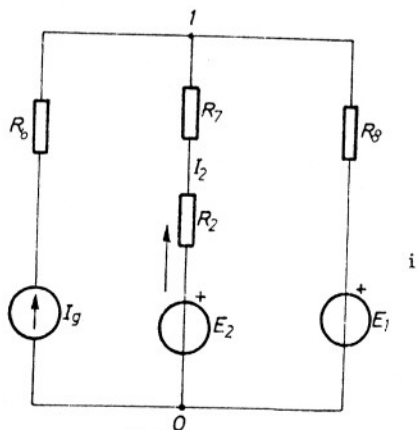
Rešenje:

Radi lakšeg odredjivanja elektromotorne sile E_1 pogodno je trougao otpornika otpornosti R_3 , R_4 , R_5



Sl. 2.149. a.

transfigurisati u trokraku zvezdu otpornika otpornosti R_6, R_7, R_8 kao na



Sl. 2. 149. b.

slici 2. 149. b. Pri ovome su:

$$R_6 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = 120 \Omega$$

$$R_7 = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 60 \Omega$$

$$R_8 = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 30 \Omega$$

Sa slike 2. 149. b. je i

$$U_{10} = E_2 - (R_2 + R_7) I_2 = 20V.$$

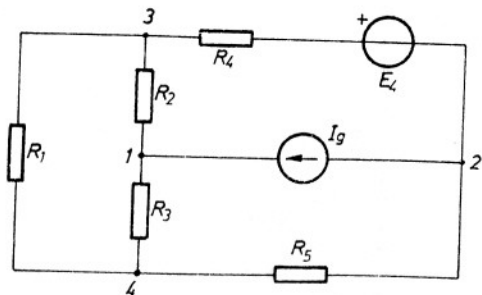
Za usvojeni referentni smer za E_1 se, po metodi napona izmedju čvorova, ima:

$$\left(\frac{1}{R_2 + R_7} + \frac{1}{R_8} \right) U_{10} = I_g + \frac{E_2}{R_2 + R_7} + \frac{E_1}{R_8}$$

Iz predhodne jednačine je:

$$E_1 = R_8 \left[\left(\frac{1}{R_2 + R_7} + \frac{1}{R_8} \right) U_{10} - I_g - \frac{E_2}{R_2 + R_7} \right] = 8V.$$

2. 150. U kolu prikazanom na slici 2. 150 je: $E_4 = 40V, I_g = 10mA,$



Sl. 2. 150.

$$R_1 = 3 k \Omega, R_2 = 5 k \Omega,$$

$$R_3 = 2 k \Omega, R_4 = 500 \Omega,$$

$$i R_5 = 400 \Omega$$

Odrediti snagu koju razvija strujni generator.

Rezultat:

Snaga je

$$P_I = U_{12} I_g = 0,3W$$

2. 151. Elektromotorne sile u kolu prikazanom na slici 2. 151. a.

su $E_1 = 52V$ i $E_2 = 65V,$ struja strujnog generatora je $I_g = 10mA,$ a otpornosti

otpornika su $R_3 = 200 \Omega,$

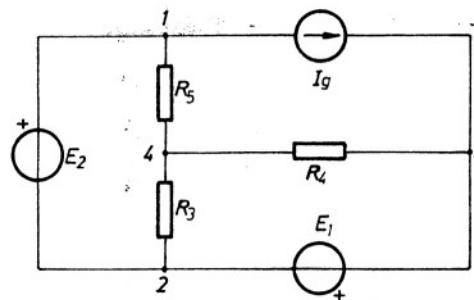
$R_4 = 1k \Omega$ i $R_5 = 2k \Omega$

Odrediti snage koje razvijaju generatori.

Rešenje:

Radi određivanja snaga koje razvijaju generatori

potrebno je odrediti struje

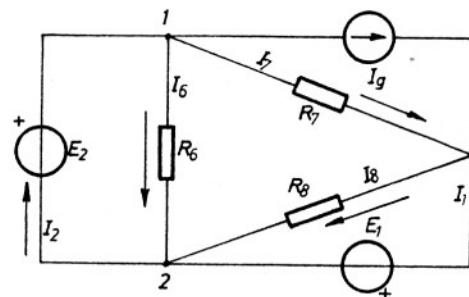


Sl. 2. 151. a.

kroz naponske generatore i napon izmedju krajeva strujnog generatora.

S obzirom na sastav datog kola pogodno je zvezdu otpornika otpornosti R_3, R_4 i R_5 transfigurisati u trougao otpornika otpornosti R_6, R_7 i $R_8,$

kao na slici 2. 151. b. Otpornosti ekvivalentnog trougla su:



Sl. 2. 151. b.

$$R_6 = 2,6 k \Omega,$$

$$R_7 = 13 k \Omega$$

$$i R_8 = 1,3 k \Omega$$

Ekvivalentno kolo

(sl. 2. 151. b) se lako rešava neposrednom primenom

Kirhofovih zakona. Prema referentnim smerovima za struje, označenim na slici

2. 151. b., su:

$$I_6 = \frac{E_2}{R_6} = 25 mA,$$

$$I_7 = \frac{-E_1 + E_2}{R_7} = 1 mA,$$

$$I_8 = \frac{E_1}{R_8} = 40 \text{ mA},$$

$$I_1 = -I_g - I_7 + I_8 = 29 \text{ mA}$$

i

$$I_2 = I_6 + I_g + I_7 = 36 \text{ mA}.$$

Napon između krajeva 3 i 1 strujnog generatora je:

$$U_{31} = -R_7 I_7 = -13 \text{ V}.$$

Snage koje razvijaju elektromotorne sile E_1 i E_2 su:

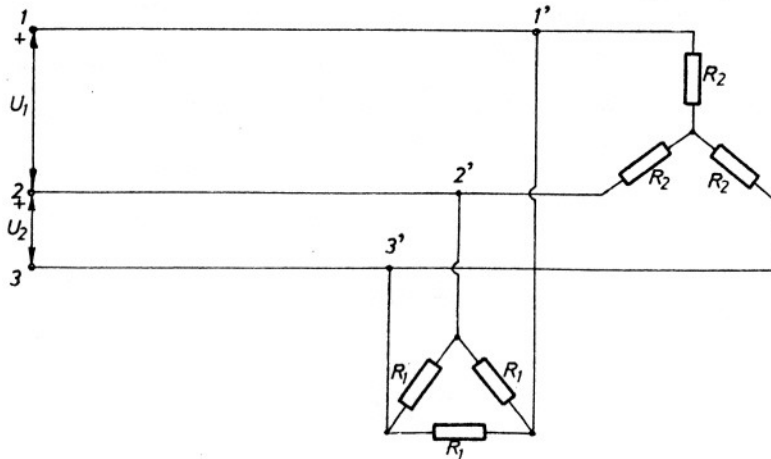
$$P_{E_1} = E_1 I_1 = 1,508 \text{ W} \quad \text{i} \quad P_{E_2} = E_2 I_2 = 2,34 \text{ W}.$$

Snaga koju razvija strujni generator je:

$$P_{I_g} = U_{31} I_g = -0,13 \text{ W}.$$

2.152. Naponi između napojnih provodnika u kolu na slici 2.152.

su $U_1 = U_2 = 120 \text{ V}$. Otpornosti prijemnika su $R_1 = 200 \Omega$ i $R_2 = 100 \Omega$. Odrediti struje u napojnim provodnicima. Zanemariti padove napona duž provodnika.



Rezultat: Intenziteti struja u napojnim provodnicima su:

$$I_{11'} = 3 \text{ A},$$

$$I_{22'} = 0$$

i

$$I_{33'} = -3 \text{ A}.$$

2.153. U kolu na slici 2.153. a. je poznato: $E = 10 \text{ V}$, $R_1 = 180 \Omega$,

$$R_2 = 60 \Omega, \quad R_3 = 200 \Omega,$$

$$R_4 = R_5 = 200 \Omega,$$

$$R_6 = R_7 = R_8 = 100 \Omega,$$

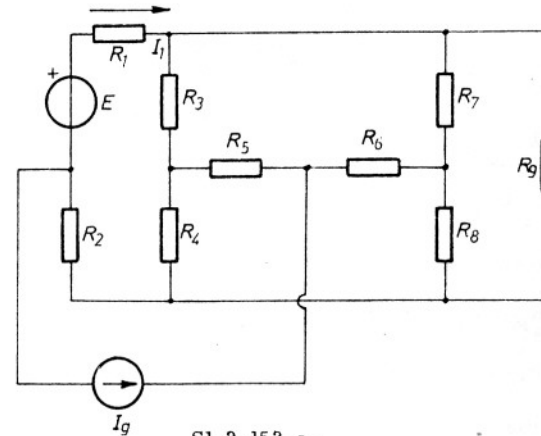
$$R_9 = 200 \Omega \quad \text{i} \quad I_1 = 0,1 \text{ A}.$$

Odrediti struju strujnog generatora I_g .

Rešenje:

Radi lakšeg određivanja

struje strujnog generatora



Sl. 2.153. a.

potrebno je transfigurirati kolo. Transfiguracijom zvezda otpornika otpornosti R_3, R_4, R_5 i R_6, R_7, R_8 u trougle otpornika otpornosti R_{10}, R_{11}, R_{12} i

R_{13}, R_{14}, R_{15} kolo dobija oblik kao na slici 2.153. b.

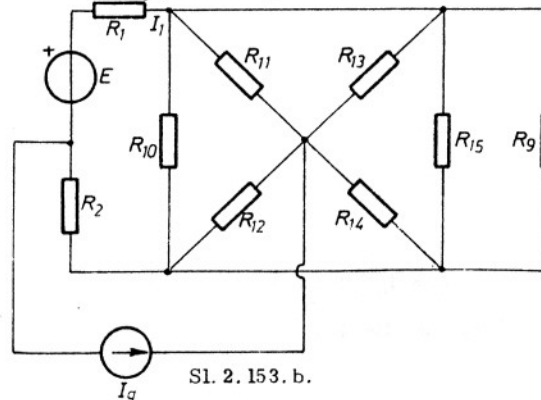
Pri ovome su:

$$R_{10} = R_{11} = R_{12} = 600 \Omega$$

i

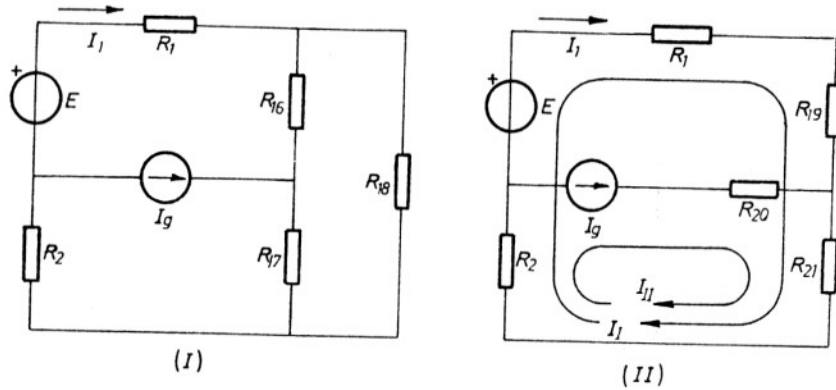
$$R_{13} = R_{14} = R_{15} = 300 \Omega$$

Kolo sa sl. 2.153. b. se i dalje može transfigurirati



Sl. 2.153. b.

i prikazati kao na slici 2. 153. c (I) i (II).



Sl. 2. 153. c.

Pri ovoj transfiguraciji su:

$$R_{16} = R_{17} = 200 \Omega$$

$$R_{18} = 100 \Omega$$

$$R_{19} = R_{21} = 40 \Omega$$

i

$$R_{20} = 80 \Omega$$

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 2. 153. c. (II)

je

$$(R_1 + R_{19} + R_{21} + R_2) I_1 + (R_{21} + R_2) I_g = E$$

Iz prethodne jednačine se dobija:

$$I_g = -0,22 \text{ A}$$

2. 154. Strujni generator struje I_g i unutrašnje provodnosti G i prijemnik otpornosti R_p su vezani u kolo kao na slici 2. 154. a. Odrediti elektromotornu

silu E i unutrašnju otpornost R_i naponskog generatora kojim se može zameniti strujni generator, a da se pri tome u prijemniku ne promeni struja i potencijali

njegovih krajeva.

Rešenje:

Prema usvojenim referentnim smerovima za struje kao na slici

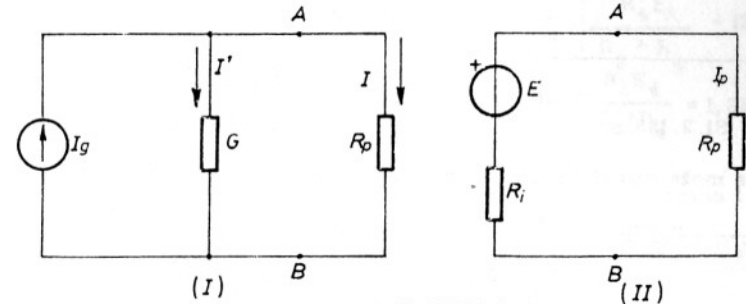
2. 154. b. (I) je :

$$V_A = V_B + \frac{I'}{G}$$

i

$$I' = I_g - I_p$$

$$\text{odnosno } V_A = V_B - \frac{I_p}{G} + \frac{I_g}{G} \dots \dots \dots (1)$$



Sl. 2. 154. b.

Prema slici 2. 154. b. (II) je:

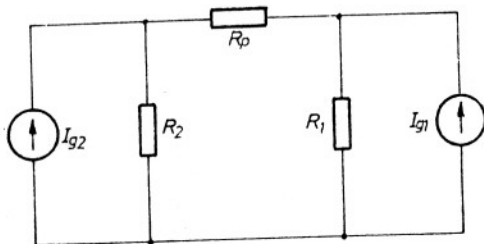
$$V_A = V_B - R_i I_p + E \dots \dots \dots (2)$$

Generatori će prema prijemniku (prema ostatku kola) biti ekvivalentni ako su potencijali V_A i V_B i struja I_p isti u oba slučaja. Imajući ovo u vidu i upoređujući izraze (1) i (2), dobija se:

$$R_i = \frac{1}{G} \quad \text{i} \quad E = \frac{I_g}{G}$$

Pri ovome su elektromotorna sila E i struja strujnog generatora I_g vezane za referentne smerove kao na slici 2.154. b, o čemu treba voditi računa prilikom ove transfiguracije.

2.155. Strajni generatori struja $I_{g1} = 40 \text{ mA}$ i $I_{g2} = 30 \text{ mA}$ i



Sl. 2.155. a.

otpornici otpornosti $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$ i $R_p = 400 \Omega$ vezani su u kolo kao na slici 2.155. a.

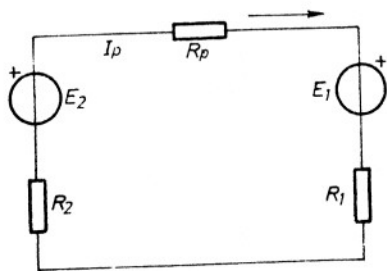
Odrediti snagu otpornika

otpornosti R_p .

Rešenje:

Imajući u vidu zadatak

2.154. kolo se može transfigurisati i predstaviti kao na slici 2.155. b. Pri ovo-



Sl. 2.155. b.

me su:

$$E_1 = R_1 I_{g1} = 4V$$

$$E_2 = R_2 I_{g2} = 15V$$

Struja kroz otpornik otpornosti R_p je:

$$I_p = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2 + R_p} = 11 \text{ mA.}$$

Snaga otpornika otpornosti R_p je:

$$P_{R_p} = R_p I_p^2 = 48,4 \text{ mW.}$$

2.156. Odrediti napon U_{12} u kolu prikazanom na slici 2.156. a.

za koje je: $E_1 = 20V$, $E_3 = 30V$, $I_g = 40 \text{ mA}$, $R_1 = 500 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$,

$R_3 = 3k \Omega$ i $R_4 = 2k \Omega$.

Rešenje:

Napon U_{12} se može od-

rediti iz ekvivalentnog prostog kola sa slike 2.156. b., koje se dobija transfiguracijom datog kola.

Pri ovoj transfiguraciji

su:

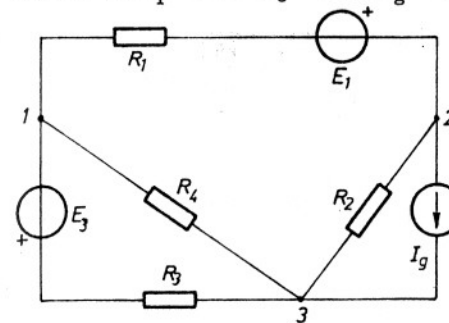
$$E'_2 = R_2 I_g = 12V,$$

$$E'_3 = \frac{R_4 E_3}{R_3 + R_4} = 12V$$

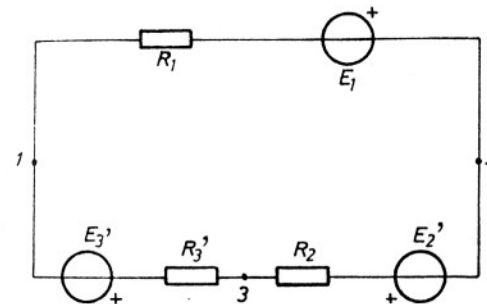
$$R'_3 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 1,2k \Omega.$$

Napon između tačaka 1 i 2 je:

$$U_{12} = -E_1 + R_1 \frac{E_1 + E'_2 - E'_3}{R_1 + R_2 + R'_3} = -15V.$$



Sl. 2.156. a.



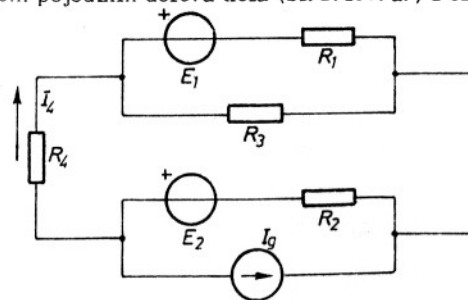
Sl. 2.156. b.

2.157. Odrediti struju u prijemniku otpornosti R_4 transfigura-

cijom pojedinih delova kola (sl. 2.157. a.) Poznato je: $E_1 = 20V$, $E_2 = 74V$, $I_g = 0,4A$

$R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$,

$R_3 = 300 \Omega$ i $R_4 = 100 \Omega$.

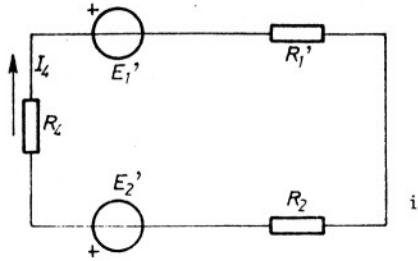


Sl. 2.157. a.

Rešenje:

Posle transfiguracije delova kola sa paralelnim granama

dobija se prosto kolo kao na slici 2.157. b., pri čemu su:



$$E'_1 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E_1 = 12V,$$

$$R'_1 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 120 \Omega$$

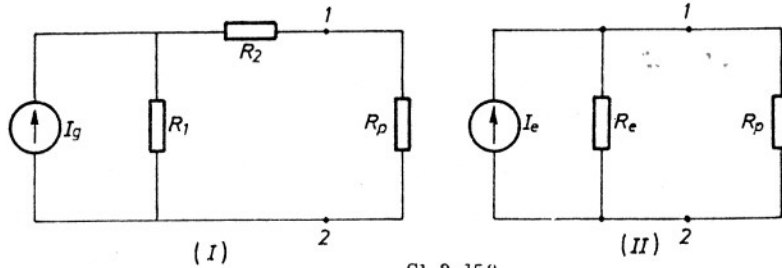
$$E'_2 = E_2 - R_2 I_g = 42V.$$

Sl. 2.157. b.

Struja prijemnika otpornosti R_4 je

$$I_4 = \frac{E'_2 - E'_1}{R'_1 + R_2 + R_4} = 0,1A.$$

2.158. Za kolo na slici 2.158(I) je poznato: I_g , R_1 i R_2 . Kada se dato kolo transfiguriraše u kolo kao na sl. 2.158 (II), odrediti I_e i R_e .



Sl. 2.158.

Rezultat:

Prema referentnim smerovima za I_g i I_e kao na slici

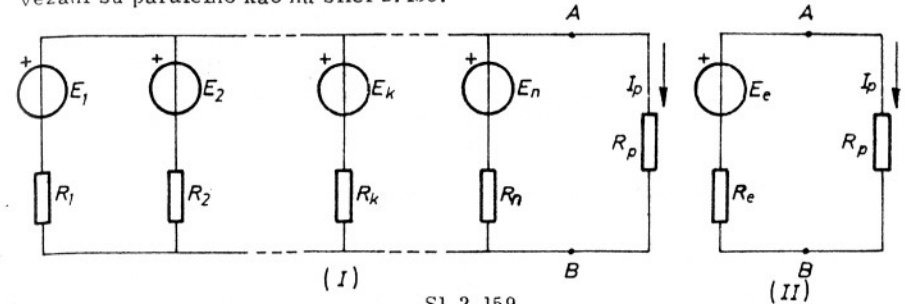
2.158. je:

$$I_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_g$$

$$R_e = R_1 + R_2$$

2.159. Prijemnik otpornosti R_p i n realnih naponskih generatora

vezani su paralelno kao na slici 2.159.



Sl. 2.159.

Odrediti izraze za elektromotornu silu E_e i unutrašnju otpornost R_e ekvivalentnog generatora (sl. 2.159-II) za n paralelno vezanih realnih naponskih generatora.

Rešenje:

Usvajajući čvor B za referentni u oba kola i primenjujući

metodu napona između čvorova, ima se:

za kolo na sl. 2.159(I):

$$\left(\frac{1}{R_p} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right) U_{AB} = \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k}, \quad R_k \neq 0 \dots \dots (1)$$

za kolo sa sl. 2.159(II):

$$\left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_e} \right) U_{AB} = \frac{E_e}{R_e} \dots \dots \dots (2)$$

Kako je

$$I_p = \frac{U_{AB}}{R_p},$$

to se prethodni izrazi mogu napisati u obliku:

$$U_{AB} \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = -I_p + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k} \dots (1')$$

i

$$U_{AB} \frac{1}{R_e} = -I_p + \frac{E_e}{R_e} \dots (2')$$

Upoređujući izraze (1') i (2'), dobija se:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

i

$$E_e = R_e \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

Pri ovome su elektromotorne sile vezane za referentne smerove kao na sl. 2.159.

Uvodeći provodnosti

$$G_k = \frac{1}{R_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

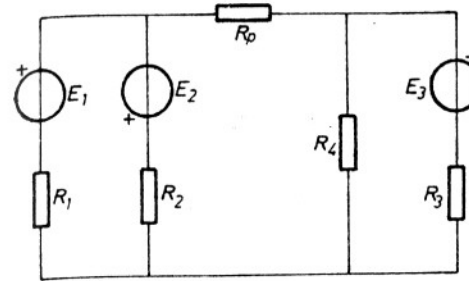
prethodni obrasci dobijaju jednostavniji oblik.

i

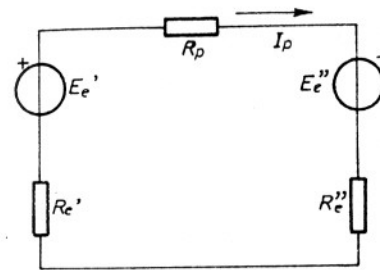
$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k$$

$$E_e = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

2.160. Koristeći se rezultatom iz zadatka 2.159. odrediti struju prijemnika otpornosti R_p , u kolu predstavljenom na sl. 2.160a.



Sl. 2.160. a.



Sl. 2.160. b.

Poznato je: $E_1 = 20V, E_2 = 10V$
 $E_3 = 30V, R_1 = 300 \Omega, R_2 = 60 \Omega$
 $R_3 = 120 \Omega, R_4 = 80 \Omega$
 $R_p = 62 \Omega$

Rešenje:

Ekvivalentno

kolo je prikazano na slici 2.160. b, pri čemu su:

$$E'_e = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2} = -5V;$$

$$R'_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 50 \Omega,$$

$$E''_e = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E_3 = 12V;$$

i

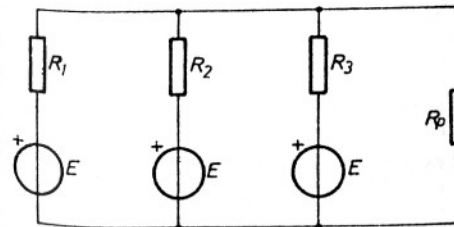
$$R''_e = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 48 \Omega$$

Intenzitet struje u prijemniku R_p je:

$$I_p = -106,25 \text{ mA.}$$

2.161 Tri jednaka, idealna, naponska generatora elektromotornih

sila $E = 18V$, i otpornici otpornosti $R_1 = 100 \Omega, R_2 = 200 \Omega$ i $R_3 = 300 \Omega$ vezani su sa prijemnikom otpornosti $R_p = 1 \text{ k}\Omega$ u kolo kao na slici 2.161. a. Odrediti struju prijemnika.



Sl. 2.161. a.

Rešenje:

S obzirom na oblik i sastav datog kola, struju prijemnika je najlakše odrediti koristeći premeštanje generatora.

Odredjivanje struja u granama kola uz korišćenje premeštanja generatora je zasnovano na sledećem:

Posmatrajući jednačine konturnih struja za kolo može se zaključiti da konturne struje (a samim tim i struje svih grana kola) zavise od algebarskih zbirova elektromotornih sila u konturama, a ne od položaja elektromotornih sila u konturi. Zbog ovoga se svaki idealni naponski generator može premeštati u ostale grane u kolu, pri čemu ovo premeštanje idealnih generatora treba vršiti tako da algebarski zbrovi elektromotornih sila kontura pre i posle premeštanja generatora budu isti.

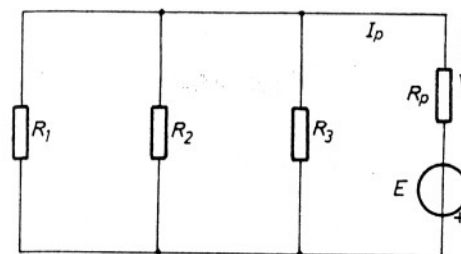
Idealni naponski generator se, prema prethodnom, može premestiti iz jedne grane kola u sve grane koje sa prethodnom imaju zajednički čvor.

Može se sprovesti i obrnuti postupak; ako u svim granama osim jedne, koje se stižu u jednom čvoru, nalaze jednaki idealni naponski generatori sa referentnim smerovima od čvora (ili ka čvoru), mogu se zameniti jednim takvim idealnim generatorom postavljenim u granu u kojoj nije bilo generatora. Referentni smer ovog generatora je tada ka čvoru (od čvora). Ovo je i očigledno, jer su, zbog jednakosti elektromotornih sila, drugi krajevi generatora na istom potencijalu pa se mogu spojiti.

Pri premeštanju generatora u kolu treba voditi računa o tome da se pri ovome ne menjaju struje u kolu, dok se potencijali tačaka i naponi između tačaka menjaju.

Primenjujući opisani postupak na dato kolo, dobija se ekvivalentno

kolo kao na slici 2. 161. b. .



Sl. 2. 161. b.

Struja prijemnika je:

$$I_p = \frac{E}{R_p + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

odnosno:

$$I_p = 17 \text{ mA} .$$

Preporučuje se čitaocu da ovaj zadatak reši i bez korišćenja premeštanja generatora u kolu.

2.162. Odrediti struju u grani sa generatorom elektromotorne sile

E_2 u kolu prikazanom na slici 2. 162. a.

Poznato je: $E_1 = 10\text{V}$, $E_2 = 46\text{V}$,

$R_2 = 62\Omega$, $R_3 = 300\Omega$, $R_4 = 200\Omega$

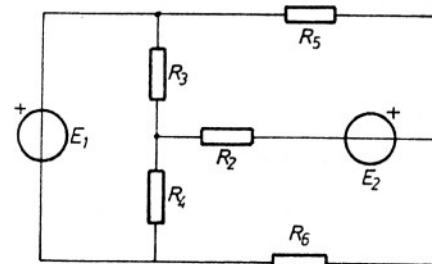
$R_5 = 120\Omega$ i $R_6 = 80\Omega$.

Rešenje:

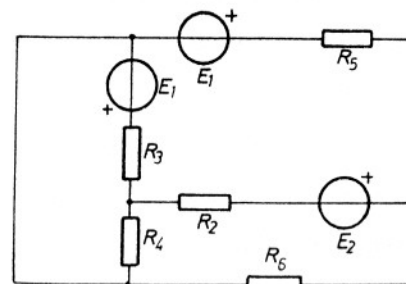
Premeštajući gene-

rator elektromotorne sile E_1 (prema zadatku 2.161.) dobija se kolo kao na slici 2. 162. b.

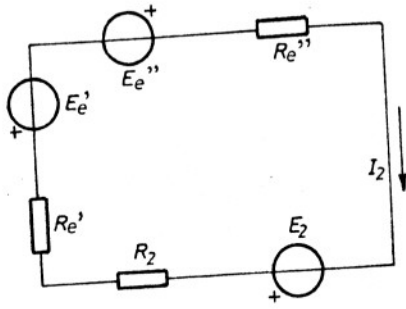
Transfigurirajući kolo sa slike 2. 162. b, dobija se ekvivalentno prosto kolo kao na slici 2. 162. c., pri čemu su:



Sl. 2. 162. a.



Sl. 2. 162. b.



Sl. 2.162. c.

Struja u grani sa generatorom elektromotorne sile E_2 je

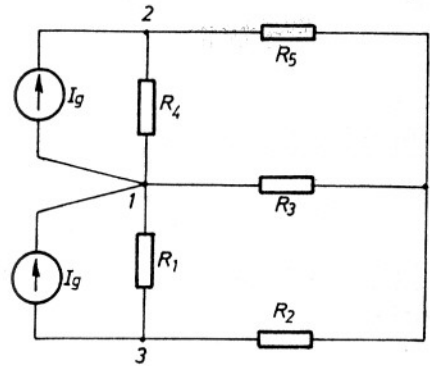
$$I_2 = 0,2 \text{ A} .$$

$$E'_e = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E_1 = 4 \text{ V},$$

$$R'_e = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 120 \Omega ,$$

$$E''_e = \frac{R_6}{R_5 + R_6} E_1 = 4 \text{ V},$$

$$R''_e = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = 48 \Omega .$$



Sl. 2.163. b.

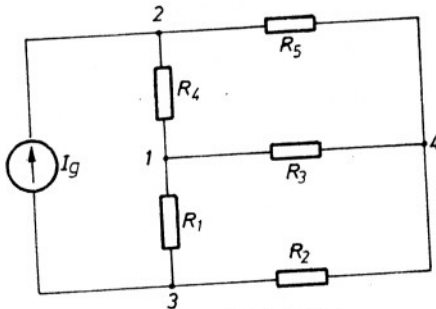
između čvorova, zavise od algebarskih zbirova struja strujnih generatora vezanih za pojedine čvorove. Ovo dopušta premeštanje idealnih strujnih generatora u kolu tako da algebarski zbirovi struja strujnih generatora za sve čvorove kola pre i posle premeštanja generatora budu isti.

Na osnovu prethodnog, jedan strujni generator se može zameniti strujnim generatorima paralelno vezanim svim granama koje sa po-

smatranim strujnim generatorom obrazuju zatvoreni put. Referentni smerovi za struje pojedinih strujnih generatora su tada određeni referentnim smerom za struju strujnog generatora koji je zamenjen .

Transfiguracijom strujnih generatora u naponske generatore, dobija se ekvivalentno kolo kao na slici 2.163. c (I). Nalaženjem ekvivalentnog naponskog generatora paralelno vezanim naponskim generatorima dobija se ekvivalentno prosto kolo kao na slici 2.163. c. (II)

2.163 Strujni generator struje $I_g = 10 \text{ mA}$ i otpornici otpornosti $R_1 = 120 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$. $R_3 = 200 \Omega$, $R_4 = 100 \Omega$ i $R_5 = 200 \Omega$, vezani su u kolo kao na slici 2.163. a.



Sl. 2.163. a.

Određiti struju u grani sa otpornikom otpornosti R_3 .

Rešenje:

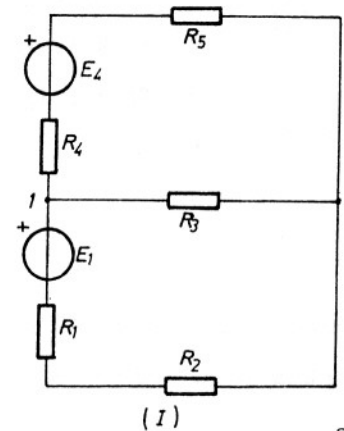
Kako se traži samo struja

u grani sa otpornikom otpornosti R_3 , to je, radi lakšeg rešavanja, pogodno

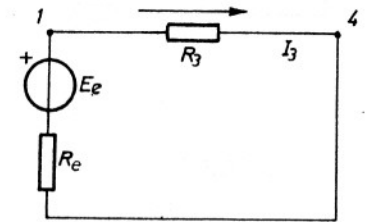
ostatak kola transfigurisati. Strujni generator se može premestiti paralelno otpornicima otpornosti R_1 i R_4 kao na slici 2.163. b.

Premeštanje strujnih generatora u kolu se vrši na osnovu sledećeg:

Iz jednačina napisanih za kolo po metodi napona između čvorova sledi da potencijali pojedinih čvorova prema referentnom čvoru, a samim tim i naponi



(I)



(II)

Sl. 2.163. c.

Pri ovim transfiguracijama su:

$$E_1 = R_1 I_g = 1,2V,$$

$$E_4 = R_4 I_g = 1V,$$

$$E_e = \frac{E_1(R_4 + R_5) - E_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = 320 \text{ mV}$$

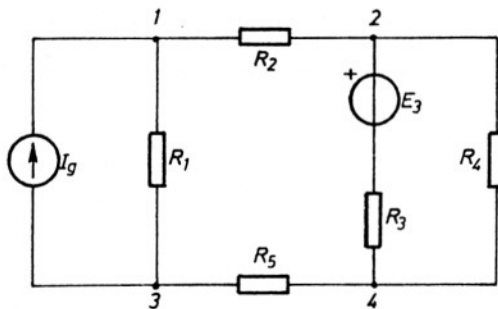
i

$$R_e = \frac{(R_1 + R_2)(R_4 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = 120 \Omega$$

Struja u otporniku otpornosti R_3 je:

$$I_3 = \frac{E_e}{R_3 + R_e} = 1 \text{ mA.}$$

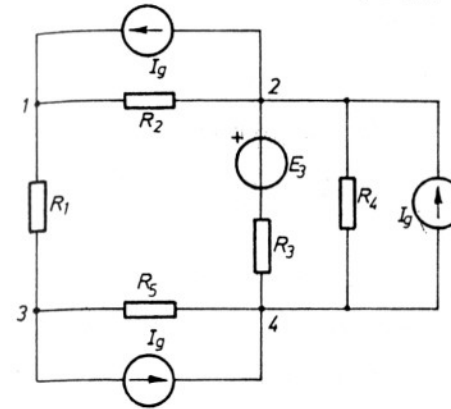
2.164. Koristeći pogodno premeštanje strujnih generatora odrediti



Sl. 2.164. a.

Rešenje:

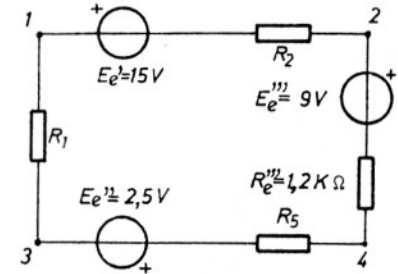
Premeštajući strujni generator kao na sl. 2.164. b i transfigurirajući ovo kolo do ekvivalentnog prostog kola, prikazanog na slici 2.164. c.



Sl. 2.164. b.

dobija se:

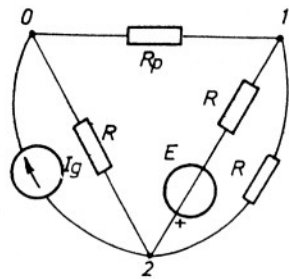
$$I_{13} = 2,65 \text{ mA.}$$



Sl. 2.164. c.

2. 8. TEOREMA SUPERPOZICIJE I TEOREMA UZAJAMNOSTI

2. 165. U kolu prikazanom na sl. 2. 165. a. je $E = 8V$, $I_g = 4mA$,



Sl. 2. 165. a.

$R = 2k\Omega$ i $R_p = 1k\Omega$

Određiti struju i snagu

prijemnika otpornosti R_p .

1° Primenom metode na-

pona između čvorova i

2° Primenom teoreme

superpozicije.

Rešenje:

1° Usvajajući čvor označen sa O na sl. 2. 165. a. za referentni, jednačine po metodi napona između čvorova su:

$$\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R_p}\right) U_{10} - \frac{2}{R} U_{20} = -\frac{E}{R}$$

$$- \frac{2}{R} U_{10} + \frac{3}{R} U_{20} = \frac{E}{R} - I_g$$

Iz prethodnog sistema jednačina dobija se:

$$U_{10} = -3V.$$

Struja prijemnika otpornosti R_p , računata u smeru od 1 ka O, je:

$$I_p = \frac{U_{10}}{R_p} = -3 \text{ mA}.$$

Snaga usled Džulovog efekta je:

$$P_p = R_p I_p^2 = \dots$$

2° Teorema superpozicije glasi:

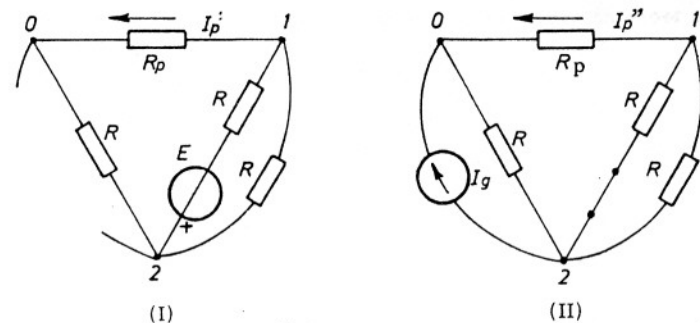
Struja bilo koje grane linearnog električnog kola je jednaka algebarskom zbiru, prema istom referentnom smeru, struja te grane nastalih u kolu delovanjem samo pojedinih generatora.

Ova teorema važi za linearna električna kola i posledica je linearnosti jednačina napisanih po prvom i drugom Kirhofovom zakonu, odnosno izvedenim metodama.

Pri primeni ove teoreme na rešavanje kola može se posmatrati dejstvo generatora ponaosob ili dejstvo pojedinih grupa generatora (često dejstvo strujnih i dejstvo naponskih posebno).

Odstranjivanje dejstva pojedinih generatora iz kola se ovde vrši anuliranjem elektromotornih sila naponskih generatora i struja strujnih generatora. Ovo je ekvivalentno vadjanju idealnih naponskih i strujnih generatora iz kola i kratkom spajanju tačaka između kojih su se nalazili idealni naponski generatori (unutrašnje otpornosti naponskih i unutrašnje provodnosti strujnih generatora se pri ovome zadržavaju u kolu).

Na sl. 2. 165. b (I) je prikazano kolo kada u njemu deluje samo naponski generator elektromotorne sile E, a na sl. 2. 165. b. (II) kolo kada u njemu deluje samo strujni generator, struje I_g .



Sl. 2. 165. b.

Struje u otporniku otpornosti R_p u pojedinim slučajevima su:

$$i \quad \begin{aligned} I'_p &= - \frac{E}{3R + 2R_p} = -1 \text{ mA} \\ I''_p &= - \frac{2R}{3R + 2R_p} I_g = -2 \text{ mA}. \end{aligned}$$

Po teoremi superpozicije je:

$$I_p = I'_p + I''_p = -3 \text{ mA}.$$

Električne snage prijemnika otpornosti R_p u pojedinim slučajevima su:

$$i \quad \begin{aligned} P'_{R_p} &= R_p I_p^2 = 1 \text{ mW} \\ P''_{R_p} &= R_p I_p'^2 = 4 \text{ mW}. \end{aligned}$$

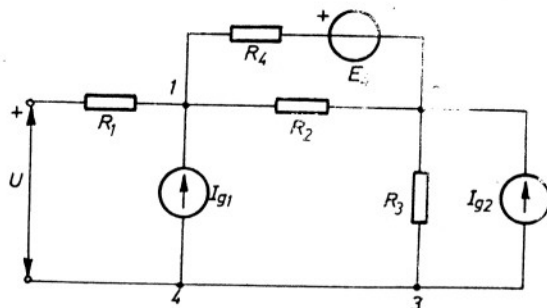
Iz prethodnog se vidi da je

$$P_{R_p} \neq P'_{R_p} + P''_{R_p}$$

jer snaga ne zavisi linearno od struje.

2.166. Odrediti struju u grani sa otpornikom otpornosti R_3

primenom teoreme superpozicije, u kolu na sl. 2.166. kada je: $U=30\text{V}$, $E_4=18\text{V}$,



Sl. 2.166.

$$I_{g1} = 60 \text{ mA}, I_{g2} = 30 \text{ mA},$$

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 200 \Omega$$

$$R_3 = 80 \Omega \text{ i } R_4 = 300 \Omega$$

Rešenje:

1° Kada u kolu deluje samo napon U , struja u grani sa otpornikom otpornosti R_3 je:

$$I'_{23} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + R_3} = 0,1 \text{ A}$$

2° Kada u kolu deluje samo generator ems E_4 , struja u grani sa otpornikom otpornosti R_3 je:

$$I''_{23} = - \frac{\frac{R_2}{R_2 + R_4} E_4}{R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + R_3} = -0,024 \text{ A}$$

3° Pri delovanju samo strujnog generatora struje I_{g1} , struja u grani sa otpornikom otpornosti R_3 je:

$$I'''_{23} = \frac{I_{g1}}{R_2 R_4 + R_3 + R_1} = 0,02 \text{ A}.$$

4° Struja u otporniku otpornosti R_3 kada u kolu deluje samo strujni generator struje I_{g2} je:

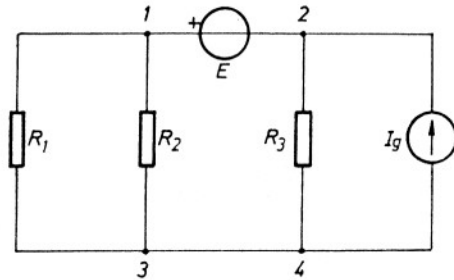
$$I^{iv}_{23} = \frac{\left(R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \right) I_{g2}}{R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + R_3} = 0,022 \text{ A}.$$

Pri istovremenom delovanju u kolu napona U , generatora ems E_4 , strujnih generatora struja I_{g1} i I_{g2} struja u grani sa otpornikom otpornosti R_3 je:

$$I_{23} = I'_{23} + I''_{23} + I'''_{23} + I^{iv}_{23} = 0,118 \text{ A}.$$

2.167. U kolu prikazanom na sl. 2.167. poznato je: $E=18V$,

$$I_g = 45\text{mA}, R_1 = 10\text{k}\Omega, R_2 = 15\text{k}\Omega \text{ i } R_3 = 3\text{k}\Omega$$



Sl. 2.167.

Odrediti:

1° Struju u grani sa naponskim generatorom.

2° Struju u grani sa otpornikom otpornosti R_2 i

3° Snagu koja se razvija na otporniku otpornosti R_2 .

Rešenje:

1° Struja u grani sa naponskim generatorom, kada u kolu deluje samo ovaj generator, je:

$$I'_{21} = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = 2 \text{ mA}$$

Kada u kolu deluje samo strujni generator, struja u grani sa naponskim generatorom je:

$$I''_{21} = \frac{R_3 I_g}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = 15 \text{ mA}$$

Struja u grani sa naponskim generatorom pri delovanju oba generatora istovremeno je:

$$I_{21} = I'_{21} + I''_{21} = 17 \text{ mA}$$

2° Struja u grani sa otpornikom otpornosti R_2 je:

$$I_{13} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_{21} = 6,8 \text{ mA}$$

3° Snaga koja se usled Džulovog efekta razvija na otporniku otpornosti R_2 je:

$$P_{R_2} = R_2 I_{13}^2 \approx 0,7 \text{ W}$$

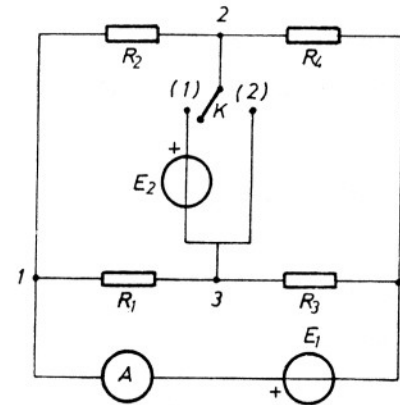
2.168. Za kolo prikazano na sl. 2.168. poznate su sve otpornosti:

$$R_1 = 200 \Omega, R_2 = 100 \Omega, R_3 = 200 \Omega \text{ i } R_4 = 300 \Omega$$

Kada se preklopnik K nalazi u položaju (1), ampermetar A, zanemarljive unutrašnje otpornosti pokazuje struju $I_{41} = 0,1 \text{ A}$.

Kada se preklopnik K nalazi u položaju (2), ampermetar pokazuje struju $I'_{41} = 0,15 \text{ A}$.

Odrediti elektromotornu silu E_2 primenom teoreme superpozicije.



Sl. 2.168.

Rezultat:

Tražena elektromotorna sila je:

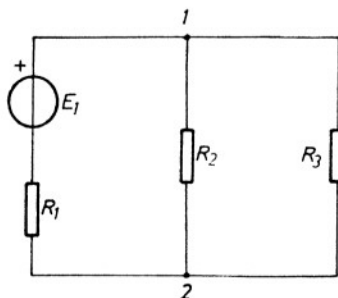
$$E_2 = 35 \text{ V}$$

2.169. Za kolo prikazano na sl. 2.169. a. poznato je: $E_1=30\text{V}$,

$$R_1=10\text{k}\Omega, R_2=15\text{k}\Omega \text{ i } R_3=3\text{k}\Omega$$

Proveriti teoremu uzajamnosti određujući struju u grani sa otpor-

nikom otpornosti R_3



Sl. 2.169. a.

Rešenje:

Za linearna električna kola, koja sadrže samo jedan generator, važi teorema uzajamnosti (ili reciprociteta) Maksvel je prvi uočio ovu osobinu linearnih električnih kola.

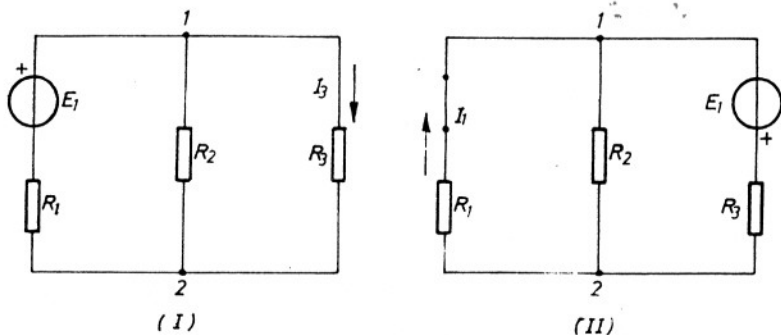
U slučaju kola sa samo

jednim naponskim generatorom ova teorema glasi:

Usled delovanja elektromotorne sile $E_{MN} = E$ u grani MN, struja u grani AB je $I_{AB} = I$.

Kada se generator iz grane MN prebaci u granu AB tako da je $E_{AB} = E$, tada je u grani MN struja $I_{MN} = I$.

Na sl. 2.169. b. (I) i (II) je prikazano dato kolo pre i posle prebacivanja generatora i označeni su referentni smerovi za odgovarajuće struje.



Sl. 2.169. b.

Prema sl. 2.169. b. (I) struja I_3 je:

$$I_3 = \frac{\frac{E_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = 2 \text{ mA.}$$

Prema sl. 2.169. b. (II) struja I_1 je:

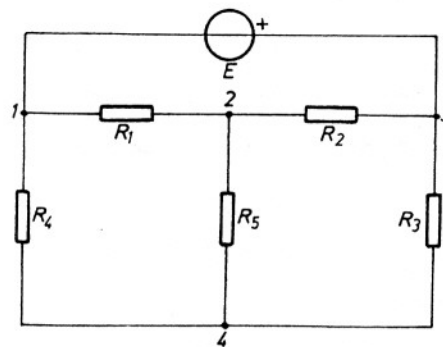
$$I_1 = \frac{\frac{E_1 R_2}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 2 \text{ mA}$$

Ovim je teorema uzajamnosti proverena.

2.170. Koristeći se teoremom uzajamnosti odrediti struju u grani sa otpornikom otpornosti R_5 u kolu na sl. 2.170. a. Za dato kolo je poznato:

$$E=12\text{V}, R_1=2\text{k}\Omega, R_2=3\text{k}\Omega, R_3=4\text{k}\Omega$$

$$\text{i } R_4=R_5=1\text{k}\Omega.$$



Sl. 2.170. a.

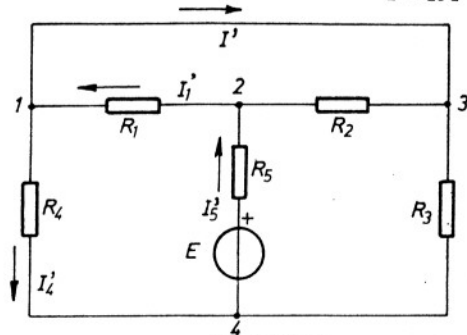
Rešenje:

Posle prebacivanja generatora u granu sa otpornikom otpornosti R_5 dobija se kolo kao na sl.

2.170. b.

Za kolo sa sl. 2.170. b. je:

$$I'_5 = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5} = 4 \text{ mA,}$$

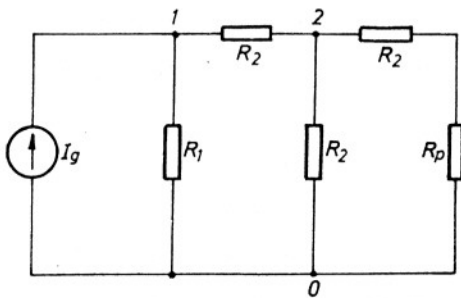


Sl. 2.170. b.

Prema teoremi uzajamnosti struja u grani sa otpornikom otpornosti R_5 za kolo na sl. 2.170. a. je

$$I_{42}' = I' = -0,8 \text{ A.}$$

2.171. Za kolo prikazano na sl. 2.171. a. je poznato: $I_g = 0,22 \text{ A}$,



Sl. 2.171. a.

$$R_1 = 300 \, \Omega, \quad R_2 = 100 \, \Omega \quad \text{i}$$

$$R_p = 150 \, \Omega$$

Određjujući napon između krajeva prijemnika otpornosti R_p proveriti teoremu uzajamnosti.

Rešenje:

Kada u kolu postoji samo

jedan strujni generator teorema uzajamnosti glasi:

Usled delovanja strujnog generatora vezanog u kolo između tačaka

M i N tako da je $I_{MN} = I_g$, napon između tačaka A i B u kolu je $U_{AB} = U$.

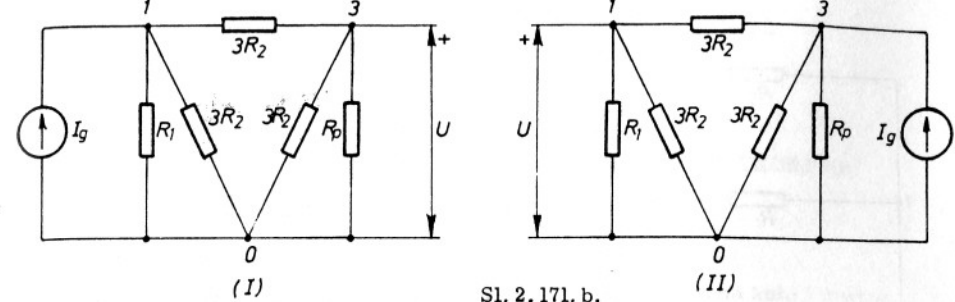
Kada se strujni generator priveže između tačaka A i B tako da

je $I_{BA} = I_g$, tada je $U_{NM} = U$.

Na sl. 2.171. b. (I) i (II) je prikazano kolo pre i posle prebacivanja

strujnog generatora

Radi lakšeg rešavanja dato kolo je transfigurisano.



Sl. 2.171. b.

Za kolo sa sl. 2.171. b. (I) je

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{3R_2}\right) U_{10} - \frac{1}{3R_2} U_{30} = I_g$$

$$\text{i} \quad -\frac{1}{3R_2} U_{10} + \left(\frac{2}{3R_2} + \frac{1}{R_p}\right) U_{30} = 0.$$

Iz prethodnih jednačina su:

$$U_{10} = 24 \text{ V} \quad \text{i} \quad U_{30} = U = 6 \text{ V.}$$

Za kolo sa sl. 2.171. b. (II) je:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{3R_2}\right) U'_{10} - \frac{1}{3R_2} U'_{30} = 0.$$

$$\text{i} \quad -\frac{1}{3R_2} U'_{10} + \left(\frac{2}{3R_2} + \frac{1}{R_p}\right) U'_{30} = I_g.$$

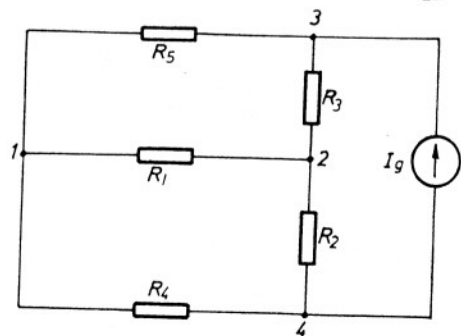
Iz prethodnih jednačina su:

$$U'_{10} = U' = 6 \text{ V} \quad \text{i} \quad U'_{30} = 18 \text{ V.}$$

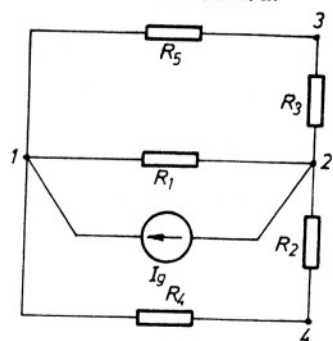
Prema prethodnom je

$$U = U'.$$

2.172. Odrediti napon U_{12} u kolu prikazanom na sl. 2.172. a. kada je



Sl. 2.172. a.



Sl. 2.172. b.

odnosno

$$U'_{34} = \left(\frac{R_3}{R_3 + R_5} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right) U_{12} = 14V.$$

Traženi napon U_{12} , prema prethodnom je:

$$U_{12} = U'_{34} = 14V.$$

$$I_g = 14mA, R_1 = 10k\Omega, R_2 = 5k\Omega, \\ R_3 = 3k\Omega, R_4 = 15k\Omega \text{ i } R_5 = 2k\Omega$$

Rešenje:

Prema teoremi uzajamnosti napon U_{12} u kolu na sl. 2.172. a. jednak je naponu U'_{34} u kolu na sl. 2.172. b.

Sa sl. 2.172. b. je:

$$\left(\frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3 + R_5} + \frac{1}{R_1} \right) U'_{12} = I_g,$$

pa je

$$U'_{12} = 40V.$$

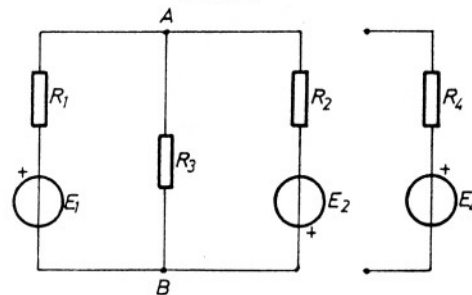
Napon U'_{34} (sl. 2.172. b.)

je:

$$U'_{34} = U'_{32} - U'_{42},$$

2.9. TEVENENOVA TEOREMA I NORTONOVA TEOREMA

2.173. Na slici 2.173. a. su prikazani električno kolo i grana



Sl. 2.173. a.

koja se priključuje kolu između tačaka A i B. Poznato je: $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 300\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $E_1 = 100V$, $E_2 = 120V$ i $E_4 = 40V$.

Odrediti:

1° Tevenenov generator za

dato kolo prema tačkama A i B priključenja grane.

2° Intenzitet struje novopriključene grane.

Rešenje:

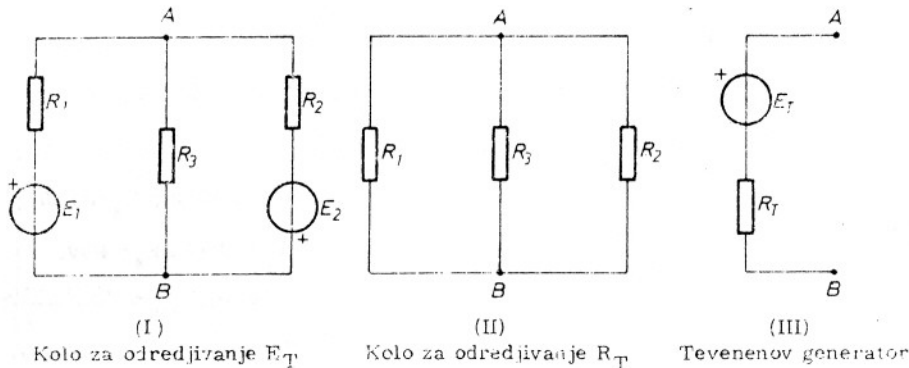
Tevenenova teorema glasi:

Električno kolo se prema priključenoj grani ponaša kao naponski generator. Elektromotorna sila, E_T , ovog generatora je jednaka naponu između tačaka priključenja grane pre njegovog priključenja i vezana je za isti referentni smer za koji i napon. Unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora, R_T , je jednaka ekvivalentnoj otpornosti kola između tačaka priključenja pre priključenja grane, pri čemu je odstranjeno dejstvo svih generatora u kolu.

Odstranjivanje dejstva generatora se vrši anuliranjem elektromotornih sila naponskih generatora i struja strujnih generatora. Ovo je ekvivalentno vađenju idealnih generatora iz kola pri čemu treba kratko spojiti tačke između kojih

su se nalazili idealni naponski generatori. (Unutrašnje otpornosti naponskih generatora i unutrašnje provodnosti strujnih generatora, ukoliko postoje, pri ovom postupku treba ostaviti u kolu.)

1^o Karakteristike Tevenenovog generatora, E_T i R_T , se određuju iz kola prikazanih slikom 2.173. b.



Sl. 2.173. b.

a) Prema usvojenom referentnom smeru za E_T na sl. 2.173. b(III),

je:

$$E_T = U'_{AB}$$

Primenjujući metodu napona između čvorova na kolu sa slike

2.173. b. (I), ima se:

$$G_{AA} U'_{AB} = I_A$$

Iz prethodne jednačine je:

$$U'_{AB} = \frac{I_A}{G_{AA}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = -60V,$$

pa je:

$$E_T = -60V.$$

b) Unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora je:

$$R_T = R'_{eAB}$$

Prema kolu sa slike 2.173. b (II) je:

$$R'_{eAB} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 40 \Omega,$$

pa je:

$$R_T = 40 \Omega$$

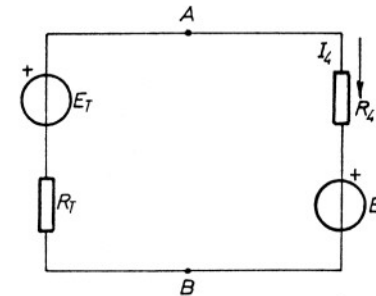
2^o Posle priključivanja nove grane posmatra se ekvivalentno pro-

sto kolo formirano od Tevenenovog generatora i novopriključene grane, prikazano na sl. 2.173. c.

Prema referentnom smeru

za struju I_4 (sl. 2.173. c.) je:

$$I_4 = \frac{E_T - E_4}{R_T + R_4} = -2A.$$



Sl. 2.173. c.

2.174. Za kolo prikazano na slici 2.174. a je poznato: $E_1 = 40V$

$E_2 = 100V$, $E_3 = 30V$, $I_g = 0,2A$,

$R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 150 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$

$R_4 = 100 \Omega$ i $R_5 = 75 \Omega$.

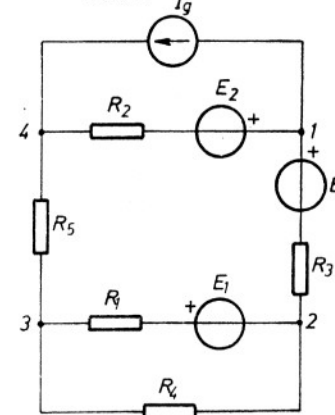
Odrediti struju i snagu

prijemnika otpornosti R_3 .

Rešenje:

Kako treba odrediti samo

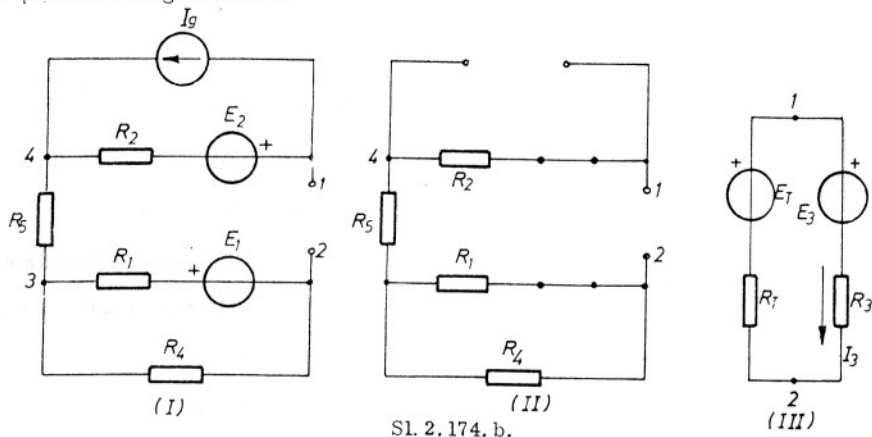
struju jedne grane kola, to je povoljno primeniti Tevenenovu teoremu.



Sl. 2.174. a.

U tu svrhu treba isključiti iz kola granu sa generatorom ems E_3 i otpornikom otpornosti R_3 i odrediti karakteristike Tevenenovog generatora za kolo između tačaka 1 i 2.

Karakteristike Tevenenovog generatora se određuju iz kola prikazanih sl. 2.174. b. (I, II). Na sl. 2.174. b (III) je prikazan Tevenenov generator i posmatrana grana kola.



Sl. 2.174. b.

Prema sl. 2.174. b. elektromotorna sila Tevenenovog generatora je:

$$E_T = U'_{12}$$

Posmatrajući kolo sa sl. 2.174. b (I) se ima:

$$U'_{12} = R_4 \frac{E_1}{R_1 + R_4} - R_2 I_g + E_2 = 80V.$$

Unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora je:

$$R_T = R_{e12}$$

pri čemu je [sl. 2.174. b (II)]

$$R'_{e12} = R_2 + R_5 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 300 \Omega$$

Iz ekvivalentnog prostog kola [sl. 2.174. b (III)] je:

$$I_3 = \frac{E_T - E_3}{R_T + R_3} = 0,1A.$$

Snaga prijemnika otpornosti, R_3 je:

$$P_{R_3} = R_3 I_3^2 = 2W.$$

2.175. Odrediti struju prijemnika otpornosti R_6 priključenog u

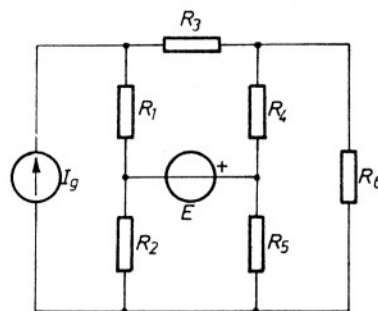
kolo kao na sl. 2.175. a. Poznato je: $I_g = 250mA$, $E = 30V$, $R_1 = 300 \Omega$,

$$R_2 = 120 \Omega, R_3 = 60 \Omega, R_4 = 90 \Omega,$$

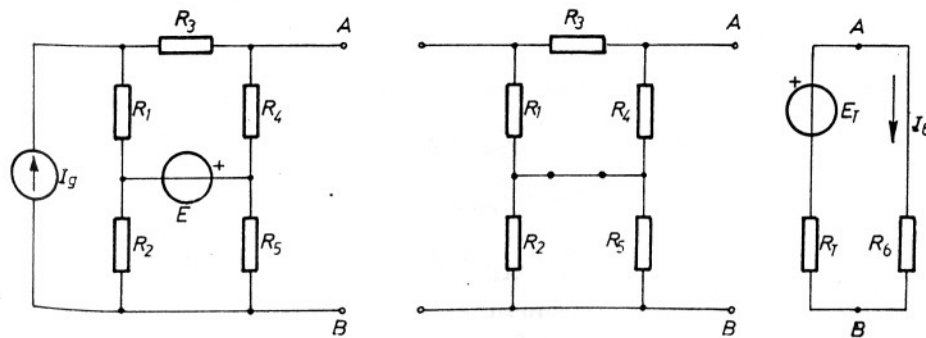
$$R_5 = 180 \Omega \text{ i } R_6 = 6 \Omega.$$

Rezultat:

Na slici 2.175. b. su prikazana kola za određivanje karakteristika Tevenenovog generatora i ekvivalentno prosto kolo sa prijemnikom otpornosti R_6 .



Sl. 2.175. a.



Sl. 2.175. b.

Elektromotorna sila i otpornost Tevenenovog generatora su:

$$E_T = U'_{AB} = 45V \quad i \quad R_T = R'_{eAB} = 144 \Omega$$

Struja prijemnika otpornosti R_6 je:

$$I_6 = 0,3A.$$

2.176. Generatori elektromotornih sila $E_1 = 12V$ i $E_2 = 2V$,

generator struje $I_g = 100 \text{ mA}$ i otpornici otpornosti $R_1 = 100 \Omega$,

$R_2 = 300 \Omega$, $R_3 = 150 \Omega$,

$R_4 = 50 \Omega$, $R_5 = 150 \Omega$ i $R_6 = 50 \Omega$.

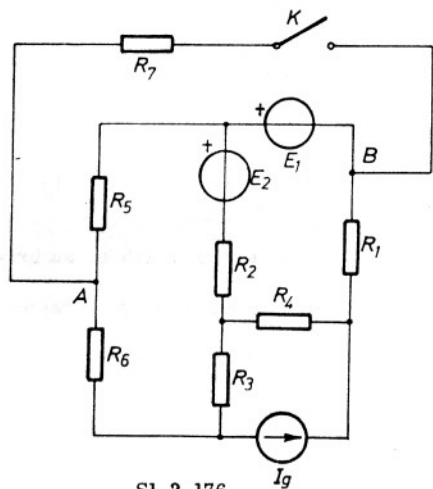
Vezani su u kolo kao na sl. 2.176.

Zatvaranjem prekidača K

u kolo se uključuje i otpornik otpornosti $R_7 = 500 \Omega$.

Odrediti snagu otpornika

otpornosti R_7 .



Sl. 2.176.

Rezultat:

Primenjujući Tevenenovu teoremu dobija se:

$$E_T = U'_{AB} = 3V,$$

$$R_T = R'_{eAB} = 100 \Omega$$

i

$$I_7 = I_{AB} = 5 \text{ mA}.$$

Snaga otpornika otpornosti R_7 je:

$$P_{R_7} = R_7 I_7^2 = 12,5 \text{ mW}.$$

2.177. Odrediti otpornost R otpornika u kolu prikazanom na sl.

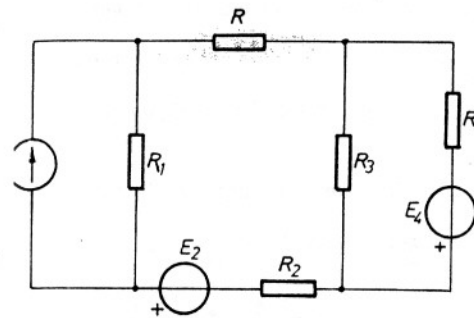
2.177. a. tako da se na ovom otporniku razvija najveća snaga. Poznato je:

$$R_1 = 300 \Omega, \quad R_2 = 120 \Omega,$$

$$R_3 = 800 \Omega, \quad i \quad R_4 = 1,2 \text{ k}\Omega$$

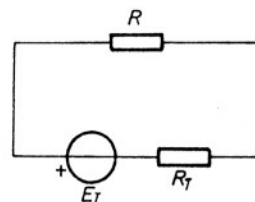
Rešenje:

Dato kolo se prema grani sa otpornikom otpornosti R može predstaviti Tevenenovim generatorom kao na sl. 2.177. b.



Sl. 2.177. a.

Pri ovome je:



Sl. 2.177. b.

$$R_T = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 900 \Omega$$

Imajući u vidu zadatak 2.67. zaključuje se da treba da bude:

$$R = R_T = 900 \Omega$$

2.178. Za kolo prikazano na sl. 2.178. a. je poznato: $R_1 = 100 \Omega$,

$$R_2 = 400 \Omega, \quad R_3 = 200 \Omega \quad i \quad R_4 = 300 \Omega$$

Između tačaka 3 i 4 je priključen voltmetar unutrašnje otpornosti $R_v = 2 \text{ k}\Omega$

i pokazuje napon $U_{34} = 10V$.

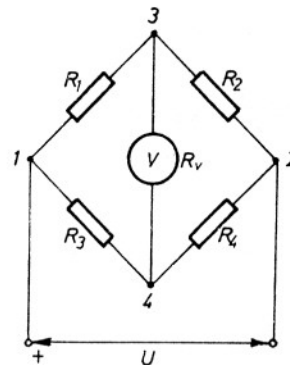
Odrediti:

1° Napon između tačaka

3 i 4 pre priključenja voltmetra.

2° Apsolutnu i relativnu

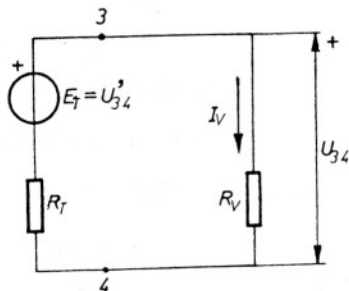
grešku učinjenu pri merenju ovog



Sl. 2.178. a.

Rešenje:

1^o Predstavljajući kolo prema voltmetru Tevenenovim generatorom, dobija se prosto kolo kao na sl. 2.178. b. Pri ovome je ems Tevenenovog generatora jednaka naponu između tačaka 3 i 4 pre priključenja voltmetra.



Sl. 2.178. b.

Ekvivalentna otpornost Tevenenovog generatora je:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 200 \Omega.$$

Prema sl. 2.178. b. je:

$$U'_{34} = U_{34} + R_T I_V$$

$$I_V = \frac{U_{34}}{R_V}$$

Napon pre priključenja voltmetra je:

$$U'_{34} = \left(1 + \frac{R_T}{R_V}\right) U_{34} = 11V.$$

2^o Apsolutna greška pri ovom merenju napona je:

$$\Delta U_{34} = U_{34} - U'_{34} = -\frac{R_T}{R_V} U_{34} = -1V.$$

Relativna greška je:

$$\frac{\Delta U_{34}}{U'_{34}} = -\frac{1}{1 + \frac{R_V}{R_T}}$$

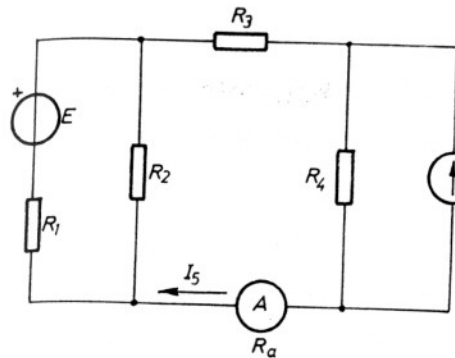
odnosno

$$\frac{\Delta U_{34}}{U'_{34}} 100\% = -9,1\%$$

... se da se pri vezivanju voltmetra (ili otp...

2.179. Za kolo prikazano na sl. 2.179. a. je poznato: $E = 100V$,

$I_g = 80mA$, $R_1 = 80 \Omega$, $R_2 = 120 \Omega$,
 $R_4 = 150 \Omega$, a ampermetar unutrašnje
otpornosti $R_a = 2 \Omega$ pokazuje struju
 $I_g I_5 = 120mA$.

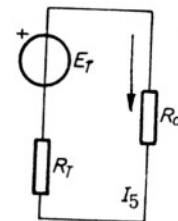


Sl. 2.179. a.

Odrediti otpornost R_3 .

Rešenje:

Karakteristike ekvivalentnog Tevenenovog generatora prema grani sa ampermetrom su:



Sl. 2.179. b.

$$E_T = R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} - R_4 I_g = 48V$$

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 = 198 + R_3.$$

Sa sl. 2.179. b. je:

$$R_T = \frac{E_T}{I_5} - R_a = 398 \Omega,$$

pa je,

$$R_3 = 200 \Omega.$$

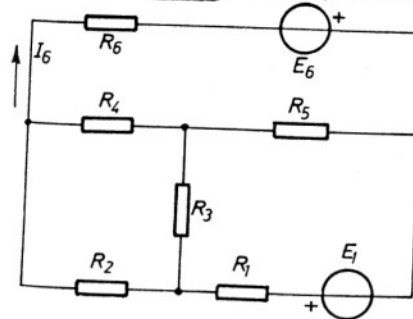
2.180. Za kolo prikazano na sl. 2.180. a. je poznato: $E_1 = 100V$,

otpornosti otpornika $R_1 = R_2 = 150 \Omega$,
 $R_3 = R_4 = R_5 = 50 \Omega$, $R_6 = 25 \Omega$ i
struja $I_6 = 0,1A$.

Odrediti ems E_6 .

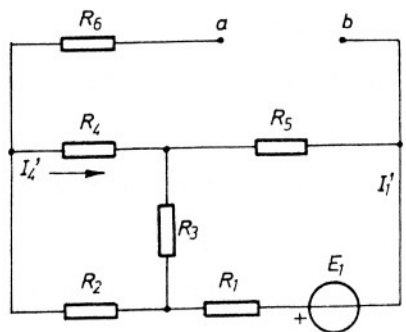
Rešenje:

U datom kolu su poznate sve otpornosti i elektromotorna sila E_1 ,



Sl. 2.180. a.

pa je povoljno ostatak kola prema generatoru nepoznate ems E_6 predstaviti Tevenenovim generatorom, a zatim rešavati ekvivalentno prosto kolo.



Sl. 2.180. b.

Isključivanjem generatora ems E_6 iz kola dobija se kolo prikazano na sl. 2.180. b.

Prema usvojenim referentnim smerovima označenim na slici 2.180. b. je:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_3(R_2+R_4)}{R_3+R_2+R_4} + R_5} = \frac{5}{12} \text{ A}$$

$$i \quad I_4' = \frac{R_3}{R_2+R_4+R_3} I_1' = \frac{1}{12} \text{ A},$$

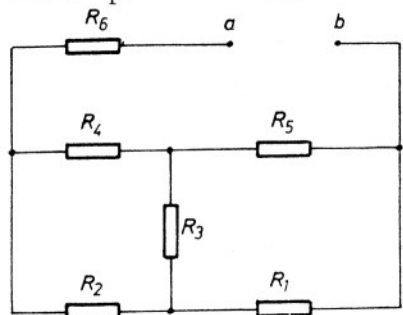
pa je:

$$U_{ab}' = R_5 I_1' + R_4 I_4' = 25 \text{ V}.$$

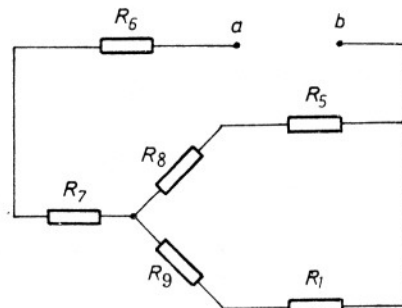
Prema prethodnom je

$$E_T = U_{ab}' = 25 \text{ V}.$$

Na slici 2.180.c je prikazano kolo za određivanje unutrašnje otpornosti, R_T , Thevenenovog generatora.



Sl. 2.180. c.



Sl. 2.180. d.

Transfigurirajući trougao R_2, R_3, R_4 u zvezdu R_7, R_8, R_9 , dobija se kolo kao na sl. 2.180. d. Pri ovome su:

$$R_7 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 30 \ \Omega$$

$$R_8 = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 10 \ \Omega$$

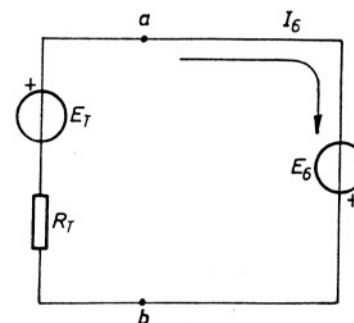
$$i \quad R_9 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 30 \ \Omega.$$

Sada je:

$$R_{eab}' = R_6 + R_7 + \frac{(R_8+R_5)(R_9+R_1)}{R_8+R_5+R_9+R_1} = 100 \ \Omega,$$

te je

$$R_T = R_{eab}' = 100 \ \Omega.$$



Sl. 2.180. e.

Iz ekvivalentnog prostog kola

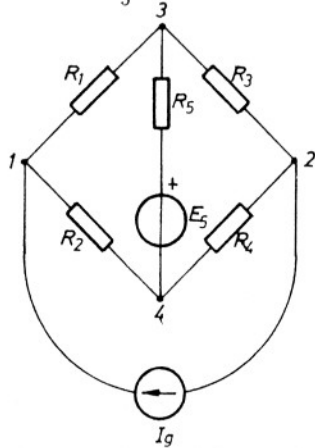
(sl. 2.180. e.) je:

$$E_6 = R_T I_6 - E_T = -15 \text{ V}.$$

2.181. Struja strujnog generatora, u kolu prikazanom na sl. 2.181. a.

je: $I_g = 0,25 \text{ A}$, a otpornosti otpornika su $R_1 = 30 \ \Omega$, $R_2 = 90 \ \Omega$, $R_3 = 50 \ \Omega$.

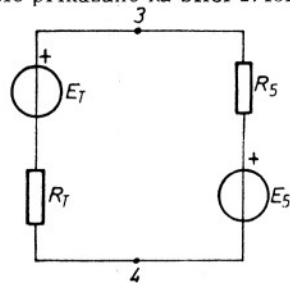
$R_4 = 70 \Omega$ i $R_5 = 30 \Omega$. Odrediti elektromotornu silu E_5 tako da bude $U_{34} = 0$.



Sl. 2.181. a.

Rezultat:

Primenom Tevenenove teoreme dobija se ekvivalentno prosto kolo prikazano na slici 2.181. b.



Sl. 2.181. b.

Pri ovome su karakteristike Tevenenovog generatora:

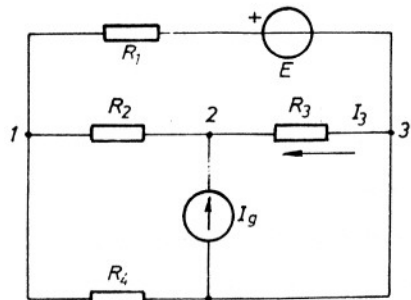
$$E_T = 2,5V$$

$$R_T = 60 \Omega$$

Tražena elektromotorna sila je:

$$E_5 = -1,25V.$$

2.182. Za kolo prikazano slikom 2.182. a. je poznato:



Sl. 2.182. a.

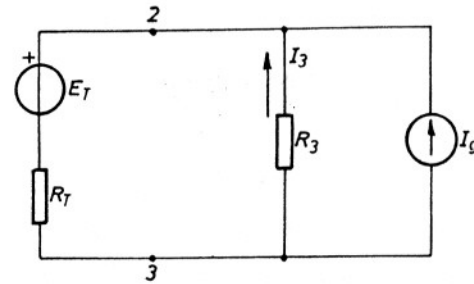
$E = 18V$, $R_1 = 300 \Omega$, $R_2 = 150 \Omega$,
 $R_3 = 100 \Omega$, $R_4 = 60 \Omega$ i $I_3 = 20 \text{ mA}$.

Odrediti struju strujnog generatora I_g .

Rezultat:

Primenjujući Tevenenovu teoremu na dato kolo, dobija se

kolo kao na slici 2.182. b. Karakteristike Tevenenovog generatora su:



Sl. 2.182. b.

$$E_T = 3V$$

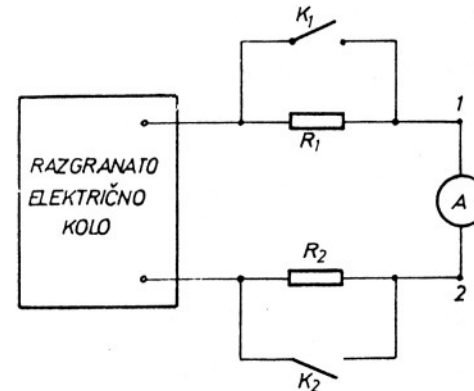
$$R_T = 200 \Omega.$$

Rešavanjem ovog kola se dobija:

$$I_g = -45 \text{ mA}.$$

2.183. Razgranato električno kolo, otpornici otpornosti $R_1 = 300 \Omega$

i $R_2 = 100 \Omega$, prekidači K_1 i K_2 i ampermetar, A, vezani su kao na sl. 2.183.



Sl. 2.183.

Kada su otvorena oba prekidača, ampermetar pokazuje

$$I_{12} = 1,2A.$$

Kada je prekidač K_1 zatvoren, a prekidač K_2 otvoren, ampermetar pokazuje $I'_{12} = 3A$.

Koliko pokazuje ampermetar kada je prekidač K_1 otvoren, a prekidač K_2 zatvoren?

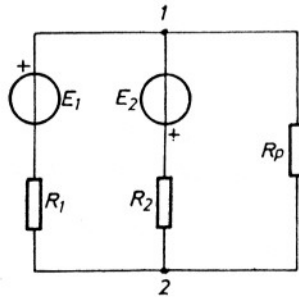
Rezultat:

Pokazivanje ampermetra je

$$I''_{12} = 1,5A.$$

2.184. Odrediti struju u grani sa prijemnikom otpornosti R_p u

kolu prikazanom na sl. 2.184. a. primenom Nortonove teoreme. Za dato kolo su: $E_1 = 50V$, $E_2 = 30V$, $R_1 = 10k \Omega$, $R_2 = 15k \Omega$ i $R_p = 3k \Omega$.



Sl. 2.184. a.

Rešenje:

Nortonova teorema glasi:

Električno kolo se prema posmatranoj grani može zameniti strujnim generatorom.

Struja, I_N , ovog generatora je određena strujom kratkog spoja između tačaka priključenja grane,

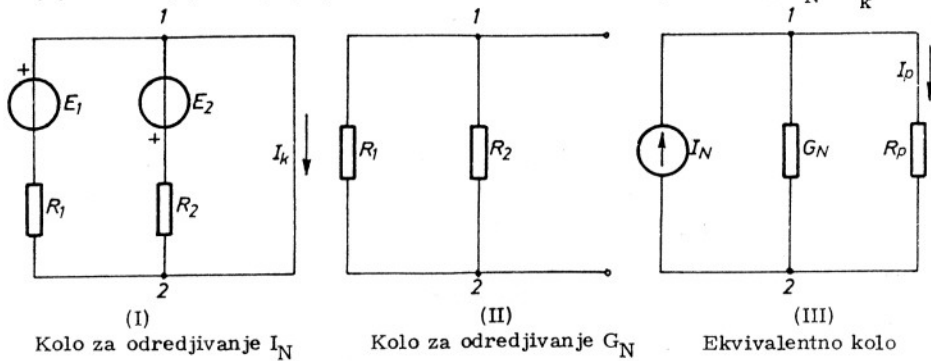
pri čemu je posmatrana grana isključena iz kola.

Unutrašnja provodnost, G_N , Nortonovog generatora je jednaka ekvivalentnoj provodnosti kola između tačaka priključenja grane, pri čemu je grana isključena iz kola i ukinuto dejstvo svih generatora u kolu.

Iz predhodnog se može zaključiti da je Nortonov generator ekvivalentan strujni generator Tevenenovom naponskom generatoru.

Na sl. 2.184. b. (I i II) su prikazana kola iz kojih se određuju karakteristike Nortonovog generatora.

Ekvivalentno kolo koje formiraju Nortonov generator i grana u kojoj se određuje struja je prikazano na sl. 2.184. b. (III) pri čemu je $I_N = I_k$.



Sl. 2.184. b.

Sa sl. 2.184. b. (I) je :

$$I_k = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} = 3 \text{ mA.}$$

Prema sl. 2.184. b (II) je:

$$G_N = G'_{e12} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6} \text{ mS.}$$

Na osnovu slike 2.184. b. (III) može se pisati:

$$I_p = \frac{I_N}{1 + G_N R_p} = 2 \text{ mA.}$$

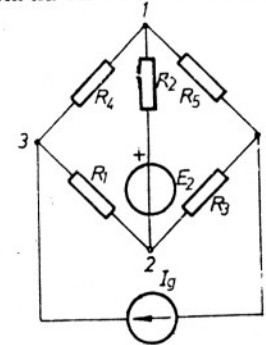
2.185. Odrediti struju u grani sa generatorom ems E_2 u kolu prikazanom na sl. 2.185. a. Poznato je: $E_2 = 24\text{V}$, $I_g = 20 \text{ mA}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$,

$$R_2 = 20 \text{ k}\Omega, R_3 = 5 \text{ k}\Omega,$$

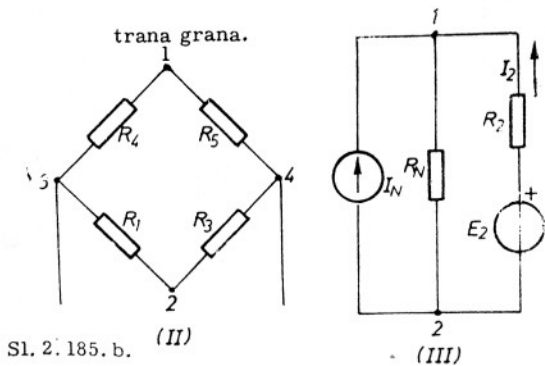
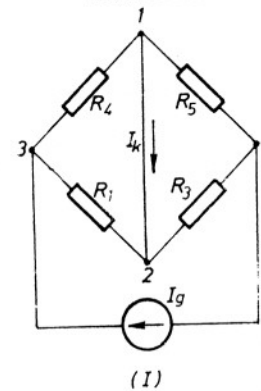
$$R_4 = 3 \text{ k}\Omega \text{ i } R_5 = 15 \text{ k}\Omega.$$

Rešenje:

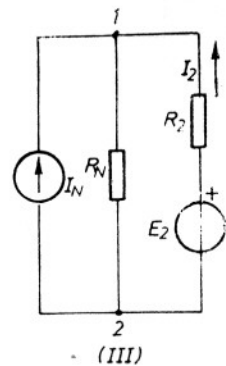
Kola iz kojih se određuju karakteristike Nortonovog generatora su prikazana na sl. 2.185. b. (I i II). Na sl. 2.185. b (III) je prikazan Nortonov generator i posmatrana grana.



Sl. 2.185. a.



Sl. 2.185. b.



(III)

Prema sl. 2.185. b (I) je:

$$I_k = I_{12} = \left(\frac{R_5}{R_3 + R_5} - \frac{R_4}{R_1 + R_4} \right) I_g = 3 \text{ mA.}$$

Za ekvivalentnu otpornost izmedju tačaka 1 i 2 [sl. 2.185. b (II)]

se ima

$$R_{e12} = R_N = \frac{(R_1 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_1 + R_3 + R_4 + R_5} = 4 \text{ k } \Omega .$$

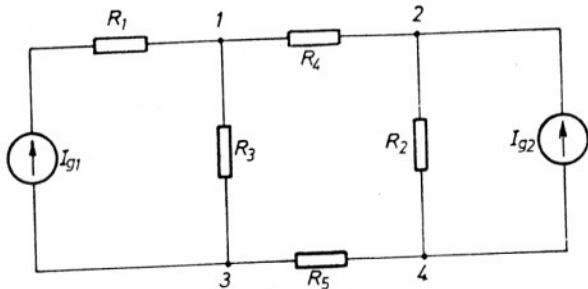
Struja u grani sa naponskim generatorom. [sl. 2.185. b(III)] je

$$I_2 = \frac{E_2 - R_N I_N}{R_2 + R_N} = 0,5 \text{ mA.}$$

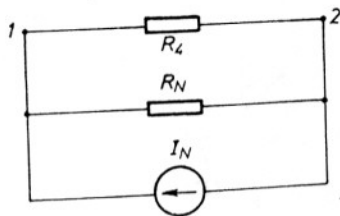
2.186. Odrediti struju u grani sa prijemnikom otpornosti R_4

u kolu na sl. 2.186. a. koristeći Nortonovu teoremu. Poznato je: $I_{g1} = 30 \text{ mA}$,

$I_{g2} = 10 \text{ mA}$, $R_1 = 100 \Omega$,
 $R_2 = 300 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$
 $R_4 = 500 \Omega$ i $R_5 = 1 \text{ k } \Omega$



Sl. 2.186. a.



Sl. 2.186. b.

Rezultat:

Nortonov generator

i grana u kojoj se određuje struja su prikazani

na sl. 2.186. b.

Karakteristike Nortonovog generatora su:

$I_N = 2 \text{ mA}$ i $R_N = 1,5 \text{ k } \Omega$.

Struja otpornika otpornosti

R_4 je: $I_{12} = 1,5 \text{ mA}$.

2.187. U kolu prikazanom na sl. 2.187. b. je poznato: $E_3 = 45 \text{ V}$,

$R_1 = 1 \text{ k } \Omega$, $R_2 = 3 \text{ k } \Omega$, $R_3 = 10 \text{ k } \Omega$

$R_4 = 15 \text{ k } \Omega$ i $I_1 = 18 \text{ mA}$.

Odrediti struju strujnog generatora pomoću Nortonove teoreme.

Rešenje:

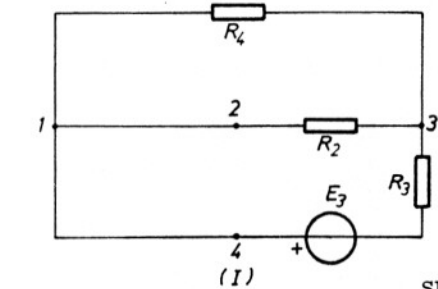
Kada se Nortonova teore-

ma primeni na granu sa strujnim ge-

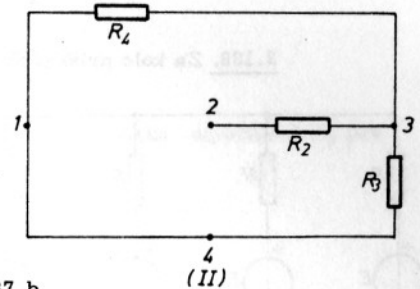
neratorom i njoj paralelno vezanu granu sa otpornikom otpornosti R_1 , dobija-

ju se kola kao na sl. 2.187. b. iz kojih se određuju karakteristike Nortonovog

generatora.



(I)



(II)

Sl. 2.187. b.

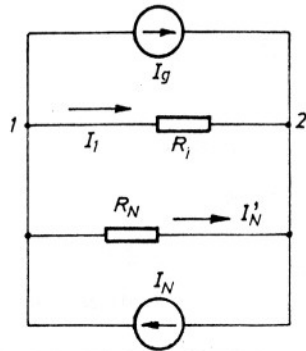
Sa sl. 2.187. b(I) je:

$$I_N = I_k = I_{12} = \frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4} E_3}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = 3 \text{ mA.}$$

Prema sl. 2.187. b. (II) je:

$$R_N = R_{e12} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 9 \text{ k } \Omega .$$

kola.

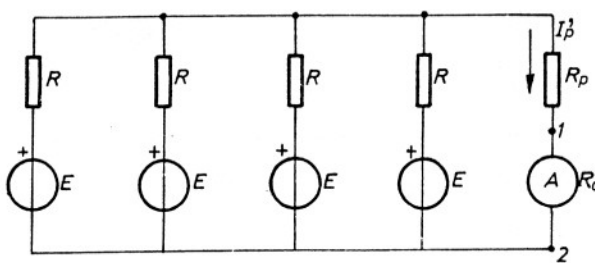


Sl. 2.187. c.

Struja strujnog generatora je:

$$I_g = I_N - I_1 - I'_N = -17\text{mA}.$$

2.188. Za kolo prikazano na sl. 2.188. a. je poznato: $R = 80\Omega$ i



Sl. 2.188. a.

otpornosti R_p pre priključivanja ampermetra u kolo.

2° Apsolutnu i relativnu grešku učinjenu pri ovom merenju struje.

Rešenje:

1° Primenjujući Nortonovu teoremu na dato kolo, prema delu grane između tačaka 1 i 2, između kojih se priključuje ampermetar, dobija-ju se kola kao na sl. 2.188. b. (I) i (II).

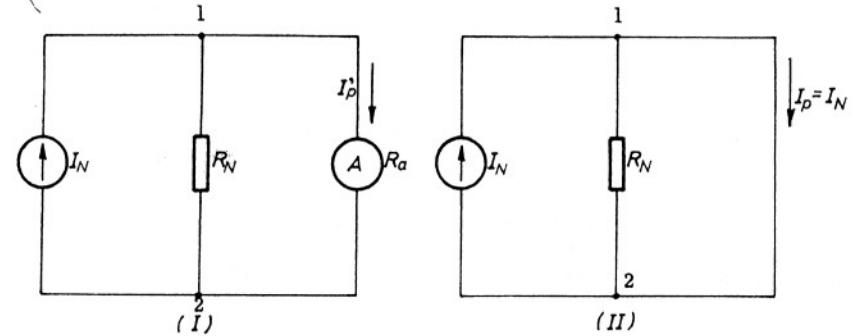
Kako je, prema uslovu

zadatka

$$U_{12} = U_{42} = R_l I_1,$$

to je

$$I'_N = \frac{R_l I_1}{R_N} = 2\text{mA}.$$



Sl. 2.188. b.

Ekvivalentna otpornost Nortonovog generatora je:

$$R_N = R_p + \frac{R}{4} = 25 \Omega.$$

Prema sl. 2.188. b. (I) je:

$$I'_p = \frac{R_N}{R_N + R_a} I_N,$$

Kako je [sl. 2.188. b. (II)] struja prijemnika otpornosti R_p pre uključivanja ampermetra u kolo

$$I_p = I_N,$$

to je

$$I_p = \left(1 + \frac{R_a}{R_N}\right) I'_p = 13 \text{ mA}.$$

2° Apsolutna greška učinjena pri ovom merenju je:

$$\Delta I_p = I'_p - I_p = - \frac{R_a}{R_a + R_N} I_p = -0,5 \text{ mA}.$$

Relativna greška je:

$$\frac{\Delta I_p}{I_p} = - \frac{R_a}{R_a + R_N},$$

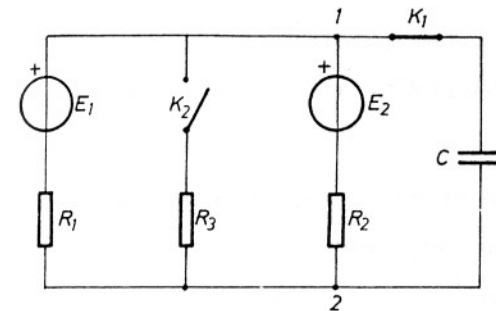
odnosno,

$$\frac{\Delta I_p}{I_p} 100\% \approx -3,85\%$$

Posmatrajući izraz za greške zaključuje se da je izmerena struja uvek manja od stvarne struje prijemnika (pre uključivanja ampermetra).

2.10. ELEKTRIČNA KOLA SA KONDENZATORIMA

2.189. Za kolo prikazano na slici 2.189. a. su: $E_1 = 10V$, $E_2 = 30V$, $R_1 = 15k\Omega$, $R_2 = 5k\Omega$, $R_3 = 1250\Omega$ i $C = 100nF$. Dielektrik kondenzatora



Sl. 2.189. a.

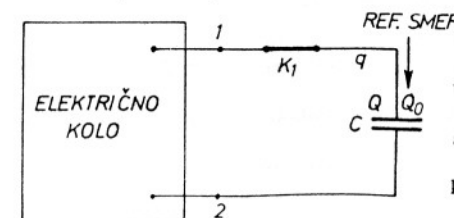
posle zatvaranja prekidača K_2 .

2° Količinu elektriciteta proteklu kroz granu sa kondenzatorom od trenutka zatvaranja prekidača K_2 do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

Rešenje:

Kada se kondenzator kapacitivnosti C , čije elektrode nisu bile naelektrisane, priključi u kolo, kroz granu sa kondenzatorom će proteći elektricitet, a elektrode će se naelektrisati.

Protekla količina elektriciteta kroz granu sa kondenzatorom se označava sa q . Kako je ovo usmerena veličina, pridodaje joj se algebarsko



Sl. 2.189. b.

se može smatrati savršenim.

Prekidač K_1 je zatvoren, a prekidač K_2 otvoren.

Odrediti:

1° Opterećenost kondenzatora i napon između elektroda kondenzatora u stacionarnom stanju nastalom u kolu

značenje prema referentnom smeru u grani sa kondenzatorom. Naelektrisanje elektrode kondenzatora, prema kojoj je usmerena strelica koja označava referentni smer za protoklu

količinu elektriciteta q , je tada isto i po količini i po znaku sa protokom količinom elektriciteta. Naelektrisanje druge elektrode kondenzatora je isto po količini, ali suprotnog znaka protekloj količini elektriciteta q . Na osnovu prethodnog se uvodi pojam opterećenosti kondenzatora. Ova veličina se označava sa Q i predstavlja algebarsku vrednost naelektrisanja one elektrode kondenzatora prema kojoj je uperena strelica referentnog smera za proteklu količinu elektriciteta q . Stoga se i opterećenost kondenzatora Q algebarski tumači prema istom referentnom smeru prema kome i protekla količina elektriciteta q i tada je:

$$Q = q.$$

Ukoliko su elektrode kondenzatora pre priključivanja u kolo bile naelektrisane, njihovo naelektrisanje se može okarakterisati preko opterećenosti Q_0 (početna opterećenost kondenzatora), uz uvođenje referentnog smera u grani sa kondenzatorom.

Posle priključivanja ovakvog kondenzatora u kolo, između krajnje opterećenosti Q , početne opterećenosti Q_0 i protekle količine elektriciteta q u procesu promene opterećenosti postoji veza

$$Q = Q_0 + q.$$

Pri ovome sve veličine (Q , Q_0 i q) imaju algebarsko značenje prema istom referentnom smeru u grani sa kondenzatorom.

Ako se opterećenost kondenzatora i dalje menja tada je:

$$Q = Q_0 + \sum_{k=1}^n q_k.$$

Opterećenost kondenzatora kapacitivnosti C , priključenog u kolo, zavisi od napona između tačaka priključenja. Polazeći od definicije kapacitiv-

nosti kondenzatora, uvedene u Elektrostatici,

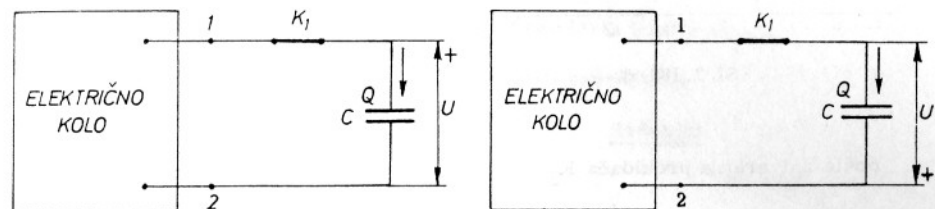
$$C = \frac{Q_+}{V_+ - V_-}$$

i posmatrajući usaglašene smerove za napon između elektroda kondenzatora i opterećenosti kondenzatora [sl. 2.189. c (I)], ima se:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Iz prethodnog je izraz za napon između elektroda opterećenog kondenzatora kapacitivnosti C

$$U = \frac{Q}{C}.$$



(I)

(II)

Sl. 2.189. c.

Za slučaj neusaglašenih smerova za napon između elektroda kondenzatora i opterećenost kondenzatora ima se [sl. 2.189. c (II)]

$$C = \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = -\frac{Q}{U'}.$$

Iz prethodnog je:

$$U' = -\frac{Q}{C}.$$

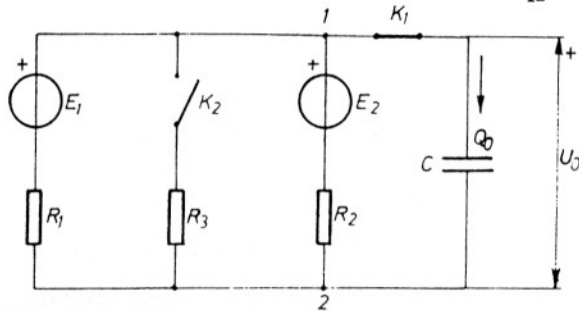
U stacionarnom stanju, pri otvorenom prekidaču K_2 , (sl. 2.189. d)

je:

$$U_{12} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} = 25 \text{ V},$$

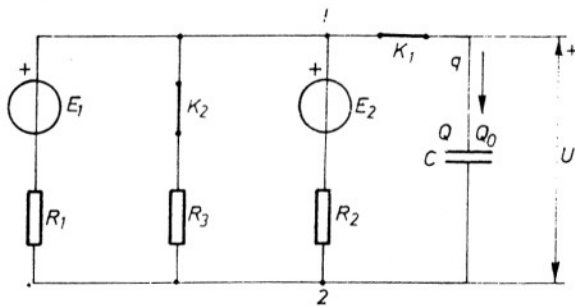
pa je napon između elektroda kondenzatora

$$U_0 = U_{12} = 25 \text{ V}.$$



Sl. 2.189. d.

posle zatvaranja prekidača K_2 .



2.189. e.

Opterećenost kondenzatora, prema referentnom smeru na sl. 2.189. e, je

$$Q = CU = 0,625 \mu\text{C}.$$

2° Kako je

$$Q = Q_0 + q,$$

Opterećenost kondenzatora, prema usvojenom referentnom smeru (sl. 2.189. d.) je:

$$Q_0 = CU_0 = 2,5 \mu\text{C}.$$

1° Na sl. 2.189. e je prikazano kolo u stacionarnom stanju nastalom u kolu

Napon između tačaka 1 i 2 u ovom slučaju je:

$$U'_{12} = \frac{R_3 \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 6,25$$

pa je napon između elektroda kondenzatora

$$U = U'_{12} = 6,25 \text{ V}.$$

to je protekla količina elektriciteta kroz granu sa kondenzatorom, od trenutka zatvaranja prekidača K_2 do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu, jednaka priraštaju opterećenosti kondenzatora, tj.

$$q = Q - Q_0 = -1,875 \mu\text{C}.$$

2.190. Odrediti količinu elektriciteta proteklu kroz granu sa kon-

denzatorom od trenutka zatvaranja prekidača K do uspostavljanja stacionarnog

stanja u kolu prikazanom na slici

2.190. a. Poznato je: $I_g = 0,2 \text{ A}$,

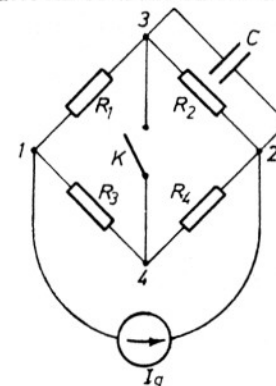
$R_1 = 400 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$,

$R_3 = 200 \Omega$, $R_4 = 300 \Omega$ i $C = 1 \mu\text{F}$.

Dielektrik kondenzatora se može smatrati savršenim.

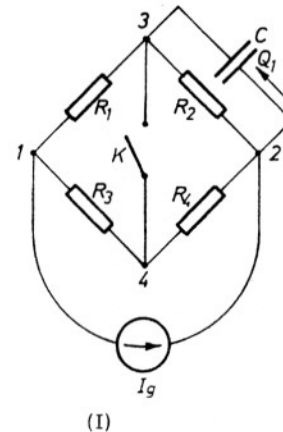
Rešenje:

Na slici 2.190. b.

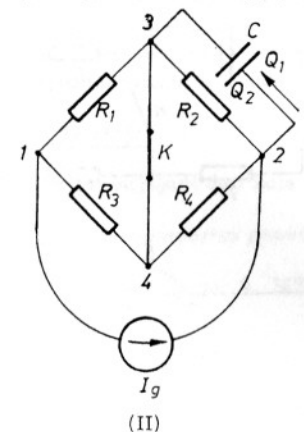


Sl. 2.190. a.

je prikazano dato kolo u stacionarnim stanjima pre i posle zatvaranja prekidača K.



(I)



(II)

Sl. 2.190. b.

Napon između elektroda kondenzatora, pri otvorenom prekidaču K, [sl. 2.190. b. (I)] je:

$$U_{23} = R_2 \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_g = 10V.$$

Opterećenost kondenzatora, u ovom stacionarnom stanju, je:

$$Q_1 = C U_{23} = 10 \mu C.$$

U stacionarnom stanju pri zatvorenom prekidaču K [sl. 2.190. b. (II)]

je:

$$U'_{23} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} I_g = 15V$$

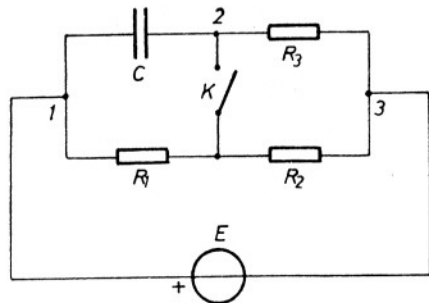
i

$$Q_2 = C U'_{23} = 15 \mu C.$$

Količina elektriciteta protekla kroz granu sa kondenzatorom je

$$q = Q_2 - Q_1 = 5 \mu C.$$

2.191. Odrediti opterećenosti kondenzatora pre i posle zatvaranja prekidača K u kolu na sl. 2.191. Poznato je: $E = 60V$, $R_1 = 300\Omega$, $R_2 = 3k\Omega$,



Sl. 2.191.

Opterećenost kondenzatora, pri zatvorenom prekidaču K, je

$$Q'_{12} = C \frac{R_1 E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 5,64 \mu C.$$

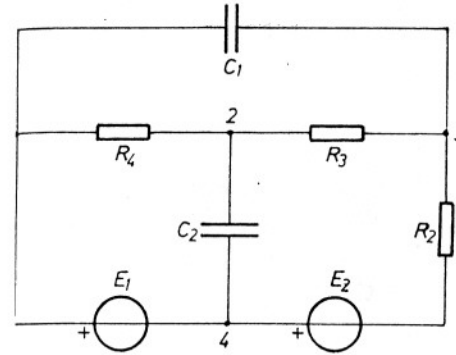
$R_3 = 2k\Omega$ i $C = 0,47 \mu F$. Dielektrik kondenzatora se može smatrati savršenim.

Rezultat:

Opterećenost kondenzatora pri otvorenom prekidaču K je:

$$Q_{12} = CE = 28,2 \mu C.$$

2.192. Odrediti elektrostatičke energije kondenzatora u kolu prikazanom na sl. 2.192. Poznato je: $E_1 = 12V$, $E_2 = 24V$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 3k\Omega$,



Sl. 2.192.

$R_4 = 2k\Omega$, $C_1 = 8 \mu F$ i $C_2 = 16 \mu F$. Dielektrici kondenzatora se mogu smatrati savršenim.

Rezultat:

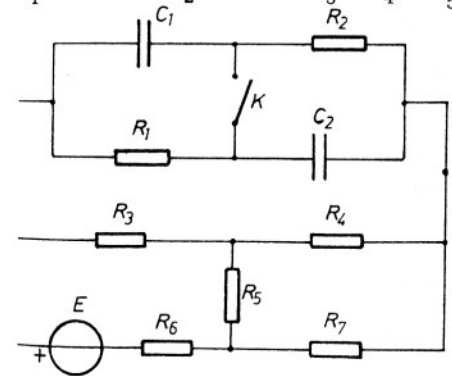
Elektrostatičke energije kondenzatora su:

$$W_{C_1} = \frac{1}{2} C_1 U_{13}^2 = 3,6 \text{ mJ}$$

i

$$W_{C_2} = \frac{1}{2} C_2 U_{24}^2 = 0.$$

2.193. Za kolo na sl. 2.193. a. je poznato: $C_1 = 4 \mu F$, $C_2 = 6 \mu F$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 75\Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 50\Omega$, $R_6 = R_7 = 150\Omega$ i $E = 50V$.



Sl. 2.193. a.

Odrediti količine elektriciteta protekle kroz grane sa kondenzatorima od trenutka zatvaranja prekidača K do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

Rešenje:

Zamenjujući deo kola ispod tačaka 1 i 2 Thevenovim generatorom dobija se kolo kao na sl. 2.193. b.

Pri ovome su:

$$E_T = 12,5V \text{ i } R_T = 75\Omega$$

Posmatrajući kolo pri otvorenom prekidaču K (sl. 2.193. b.) ima se

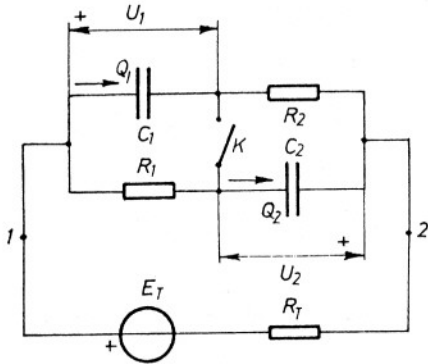
$$U_1 = E_T = 12,5V \text{ i } U_2 = -E_T = -12,5V.$$

Prema usvojenim referentnim smerovima u granama sa kondenzatorima (sl. 2. 193. b.) opterećenosti kondenzatora su:

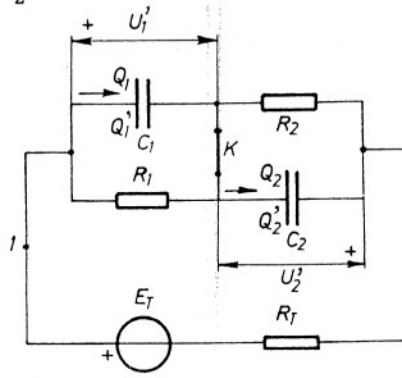
$$Q_1 = C_1 U_1 = 50 \mu\text{C}$$

i

$$Q_2 = -C_2 U_2 = 75 \mu\text{C}.$$



Sl. 2. 193. b.



Sl. 2. 193. c.

Posle zatvaranja prekidača K (sl. 2. 193. c.) je,

$$U'_1 = R_1 \frac{E_T}{R_1 + R_2 + R_T} = 5\text{V}$$

i

$$U'_2 = -R_2 \frac{E_T}{R_1 + R_2 + R_T} = -3,75\text{V}.$$

Opterećenosti kondenzatora su:

$$Q'_1 = C_1 U'_1 = 20 \mu\text{C}$$

i

$$Q'_2 = -C_2 U'_2 = 22,5 \mu\text{C}.$$

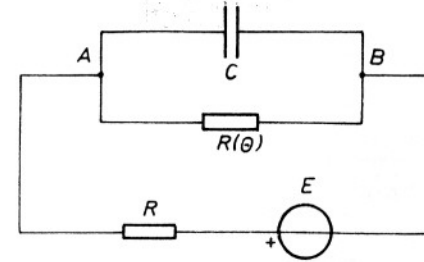
Količine elektriciteta protekle kroz grane sa kondenzatorima su:

$$q_1 = Q'_1 - Q_1 = -30 \mu\text{C}$$

i

$$q_2 = Q'_2 - Q_2 = -52,5 \mu\text{C}.$$

2. 194. Kondenzator kapacitivnosti $C = 10 \mu\text{F}$, generator stalne elektromotorne sile $E = 18\text{V}$, otpornik otpornosti $R = 30 \Omega$, koja se ne menja sa temperaturom i žičani otpornik otpornosti $R(\theta)$ koja se menja sa temperaturom ve-



Sl. 2. 194.

zani su u kolo kao na sl. 2. 194.

Na sobnoj temperaturi struja kroz otpornik promenljive otpornosti je $I'_{AB} = 225 \text{mA}$. Usled proticanja elektriciteta ovaj otpornik se zagreje i njegova tem-

peratura se poveća za $\Delta\theta = 50^\circ\text{C}$ i dalje se ne menja.

U procesu promene temperature otpornika kroz granu sa kondenzatorom protokne količina elektriciteta $q_{AB} = 7,5 \mu\text{C}$.

Odrediti temperaturni sačinitelj α materijala od koga je načinjen otpornik otpornosti $R(\theta)$. Temperaturni sačinitelj α smatrati konstantnim u posmatranom opsegu temperature.

Rešenje:

Izmedju otpornosti otpornika, temperaturnog sačinitelja α i priraštaja temperature $\Delta\theta$ postoji veza

$$R_2 = R_1 (1 + \alpha \Delta\theta).$$

Iz prethodnog izraza je:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta\theta} \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right).$$

Na sobnoj temperaturi (θ_1) je:

$$R_1 = \frac{U'_{AB}}{I'_{AB}}.$$

Sa sl. 2.194. je:

$$U'_{AB} = E - RI'_{AB} = 11,25V,$$

pa je:

$$R_1 = 50 \Omega.$$

Na temperaturi Θ_2 je:

$$R_2 = \frac{U'_{AB}}{I'_{AB}}$$

Kako je

$$q_{AB} = C (U''_{AB} - U'_{AB}) = C \Delta U_{AB},$$

to je priraštaj napona između krajeva otpornika

$$\Delta U_{AB} = \frac{q_{AB}}{C} = 0,75V.$$

Sada je:

$$U''_{AB} = U'_{AB} + \Delta U_{AB} = 12V.$$

Intenzitet struje u ovom slučaju je:

$$I''_{AB} = \frac{E - U''_{AB}}{R} = 200 \text{ mA}.$$

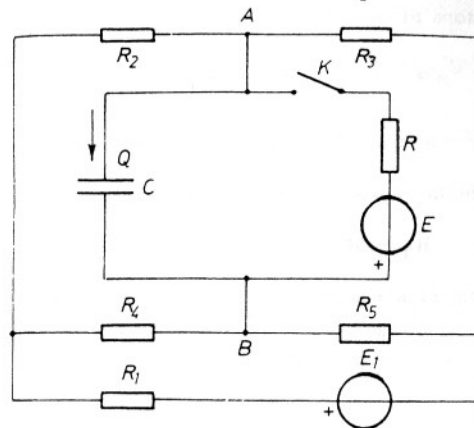
Otpornost otpornika na temperaturi Θ_2 je:

$$R_2 = 60 \Omega.$$

Temperaturni sačinitelj otpornosti materijala od koga je otpornik načinjen je:

$$\alpha = 0,004 \frac{1}{^\circ C}.$$

2.195. Za kolo prikazano na sl. 2.195. a. je poznato: kapacitivnost $C = 20 \text{ nF}$, otpornosti $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$, $R_4 = 540 \Omega$, $R_5 = 520 \Omega$ i elektromotorna sila $E = 60V$. U stacionarnom stanju u kolu, pri otvorenom prekidaču K , opterećenost kondenzatora je $Q = 2 \mu C$, prema označenom referentnom smeru u grani sa kondenzatorom.

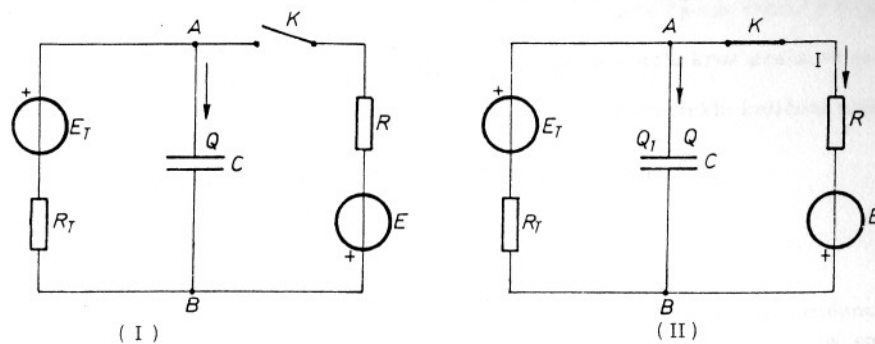


Sl. 2.195. a.

Odrediti otpornost R tako da se u stacionarnom stanju nastalom u kolu posle zatvaranja prekidača K novopriključena grana ponaša kao generator i da priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora, prema prethodnom stacionarnom stanju u kolu, bude $\Delta W = -75 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

Rešenje:

Radi bržeg rešenja zadatka povoljno je jedan deo kola između tačaka A i B zameniti Tevenenovim generatorom, kao na sl. 2.195. b.



Sl. 2.195. b.

Elektromotorna sila Tevenenovog generatora je ovde jednaka naponu između elektroda kondenzatora pri otvorenom prekidaču K:

$$E_T = U'_{AB} = \frac{Q}{C} = 100V.$$

U delu kola, koji je zamenjen Tevenenovim generatorom, sve otpornosti su poznate, pa je ekvivalentna otpornost Tevenenovog generatora:

$$R_T = 300 \Omega.$$

Iz izraza za priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora

$$\Delta W = \frac{1}{2} CU_{AB}^2 - \frac{1}{2} CU_{AB}'^2,$$

je

$$U_{AB} = \pm \sqrt{U_{AB}'^2 + \frac{2 \Delta W}{C}} = \pm 50V.$$

Posmatrajući kolo sa slike 2.195. b. (II), ima se:

$$I = \frac{-U_{AB} + E_T}{R_T},$$

odnosno

$$I = \frac{E_T + E}{R_T + R}.$$

Iz prethodnih jednačina je:

$$R = \frac{U_{AB} + E}{E_T - U_{AB}} R_T.$$

1^o Da bi bio napon $U_{AB} = 50V$, potrebno je da bude:

$$R = 660 \Omega.$$

Snaga koju novo priključena grana proizvodi pod ovim okolnostima je:

$$P_{AB} = U_{AB} I_{BA} = -U_{AB} I = -\frac{25}{3} W.$$

Iz ovoga se zaključuje da se novopriključena grana ponaša kao

prijemnik, pa dobijeno rešenje $R = 660 \Omega$, ne odgovara svim uslovima zadatka.

2^o Da bi bio napon $U_{AB} = -50V$, treba da bude:

$$R = 20 \Omega$$

Snaga koju grana proizvodi pod ovim okolnostima je

$$P_{AB} = -U_{AB} I = 25W,$$

pa se grana ponaša kao generator.

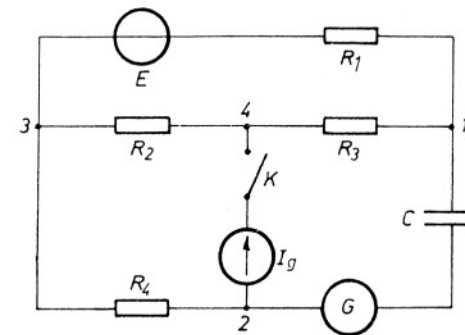
Iz prethodnog se zaključuje da treba da bude

$$R = 20 \Omega.$$

2.196. Za kolo prikazano na slici 2.196. je poznato: $R_1=150 \Omega$,

$R_2=100 \Omega$, $R_3 = 250 \Omega$,

$R_4 = 120 \Omega$ i $C = 2\mu F$.



Sl. 2.196.

Odrediti struju strajnog generatora I_g .

Rešenje:

Količina elektriciteta protekla kroz granu sa kondenzatorom, posle zatvaranja prekidača K, je:

rom, posle zatvaranja prekidača K, je:

$$q_{12} = C \Delta U_{12},$$

Posle zatvaranja prekidača K galvanometar G pokaže da je

do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu kroz granu sa kondenzatorom protekla količina elektriciteta $q_{12} = 15\mu C$.

Priraštaj napona između elektroda kondenzatora je, prema

prethodnom:

$$\Delta U_{12} = \frac{q_{12}}{C} = 7,5 \text{ V}.$$

Pri ovome je

$$\Delta U_{12} = U''_{12} - U'_{12}.$$

gde su U''_{12} napon između tačaka 1 i 2 u stacionarnom stanju u kolu posle zatvaranja prekidača K, a U'_{12} napon između tačaka 1 i 2 u stacionarnom stanju pre zatvaranja prekidača K.

Kada je prekidač K otvoren u kolu deluje samo generator elektromotorne sile E. Pri zatvorenom prekidaču K u kolu deluju generator elektromotorne sile E i generator struje I_g . Primenjujući teoremu superpozicije za ovo stacionarno stanje, ima se:

$$U''_{12} = U'_{12} + U_{12}.$$

pri čemu je U_{12} napon između krajeva kondenzatora kada u kolu deluje samo strujni generator. Stoga je:

$$\Delta U_{12} = U_{12}.$$

te je

$$U_{12} = \frac{q_{12}}{C} = 7,5 \text{ V}.$$

Posmatrajući kolo sa slike 2.196. je

$$U_{12} = (R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}) I_g.$$

Iz prethodnog izraza se dobija:

$$I_g = 50 \text{ mA}$$

2.197. Za kolo na slici 2.197. je poznato: $I_g = 0,1 \text{ A}$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$, $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$ i $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$. Pri otvorenom prekidaču K je:

$$\frac{U_1}{U_2} = 0,2.$$

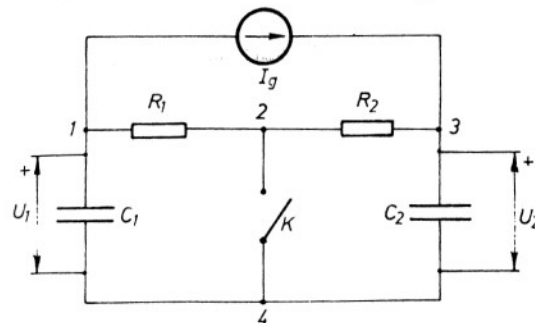
Odrediti:

1° Odnos napona $\frac{U'_1}{U'_2}$

u stacionarnom stanju nastalom u kolu posle zatvaranja prekidača.

2° Količine elektriciteta

protekle kroz grane sa kondenza-



Sl. 2.197.

torima od trenutka zatvaranja prekidača K do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

Rezultat:

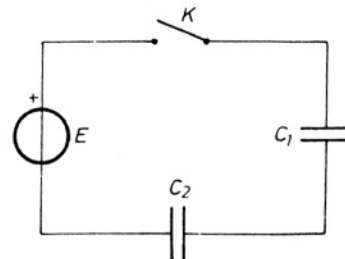
1° Odnos napona je:

$$\frac{U'_1}{U'_2} = -\frac{1}{3}.$$

2° Protekle količine elektriciteta su:

$$q_{34} = -4 \mu\text{C} \quad \text{i} \quad q_{41} = 10 \mu\text{C}.$$

2.198. Kondenzatori kapacitivnosti $C_1 = 300 \text{ pF}$ i $C_2 = 60 \text{ pF}$, bez



Sl. 2.198. a.

početnih opterećenosti i genera-

tor stalne elektromotorne sile

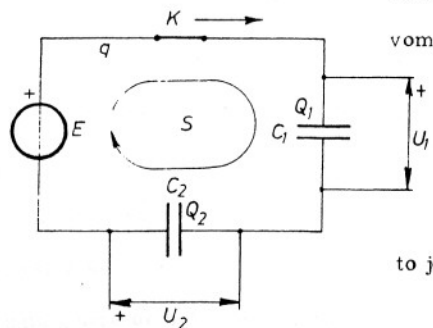
$E = 12 \text{ V}$, vezani su u kolo kao na

sl. 2.198. a. Odrediti opterećeno-

sti kondenzatora i napone između

elektroda kondenzatora u stacionarnom stanju nastalom u kolu posle zatvaranja prekidača K.

Rešenje:



Sl. 2. 198. b.

S obzirom na to da su kondenzatori bili bez početnih opterećenosti, to je

$$i \quad \begin{aligned} Q_1 &= q \\ Q_2 &= q. \end{aligned}$$

pa je

$$E - \frac{q}{C_1} - \frac{q}{C_2} = 0.$$

Količina elektriciteta protekla kroz kolo do uspostavljanja stacionarnog stanja je, prema prethodnoj jednačini:

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} E = 0,6 \text{ nC}.$$

Opterećenosti kondenzatora su:

$$Q_1 = 0,6 \text{ nC} \quad i \quad Q_2 = 0,6 \text{ nC}.$$

Naponi između elektroda kondenzatora su:

$$U_1 = 2 \text{ V} \quad i \quad U_2 = -10 \text{ V}.$$

Postavljajući jednačinu po drugom Kirhofovom zakonu na kolo sa sl. 2.198. b., ima se

$$E - U_1 + U_2 = 0.$$

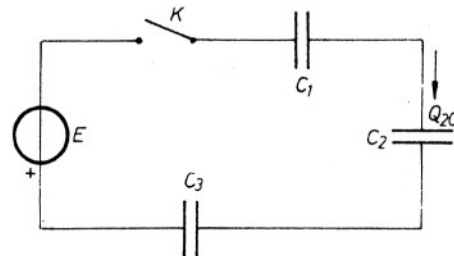
Kako su

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad i \quad U_2 = -\frac{Q_2}{C_2},$$

to je:

$$E - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0.$$

2.199. Kondenzatori kapacitivnosti $C_1 = 120 \text{ pF}$ i $C_3 = 300 \text{ pF}$, bez početnih opterećenosti, kondenzator kapacitivnosti $C_2 = 100 \text{ pF}$, početne opterećenosti $Q_{20} = 1,2 \text{ nC}$ prema

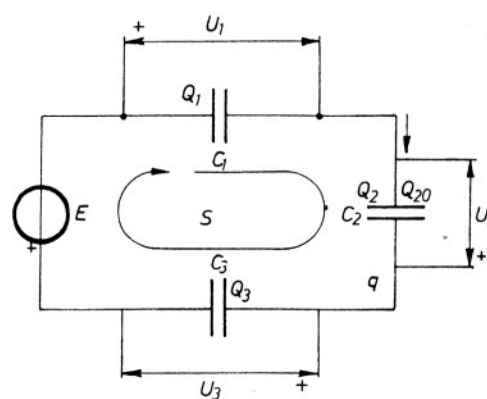


Sl. 2. 199. a.

terelećenosti kondenzatora posle zatvaranja prekidača K.

Rešenje:

Prema oznakama sa slike 2.199. b. je:



Sl. 2. 199. b.

$$-E - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} = 0.$$

Kako je:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q, \\ Q_2 &= Q_{20} + q \end{aligned}$$

$$i \quad Q_3 = q.$$

to je

$$q = -\frac{C_1 C_3 (C_2 E + Q_{20})}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = -1,2 \text{ nC}.$$

Krajnje opterećenosti kondenzatora su:

$$Q_1 = -1,2 \text{ nC},$$

$$Q_2 = 0$$

$$i \quad Q_3 = -1,2 \text{ nC}.$$

Naponi između elektroda kondenzatora su:

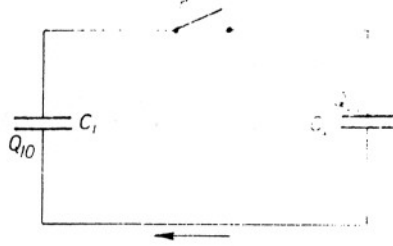
$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = -10V,$$

$$U_2 = -\frac{Q_2}{C_2} = 0$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = -4V.$$

i

2.200. Kondenzator kapacitivnosti $C_1 = 16\mu F$, i kondenzator kapacitivnosti $C_2 = 20\mu F$ su u kolo kao na slici 2.200. a. Početne opterećenosti kondenzatora, prema



Sl. 2.200. a.

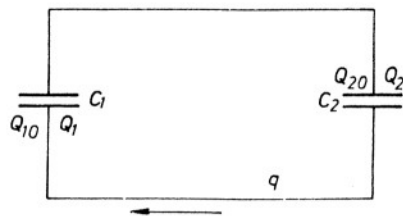
zatvaranja prekidača K do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

2° Krajnje opterećenosti kondenzatora posle zatvaranja prekidača K.

3° Elektrostatičke energije kondenzatora pre zatvaranja prekidača K i u stacionarnom stanju posle njegovog zatvaranja.

Rešenje:

1° Za stacionarno stanje u kolu pri zatvorenom prekidaču



$$K \text{ je: } -\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0.$$

Kako je

$$Q_1 = Q_{10} + q$$

i

$$Q_2 = Q_{20} + q.$$

to je:

$$q = -\frac{C_2 Q_{10} + C_1 Q_{20}}{C_1 + C_2} = -32\mu C.$$

2° Krajnje opterećenosti kondenzatora su:

$$Q_1 = 48\mu C$$

i

$$Q_2 = -12\mu C.$$

3° Elektrostatičke energije kondenzatora pre zatvaranja prekidača su:

$$W_{10} = \frac{1}{2} \frac{Q_{10}^2}{C_1} = 0,2 \text{ mJ}$$

i

$$W_{20} = \frac{1}{2} \frac{Q_{20}^2}{C_2} = 0,05 \text{ mJ}.$$

Elektrostatičke energije kondenzatora posle zatvaranja prekidača

K i uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu su:

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} = 0,072 \text{ mJ}$$

i

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = 0,018 \text{ mJ}.$$

Ukupna elektrostatička energija kondenzatora pre zatvaranja pre-

kidača K je:

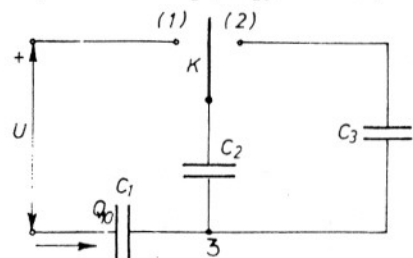
$$W_0 = W_{10} + W_{20} = 0,25 \text{ mJ},$$

a posle zatvaranja prekidača K je

$$W = W_1 + W_2 = 0,09 \text{ mJ}.$$

Razlika elektrostatičkih energija se u toku uspostavljanja stacionarnog stanja pretvorila u drugi vid energije (toplota usled Džulovog efekta, energiju zračenja pri pojavi varnice na prekidaču).

2. 201. Kolu prikazanom na slici 2. 201. je poznato: $U=20V$, $C_1 = 200 \text{ pF}$, $C_2 = 300 \text{ pF}$ i $C_3 = 150 \text{ pF}$. Početna opterećenost kondenzatora kapacitivnosti C_1 je $Q_{10} = 2 \text{ nC}$, prema označenom referentnom smeru. Prvo se



Sl. 2. 201.

preklopnik K stavi u položaj (1), pa po dostignutom stacionarnom stanju u položaj (2)

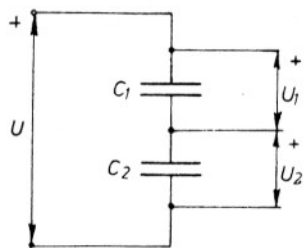
Odrediti napon između krajeva kondenzatora kapacitivnosti C_3 posle uspostavljanja krajnjeg stacionarnog stanja u kolu.

Rezultat:

Napon između krajeva kondenzatora kapacitivnosti C_3 je

$$U_{23} = 8 \text{ V.}$$

2. 202. Kondenzatori kapacitivnosti C_1 i C_2 , bez početnih opterećenosti, vezani su na red, a zatim priključeni na stalan napon U , kao na slici



Sl. 2. 202.

2. 202. Odrediti odnose napona:

$$\frac{U_1}{U} \quad \text{i} \quad \frac{U_2}{U}$$

pri uspostavljenom stacionarnom stanju u kolu.

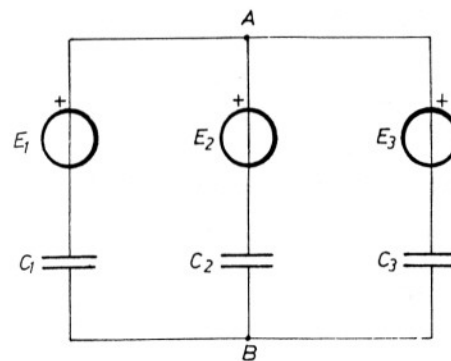
Rezultat:

Odnosi napona su:

$$\frac{U_1}{U} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{i} \quad \frac{U_2}{U} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Ovakva veza kondenzatora se često naziva kapacitivni razdelnik napona.

2. 203. Tri kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 10 \mu\text{F}$ i



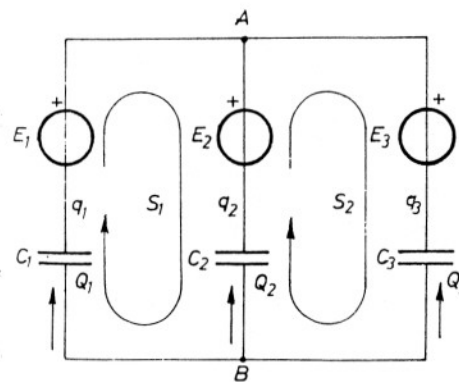
Sl.2. 203. a.

$C_3 = 8 \mu\text{F}$, bez početnih opterećenosti, istovremeno su uključena u kolo sa generatorima elektromotornih sila $E_1 = 12V$, $E_2 = 24V$ i $E_3 = 30V$, kao na slici 2. 203. a.

Odrediti opterećenosti kondenzatora i napone između obloga kondenzatora posle uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

Rešenje:

Radi rešavanja datog kola treba primeniti zakon kontinuiteta elektriciteta i drugi Kirhofov zakon.



Sl. 2. 203. b.

Kako je za dato kolo $n_{\Sigma} - 1 = 1$, to se po zakonu kontinuiteta elektriciteta postavlja jedna jednačina. Za grane koje se stiču u čvoru A (sl. 2. 203. b.) je:

$$-q_1 - q_2 - q_3 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Za dato kolo je $n_g - (n_{\Sigma} - 1) = 2$, pa se po drugom Kirhofovom zakonu postavlja dve jednačine za dva nezavisna zatvorena puta u kolu.

Na slici 2. 203. b. su označeni zatvoreni putevi S_1 i S_2 , pa je:

$$S_1: E_1 - E_2 + \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_1}{C_1} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$S_2: -E_3 + \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_2}{C_2} + E_2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Kondenzatori nisu imali početne opterećenosti, pa je:

$$Q_1 = q_1 \dots \dots \dots (4)$$

$$Q_2 = q_2 \dots \dots \dots (5)$$

$$i \quad Q_3 = q_3 \dots \dots \dots (6)$$

Jednačine (1), (2), (3), (4), (5) i (6), omogućavaju da se formira sistem od tri jednačine ili po krajnjim opterećenostima kondenzatora (Q_1, Q_2, Q_3) ili po količinama elektriciteta proteklih kroz grane sa kondenzatorima (q_1, q_2, q_3) do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

U ovom slučaju treba formirati sistem jednačina po krajnjim opterećenostima kondenzatora.

$$-Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \dots \dots \dots (1')$$

$$-\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = -E_1 + E_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$-\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = -E_2 + E_3 \dots \dots \dots (3)$$

Zamenom brojnih vrednosti poznatih veličina, izraženih jedinicama MKSA sistema, dobija se:

$$-Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \dots \dots \dots (1')$$

$$-5Q_1 + Q_2 = 12 \cdot 10^{-5} \dots \dots \dots (2)$$

$$-8Q_2 + 10Q_3 = 48 \cdot 10^{-5} \dots \dots \dots (3)$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina za krajnje opterećenosti kondenzatora

se dobija:

$$Q_1 = -26,4 \cdot 10^{-6} \text{ C,}$$

$$Q_2 = -12 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$i \quad Q_3 = 38,4 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

Naponi izmedju obloga kondenzatora, računati prema usagla-

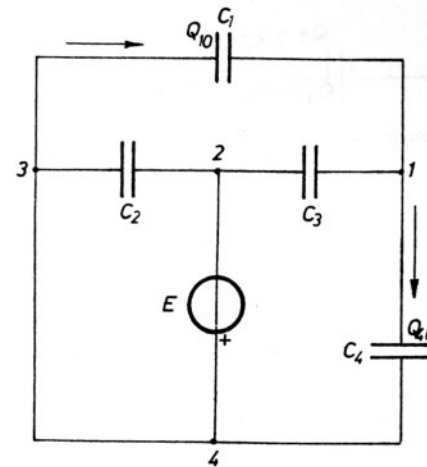
šenim smerovima sa referentnim smerovima za opterećenosti kondenzatora, su:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = -13,2 \text{ V,}$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = -1,2 \text{ V}$$

$$i \quad U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 4,8 \text{ V.}$$

2.204. Generator elektromotorne sile $E = 40\text{V}$, kondenzatori

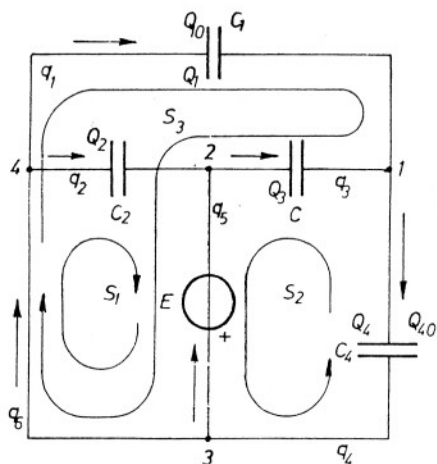


Sl. 2. 204. a.

kapacitivnosti $C_1 = 10 \mu\text{F}$ i $C_4 = 4 \mu\text{F}$, početnih opterećenosti $Q_{10} = 30 \mu\text{C}$ i $Q_{40} = -260 \mu\text{C}$ prema označenim referentnim smerovima i kondenzatori kapacitivnosti $C_2 = 5 \mu\text{F}$ i $C_3 = 4 \mu\text{F}$, bez početnih opterećenosti, istovremeno su vezani u kolo prikazano slikom 2. 204. a. **Odrediti** količine elektriciteta protekle kroz grane kola do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu i krajnje opterećenosti kondenzatora.

Rešenje:

Prema oznakama i referentnim smerovima sa slike 2. 204. b. je:



Sl. 2. 204. b.

Čvor 1: $-q_1 - q_3 + q_4 = 0 \dots (1)$

Čvor 2: $-q_2 - q_5 + q_3 = 0 \dots (2)$

Čvor 3: $-q_4 + q_5 + q_6 = 0 \dots (3)$

S_1 : $E - \frac{Q_2}{C_2} = 0 \dots (4)$

S_2 : $E + \frac{Q_4}{C_4} + \frac{Q_3}{C_3} = 0 \dots (5)$

S_3 : $-\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} + E = 0 \dots (6)$

$Q_1 = Q_{10} + q_1 \dots (7)$

$Q_2 = q_2 \dots (8)$

$Q_3 = q_3 \dots (9)$

$Q_4 = Q_{40} + q_4 \dots (10)$

Iz prethodnih jednačina se dobija:

$q_1 = 220 \mu C, \quad q_4 = 160 \mu C,$

$q_2 = 200 \mu C, \quad q_5 = -260 \mu C,$

$q_3 = -60 \mu C \quad i \quad q_6 = 420 \mu C.$

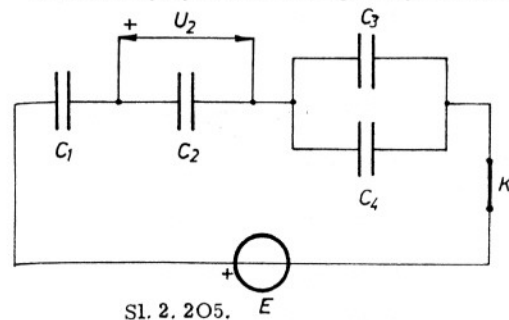
Krajnje opterećenosti kondenzatora su:

$Q_1 = 250 \mu C, \quad Q_3 = -60 \mu C$

$Q_2 = 200 \mu C \quad i \quad Q_4 = -100 \mu C.$

2. 205. Četiri kondenzatora bez početnih opterećenosti i generator stalne elektromotorne sile vezani su u kolo kao na slici 2. 205. Poznato je: $C_1 = 12 \text{ nF}, C_2 = 6 \text{ nF}, C_3 = 8 \text{ nF}$ i $E = 20 \text{ V}$. Posle zatvaranja prekidača K

i uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu, poznat je i napon $U_2 = 10 \text{ V}$.



Sl. 2. 205.

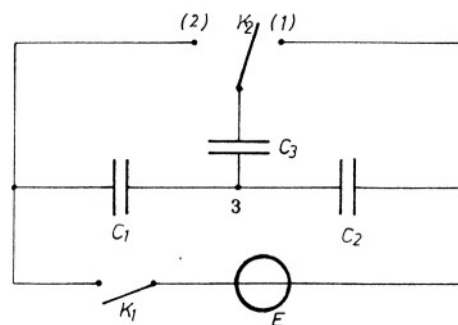
Odrediti kapacitivnost C_4 .

Rezultat:

Kapacitivnost četvrtog kondenzatora je:

$C_4 = 4 \text{ nF}.$

2. 206. Kondenzatori kapacitivnosti $C_1 = 4 \text{ nF}, C_2 = 8 \text{ nF}$ i



Sl. 2. 206.

$C_3 = 4 \text{ nF}$, bez početnih opterećenosti, vezani su kao na slici 2. 206.

Prvo se preklopnik K_2 stavi u položaj (1), a zatim zatvori prekida

K_1 . Pod ovim okolnostima napon između krajeva kondenzatora kapacitivnosti C_3 je $U_{13} = -5 \text{ V}$.

Zatim se preklopnik K_2

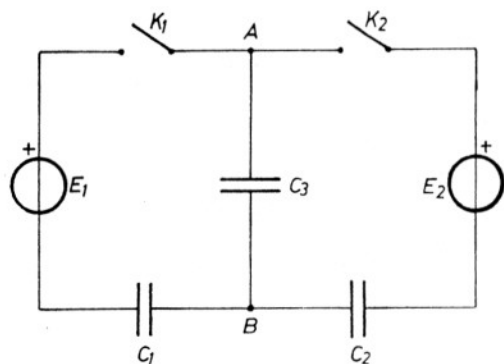
prebaci u položaj (2). Odrediti opterećenost kondenzatora kapacitivnosti C_3 pod ovim okolnostima.

Rezultat:

Opterećenost kondenzatora kapacitivnosti C_3 je:

$(Q_3)_{23} = 40 \text{ nC}.$

2. 207. Kondenzatori kapacitivnosti $C_1 = 100 \text{ pF}, C_2 = 200 \text{ pF}$ i $C_3 = 100 \text{ pF}$, bez početnih opterećenosti i generatori nepoznatih elektromotornih



Sl. 2. 207.

sila E_1 i E_2 , vezani su kao na slici 2. 207. U stacionarnom stanju pri zatvorenom samom prekidaču K_1 , napon kondenzatora kapacitivnosti C_3 je $U_{AB} = 50V$. Zatim se zatvori i prekidač K_2 , pa u stacionarnom stanju ustanovi $U_{AB}'' = -50V$.

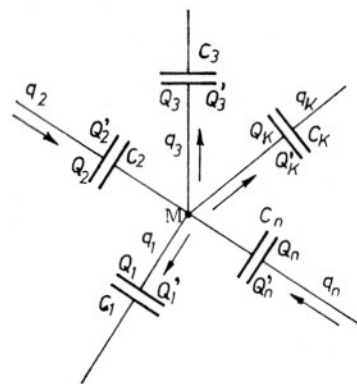
Odrediti elektromotorne sile.

Rezultat:

Elektromotorne sile su:

$$E_1 = 100V \quad \text{i} \quad E_2 = -150V.$$

2. 208. Na slici 2. 208. je prikazan deo električnog kola sa



Sl. 2. 208.

kondenzatorima. Pokazati da je algebarski zbir opterećenosti svih kondenzatora u svim stacionarnim stanjima isti.

Rešenje:

Na osnovu zakona kontinuiteta, primenjenog na količine elektriciteta protekle kroz grane sa kondenzatorima u procesu promene stacionarnog sta-

nja je:

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0.$$

Kako je

$$q_k = Q'_k - Q_k,$$

to je:

$$\sum_{k=1}^n (Q'_k - Q_k) = 0,$$

odnosno:

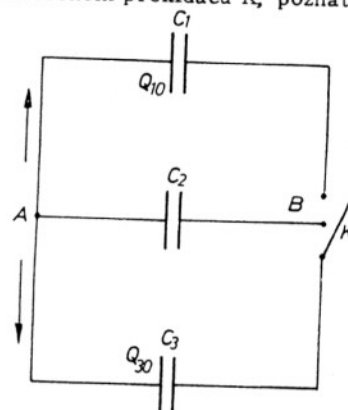
$$\sum_{k=1}^n Q'_k - \sum_{k=1}^n Q_k = 0.$$

Iz prethodnog se zaključuje da je:

$$\sum_{k=1}^n Q'_k = \sum_{k=1}^n Q_k = C \frac{te}{t}.$$

2. 209. Za kondenzatore prikazane na slici 2. 209. a. je, pri

otvorenom prekidaču K , poznato: $C_1 = 200 \text{ pF}$, $C_2 = 300 \text{ pF}$, $C_3 = 500 \text{ pF}$,



Sl. 2. 209. a.

$$Q_{10} = 15 \text{ nC}, \quad Q_{20} = 0 \text{ i}$$

$Q_{30} = 5 \text{ nC}$ prema referentnim smerovima označenim na slici 2. 209. a.

Zatvaranjem prekidača K u kolo se uključuju sva tri kondenzatora.

Odrediti:

1° Napon između tačaka A i

B posle zatvaranja prekidača K .

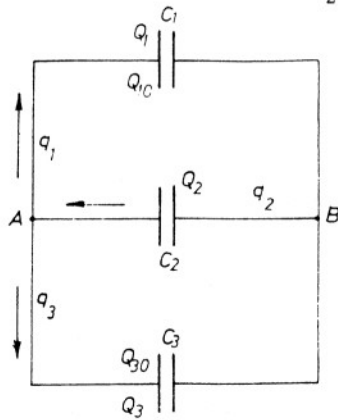
2° Krajnje opterećenosti kondenzatora.

3° Količine elektriciteta protekle kroz grane sa kondenzatorima posle zatvaranja prekidača K .

Rešenje:

1° Imajući u vidu zadatak 2. 208 i oznake na sl. 2. 209. b. ima se

$$Q_1 - Q_2 + Q_3 = Q_{10} + Q_{30}.$$



Sl. 2. 209. b.

2° Krajnje opterećenosti kondenzatora su:

$$Q_1 = 4 \text{ nC},$$

$$Q_2 = -6 \text{ nC}$$

i

$$Q_3 = 10 \text{ nC}.$$

3° Protekle količine elektriciteta kroz grane sa kondenzatorima su:

$$q_1 = Q_1 - Q_{10} = -11 \text{ nC},$$

$$q_2 = Q_2 = -6 \text{ nC}$$

i

$$q_3 = Q_3 - Q_{30} = 5 \text{ nC}.$$

2. 210. Kondenzator kapacitivnosti C_1 sa vazдушnim dielektrikom, kondenzator kapacitivnosti C_2 , sa dielektrikom relativne dielektrične konstante

ϵ_r , bez početnih opterećenosti i generator elektromotorne sile E vezani su

u kolo kao na sl. 2. 210.

Kako su:

$$Q_1 = C_1 U_{AB},$$

$$Q_2 = -C_2 U_{AB}$$

i

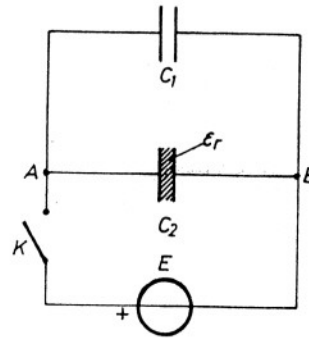
$$Q_3 = C_3 U_{AB},$$

to je

$$U_{AB} (C_1 + C_2 + C_3) = Q_{10} + Q_{30},$$

Iz prethodnog je:

$$U_{AB} = \frac{Q_{10} + Q_{30}}{C_1 + C_2 + C_3} = 20 \text{ V}.$$



Sl. 2. 210.

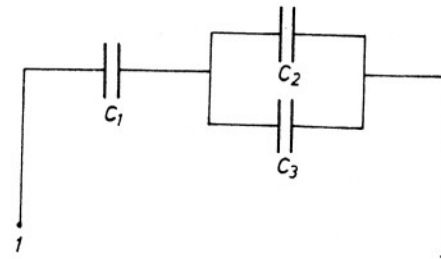
Rezultat:

Izraz za napon izmedju tačaka A i B je

$$U_{AB} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \frac{C_2}{\epsilon_r}} E.$$

2. 211. Tri neopterećena kondenzatora kapacitivnosti C_1 , C_2 i C_3 vezana su kao na sl. 2. 211. a. Odrediti kapacitivnost ekvivalentnog kondenzatora

ovoj grupi kondenzatora.



Sl. 2. 211. a.

Rešenje:

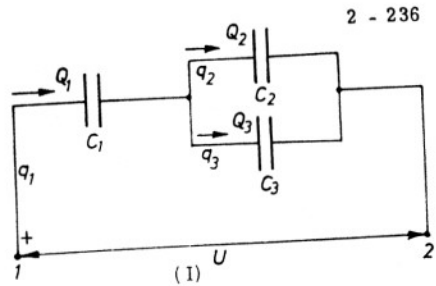
Na Sl. 2. 211. b. (II)

prikazan je ekvivalentni kondenzator. Prema ovoj slici je:

$$U = \frac{q_1}{C_e} \dots \dots \dots (1)$$

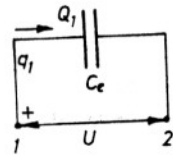
Prema sl. 2. 211. b. (I) je:

$$U = q_1 \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} \right] \dots \dots \dots (2)$$



2 - 236

Sl. 2. 211. b.



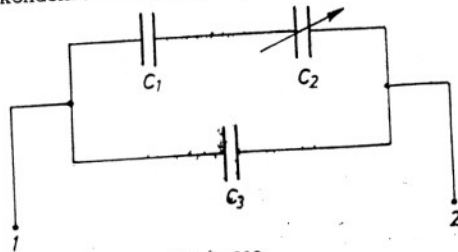
(II)

Upoređujući izraze (1) i (2) zaključuje se da treba da bude

$$C_e = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Prethodni izraz je izveden pod pretpostavkom da su kondenzatori bez početnih opterećenosti.

2. 212. Kondenzatori kapacitvnosti $C_1 = 300 \text{ pF}$, $C_3 = 500 \text{ pF}$ i kondenzator čija se kapacitivnost može menjati od 200 pF do 300 pF vezani su kao na sl. 2. 212.



Sl. 2. 212.

se nalazi u granicama

$$C_{e \min} = 620 \text{ pF},$$

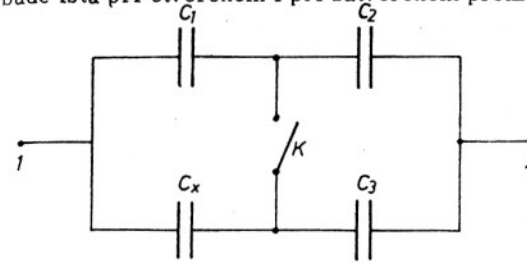
$$C_{e \max} = 650 \text{ pF}.$$

Odrediti u kojim se granicama nalazi ekvivalentna kapacitivnost.

Rezultat:

Ekvivalentna kapacitivnost

2. 213. Kolika treba da bude kapacitivnost C_x tako da ekvivalentna kapacitivnost između tačaka 1 i 2 grupe kondenzatora, prikazane na sl. 2. 213. bude ista pri otvorenom i pri zatvorenom prekidaču K?



Sl. 2. 213.

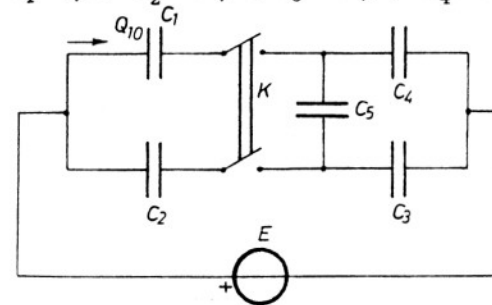
Rezultat:

Potrebno je da bude

$$C_x = \frac{C_1 C_3}{C_2}$$

2. 214. U kolu prikazanom na sl. 2. 214. a. je poznato: $E = 12 \text{ V}$,

$C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 15 \mu\text{F}$, $C_3 = 8 \mu\text{F}$, $C_4 = 16 \mu\text{F}$ i $C_5 = 4 \mu\text{F}$. Početna opterećenost kondenzatora kapacitvnosti



C_1 , pre zatvaranja prekidača K, je $Q_{10} = 7 \mu\text{C}$ prema referentnom smeru označenom na sl. 2. 214. a.

Odrediti rad elektromotorne sile generatora E od trenutka zatvaranja prekidača K do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

Sl. 2. 214. a.

ljanja stacionarnog stanja u kolu.

Rešenje:

Kondenzatori kapacitvnosti C_3 , C_4 i C_5 obrazuju trougao kondenzatora. Pre zatvaranja prekidača K ovi kondenzatori nisu bili opterećeni, pa se trougao kondenzatora može zameniti zvezdom kao na sl. 2. 214. b.

pri čemu su:

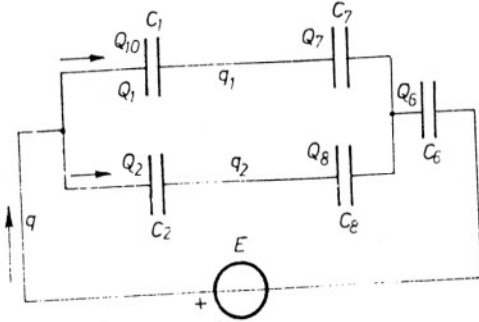
$$C_6 = C_3 + C_4 + \frac{C_3 C_4}{C_5} = 56 \mu\text{F},$$

2 - 233

$$C_7 = C_4 + C_5 + \frac{C_4 C_5}{C_3} = 28 \mu F$$

i

$$C_8 = C_3 + C_5 + \frac{C_3 C_5}{C_4} = 14 \mu F$$



Sl. 2.214. b.

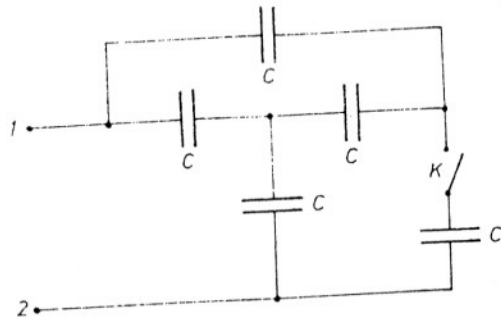
lora pri ovome je:

$$A_E = Eq = 0,96 \text{ mJ}$$

Rešavajući kolo na sl. 2.214. b. za količinu elektriciteta proteklu kroz generator u procesu uspostavljanja novog stacionarnog stanja u kolu se dobije $q = 80 \mu C$.

Rad elektromotorne sile genera

2.215. Odrediti ekvivalentnu kapacitivnost između tačaka 1 i 2 za grupu kondenzatora prikazanu na sl. 2.215. kada je prekidač K:



Sl. 2.215.

ren ekvivalentna kapacitivnost je:

$$C'_{e12} = C$$

1° otvoren i

2° zatvoren.

Rezultat:

1° Kada je prekidač K otvoren ekvivalentna kapacitivnost je:

$$C_{e12} = \frac{3}{5} C$$

2° Kada je prekidač K zatvo-

2.216. Pločasti kondenzator sa vazдушnim dielektrikom, površine elektrode $S = 45,3 \text{ cm}^2$ i rastojanja između elektroda $d = 2 \text{ mm}$ je priključen u kolo, a između njegovih elektroda napon je $U_c = 100 \text{ V}$.

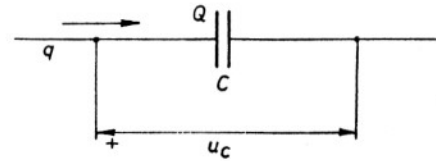
Odrediti rezultantne elektrostatičke sile na elektrode kondenzatora.

Rešenje:

Na sl. 2.216. a. šematski je prikazan posmatrani kondenzator. Pretpostavljajući da se izvrši deformacija kondenzatora, prema zakonu o održanju rada i energije se može pisati

$$u_c dq = dA_F + dW_e$$

U prethodnoj jednačini sa u_c je označen napon između elektroda kondenzatora, a sa dq količina elektriciteta protekla kroz granu sa kondenzatorom u vremenskom intervalu dt pri deformaciji kondenzatora. Sa dA_F označen je elementarni rad elektrostatičkih sila, a sa dW_e elementarni priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora.



Proces deformacije kondenzatora se može obavljati pod raznim okolnostima.

1° U slučaju da se prilikom deformacije kondenzatora napon između elektroda kondenzatora održava kon-

stantnim ($u_c = U_c = C \frac{te}{e}$) iz zakona o održanju rada i energije se može izvesti zakon o radu elektrostatičkih sila.

Priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora, pod ovim okolnostima je

$$dW_e = \frac{1}{2} U_c dq$$

pa je

$$U_c dq = \frac{1}{2} U_c dq + dA_F,$$

odakle je

$$dA_F = \frac{1}{2} U_c dq.$$

Iz prethodnog se zaključuje da se, u ovom slučaju, rad generatora $U_c dq$ uložen u kondenzator podjednako raspodeljuje na rad elektrostatičkih sila i priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora. Stoga se rad elektrostatičkih sila može izračunati iz priraštaja elektrostatičke energije kondenzatora tj.

$$dA_F = dW_e \Big|_{U_c = C \frac{te}{e}}.$$

² U slučaju da se prilikom deformacije kondenzatora opterećenost kondenzatora održava konstantnom ($Q = C \frac{te}{e}$), ima se

$$dq = 0,$$

odnosno

$$U_c dq = 0.$$

Stoga je

$$dA_F + dW_e = 0,$$

pa je, pod ovim okolnostima, zakon o radu elektrostatičkih sila

$$dA_F = - dW_e \Big|_{Q = C \frac{te}{e}}$$

Iz prethodnog se zaključuje da elektrostatičke sile vrše rad na račun elektrostatičke energije kondenzatora.

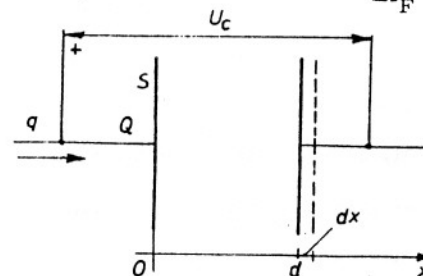
Koristeći se zakonom o radu elektrostatičkih sila mogu se odrediti rezultantne elektrostatičke sile na elektrode kondenzatora.

Kako su elektrode kondenzatora naelektrisanе naelektrisanjima različitog znaka, to je rezultantna sila na svaku elektrodu privlačna i u pravcu x-ose.

Radi određivanja rezultantne sile koja deluje na desnu elektrodu kondenzatora (sl. 2.216. b.) može se zamisliti da se ta elektroda translatorno pomerila za dx u pozitivnom smeru x-ose pri čemu se napon između elektroda održava konstantnim.

Rad elektrostatičke sile je tada:

$$dA_F = F dx.$$



Sl. 2. 216. b.

Priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora usled deformacije, pri rastojanju između elektroda x (sl. 2. 216. b.), je:

$$dW_e = d\left(\frac{1}{2} U_c^2 \frac{\epsilon_0 S}{x}\right) = -\frac{1}{2} U_c^2 \epsilon_0 S \frac{dx}{x^2}.$$

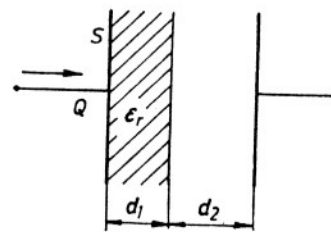
Iz prethodnog je: $F dx = -\frac{1}{2} U_c^2 \epsilon_0 S \frac{dx}{x^2}.$

Pri rastojanju elektroda $x = d$, rezultantna elektrostatička sila je

$$F = -\frac{1}{2} \epsilon_0 S \frac{U_c^2}{d^2} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

Iz prethodnog se zaključuje da je vektor rezultantne elektrostatičke sile suprotan ortu x - ose.

2. 217. Pločasti kondenzator sa vazдушnim dielektrikom je opterećen



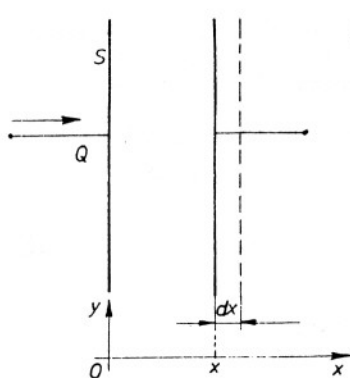
Sl. 2. 217. a.

količinom elektriciteta Q , a zatim izvaden iz kola. Posle toga je uz pozitivno naelektrisanu elektrodu stavljena dielektrična pločica relativne dielektrične konstante ϵ_r , kao na sl. 2. 217. a.

Odrediti odnos elektrostatičkih sila na negativno naelektrisanu elektrodu kondenzatora pre i posle ubacivanja dielektrične pločice.

Rešenje:

Izraz za elektrostatičku silu na elektrodu kondenzatora se ovde, prema zadatku 2.216, može odrediti koristeći zakon o radu elektrostatičkih sila:



Sl. 2.217. b.

Iz prethodnog je:

$$F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

Kada se uz pozitivnu elektrodu ubaci dielektrična pločica i primeni prethodni postupak ima se:

$$dW'_e = d\left[\frac{Q^2}{2}\left(\frac{d_1}{\epsilon_0 r S} + \frac{x-d_1}{\epsilon_0 S}\right)\right] = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} dx,$$

te je

$$F' = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

Upoređujući prethodne rezultate, zaključuje se da je

$$\frac{F}{F'} = 1.$$

2.218. Odrediti rad koji je potrebno izvršiti da bi se rastojanje između elektroda pločastog kondenzatora, kapacitivnosti C, povećalo dva puta, kada je:

1° Kondenzator pri deformaciji priključen na stalni napon U.

2° Kondenzator priključen na stalni napon U, a pre deformacije odvojen od generatora.

Rešenje:

1° Da bi se razmak između elektroda kondenzatora povećao dva puta potrebno je da na elektrode kondenzatora deluju spoljašnje sile. Rad spoljašnjih sila, A_{F_S} , i rad elektrostatičkih sila, A_F , su isti po količini, a suprotnog znaka:

$$A_{F_S} = -A_F.$$

Rad elektrostatičkih sila je u ovom slučaju:

$$A_F = \Delta W_e = -\frac{1}{4} CU^2,$$

pa je rad spoljašnjih sila

$$A_{F_S} = \frac{1}{4} CU^2.$$

2° Rad elektrostatičkih sila pod ovim okolnostima je

$$A_F = -\Delta W_e,$$

pa je rad spoljašnjih sila:

$$A_{F_S} = \frac{1}{2} CU^2.$$

2.219. Kondenzatoru sa vazдушnim dielektrikom može se, obrtanjem ploča, menjati kapacitivnost od $C_{\min} = 100 \text{ pF}$ do $C_{\max} = 500 \text{ pF}$. Pri maksimalnoj kapacitivnosti ovaj kondenzator je priključen na stalni napon $U = 20 \text{ V}$. Kada je kondenzator opterećen, odvojen je od izvora i obrtanjem

ploča doveden na minimalnu kapacitivnost. Odrediti rad A_{F_s} koji su izvršile spoljašnje sile pri obrtanju ploča kondenzatora.

Rešenje:

Kako su spoljašnje sile izvršile rad savladjujući elektrostatičke sile, to je:

$$A_{F_s} = -A_F$$

pa je (prema zadatku 2. 216):

$$A_{F_s} = \Delta W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\min}} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\max}}$$

odnosno:

$$A_{F_s} = \frac{1}{2} C_{\max} U^2 \left(\frac{C_{\max}}{C_{\min}} - 1 \right) = 0,4 \mu J.$$

2. 220. Pločasti kondenzator kapacitivnosti C ima dielektrik relativne dielektrične konstante ϵ_r . Koliki rad treba izvršiti da bi se dielektrik izvukao iz kondenzatora kada je:

1^o Kondenzator za vreme izvlačenja dielektrika priključen na stalan napon U , i

2^o Kondenzator pre izvlačenja dielektrika bio priključen na stalan napon U , a za vreme izvlačenja dielektrika odvojen od izvora?

Rezultat:

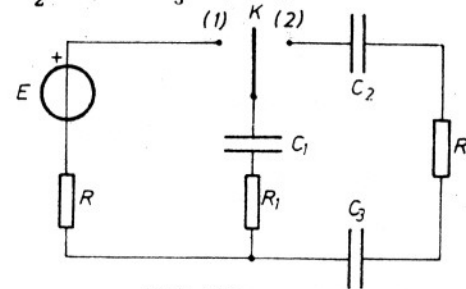
1^o Rad koji su izvršile spoljašnje sile pri izvlačenju dielektrika je:

$$A_{F_s} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} CU^2.$$

2^o Rad spoljašnjih sila pri izvlačenju dielektrika iz kondenzatora pod ovim okolnostima je:

$$A_{F_s} = \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) CU^2$$

2. 221. Tri neopterećena kondenzatora, kapacitivnosti $C_1 = 1 \mu F$, $C_2 = 2 \mu F$ i $C_3 = 1 \mu F$ i generator elektromotorne sile $E = 10V$, vezani su kao



Sl. 2. 221. a.

na slici 2. 221. a. Preklopnik K se prvo stavi u položaj (1), pa po dostignutom stacionarnom stanju u položaj (2). Uzimajući u obzir samo pretvaranje električnog rada u toplotu usled Džulovog efekta i elek-

trostatičku energiju, odrediti električni rad pretvoren u toplotu u toku uspostavljanja pojedinih stacionarnih stanja u kolu.

Rešenje:

Posmatrajući dva uzastopna stacionarna stanja i prelazno stanje u kolu između njih, po zakonu o održanju rada i energije, uz pretpostavke iz teksta zadatka, ima se:

$$A_G + W_{e0} = A_J + W_{e1}$$

odnosno

$$A_G = A_J + \Delta W_e$$

Pri ovome su: A_G rad svih generatora u toku promene stacionarnog stanja u kolu;

A_J rad pretvoren u toplotu u toku prelaznog stanja u kolu;

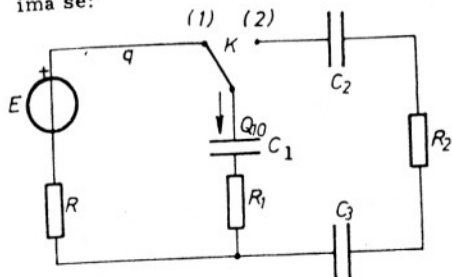
$\Delta W_e = W_{e1} - W_{e0}$ priraštaj celokupne elektrostatičke energije u kolu.

Iz prethodne jednačine je:

$$A_J = A_G - \Delta W_e$$

Posmatrajući kolo sa sl. 2. 221. b. (prvo stacionarno stanje u kolu)

ima se:



Sl. 2. 221. b.

$$q = C_1 E = 10 \mu\text{C}$$

$$Q_{10} = q = 10 \mu\text{C}.$$

Rad generatora u prelaznom stanju je:

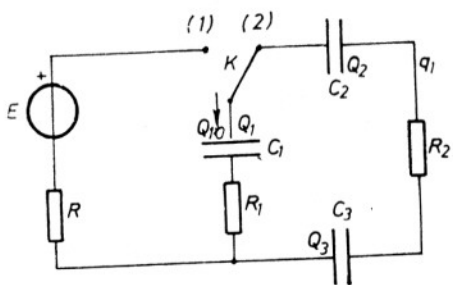
$$A_G = Eq = 100 \mu\text{J}.$$

Kondenzator kapacitvnosti C_1 je bio bez početne opterećenosti, pa je:

$$\Delta W_e = W'_e = W_{e1} = \frac{1}{2} C_1 E^2 = 50 \mu\text{J}.$$

Električni rad pretvoren u toplotu u ovom prelaznom stanju je:

$$A_J = 50 \mu\text{J}.$$



Sl. 2. 221. c.

Za slučaj kada je preklopnik K u položaju (2), sl. 2. 221. c., je:

$$q_1 = \frac{-\frac{Q_{10}}{C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = -4 \mu\text{C}.$$

Krajnje opterećenosti kondenzatora su

$$Q_1 = Q_{10} + q_1 = 6 \mu\text{C},$$

$$Q_2 = q_1 = -4 \mu\text{C}$$

$$Q_3 = q_1 = -4 \mu\text{C}.$$

Ukupna elektrostatička energija u kolu je:

$$W'_e = W'_{e1} + W_{e2} + W_{e3} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{Q_3^2}{C_3} = 30 \mu\text{J}.$$

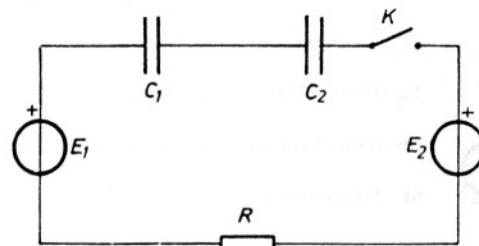
Priraštaj elektrostatičke energije je:

$$\Delta W'_e = W''_e - W'_e = -20 \mu\text{J}.$$

U toku ovog prelaznog stanja generator je bio isključen iz kola, pa je rad pretvoren u toplotu:

$$A'_J = -\Delta W'_e = 20 \mu\text{J}.$$

2. 222. Kondenzatori kapacitvnosti $C_1 = 2 \mu\text{F}$ i $C_2 = 3 \mu\text{F}$, bez početnih opterećenosti, generatori elektromotorne sile $E_1 = 10\text{V}$ i $E_2 = 5\text{V}$ i otpornik otpornosti R su vezani kao na sl. 2. 222. a.



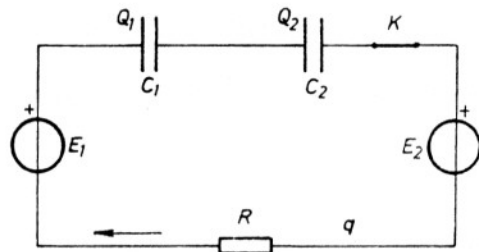
Sl. 2. 222. a.

Odrediti električni rad pretvoren u toplotu od trenutka zatvaranja prekidača K do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

Rešenje:

Količina elektriciteta protekla kroz kolo do uspostavljanja stacionarnog stanja, slika 2. 222. b. je:

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (E_1 - E_2) = 6 \mu\text{C}.$$



Sl. 2. 222. b.

Rad generatora u prelaznom stanju je:

$$A_{G1} = E_1 q - E_2 q = 30 \mu\text{J}.$$

Elektrostatička energija kondenzatora u stacionarnom stanju je:

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = 15 \mu\text{J},$$

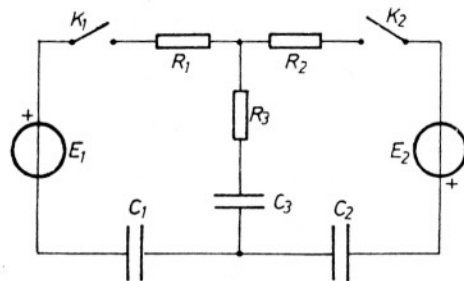
jer je

$$Q_1 = q \quad \text{i} \quad Q_2 = q.$$

Električni rad pretvoren u toplotu je:

$$A_J = A_G - W_e = 15 \mu\text{J}.$$

2. 223. Za kolo prikazano na sl. 2. 223 je poznato: $C_1 = 100 \text{ pF}$,



Sl. 2. 223.

$C_2 = 200 \text{ pF}$, $C_3 = 100 \text{ pF}$, $E_1 = 100 \text{ V}$,

$E_2 = 150 \text{ V}$. Kada su prekidači K_1 i K_2

otvoreni kondenzatori su neoptereće

ni. Prvo se zatvori prekidač K_1 , pa

po uspostavljenom stacionarnom sta-

nju u kolu i prekidač K_2 .

Određiti električni rad pretvo-

ren u toplotu od trenutka zatvaranja prekidača K_2 do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu.

Rezultat:

Rad pretvoren u toplotu posle zatvaranja prekidača K_2 je:

$$A_J = 2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$